Analytische Untersuchungen

über

die Zuverläßigkeit,

mit welcher ein Landmesser

vermittelst verschiedener Geometer-Werkzeuge

Winkel und Linien

abmessen kann,

von

Johann Leonhard Späth,

Prof. der Mathematik und Physik in Altdorf und Mitglied der Chur-Maynzischen Akademie der Wissenschaften.

Mit Kupfern.

Altdorf und Nürnberg,

im Verlag der Monathischen Buchhandlungen.

1789.

Vorbericht.

Die Theorie der Fehler hat sich heut zu Tage, bey dem Wachsthum und Verfeinerung der Wissenschaften, so unumgänglich nothwendig gemacht, daß es einem Geographen sowohl, als einem jeden Landmesser, der sich über die Classe handwerksmäßiger Feldmesser hinauszusetzen dünkt, wirklich ein unverzeihlicher Fehler seyn würde, derselben gänzlich unkundig erfunden zu werden.

Fehler bey geometrischen Abmessungen gänzlich zu vermeiden, ist eine Sache, die niemals in unsern Kräften stehet: Fehlen gehört zum Element des Menschen; aber Fehler, die einer jeden unserer Handlungen gleichsam eigen sind, in die Classe des Minimi zu versetzen, ist die Pflicht und das Bestreben eines Mannes, der mit Verstand und Ueberlegung arbeitet.

Die Beschäftigung des Landmessers ist, im Grunde betrachtet, eine bloße Triangularmessung: er misset Seiten und Winkel an denselben, je nachdem es die Umstände erfordern: aber bey diesem Geschäfte lehret ihn die Erfahrung, daß er, selbst auf der schönsten Ebene, keine gerade Linie ohne allen Fehler abmessen kann, und in Aufnehmung der Winkel setzet ihm die Natur selbst Gränzen, die er nicht überschreiten kann. Denn wenn ich auch voraussetze, daß alle zu seinem Geschäfte erforderliche theoretische Kenntnisse in ihm gleichsam concentrirt wären, so sind doch eine mehr oder mindere Schärfe der Augen und Sinne, eine gewiße gleichsam angebohrne oder angewohnte, fast wollte ich sagen, Ungeschicklichkeit in Behandlung der Meßwerkzeuge, während der Abmessungen, Ursachen genug, ihm das Fehlen als ein unvermeidliches Uebel eigen zu machen; wenn ich auch nichts gedenke von den Fehlern der Werkzeuge selbst, die, wenn sie auch von der Hand eines Künstlers verfertiget sind, der von ihren zu leistenden praestandis bis in die innersten Details genaue Kenntnis hat, und sie nach denselben zu construiren weiß, niemals vor kleinen Fehlern sicher stellen, und gänzlich abstrahiren wollte von den Fehlern, welche einige physicalische Eigenschaften des Lichts zum Grunde haben.

Bey so bewandten Umständen wird demnach ein auf einer Ebene geometrisch aufgezeichnetes Triangular-Netz niemals mathematisch genau mit der wahren Lage der Orte und Gegenstände auf dem abgemessenen Terrain übereinkommen, es wird sich jederzeit einiger Unterschied vorfinden: dieser Unterschied aber steht im Verhältnis der Fehler, die bey der Vermessung vorgefallen sind, und ist der untrügliche Iudex, dem Landmesser den Grad der Genauigkeit anzuzeigen, den er seiner Geschicklichkeit, seinem Fleise und seinen Meßwerkzeugen abfordern darf.

Dieser Grad der Genauigkeit aber, der einem jeden Landmesser eigen ist, mus bey einer jeden Vermessung der erste Hauptgegenstand bleiben: der Landmesser mus durch Hülfe desselben seinen ganzen Plan detailliren, und nur solche Orte und Standpuncte unter einander verbinden, bey denen die Folgen solcher Fehler, die sowohl in Messung der Linien als Visierung der Winkel sich hiebey unvermeidlich machen, die kleinsten Werthe bekommen. Wie zeitsplitterig und ermüdend aber dergleichen Berechnungen ausfallen müssen, ist denen wohl bekannt, die in dergleichen Geschäften gearbeitet haben: es ist wirklich keine Kleinigkeit, in manchen Fällen, besonders bey Vermessungen die sehr ins Große gehen, öfters einige tausend Dreyecke zu berechnen, unter einander zu vergleichen, und aus einem

sich

sich millionenmal durchkreuzenden Gewebe von Linien nur die tauglichsten herauszusuchen.

Schon zu Anfang dieses Jahrhunderts suchte Robert Cotes diese Arbeit zu erleichtern, indem er die Folgen, die Fehler, welche in Abmessung einiger Stücke eines Dreyecks begangen worden, auf andere Stücke desselben haben möchten, synthetisch erwies: Marinoni folgte seinem Beyspiele. Herr Lambert und Herr Hofrath Kästner brachten die Theorie von den Folgen der Fehler in einzelnen Dreyecken, zu mehrerer Leichtigkeit und Bequemlichkeit auf analytische Formeln, und Herr Hofrath J. T. Mayer verschafte diesen Formeln die möglichste Kürze durch Differentiation logarithmischer Grössen.

Durch zweckmäßige Anwendung dieser Formeln wird nun zwar der Landmesser in den Stand gesezt, auf eine leichte und einfache Weise von den Folgen der Fehler, in Rücksicht auf eine der Seiten eines Dreyecks sich zu überzeugen; allein der Gebrauch derselben sezt voraus, „daß der Landmesser den jedesmaligen Werth der Differential-Größen dC, dc, welche in jeder dieser Differential-Gleichungen anzutreffen sind, in jedem vorkommenden Falle anzugeben wisse.“ Es zeiget aber der Ausdruck dC einen gewißen kleinen Bogen an, auf welchen der Landmesser in Abmessung eines Bogens, dessen Grösse C bezeichnet, in Rücksicht auf die wahre Größe desselben, in jedem Falle gewiß bleibt; er vertritt also die äußerste Gränze, zwischen welche alle Fehler, welche ihm bey Abmessung des Winkels C zu begehen möglich sind, hineinfallen müssen: dc aber zeigt eben so einen gewißen Theil einer Linie an, deren Länge c sey, auf welchen man in Ansehung der wahren Länge dieser Linie gewiß ist.

Diese Werthe aber für jeden sich ereignenden Fall anzugeben, ist nicht die Sache eines jeden Landmessers; es sezt mehr als superficielle Kenntniß in der Geometrie voraus: indem hiezu nicht nur eine genaue Kenntniß der äußern sowohl als innersten Bestandtheile der Meßwerkzeuge selbst, sondern noch überdas die strengste Kritik jeder einzeln mit demselben vorgenommenen Operation erfordert wird.

Ich habe, was die Construction der Werkzeuge des Landmessers anbetrift, Gelegenheit gehabt, mir ziemliche Kenntniß in dem Branderschen Laboratorio in Augsburg, und eine gute Praxis auf dem Felde zu erwerben. Ich wurde bey wichtigen Messungen gebraucht, und kam einigemal in die Lage, daß ich ein Urtheil über die Messungsmethode zweener Landmesser, welche mit verschiedenen Werkzeugen einerley Terrain abgemessen hatten, fällen sollte. Alles kam hiebey darauf an, außer der Gesichtsschärfe beyder Landmesser, auch noch die Eigenschaften der Werkzeuge zu kennen, deren sie sich bedient hatten, um aus denselben die äußersten Gränzen zu bestimmen, zwischen welche die Fehler, die ein jeder, auch bey der Anwendung alles Fleißes, Vorsicht und Geschicklichkeit, nicht vermeiden kann, hineinfallen möchten, um aus der Vergleichung derselben ein Urtheil fällen zu können.

Vergebens suchte ich in dieser Lage in Büchern über die practische Geometrie nach; ich fand nichts, woran ich mich halten sollte, um die äußersten Gränzen der bey Abmessung eines Winkels und einer Linie möglichen Fehler anzugeben, von welchem doch der jedesmalige Werth der Quasi-Differentiale dC und dc abhängt; es blieb mir also nichts anders übrig, als selbst darüber nachzudenken, und allgemeine Regeln auszufinden, nach welchen man in jedem vorkommenden Falle den jedesmaligen Werth von dC, dc ausfindig machen könnte, wenn die Winkel mit dem Scheiben-Instrument gemessen worden sind. Ich gieng nachher weiter und entschloß mich, eben dergleichen Regeln auch für alle mögliche oder wenigstens bisher gewöhnliche geometrische Instrumente zu bearbeiten; doch wählte ich unter denselben, insbesondere wegen seines vorzüglichen Gebrauchs, die Winkelscheibe und den sogenannten Meßtisch aus, und hielte mich eben deswegen bey denselben etwas länger auf.

Ich nahm an, der Winkelmesser habe auf der Ebene seines Limbi eine 90 und 96 Theilung; an einem Ende der über demselben sich um das Centrum drehenden Regel (Alhidade) seyen Nonius-Abtheilungen für diese 90 und 96 Theilung und eine Schraubenmutter angebracht, in welcher eine Mikrometer-

Schrau-

Schraube gehet, um nach den Gängen derselben Theile eines Grades messen zu können.

In der nemlichen Absicht, um diese Untersuchungen allgemein, und für jeden vorkommenden Fall brauchbar zu machen, wählte ich ferner einen der verwickeltsten Fälle, um andere einfachere daraus herleiten zu können; ich setze nemlich im §. 2. I. Abschnitt folgendes.

„Es seyen auf dem Felde zwey Gegenstände in ungleichen und unter einander negativen Lagen gegen den Horizont. An einem gewißen Orte soll der Neigungswinkel gemessen werden, unter welchem beyde sich durch diesen Ort nach beyden Gegenständen verlängerte Vertical-Ebenen einander schneiden, mit einem Winkelmesser, dessen Ebene nach vollendeter Eintheilung an einigen Orten merklich gekrümmt worden; der Gang der Alhidade ist nicht mehr concentrisch mit beyden Theilrissen auf dem Limbo; die Bewegungs-Ebene des Fernrohrs ist nicht senkrecht auf der Fläche des ganzen Winkelmessers; und die Gänge der Mikrometerschraube sind einander nicht gleich.„

Ich zeige nun fürs erste, wie man dem ohngeachtet das wahre Maas des mit diesem Winkelmesser abgemessenen Winkels so genau als möglich ausfindig machen könne, und untersuche sodann auch den Grad der Zuverläßigkeit in Ansehung der wahren Größe dieses Winkels; das heißt, ich suche die äußerste Gränze der Fehler auf, die, ohnerachtet alles angewandten Fleises und Geschicklichkeit bey Abmessung des Winkels C vorfallen können; kurz, ich suche den möglichst größten Werth von dC.

Von diesen Untersuchungen gehe ich sodann aus, und mache eine Anwendung auf die Bestimmung des Werths von dC, wenn der Winkel C auf dem Papier abgemessen wird. Eben dergleichen Untersuchungen stelle ich auch nachher über andere Meßwerkzeuge an.

Bey dem Gebrauche des Meßtisches nehme ich erstlich an, der Winkel C solle durch zwey dioptrische Absehen visieret, und an der Schärfe der Regel die Linie gezogen werden, die Absehungslinie der einen, und der ausgespannte Faden der andern Dio-

Diopter aber stehen nicht senkrecht auf diese Schärfe, sondern machen mit der Ebene der Regel beyde einen Winkel nach einander entgegen gesezten Richtungen. Ich zeige also erstlich, um wie viel sich hiedurch der Bogen zwischen beyden Linien, welche deu Winkel C formiren, ändert, und untersuche sodann auch den Grad der Genauigkeit in Ansehung der wahren Richtung beyder auf der Ebene des Meßtisches gezogenen Linien.

Eben dergleichen Untersuchungen stelle ich nachher auch an, wenn der Winkel ACB, vermittelst einer Meßregel, die mit einem Fernrohr, das auf und nieder beweglich ist, auf die Ebene des Meßtisches aufgezeichnet wird.

Nicht minder habe ich mich bemühet, auch die äußerste Gränze der Fehler aufzusuchen, welche einem Landmesser zu begehen möglich sind, im Fall er sich der Magnetnadel, des Branderschen Goniometers, des dioptrischen Sectors, Tubi Campi Amplissimi, des Spiegel-Sextanten, Octanten und Engymeters eben dieses Künstlers bedienen sollte. Auch fügte ich noch ähnliche Untersuchungen bey über das catoptrische Instrument des Herrn Tobias Mayer, Hadleys Spiegel-Octant, Herrn Höschels catoptrischen Zirkel und über Pacenos Pantometer.

Was die Untersuchung des Werths von dc anbetrift, so wähle auch hier einen der verwickeltsten Fälle, um einfache aus demselben herleiten zu können. Ich zeige nemlich in dem zweyten Abschnitte, auf was Art man sich von dem wahren Horizontal-Abstand zweyer entfernter Gegenstände überzeugen müsse, wenn zwischen denselben ohngefähr in der Vertical-Ebene durch beyde eine Linie gemessen wird, über ein Terrain, dessen Ebene bald über und unter sich, auch zur Seite rechts und links geneigt ist, und weise sodann auch die Berechnung des Grades der Genauigkeit, in Ansehung der wahren Länge einer Linie, in Anwendung auf eine von Herrn Peter von Osterwald zwischen München und Dachau abgemessenen Grundlinie.

Wer dasjenige, was ich in dem ersten und zweyten Abschnitte dieser Betrachtungen über den Werth von dC, dc gesagt habe, gehörig verstanden hat, der wird sodann den Gang der Rechnung bey Auflösung aller von Herrn Hofrath Mayer in dem zweyten Theile der practischen Geometrie von §. 205. bis §. 214. angezeigten Differential-Formeln leichtlich einsehen, und dieselbe mit Nutzen gebrauchen können.

In dem dritten Abschnitte construire ich diese nemlichen Formeln, leite aber dieselbe aus andern Quellen her: bereichere dieselben auch mit einigen neuen Differential-Formeln, nach welchen man berechnen kann, um wie viel sich ein Winkel in einem Dreyecke ändert, wenn einige Stücke in demselben, durch welche seine Größe bestimmt wird, etwas irrig gemessen worden wären; und mache hievon sogleich eine Anwendung auf jenes sehr schöne Problem aus dem bekannten Abstand dreyer auf dem Felde gelegenen Gegenstände die Lage eines vierten Orts zu finden, von welchem man alle drey Gegenstände übersehen kann.

Noch habe ich einiges zu sagen über die im dritten Abschnitt beygefügte Formeln, nach welchen man die Fläche der Dreyecke und einiger Gattungen der Vierecke nicht nur berechnen, sondern auch die Folgen angeben kann, welche Fehler, die in Abmessung einiger Stücke der Drey- und Vierecke begangen werden, auf die Grundfläche derselben haben müssen.

Es ist, wenn man auch nur einigermaßen auf den Gang der Sache hiebey Acht haben will, leicht einzusehen, daß der Landmesser, wenn er sich auch von der Größe des Werths dC, dc in jedem Falle überzeugt, und denselben in die von §. 2. bis §. 7. angesezte Formeln substituirt hat, demohngeachtet für die Fläche des Dreyecks noch nichts gewonnen habe: er weiß nur so viel, daß eine Seite oder ein Winkel um einen Theil sich ändert, wenn einige Stücke des Dreyecks, durch welche dieselbe bestimmt werden, etwas fehlerhaft gemessen worden sind; aber in wieferne diese in einigen abgemessenen Stücken des Dreyecks begangene Fehler Einfluß auf die Grundfläche des Dreyecks haben mögen, kann er sich nur durch wiederhohlte Berechnung der Fläche desselben überzeugen, wo er Seiten und Winkel jederzeit um einen gewißen Theil, für welchen er in Abmessung der wahren Größe derselben nicht stehen kann, wachsen oder abnehmen lassen mus. Ob schon diese Berechnung jederzeit sehr ausgedehnt und ermüdend seyn wird, so bleibet demohngeachtet die Erforschung der Superficial-Fläche bey Cameral-Abmessungen die Absicht des Landesherrns sowohl, als des Bürgers und Bauern, der seine Flur geometrisch aufnehmen läßt: ein jeder will wissen, was ihm zugehöret, und jeder kann mit Recht von dem Landmesser verlangen, auf den wie vielsten Theil des Ganzen er ihn von dem, was er wirklich besizt, überzeugen kann.

Hier bey Beantwortung dieser Frage ist der Platz, wo sich der handwerksmäßige Feldmesser in seiner wahren Blöße zeiget: er weiß in den wenigsten Fällen auf dieses zu antworten, und der geschickte und erfahrne Landmesser geräth anf ein unübersehbares Feld von Rechnungen, wenn er bey Abmessung eines Terrains den möglichst kleinsten Fehler, den er nicht vermeiden und den möglichst größten, den er in Rücksicht auf die abgemessene Fläche desselben begehen kann, angeben soll. Ich habe mich in Büchern, welche die practische Geometrie abhandeln, ziemlich umgesehen, aber niemals ein einziges Stück über diesen leztern Gegenstand angetroffen; nur in Herrn Prof. Pickels, zu Eichstädt, Abhandlung von Wald-Vermessungen fand ich einige Spuren. Dieser geschickte Theoretiker und erfahrne Practiker konnte sich bey dieser Gelegenheit über diesen Gegenstand nicht in weitere Untersuchungen einlassen, um dem größten Theile seiner Leser nicht unverständlich zu werden, für welche diese Regeln zu Wald-Vermessungen geschrieben waren. Für meinen gegenwärtigen Plan aber schien mir dieser Gegenstand allzuwichtig, als daß ich mich nicht hätte bemühen sollen, diese Lücke in unserer practischen Geometrie auszufüllen. Alles kam meiner Meynung nach nur darauf an, Formeln zu construiren, nach welchen man aus einigen gemessenen Stücken an einem Dreyecke, die Flächen dieses Dreyecks selbst bestimmen kann. Sind diese Formeln in unserer Gewalt, so giebt nachher der Differential-Calcul Gelegenheit an die Hand, Differential-Verhältnisse in denselben aufzusuchen, und den Grad der Genauigkeit in Rücksicht auf die abgemessene Grundfläche

des

des Dreyecks anzugeben. Auf diese Weise sind die von §. 1. bis §. 10. angesezte Flächen und Flächen-Differential-Formeln entstanden.

Dieses wäre nun also der Inhalt dieser analytischen Betrachtungen über den Grad der Zuverläßigkeit bey geometrischen Abmessungen. Ich habe mich in denselben bey Behandlung der vorkommenden Materien der äußersten Kürze beflissen: weil ich einen Leser voraussetze, der aus Erfahrung oder aus Büchern weiß, was es heiße, Winkel und Linien messen, übrigens auch einige Kenntniß in der sphärischen Trigonometrie und Analysis haben mus. Ein Landmesser, der sich diese Kenntnisse bereits erworben hat, wird diese Untersuchungen jederzeit zu seinem Gebrauche sehr vortheilhaft finden: weil er in denselben eine Sammlung von Formeln antreffen wird, deren Anwendung alltäglich in seinem Geschäfte vorkommt. Ein solcher Mann wird auch leichtlich von selbst die Vortheile ausfindig zu machen wissen, welche ihm bey dem Gebrauche dieser Formeln die Construction einer Tabelle für dieselbe gewähren kann; ohne daß ich nöthig haben werde, hier die Mittel und Wege hiezu anzuzeigen. Aus dem nemlichen Grunde habe ich auch in diesen Betrachtungen solche Fälle vermieden, in welchen eine Reihe von an einander hängenden Dreyecken vorkommt; dergleichen Fälle machen einen Schwulst von Rechnungen auf dem Papier aus, welchen ein erfahrner Mann durch Construction dieser Tabellen und Anwendungen vieler Vortheile, welche ihm die Theorie und die Uebung an Handen giebt, in den meisten Fällen entgehen kann.

Uebrigens habe für gut befunden, alle in diesen Betrachtungen vorkommende Formeln nach dem Radio 1. zu reguliren, und einige trigonometrische und analytische Formeln, welche ich bey Construction einiger derselben zum Grunde gelegt habe, voranzuschicken, um den Gang der Rechnung selbst nicht durch häufige dazwischen fallende Sätze zu unterbrechen.

Inhalt.

Vorangeschickte Sätze.

Erster Abschnitt.

B. For-

Ver-

Zweyter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

L. I.

Trigonometrische Formeln.

1) $\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{\cos\varphi}{\cot\varphi}$. 2) $d.\,\mathrm{Sin}\,\varphi = d\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi$. 3) $d.\log\mathrm{Sin}\,\varphi = d\varphi\,\mathrm{Cot}\,\varphi$.

4) $\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{tang}\,\varphi} = \sqrt{(1 - \mathrm{Sin}\,\varphi^2)}$. 5) $d.\,\mathrm{Cos}\,\varphi = -\,d\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi$.

6) $d.\log\mathrm{Cos}\,\varphi = -\,d\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi$.

7) $\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \frac{1}{\cot\varphi}$. 8) $d.\,\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$.

9) $d\log\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{2\,d\varphi}{\mathrm{Sin}\,2\varphi}$.

10) $\mathrm{Cot}\,\varphi = \frac{\cos\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \frac{1}{\mathrm{tang}\,\varphi}$. 11) $d.\,\mathrm{Cot}\,\varphi = -\frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^2}$.

12) $d\log\mathrm{Cot}\,\varphi = -\frac{2\,d\varphi}{\mathrm{Sin}\,2\varphi}$.

13) $\mathrm{Sin}\,(\varphi \pm \psi) = \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\psi \pm \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\psi$.

14) $\mathrm{Cos}\,(\varphi \pm \psi) = \mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\psi \pm \mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\psi$.

15) $\mathrm{Tang}\,(\varphi \pm \psi) = \frac{\mathrm{Cot}\,\psi \pm \cot\varphi}{\mathrm{Cot}\,\varphi\,\mathrm{Cot}\,\psi + 1}$.

16) $\mathrm{Cot}(\varphi \pm \psi) = \frac{\mathrm{Cot}\,\varphi \,.\, \mathrm{Cot}\,\psi \mp 1}{\mathrm{Cot}\,\psi \pm \mathrm{Cot}\,\varphi}.$

17) $\mathrm{Sin}\,\varphi\;\mathrm{Cos}\,\psi = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}\mathrm{Sin}(\varphi - \psi)$

18) $\mathrm{Sin}\,\varphi\;\mathrm{Sin}\,\psi = \frac{1}{2}\mathrm{Cos}(\varphi - \psi) - \frac{1}{2}\mathrm{Cos}(\varphi + \psi)$

19) $\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Cos}\,\psi = \frac{1}{2}\mathrm{Cos}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}(\varphi - \psi)$

20) $\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\psi = 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{(\varphi - \psi)}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{(\varphi + \psi)}{2}$

21) $\mathrm{tang}\,\varphi + \mathrm{tang}\,\psi = \frac{\mathrm{Sin}(\varphi \pm \psi)}{\mathrm{Cos}\,\varphi\;\mathrm{Cos}\,\psi}.$

22) $\mathrm{Cot}\,\varphi \pm \mathrm{Cot}\,\psi = \frac{\mathrm{Sin}(\psi \pm \varphi)}{\mathrm{Sin}\,\varphi\;\mathrm{Sin}\,\psi}.$

23) $\frac{1 - \mathrm{tang}\,\psi}{1 + \mathrm{tang}\,\psi} = 45^\circ - \psi.$

24) $2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi\;\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi.$

25) $2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi^2 = 1 - \cos\varphi.$

L. II.

Formeln für sphärisch = schiefe Dreyecke.

Es bezeichnen die Buchstaben A, B, C die Winkel eines Kugel=Dreyeckes, und a, b, c die diesen Winkeln entgegenstehende Seiten desselben, so ist einmal,

1. wenn gegeben alle 3 Seiten, und ein Winkel gesucht wird,

$$\mathrm{Cos}\,A = \frac{\mathrm{Cos}\,a - \mathrm{Cos}\,b\;\mathrm{Cos}\,c}{\mathrm{Sin}\,b\;\mathrm{Sin}\,c}$$

2. Wenn

2. Wenn 3 Winkel gegeben, und eine Seite gesucht wird,

$$\text{Cos a} = \frac{\text{Cos A} + \text{Cos B Cos C}}{\text{Sin B Sin C}}.$$

3. Wenn 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, die übrige Seite zu finden,

$$\text{Cos a} = \text{Cos A Sin b Sin c} + \text{Cos b Cos c}.$$

4. Bey den nemlichen Datis einen Winkel zu finden,

$$\text{tang B} = \frac{\text{Sin A tang b}}{\text{Sin c} - \text{tang b cos c Cos A}}.$$

5. Aus zweyen Seiten, und einem Winkel, welcher einer der Seiten entgegensteht, den andern zu finden, der der einen Seite gegenüber liegt,

$$\text{Sin B} = \frac{\text{Sin A . Sin b}}{\text{Sin a}}.$$

6. Unter den nemlichen Datis den Winkel zu finden, welcher zwischen beyde gegebene Seiten eingeschlossen ist,

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ C} = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (a - b)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (a + b)} \cdot \text{Cot } \tfrac{1}{2} (A + B).$$

7. Bey den nemlichen gegebenen Stücken die dritte Seite zu finden,

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ c} = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} (A + B)}{\text{Sin } \frac{1}{2} (A - B)} \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2} (a - b).$$

8. Wenn zwey Winkel, und die eingeschlossene Seite gegeben, den dritten Winkel zu finden,

$$\text{Cos C} = \text{cos c Sin A Sin B} - \text{cos A cos B}.$$

9. Bey den nemlichen Datis eine Seite zu finden,

$$\text{tang b} = \frac{\text{Sin c tang B}}{\text{Cos c Cos A tang B} + \text{Sin A}}.$$

10. Unter folgenden Datis eine Seite zu finden, die einem gegebenen Winkel entgegen stehet, wenn 2 Winkel und eine Seite gegeben, die einem Winkel gegenüber stehet,

$$\text{Sin } b = \frac{\text{Sin } a \text{ Sin } B}{\text{Sin } A}.$$

11. Bey den nemlichen Umständen eine Seite zu finden, die an einem gegebenen Winkel anliegt,

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{Sin } \frac{1}{2}(A-B)} \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2}(a-b).$$

12. Wenn gegeben zwey Winkel und eine Seite, die einem gegebenen Winkel gegenüber stehet, den dritten Winkel zu finden,

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin } \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \text{cot } \tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\text{Sin } b = \frac{\text{Sin } a \,.\, \text{Sin } B}{\text{Sin } A.}$$

L. III.

Formeln für rechtwinklichte Kugel-Dreyecke.

Wenn in Fig. 11. der Winkel A ein rechter ist, alles übrige aber wie zuvor bleibt, so ist

1. $\text{Sin } b = \text{Sin } a \text{ Sin } B.$
2. $\text{tang } b = \text{tang } B \,.\, \text{Sin } c.$
3. $\text{Cos } a = \text{Cos } c \text{ cos } b.$
4. $\text{Cos } B = \text{Cos } b \text{ Sin } C.$
5. $\text{Cos } a = \text{Cos } B \text{ cot } c.$
6. $\text{Cot } B = \text{Cot } b \text{ Sin } c.$

7. $\text{Cot } B = \text{Cos } a \,.\, \text{tang } C.$

8. $\text{tang } c = \text{tang } a \,.\, \text{Cos } B.$

9. $\text{Cot } C = \cos a \,.\, \text{tang } B.$

L. IV.

Analytische Formeln, welche bey diesen Betrachtungen zum Grunde gelegt worden.

A.

Wenn P eine Function von x, also z. E. $P = ax^m + bx^n + cx^r$ ist, so wird P um eine Größe ΔP abnehmen, wenn x um eine Größe Δx abnimmt, und so auch umgekehrt. Im leztern Fall würde

$$P + \Delta P = a(x+\Delta x)^m + b(x+\Delta x)^n + c(x+\Delta x)^r.$$

Diese Größen, nach dem Newtonischen Binomio entwickelt, geben für $P + \Delta P$ folgende Werthe:

$$P + \Delta P = \left.\begin{matrix} ax^m + max^{m-1} \\ bx^n + nbx^{n-1} \\ cx^r + rcx^{r-1} \end{matrix}\right\} \Delta x + \left.\begin{matrix} m.(m-1)ax^{m-2} \\ n.(n-1)bx^{n-2} \\ r.(r-1)cx^{r-2} \end{matrix}\right\} \Delta x^2 + \text{etc.}$$

mithin ist auch

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \left.\begin{matrix} max^{m-1} \\ + nbx^{n-1} \\ + rcx^{r-1} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} m.(m-1)ax^{m-2} \\ + n.(n-1)bx^{n-2} \\ r.(r-1)cx^{r-2} \end{matrix}\right\} \Delta x + \left.\begin{matrix} m.m-1.m-2.ax^{m-3} \\ n.n-1.n-2.bx^{n-3} \\ r.r-1.r-2.cx^{r-3} \end{matrix}\right\} \Delta x^2 \text{ etc.}$$

Dieses Verhältnis der Größen ΔP nnd Δx gegen einander wird immer abnehmen, je kleiner man ΔP und Δx annimmt, und in dem

Augenblick des Verschwindens, wenn $\Delta x = dx$ und $\Delta P = dP$ wird, wird noch das Verhältnis

$$\frac{dP}{dx} = max^{m-1} + nbx^{n-1} + rcx^{r-1}$$

übrig bleiben.

B.

Wenn in der Function $P = xy$, x um Δx, y aber um Δy zunimmt, so wird

$$P + \Delta P = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y, \text{ und}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = y + \frac{x\Delta y}{\Delta x} + \Delta y.$$

Wird aber $\Delta P = dP$; $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$, so wird

$$\frac{dP}{dx} = y + \frac{xdv}{dx} + dy.$$

Leztere Größe dy aber wird 0, weil dy allein an und für sich betrachtet kein Verhältnis anzeigen kann, es ist also

$$\frac{dP}{dx} = y + \frac{xdy}{dx}; \text{ oder}$$

$$dP = ydx + xdy.$$

Wenn drey Größen x, y, z gegeben, so würde unter den nemlichen Umständen auch

$$dP = zydx + zxdy + xydz.$$

C.

Wenn man in einer logarithmischen Linie, deren Subtangente a ist, den Unterschied einer beliebigen Ordinate von der Ordinate 1 gleich x sezt, so kann man durch $1+x$ die Ordinate selbsten ausdrücken. Man heiße ferner die Abscisse, welcher diese Ordinate $1+x$ zukommt, z, so ist vermöge der Eigenschaft dieser krummen Linie

$$z = \log(1+).$$

Es

Es ist aber $a = \frac{v\,dz}{dy}$; also in diesem Falle $a = \frac{(1+x)\,dz}{dx}$
und $dz = \frac{a\,dx}{1+x} = a\,dx \cdot \frac{1}{1+x} = a\,dx\,(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 \text{ etc.})$
hievon ist das Integrale z, oder

$$\log(1+x) = a\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7\right) \text{ etc.}$$

Oder wenn ich mich der hyperbolischen Logarithmen bediene, wo $a = 1$ ist, so ist auch

$$\log \text{hyp.}\,(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 \text{ etc.}$$

Nun sey $y = \log x$; x wachse um Δx; y um Δy, so wird $y + \Delta y = \log(x + \Delta x)$ und $\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(\frac{1 + \Delta x}{x}\right)$.
Setzet man einstweilen $\frac{\Delta x}{x} = v$, so ist

$$\log(1+v) = v - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 - \tfrac{1}{4}v^4 + \tfrac{1}{5}v^5 - \tfrac{1}{6}v^6 \text{ etc.}$$

oder den Werth von v wieder substituirt, gibt

$$\log\left(\frac{1+\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{x^2} + \frac{\Delta x^3}{3 \cdot x^3} - \frac{\Delta x^4}{4 \cdot x^4} + \frac{\Delta x^5}{5 \cdot x^5} \text{ etc.}$$

Nimmt man in diesem Ausdruck $\Delta x = 0 = dx$ an, so kann man alle einzelne Glieder dieser Reihe in Rücksicht des ersten als verschwindend betrachten, und so wäre dann

$$d \cdot \log x = dy = \frac{dx}{x}.$$

Nach Voranschickung dieser Sätze werde ich nunmehr zu Behandlung der vorgenommenen Materie schreiten, und sogleich mit den Untersuchungen über die wahre Größe eines mit einem Scheiben-Instrument abgemessenen Winkels in dem ersten Abschnitte den Anfang machen.

Erster

Erster Abschnitt.

Vorläufige Begriffe und Bedingungen in Ansehung der Winkelmesser, die bey diesen Untersuchungen zum Grunde geleget worden.

§. 1.

Wenn es darauf ankommt, die Lage zu untersuchen, welche zwey Vertical-Ebenen ADC und BDC nach Fig. 1, welche man sich von einem Standpunkt C auf dem Felde nach den Objekten A und B verlängert gedenket, unter einander haben, so heißet man dieses Geschäfte in der praktischen Geometrie überhaupt das **Winkelmessen**, den Winkel ACB aber den **Neigungs-Winkel** beyder Ebenen gegen einander, und die Werkzeuge, womit dieser Winkel gemessen werden kann, im allgemeinsten Verstande genommen, **Winkelmesser**. Man misset aber vermittelst solcher Winkelmesser die Größe dieses Bogens entweder durch seine Chorte oder Tangente, nach Theilen des für den Winkelmesser angenommenen Halbmessers, oder bestimmet auch dieselbe unmittelbar nach Theilen eines in seine gehörige Anzahl Grade getheilten Kreisbogens; oder man begnüget sich auch, denselben auf die Ebene eines Tisches aufzuzeichnen. Unter die erstere Klasse zählet man alle Arten vou Goniometer, Recipiangel ꝛc., und unter leztere rechnet man alle Gattungen von Quadranten, Octanten, Sextanten, Bousolen und Scheiben-Instrumente oder sogenannte Astrolabia, und alle Gattungen von Meßtischen. Diese Gattungen von Winkelmessern lege ich nun bey diesen Untersuchungen zum Grunde, und fange mit einem Scheiben-Instrument an.

Ich halte es für meine Absicht zweckmäßiger, wenn ich mich hiebey nicht auf eine besondere Struktur eines Scheiben-Instruments einlasse. Ich bleibe blos bey den allgemeinen Bestandtheilen desselben,

ben, in so weit dieselben Einfluß auf gegenwärtige Untersuchungen haben mögen, bedinge also folgendes.

1.) Auf der Ebene des Limbi des Scheiben-Instruments seyen zwey concentrische Kreise mit äußerster Feinheit gezogen. Der eine sey durch gleichsam dem Auge verschwindende Theilstriche in 384, der andere aber in 360 gleiche Spatia oder Theile abgetheilt. Einen Theil der 384 Theilung bezeichne mit ε^{I}, den Halbmesser des Kreises mit ϱ. Einen Theil der 360 Theilung heiße ε°, den Halbmesser des Kreises r, und es sey $r > \varrho$.

2.) Zwischen diesen beyden concentrischen Kreisen streife ein dünnes Blech, welches an einem Ende der beweglichen Alhidade befestiget ist. Dieses Blech ist mit beyden Kreisen concentrisch abgerundet, und auf jener Seite, welche die 360 Theilung streifet, mit einer Eintheilung oder sogenannten Nonius-Abtheilung versehen, bey welcher m Theile der 360 Theilung in m — 1 Theile getheilt sind: diese Nonius-Abtheilung bezeichne mit N, und seze, es sey jeder Theil derselben um einen Bogen α° größer als auf dem Limbo.

Auf der andern Seite dieses Bleches, welche die 384 Theilung schneidet, seyen ω Theile derselben in $\omega - 1$ Theile eingetheilet, ein Theil derselben sey um einen Bogen α^{I} größer als auf dem Limbo. Diese Nonius-Abtheilung bezeichne mit dem Buchstaben $\dot{N}$.

3.) Neben der Alhidade sey auf irgend einer Vorrichtung eine Hülse angebracht, durch welche ein Schrauben-Cylinder satt gehet: an dem Vordertheil dieses Cylinders sind Schrauben-Gänge eingeschnitten, die in eine auf der Alhidade befindliche Schrauben-Mutter eingreifen: an der hintern Seite desselben aber ist eine eingetheilte Scheibe oder Cadrans angestellt, um Ganze und Theile eines Schrauben-Umgangs darauf abzählen zu können. Wird die Vorrichtung, worauf sich die Schrauben-Hülse befindet, auf dem Limbo festgestellt, und sodann diese Mikrometer-Schraube gedrehet, so gehet die Alhidade aus ihrer Lage, und es müssen q Umgänge mit dieser Schraube vorgenommen werden, bis der Index der Nonius-Abtheilung von N auf dem Theil-Kreise der 360 Theilung sich um einen Theil ε° oder um einen Grad auf der Ebene des Limbi verschiebet.

4.) Auf der Alhidade selbst ist ein dioptrisches auf- und niederbewegliches Fernrohr angebracht. In dem Brennpunkte seines Oculars befindet sich ein äußerst feiner Silberdrath zu rechten Winkeln ausgespannt. Die Gläser sind übrigens gehörig centrirt, und der Tubus in jeder Lage, die man ihm giebt, nach senkrechter Richtung, sanft auf- und nieder beweglich. Ein dergleichen Fernrohr befinde sich auf der untern Seite des eingetheilten Randes angebracht, daß es gleichsam als Versicherungs-Fernrohr dienen möge, den unverrückten Stand des ganzen Winkelmessers zu gewähren. Es sey übrigens dasselbe nicht feste, sondern um eine Axe um einen kleinen Winkel beweglich, und könne in jeder Richtung innerhalb dieses Bewegungs-Winkels durch Stellschrauben festgestellt werden. Diese Einrichtung hat die Absicht zum Grunde, daß dieses Fernrohr, während das obere auf der Alhidade befindliche nach einem Objekte A gerichtet ist, indem beyde Indices von $\dot{N}$ und N auf dem Zero der Theilung stehen, auch auf das nemliche Objekt A gerichtet werden können, und also ein und eben dasselbe Objekt zu gleicher Zeit von beyden senkrechten Strichen der Glas-Mikrometer beyder Fernröhren geschnitten wird. Leztlich seye die Einrichtung der auf dem Stative befindlichen Verrichtungen also getroffen, daß das ganze Corpus nicht nur satt um seine Bewegungs-Axe gewendet, sondern auch in jeder beliebigen Stellung durch Schrauben-Umgänge um einen gewißen Winkel sanft geschoben, und in jeder Lage fest und unbeweglich durch Stellschrauben gestellet werden könne.

Ich denke, diese allgemeine Beschreibung der Bestandtheile des bey diesen Betrachtungen zum Grunde gelegten Winkelmessers wird hinlänglich seyn, die ganze Construktion desselben sich daraus vorzustellen; ich wollte mich mit Vorsatz nicht in die besondere Beschreibung einer gewißen Gattung von Winkelmessern einlassen, um diese Betrachtungen allgemein, und nicht auf besondere Fälle passend zu machen: denn diese lassen sich aus den allgemeinen Betrachtungen herleiten.

§. 2.

Verrichtungen bey Abmessung eines Winkels ACB, wenn das Werkzeug horizontal stehet.

Ich wähle hier einen der schwersten und verwickeltsten Fälle, der nur jemals bey Abmessung eines Winkels vorfallen mag, um aus demselben nachher einfachere und leichtere daraus herleiten zu können, und bedinge folgendes.

n. 1. Erstlich nehme an, es seyen die Bögen auf beyden Theilungs-Kreisen des Limbi alle durchgehends ohne allen Fehler aufgetragen worden, weil ich der Theorie der Fehler, welche bey Prüfung der Eintheilung eines Winkelmessers vorfallen können, besondere Betrachtungen zu widmen gedenke.

n. 2. Es habe ferner dieser als gänzlich ohne allen Fehler eingetheilt angenommene Winkelmesser durch einen unglücklichen Zufall seine Figur dergestalt verlohren, daß seine Fläche nicht mehr plan, wie zuvor, sondern merklich gekrümmt ist;

n. 3. Auch sey der Gang der Alhidade nicht mehr concentrisch mit beyden Theil-Kreisen auf dem Limbo; und die Bewegung des beweglichen Fernrohrs nicht mehr senkrecht auf die Ebene des Winkelmessers; sondern es mache nunmehr die Bewegungs-Ebene des Fernrohrs mit der durch seine Axe senkrechten Ebene einen Winkel. Das Fernrohr selbst, habe seine Figur verlohren, und sich gekrümmt, doch seye die Mikrometer-Schraube unversehrt geblieben, ihre Gänge aber nicht durchgehends von gleicher Weite.

n. 4. Mit diesem übelzugerichteten Instrumente soll nun der Winkel ACB gemessen werden: das Objekt A liege um einen Winkel a° über, das Objekt B aber um einen Winkel b° unter der Horizontal-Fläche des Winkelmessers. Nun werde der Index von N genau auf den Anfangspunct der Eintheilung gebracht, und das ganze Corpus so lange gedrehet, bis das Objekt A genau an dem Vertical-Faden des obern Fernrohrs stehet: in dieser Richtung stellet man das ganze Corpus feste, und wendet den untern oder Versicherungs-Tubus vermittelst einer Schraube so lange, bis das Objekt A sich an dessen senkrechten Faden zeiget, und also das Objekt A zu gleicher Zeit von beyden senkrechten Faden geschnitten wird.

Man löset sodann die Alhidade, und verschiebet sie auf der Ebene des Limbi so lange, bis das Objekt B genau von dem senkrechten Faden des obern Fernrohrs geschnitten wird: das untere Fernrohr stehe noch in der vorigen Richtung genau auf A, aber an der Ebene des Limbi zeige sich nunmehr folgendes.

N. I. Während der Index von N sich von dem Theilstrich o bis auf den Punct verschoben, auf welchem er nunmehr stehet oder das Fernrohr nach dem Objekte B gerichtet ist, hat derselbe einen Bogen von h Theilen der 360 Theilung oder einen Bogen $C = \varepsilon^\circ$ ganzen Graden, und noch über das einen kleinen Bogen x', der keiner als ε° ist, durchgegangen. Der $(h+t)$te Theilstrich der 360 Theilung auf dem Limbo passet genau mit dem $(t-1)$ten Theilstrich von N zusammen. Es ist also bey diesen Umständen $x' = (t-1) . \alpha^\circ = \frac{t-1}{m'-1} \cdot \varepsilon^\circ$. Demnach der Bogen $C + x' = \left(h + \frac{t-1}{m'-1}\right) \varepsilon^\circ = ACB$ als das Maas des Horizontal-Winkels ACB.

N. II. Bey unverrücktem Stande der Alhidade schneide ferner der Index von $\dot{N}$, υ ganze Theile der 384 Theilung ab, und noch überdas einen Bogen η', der kleiner als ε' ist. Es wäre also $\upsilon \varepsilon' + \eta' x = ACB$. Nun aber liegt der $(\upsilon + u)$te Theilstrich des Limbi mit dem $(u-1)$ten von $\dot{N}$ in einer geraden Linie; es ist also $\frac{u-1}{\omega-1} \varepsilon' = \frac{90}{96} . \frac{u-1}{\omega-1} \cdot \varepsilon^\circ = (u-1) \alpha' = \eta'$. und $\upsilon \varepsilon' + (u-1) \alpha' = \frac{90}{96} \varepsilon^\circ + \frac{90}{96} \frac{u-1}{\omega-1} \cdot \varepsilon^\circ = \left(\upsilon + \frac{u-1}{\omega-1}\right) \frac{90}{96} \varepsilon^\circ = ACB.$

N. III. Ergreifet man die Mikrometer-Schraube, so sind μ Umgänge derselben noch erforderlich, den Index von $\dot{N}$ auf den $(\upsilon + 1)$ Theilstrich der 384 oder 96 Theilung zu bringen. Es ist also

also $\varepsilon' - \eta' = \frac{96}{90}\frac{\mu}{q}\varepsilon'$; und $\eta' = \varepsilon' - \frac{90}{96}\frac{\mu}{q}\varepsilon' = \left(1 - \frac{32}{30}\frac{\mu}{q}\right)\varepsilon'$; demnach $\left(\upsilon + 1 - \frac{32}{30}\frac{\mu}{q}\right)\varepsilon' = ACB.$

N. IV. Bey jezigem Stande der Alhidade muß man noch ν Umgänge der Schraube vornehmen, bis der Index von N genau mit dem $(h+1)$ten Theilstrich der 90 Theilung zusammenpaßt. Es ist also $\varepsilon^o - x' = \frac{\mu+\nu}{q}\varepsilon^o$, und $x' = \varepsilon^o - \left(\frac{\mu+\nu}{q}\cdot\varepsilon^o\right) = \left(1 - \frac{\mu+\nu}{q}\right)\varepsilon^o = \frac{q-(\mu+\nu)}{q}\cdot\varepsilon^o$. Demnach $\left(h + 1 - \frac{(\mu+\nu)}{q}\right)\varepsilon^o = ACB.$

Auf diese Weise bekommt man also bey diesem Winkelmesser viererley Maase von dem Bogen ACB: diese Maase müssen auch einander gleich seyn, wenn man voraussezt, „daß die Abtheilungen „auf dem Limbo, und die Nonius-Abtheilungen gänzlich ohne Feh„ler wären; auch die Anfangspuncte beyder Eintheilungen sowohl „auf der Ebene des Limbi, als auf der Schärfe des Bleches der „Nonius-Abtheilungen, in der Central-Linie oder doch in einer mit „derselben parallelen Linie liegen, und noch überdas der Gang der „Schraube durchaus gleichförmig wäre.„ Weil aber alle diese Voraussetzungen in den wenigsten Fällen statt finden, so sind hiebey folgende Fälle als möglich vorauszusetzen. Einmal können alle 4 Resultate für den Winkel ACB zufälligerweise die wahren seyn; sie können zweytens alle irrig seyn, und drittens kann eines oder das andere das wahre Maas seyn. Weil nun der Geometer sich niemalen von dem wahren Maas des abgemessenen Winkels ACB überzeugen kann, so pflegt man nach dem Calcul des Wahrscheinlichen ein Mittel aus allen 4 Resultaten einstweilen zu nehmen, und dieses in das Diarium der Winkel einzutragen, im Fall nicht auffallende Fehler in den Abtheilungen des Limbi noch einige Correctionen zuvor nothwendig machen. Und so würde dann das aequirte Maas dieses Winkels seyn

$$\frac{1}{4}\left(\left(h+1-\frac{(\mu+\nu)}{q}\right)\varepsilon^o + \left(h+\frac{t-1}{m-1}\right)\varepsilon^o + \left(\upsilon+1-\frac{32}{30}\frac{\mu}{q}\right)\varepsilon' + \left(\upsilon+\frac{n-1}{\omega-1}\right)\varepsilon'\right)$$

 oder

oder

$$\frac{1}{4}\,\varepsilon^{\circ}.\left(2h+1-\frac{(\mu+\nu)}{q}+\frac{t-1}{m'-1}+\frac{90}{96.}\left(2\upsilon+1-\frac{32}{30}\frac{\mu}{q}+\frac{u-1}{\omega-1}\right)\right)$$

Aus diesem allgemeinen und zusammengesezten Fall lassen sich nun einige besondere einfachere herleiten.

a. Wenn nemlich alles wie zuvor bleibt, aber der Winkelmesser mit keiner Mikrometer-Schraube versehen ist, so wird

$$ACB=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\circ}\left(h+\frac{t-1}{m-1}+\frac{30}{32.}\left(\upsilon+\frac{u-1}{\omega-1}\right)\right)$$

b. Wenn der Winkelmesser keine Nonius-Abtheilungen hat, statt deren aber ein feines Haar, oder auch ein feiner auf Glas gezogener Strich an einem Ende der Alhidade über beyden Eintheilungen des Limbi wegstreichet, so wird nach Umgängen der Schraube

$$ACB=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\circ}\left(h+1-\frac{(\mu-\nu)}{q}+\frac{30}{32}\cdot\left(\upsilon+1-\frac{32}{30}\frac{\mu}{q}\right)\right)$$

c. Wenn auf dem Limbo nur die 90 Theilung aufgezeichnet ist, so wird nach Theilen des Nonii N und der Schraube

$$ACB=\frac{1}{2}\left(\left(h+1-\frac{\mu-\nu}{q}\right)\varepsilon^{\circ}+\left(h+\frac{t-m}{m-1}\right)\varepsilon^{\circ}\right)=\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\circ}.\left(2h+1+\frac{t-1}{m-1}-\frac{(\mu+\nu)}{q.}\right)$$

Wenn man die Größe $\left(h+1-\frac{(\mu+\nu)}{q}\right)\varepsilon^{\circ}$ mit a'; $\left(h+\frac{t-1}{m-1}\right)\varepsilon^{\circ}$ mit b'; $\left(\upsilon+1-\frac{32}{30}\frac{\mu}{q}\right)\varepsilon'$ mit c'; $\left(\upsilon+\frac{n-1}{\omega-1}\right)\varepsilon'$ mit d'; die 90 Theilung auf dem Limbo mit A, die 96 Theilung mit B, und die Mikrometer-Schraube mit M bezeichnet, so kann man die besondern Fälle, welche aus den zusammengesezten können hergeleitet werden, unter folgendes Verzeichnis bringen; nemlich:

d. Wenn

d. Wenn bey einem Winkelmesser die Theile angebracht sind,						so wird, wenn man aus den erhaltenen Größen das arithmetische Mittel nimmt,	
1)	N	$\dot{N}$	A	B	M	. $\frac{1}{4}(a+b+c+d)$	= A C B.
2)	—	$\dot{N}$	—	B	M	. $\frac{1}{2}(c+d)$	
3)	N	—	A	—	M	. $\frac{1}{2}(a+b)$	
4)	N	$\dot{N}$	A	B	—	. $\frac{1}{2}(b+d)$	
5)	—	—	A	B	M	. $\frac{1}{2}(a+c)$	
6)	—	—	A	—	M	. a.	
7)	—	—	—	B	M	. c.	
8)	N	—	A	—	—	. b.	
9)	—	$\dot{N}$	—	B	—	. d.	

§. 3.

Correction des gemessenen Winkels.

α. in Rücksicht des Ganges des Fernrohrs.

N. I. a. Wenn in Fig. 1. A L R T S die Ebene des Winkelmessers und die Linien c f d g zwey Supports vorstellen, auf welchen die Bewegungs-Axe d c des Fernrohrs, parallel mit der Ebene des Winkelmessers ruhet, so wird das Fernrohr bey der Richtung nach dem Objekte A in der Vertical-Ebene A D C, und bey der Richtung nach dem Gegenstande B in der Vertical-Ebene B D C auf- und niederbeweglich, und also der Bogen A B, welchen der Index auf der 90 Theilung durchgegangen, das wahre Maas des Winkels A C B seyn.

Dieses aber ist nun nicht der Fall bey gegenwärtigem zum Grunde gelegten Winkelmesser, weil ich vorausgesezt habe, daß durch einen Zufall die Bewegungs-Axe des Fernrohrs aus ihrer Lage gekommen, und nun mit der Ebene des Winkelmessers einen Winkel

λ=

$\lambda = ePc$ mache, und das Fernrohr selbst in einer Ebene LEGC auf- und niedergehe, welche mit der Ebene ADC den Winkel $GDC = \lambda$ macht.

Ist nun HP die Richtung des Fernrohrs, wenn dasselbe nach dem Objekte B gerichtet, und also um den Winkel $QPH = b^\circ$ unter die Horizontal PO geneigt ist, so schneidet eine Vertical-Ebene DQHb die Ebene des Winkelmessers in einer Linie bC, welche mit der Linie BC, welche der Index von N angibt, den Winkel BCb formirt, welchem der Neigungs-Winkel der Ebenen DOBC DHbC, welchen ich β heiße, gleich ist. Wäre also das Fernrohr, während es nach dem Gegenstande A gerichtet worden, in der Linie PF oder parallel mit dem Winkelmesser selbst gestanden, also das Objekt A mit dem Winkelmesser in einerley Horizontal-Ebene, so würde man bey Abmessung des Winkels ACB, so wie denselben die 90 Theilung angibt, um den Winkel BCb zu kurz gekommen seyn. Denn das Fernrohr hat sich wirklich, während es aus der Richtung nach dem Objekte A in die Richtung nach dem Objekte B gebracht, um einen Bogen gewendet, der gleich dem Bogen $AB + Bb$ ist. Es wäre also für diesen Fall der wahre Winkel, welchen die Gegenstände A und B in dem Mittelpunct des Winkelmessers abbilden, gleich $Ab = AB + Bb$.

b. Etwas anderst würde es sich verhalten mit der Größe dieses Winkels, wenn das Fernrohr, während es nach dem Objekte A gerichtet ist, eine Neigung gegen den Horizont hätte, und z. E. in der Richtung uP wäre. Eine Vertical-Ebene durch diese Richtung αDC würde die Ebene des Winkelmessers in der Linie αC schneiden, und diese Linie mit der Linie durch den Anfangspunct A der Eintheilung des Limbi einen Winkel $AC\alpha$ bilden, der dem Neigungs-Winkel der beyden Ebenen ADC und αDC gleich ist. Diesen Winkel heiße α.

In diesem Falle wird sich also das Fernrohr, nachdem es von der Richtung nach dem Gegenstande A in die Richtung nach dem Gegenstande B geführet worden, um einen Bogen αb verschoben haben, und es wäre $\alpha Cb = \alpha CB + BCb = ACB + BCb - AC\alpha$.

Um

Um aber die Größe dieses Winkels αCb angeben zu können, wird alles darauf ankommen, die Größe der Neigungs-Winkel α und β ausfindig zu machen: zu diesem Ende fange mit dem Bogen Bb an, und verfahre folgendermaßen.

Es ist einmal in dem sphärischen Dreyecke DOH der Winkel DOH bekannt; ferner die Seite OD und DH, und aus diesen gegebenen Stücken soll nun der Winkel ODH berechnet werden. Es ist aber DOH $= 180 - BOH = 180 - GCD = 180 - \lambda$. OD $= 90$; DH $= DQ + QH = 90 + b^\circ$. Nehme ich an, es sey DOH $= B = \beta$; ODH $= B$; OD $= c$ DH $= a$; so ist

$$\tang B = \frac{\text{Sin } A \text{ tang } a}{\text{Sin } c - \text{tang } a \text{ Cos } c \text{ Cos } A} \text{ oder}$$

$$\text{tang } (180 - \lambda) = \frac{\text{Sin } \beta \,.\, \text{tang } (90 + b^\circ)}{\text{Sin } 90 - \text{tang } (90 + b^\circ) \text{ Cos } 90 \text{ Cos } \beta.}$$

$$- \text{tang } \lambda = - \text{Sin } \beta \,.\, \cot b^\circ. \text{ hieraus}$$

$$\text{Sin } \beta = \frac{\text{tang } \lambda}{\cot b^\circ} = \text{tang } \lambda \text{ tang } b^\circ.$$

Oder weil λ immer klein seyn wird, so kann man auch den Bogen selbst für die Tangente setzen, und so wird

$$\beta = \lambda \,.\, \text{tang } b^\circ.$$

Eben so würde auch $\alpha = \lambda$ tang a°.

Setzet man diese Werthe im obigen Ausdruck für den Winkel αCb, so wird $\alpha Cb = ACB + \lambda$ (tang b° — tang a°). Der Winkelmesser würde also in diesem Falle den Neigungs-Winkel der beyden Ebenen ADC und BDC um einen Bogen von der Größe λ (tang b° — tang a°) zu klein angeben.

c. Dieser Bogen αCb aber ist noch immer nicht das wahre Maas des Neigungs-Winkels beyder Ebenen ADC und BDC. Denn die Richtung des Fernrohrs, während es nach dem Objekte A gestellet ist, fället nicht in die Linien uP, wie eben angenommen worden,

den, sondern in die Linie EP, weil es nach §. 2. n. 4. um den Winkel EPI = a° über die Horizontal-Ebene IFP erhöhet werden muß, wenn das Objekt A in seinem Foco erscheinen soll. Hiedurch aber leidet der Winkel α eine Abänderung; sezte man nemlich wie zuvor, es sey DEF = C; DF = c; ED = a; EDF = B; so ist DEF = 180 — λ; EDF = α; DF = 90; ED = 90 — a°; demnach

$$\text{tang}\ (180 - \lambda) = \frac{\text{Sin}\ \alpha\ .\ \text{tang}\ (90 - a^\circ)}{\text{Sin}\ 90 - \text{tang}\ (90 - a^\circ)\ \cos 90\ \cos \alpha}$$

$$- \text{tang}\ \lambda = \text{Sin}\ \alpha\ \text{Cot}\ a^\circ.\ \text{Demnach}$$

$$\text{Sin}\ \alpha = - \frac{\text{tang}\ \lambda.}{\cot \alpha^\circ} = - \text{tang}\ \lambda\ \text{tang}\ a^\circ$$

$$\text{Sin}\ \alpha = - \lambda\ .\ \text{tang}\ a^\circ.$$

Nun drücke ich ferner das wahre Maas des Neigungs-Winkels der beyden Ebenen ADC und BDC durch den Buchstaben C°, das Maas eben dieses Winkels aber so, wie es die Eintheilung auf dem Limbo angibt, durch den Buchstaben C′ aus; und so wird für gegenwärtigen Fall $C^\circ = C' + \lambda\ (\text{tang}\ a^\circ + \text{tang}\ b^\circ)$.

d. Dieser Bogen von der Größe $C' + \lambda\ (\text{tang}\ a^\circ + \text{tang}\ b^\circ)$ wäre nun also das wahre Maas des Neigungs-Winkels beyder Vertical-Ebenen ADC und BDC unter einander, aber nur für gegenwärtigen Fall, da das Objekt A über, und das Objekt B unter der Horizontal-Fläche des Winkelmessers liegt. Da dieses aber nur ein einzelner Fall ist, so werde ich für andere Fälle, welche sich bey Winkelmessungen ereignen können, das wahre Maas des Neigungs-Winkels beyder Ebenen ADC und BDC in folgendem Verzeichnis angeben.

Es liegen in Absicht des Horizonts des Winkelmessers		so ist die hiebey anzunehmende Correction des gemessenen Winkels ACB
das Objekt A	das Objekt B	gleich
n. 1) über	demselben. über	. . λ . (tang a° + tang b°).
n. 2) unter	unter	. . λ . (tang b° — tang a°).
n. 3) über	unter	. . λ . (tang a° + tang b°).
n. 4) unter	über	. . λ . (tang b° — tang a°).
n. 5) —	über	. . . . + o — λ . tang b°).
n. 6) —	unter	. . . . + o + λ . tang b°).
n. 7) über	—	. . λ tang a° + o
n. 8) unter	—	. . — λ tang a° + o.
n. 9) —	—	. . . o + o.

Aus diesen angezeigten verschiedenen Fällen kann man also denjenigen wählen, der den Umständen angemessen ist. Für gegenwärtige Lage der Objekte A und B würde also der Fall n. 3. gehören, und C° würde, wie vorhin, gleich $C' + \lambda$ (tang a° + tang b°) gleich $C' + \lambda \cdot \frac{\text{Sin}(a^\circ + b^\circ)}{\text{Cos}\, a^\circ\ \text{Cos}\, b^\circ}$. Auch würde dieser Bogen das wahre Maas des Neigungs-Winkels beyder Ebenen ADC und BDC seyn, wenn man annehmen könnte, die Theilung auf dem Limbo sey gänzlich ohne allen Fehler, die Ebene desselben plan, und der Bogen selbst genau mit dem Gang der Alhidade concentrisch. Diese zwey lezten Voraussetzungen aber wären den im §. 2. n. 2. 3. angezeigten Bedingnissen gerade zuwider; es muß also nothwendig mit dem Bogen C' noch eine Correction vorgenommen werden, theils weil der index an der Alhidade den Bogen C nicht auf einer Horizontal-Ebene, sondern in einer etwas gekrümmten Ebene durchgegangen, während das Fernrohr von dem Objekte A nach dem Objekte B geführt worden; theils weil dieser Bogen nicht mehr concentrisch mit dem Gang der Alhidade ist.

Ich fange bey ersterem an, und untersuche nunmehr die Größe des Fehlers, welcher in Absicht auf die wahre Größe des Bogens

 C'

C′ entstehet, wenn dieser Bogen C′ auf die Horizontal-Ebene des Limbi ohne allen Fehler aufgezeichnet, aber nachher der Limbus innerhalb dieses Bogens gekrümmet worden. Auch wähle ich zu dieser Untersuchung aus dem in §. 2. n. d. angesezten Verzeichnis den Fall n. 5; setze also, man habe den Winkel ACB Fig. 1. blos nach Theilen der Mikrometer-Schraube und der auf dem Limbo befindlichen 90 und 96 Theilung gemessen. Es würde also hier $C' = \frac{1}{2}(a' + c')$.

β. Correction wegen der Ebene des Limbi.

N. II. a. Nun stelle in Fig. 2. die Linie AA die Summe einzelner Chorden gewißer Bögen, um den ganzen Limbus herum, vor, zu der Zeit, da des Limbus Ebene noch ein planum horizontale war: die krumme Linie ABCDEFA aber bezeichne die Ebene, in welche nachher der Limbus gebogen worden. Es ist ferner klar, daß hiedurch jeder Winkel, zu welchem die Chorde, die nunmehr gekrümmet worden ist, gehöret, eine Veränderung leiden müsse. Denn, wenn Ab die Chorde eines Bogens γ ist, so lange der Limbus innerhalb dieses Bogens noch plan oder eben ist, so kann diese Länge Ab nicht mehr die Länge des Bogens γ bleiben, wenn sie in die krumme Linie AaB gebogen wird, und der Bogen γ wird nunmehr die Länge AB zu seiner Chorde haben, die um einen Theil Bb kürzer als Ab ist. Von diesem Theil Bb wird also der Fehler abhängen müssen, der hieraus auf die Größe des Bogens γ entstehet. Will man diesen Fehler untersuchen, so wird alles darauf ankommen, eine Gleichung für die krumme Linie ABCD.. zu construiren, und aus der krummen Linie AaBDC ꝛc. die Längen AB, BC zu berechnen, oder die Puncte anzugeben, in welchen diese krumme Linie von der geraden AA geschnitten wird. Allein in den wenigsten Fällen wird man eine Gleichung finden, die durchgehends durch alle Chorden des ganzen Limbi brauchbar wäre; und auch dann, wann sie auch vorhanden wäre, würde ihr Gebrauch öfters sehr mühsam seyn, besonders wenn Krümmungs-Ebenen des Limbi oftmals gegen einander abwechseln, und also die krum-

krumme Linie ABCD.. die gerade AA in vielen Puncten durchschnitte. Um also eine Gleichung von hohem Grade zu vermeiden, ist es dienlicher, die Krümmungs-Ebene des Winkelmessers theilbar zu suchen, wie ich jezt durch die Chorde AB zeigen will. Es sey Ab die Chorde des Bogens C', da die Ebene des Limbi noch eben war; durch Zufall aber habe sich innerhalb dieses Bogens der Limbus gekrümmt um die Absciße ac, dergestalt, daß nunmehr die Ebene dieses Bogens auf dem Limbo sich in die krumme Linie AaB begeben habe: ac heiße x und die Semiordinate Ae $= y$. AaB $= s$. Man habe ferner durch Versuche gefunden, daß die Gleichung $y^3 = px^2$ dieser krummen Linie AaB ein Genüge leiste. Da man nun einmal dieses weiß, so wird alles darauf ankommen, aus der bekannten Länge der Chorde Ab, welcher die Länge der krummen Linie AaB, in welche sie gebogen worden, gleich seyn muß, die Länge der Ordinate AB zu finden, und auf dem sich zeigenden Unterschied Ab — AB = Bb die Folgen zu untersuchen, welche dieser Unterschied auf die Größe des Bogens C' selbst haben mag. Nehme ich zu dem Ende ein endliches Stück Af derselben und heiße dasselbe Δs, die Absciße hf aber Δx, und Ah $= \Delta y$, so ist $\Delta s >$ Chorde Ax, oder $\frac{\Delta s}{\text{Chorde Ax}} = 1 + m$, wo m immer eine bejahende Größe bedeutet; wird aber Δs so klein angenommen, daß die Gränze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\sqrt{.(\Delta x^2 + \Delta y^2)}} = 1$ wird, so ist auch $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Nun ist aber in der krummen Linie AaB, $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$; mithin $dx = \frac{\frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy}{p^{\frac{1}{2}}}$; und $dx^2 = \frac{9}{4} \frac{y\,dy^2}{p}$;

daher $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{.\left(dy^2 + \frac{9y\,dy^2}{4p}\right)} = dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4p}\right)}$;

demnach $s = \int dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)} = \int dy \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{dy\left(1 + \frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9dy}{4p}} + \text{Constans}, \text{ oder auch}$$

$$s = \frac{8p}{27}\left(1 + \frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{Constans}.$$

Con-

Constans ergibt sich aus folgender Betrachtung; weil s mit y verschwindet, so ist für $y = 0$, auch

$$\frac{8p}{27} + \text{Const.} = 0; \text{ und hieraus}$$

$$\text{Const.} = -\frac{8p}{27}; \text{ und}$$

$$s = \frac{8p}{27}\left(1+\frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8p}{27} = \frac{8p}{27}\left(1+\frac{9y}{4p}\right)\sqrt{\left(1+\frac{9y}{4p}\right)} - \frac{8p}{27}.$$

Aber es ist auch $s = 2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} C$; also

$$\frac{8p}{27}\left(\left(1+\frac{9y}{4p}\right).\sqrt{\left(1+\frac{9y}{4p}\right)} - 1\right) = 2r \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C'; \text{ oder}$$

$$\frac{4p}{27}\cdot\left(\left(1+\frac{9y}{4p}\right)\cdot\sqrt{\left(1+\frac{9y}{4p}\right)} - 1\right) = r \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C'.$$

b. Aus dieser Gleichung müste nun der Werth von $AB = 2y$ gesucht werden. Wäre derselbe gleich k, so würde $Bb = s - k$, und es ist nun an deme zu zeigen, was dieser Unterschied in der Chorde für einen Einfluß auf den Bogen C haben möge. Bezeichnet man den kleinen Bogen, um welchen im gegenwärtigen Fall der Index den Bogen C′ zu groß angibt, mit dC, so wird aus der Gleichung $s = 2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} C'$, auch $dC = \frac{2ds}{r \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C'}$, wenn man nemlich r als unveränderlich betrachtet. Aber es ist auch $2ds = s - k$; demnach $dC = \frac{s-k}{r \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C'}$, oder wenn man den Werth von s substituirt, so wird $dC = \frac{(2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} C' - k)}{r \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C'}$ in Theilen des Halbmessers. Wenn aber, wie ich voraussetze, die Krümmung des Limbi niemalen beträchtlich, also auch der Winkel dC′ immer nur klein ist, so ist auch $dC = \frac{2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} C' - k}{r \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C'}\, 206264$ in Secunden.

c. Betrachtet man den Ausdruck von dem Bogen dC, so wird man ersehen, daß die Untersuchung dieses Bogens eben keine der leichtesten Arbeiten sey; man hat nemlich, weil die Krümmung AaB eine

eine cubische Parabel ist, die Wurzeln einer cubischen Gleichung zu suchen, und dieses ist dem ohngeachtet eine der leichtesten Fälle. Denn wäre die Krümmung AaB eine Circular-Krümme oder auch eine quadratische Parabel, so wäre der Differential-Ausdruck für ds im erstern Fall nur per seriem integrabel, und man müste y aus einer Reihe bestimmen, ja es könnte sich leicht ereignen, daß in der Ebene des Limbi alle drey Arten von Krümmungen zugleich vorkämen. Die Arbeit bey Entwickelung des Werthes von dC bleibt also immer sehr beschwerlich, und nur in einem einzigen Fall kann dieselbe etwas erleichtert werden, wenn man nemlich annehmen darf, die Ebene des Limbi seye so unmerklich gekrümmt, daß man die Chorden Ag, gm ꝛc. für ihre Bögen selbst ohne auffallenden Fehler annehmen kann. Nun bezeichne a die Chorde Ag; x, die Absciße gk und y die Ordinate kA, so ist $y = \sqrt{(a^2 - x^2)} = a\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ $= a\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, oder wenn $\frac{x^2}{a^2} = h$, und der Exponent $\frac{1}{2} = m$ gesezt wird, so ist

$$y = a(1-h)^m = a\left(1 - mh + \frac{m(m-1)h^2}{1.\ \ 2.} - \frac{m(m-1)(m-2)h^3}{1.\ \ 2.\ \ 3.}\ \text{etc.}\right)$$

Weil aber h immer ein sehr kleiner Bruch seyn wird, so kann man die höhern Potenzen desselben als o betrachten, und so würde $y = a(1 - mh) = a\left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right) = a - \frac{x^2}{2a}$. Bezeichnet man nun die Längen der Chorden gA, gm, mm, mr, nach alphabetischer Ordnung mit den Buchstaben des deutschen Alphabets a, b, c, d, e, ꝛc.; die Abscißen gk, lm, nm, or, nach arithmetischer Ordnung mit den Buchstaben x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, ꝛc., so wird

$$kA = a - \frac{x^2}{2a} \qquad no = d - \frac{(x^{III} + x^{IV})^2}{2d}$$

$$kl = b - \frac{(x^{I} + x^{II})^2}{2b} \qquad op = e - \frac{(x^{IV} + x^{V})^2}{2e}$$

$$ln = c - \frac{(x^{II} + x^{III})^2}{2c} \qquad qp = f - \frac{(x^{V} + x^{VI})^2}{2f}$$

etc.

und

und man hat hiebey den Vortheil, daß man nur die Absciſſe jedesmal gleich Null ſetzen darf, an der Stelle, wo der Limbus noch ein planum horizontale hat. Könnte man z. E. bey einem Winkelmeſſer ſetzen

$$\left.\begin{array}{ll} o = x^{I} \text{ . ſo würde } & kA = a. \\ o = x^{IV} & + kl = b - \frac{(x^{II})^2}{2b} \\ o = x^{V} & \\ & + ln = c - \frac{(x^{II} + x^{III})^2}{2c} \\ & + no = d - \frac{(x^{III})^2}{2d} \\ & + op = e. \end{array}\right\} \text{gleich der Summe aller Chorden-Längen von A bis p.}$$

d. Aus dieſen wähle nunmehr den Bogen g m m r; und ſetze, es gehöre die Chorde b einem Bogen β, die Chorde c aber einem Bogen γ zu; aber $\beta + \gamma$ ſey gleich dem Bogen C′. Nun iſt das wahre Maas dieſer Chorden, wenn der Limbus innerhalb des Bogens C′ plan wäre, gleich $2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \beta + 2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \gamma$. Das Maas dieſer nemlichen Chorden aber iſt im dermaligen Stande des Limbi, da der Bogen C in die krumme Ebene g m m gebogen worden, gleich $2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \beta - \frac{(x^{II})}{2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \beta} + 2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \gamma - \frac{(x^{II} + x^{III})}{2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \gamma}.$ Demnach der der Unterſchied in dieſen beyden Chorden gleich

$$\frac{1}{2r}\left((x^{II})^2 \operatorname{Sec} \tfrac{1}{2} \beta + (x^{II} + x^{III})^2 \operatorname{Sec} \tfrac{1}{2} \gamma\right) = 2ds. \text{ nach N. II. b.}$$

e. Wenn $x^{II} = x^{III}$ wäre, ſo würde

$$2ds = \frac{(x^{II})^2}{2r} \left(\operatorname{Coſec} \tfrac{1}{2} \beta + \operatorname{Coſec} \tfrac{1}{2} \gamma\right)$$

demnach dC für den Radius $1 = \frac{(x^{II})^2 \left(\operatorname{Coſec} \frac{1}{2} \beta + 2 \operatorname{Coſec} \frac{1}{2} \gamma\right)}{2 \operatorname{Coſin} \frac{1}{2} (\beta + \gamma)}$

f. Etwas

f. Etwas kürzer würde der Ausdruck für den kleinen Bogen dC werden, wenn $x^{III} = 0$ anstatt x^{II} wäre, der Bogen C also nur die Krümmung εmF hätte, alsdenn würde

$$dC = \frac{(x^{II})^2 (\mathrm{Cosec}\,\tfrac{1}{2}\beta + \mathrm{Cosec}\,\tfrac{1}{2}\gamma)}{2\,\mathrm{Cosin}\,\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)} = \frac{(x^{II})^2\,\mathrm{Cos}\,(\tfrac{1}{4}\beta + \tfrac{1}{4}\gamma)\,\mathrm{Cos}(\tfrac{1}{4}\beta - \tfrac{1}{4}\gamma)}{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\beta\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\gamma\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)} + 206264$$

in Secunden.

γ. Correction wegen dem excentrischen Gang der Alhidade.

N. III. Noch ist übrig, auch einige Betrachtungen anzustellen über die Größe des Fehlers, der daher entsteht, weil der Winkelmesser seine Concentricität bereits schon verlohren hatte, da der Winkel ACB mit demselben abgemessen wurde. Ich habe nemlich im §. 2. n. 3. angenommen, daß der Gang der Alhidade durch einen unglücklichen Zufall nicht mehr concentrisch mit den Theilkreisen auf dem Limbo sey, vielleicht weil der Central-Zapfen aus seiner Lage dadurch gekommen, oder auch, daß sich das Central-Loch in der Alhidade hiedurch etwas oval gedrückt haben möchte: der Index an der Alhidade beschreibe nunmehr einen Cirkelbogen auf dem Limbo, der in Fig. 3. den Theilkreis OaobO in zween andern entgegengesezten Puncten O und o durchschneidet, und bey d und g seinen grösten Abstand fd und gc auf beyden Seiten 90 Grade von o entfernet hat. In A sey der Anfangs-Punct der Eintheilung auf dem Limbo und der Bogen von A bis d sey gleich Φ.

Bey dieser Beschaffenheit des Winkelmessers wird also der Index der Alhidade auf der Richtung der Linie Ac stehen, während das Fernrohr nach dem Objekte A gerichtet ist, und wenn dasselbe nach dem Objekte B gerichtet worden, einen Bogen βOa auf dem Limbo durchgegangen haben. Aber dieser Bogen ist nicht das Maas des Winkels C′, weil c oder das Centrum motus der Alhidade nicht das Centrum des Theilkreises ist. Nothwendig würde also ein Fehler entstehen, wenn man den Bogen aOB für das Maas des Winkels ACB annehmen wollte; der Fehler selbst aber würde dem Unterschieterschiede beyder Bögen $ac\beta - ACB$ gleich seyn. Alles wird demnach darauf ankommen, die Größe dieses Bogens $ac\beta - ACB$ anzugeben, um welchen $ac\beta > ACB$ ist. Zu dem Ende sey der Winkel $ACB = \gamma$; $AcB = c$; $ADB = \omega$. $CBc = \eta$; $cAC = x$; $CDA = o$; $CDB = m$. Nun ist einmal

$$\left.\begin{array}{l} c + x = \omega. \\ \gamma + \eta = \omega \end{array}\right\} \text{also} \quad \begin{array}{l} c + x = \gamma + \eta \\ c - \gamma = \eta - x. \end{array}$$

Um nun die Größen x und η zu bestimmen, fälle man zwey Perpendicular-Linien cq und Cp, so wird, wenn $Cc = g$ ist,

$$\begin{array}{l} cq = g \operatorname{Sin} \phi. \\ Cq = g \operatorname{Cos} \phi. \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} Cp = g \operatorname{Sin} (C' + \phi) \\ cp = g \operatorname{Cos} (C + \phi) \end{array}, \text{ hieraus}$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{g \operatorname{Sin} \phi}{r - g \cos \phi} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} y = \frac{g \operatorname{Sin} (C' + \phi)}{r - g \operatorname{Cos} (C' + \phi)}.$$

Weil aber diese Bogen immer nur klein seyn werden, so kann man auch setzen

$$x = \frac{g \operatorname{Sin} \phi}{r - g \operatorname{Cos} \phi} \quad \text{und} \quad y = \frac{g \operatorname{Sin} (C' + \phi)}{r - g \operatorname{Cos} (C' + \phi)}.$$

$$\text{Es ist also } c - \gamma = \frac{g \operatorname{Sin} (C' + \phi)}{r - g \operatorname{Cos} (C' + \phi)} - \frac{g \operatorname{Sin} \phi}{r - g \operatorname{Cos} \phi}.$$

oder weil die Linien Cq und Cp in Vergleichung mit dem Halbmesser r immer nur sehr klein seyn werden, wenn Cc sehr klein ist, so kann man auch setzen, es sey

$$c - \gamma = \left(\frac{\operatorname{Sin} (C' + \phi) - \operatorname{Sin} \phi}{r}\right) g; \text{ oder auch}$$

$$c - \gamma = \frac{2g}{r} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} (C' + 2\phi) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} (\phi + C' - \phi)$$

$$= \frac{2g}{r} \left(\operatorname{Cos} (\tfrac{1}{2} C' + \phi) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C'\right) 206264, \text{ in Secunden.}$$

Es würde also, in Rücksicht des excentrischen Ganges der Alhidade, der Neigungs-Winkel beyder Ebenen ADC und BDC bey diesem Win-

Winkelmesser um einen Bogen von der Größe $c-\gamma$ zu klein gemessen.

Wenn nun C° das wahre Maas des Winkels ACB Fig. 1. vorstellet, so wird nach den bisher angestellten Betrachtungen, wenn man annimmt, daß derselbe Winkel auf der Ebene des Limbi durch die 90 und 96 Theilung und Theile des Schrauben-Mikrometers gemessen worden, ohne hiebey auf die Nonius-Abtheilungen Rücksicht zu nehmen,

$$C^\circ = C' + \lambda\,(\tang a^\circ + \tang b^\circ)\,206264 - \left(dC - \frac{2g}{r}\,\mathrm{Cos}(\tfrac{1}{2}C' + \phi)\,\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C.\,206264\right)$$

oder nach §. 3. N. I. e, wenn man für C' seinen Werth $\frac{1}{2}(a' + c')$ substituirt,

$$C^\circ = \tfrac{1}{2}(a' + c') + \lambda\,\frac{\mathrm{Sin}(a^\circ + b^\circ)}{\mathrm{Cos}\,a^\circ\,\mathrm{Cos}\,b^\circ}\,206264 - \left(dC - \frac{2g}{r}\,\mathrm{Cos}\left(\tfrac{1}{4}(a' + c') + \phi\right)\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}C'\,206264\right).$$

Wollte man die Bögen $\lambda\,(\tang a^\circ \tang b^\circ)\,206264$ durch P, den Bogen dC durch Q, und den Bogen $\frac{2g}{r}\,\mathrm{Cos}\,(a'C' + \Phi)\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C'\,206264$ durch R ausdrücken, den Winkel ACB aber, so wie er auf dem Limbo durch den Index der Alhidade abgeschnitten wird, durch A° bezeichnen, so würde allgemein $C^\circ = A^\circ + P - (Q - R)$.

In diesem Ausdruck kann also A° alle in §. 2. n. d. angesezte Werthe bekommen.

B. Eine andere Art, vermittelst eines Scheiben-Instruments Winkel zu messen; nach Herrn Fischer.

Bisher ist angenommen worden, es sey der Winkel ACB vermittelst eines Scheiben-Instruments gemessen worden, dessen Alhidade vermittelst einer feinen Mikrometer-Schraube um einen kleinen Winkel auf dem Limbo vor- und rückwärts beweglich ist.

Nun aber vertrette die Stelle dieser Schraube die Scheibe ABCD in Fig. 15., das Centrum der Eintheilung dieser Scheibe ist in C, das Centrum der Bewegung derselben aber in ε'.

 An

An diese Scheibe stößt bey A die Kante der Alhidade und hat in dieser Stellung ihren kürzesten Abstand von dem Mittelpunct der Bewegung.

Wird die Scheibe um den Bogen AF gedrehet, so tangirt der Punct F die Alhidade, und es ist hiedurch derselbe um die Linie Aa auf dem Limbo vorwärts gerückt, und es ist $Aa = FE - A\varepsilon$.

Je größer demnach $F\varepsilon$ wird, desto größer wird Aa, und es erreicht Aa sein maximum, wenn der Winkel ACF gleich 180° wird.

Um nun dieses Aa vor jeden Winkel ACF zu finden, so sey einmal der halbe Umfang der Scheibe in n gleiche Theile abgetheilt.

Der Halbmesser der Scheibe sey $AC = r$.

Die Excentricität derselben $\varepsilon C = e$.

Der Winkel ACF gleich $\frac{1}{n}\, 180 = \psi$.

Die Weite Aa gleich z.

Der Bogen, welchem der Tangente Aa im Centro der Bewegung der Alhidade zugehört, gleich x; so ist einmal die Weite FC gleich η.

$$z = \eta - A\varepsilon = \eta - (r - e)\,;\ \eta = \sqrt{(e^2 + r^2 - 2\,e\,r \cos\psi)}\,;\ \text{also}$$

$$z = \sqrt{(e^2 + r^2 - 2\,r\,e \cos\psi)} - (r - e)\,;\ \text{oder}$$

$$z^2 = e^2 + r^2 + 2\,r\,e - 2\,r\,e - 2\,r\,e \cos\psi.$$

$$z^2 = (e + r)^2 - 2\,r\,e\,.\,(1 + \cos\psi)\,;\ \text{also}$$

$$z = (e + r)\,.\,\sqrt{\left(1 - \frac{4\,r\,e \cos^2 \frac{1}{2}\psi}{(e + r)^2}\right)}$$

oder auch $z = (e + r)\ \sqrt{(1 - \text{Sin}^2\, k)} = (e + r)\ \cos k$.

In diesem Ausdruck ist $\text{Sin}\, k = \sqrt{\frac{4\,r\,e\, \text{Cos}^2 \frac{1}{2}\psi}{(e + r)^2}} = \frac{2.\sqrt{(r\,e)}}{e + r} + \cos\frac{1}{2}\psi.$

So

So wäre also $\tan x = \frac{z}{r}$; oder weil x niemals groß ist, so wäre in Secunden

$$x = \frac{z}{r} . 206264 = \left((e+r) \operatorname{Cos} k - (r-e)\right) 206264 : r.$$

In diesem Ausdruck wird $z = 2e$, wenn $\psi = 180$ also die Scheibe einmal umgedrehet worden. Demnach wäre für ein angenommenes e der möglichst gröste Werth von x folgender:

$$x = 2e . 206264 : r . = \frac{1}{\mu'} \varepsilon^{\circ}.$$

Stünde nun der Index der Alhidade nach der Beobachtung zwischen dem hten und (h+1)ten Theilstrich der 90 Theilung, so wäre nach dieser Methode der Winkel

$$ACB = \left(h + 1 - \frac{1}{\mu'}\right) \varepsilon^{\circ}.$$

C. Eine dritte Art Winkel aufzunehmen, vermittelst eines Scheiben-Instruments; nach Herrn Brander.

Einige Geometer bedienen sich auch der Mikrometer in dem dioptrischen Fernrohr auf dem Scheiben-Instrument, um die Winkel zu messen.

In diesem Fall müssen in dem Brennpuncte des Objektiv-Glases entweder auf einem Plan-Glase einige Vertical-Striche eingezogen, oder auch nur blos Fäden angebracht seyn, und die Operation ist hiebey folgende.

Der Geometer führt den Gegenstand, welchen er durch sein Fernrohr beobachten will, an einen Vertical-Strich oder Faden; und bemerkt hiebey den Stand des Indicis auf dem Limbo zwischen dem hten und (h+1)ten Theilstrich der 90 Theilung, führet sodann den Index auf den (h+1)ten Theilstrich vorwärts, oder hten rückwärts und sieht in dem Fernrohr nach, welchen Strich oder Faden nun-

nunmehr der Gegenstand schneidet, und bestimmt hieraus die Größe des abgemessenen Winkels folgendermaßen.

Es sey die Focal-Länge des Objektiv-Glases des Fernrohrs gleich τ, das Bild des Gegenstandes im Fernrohr habe sich um den Raum μ^o in dem Fernrohr verschoben, während der Index aus der Lage $(h+1)$ und h in die Lage $h+1$ versezt worden: x sey der Winkel, welchen μ^o in dem Objektiv des Fernrohrs einnimmt. So ist für diesen Fall in Secunden

$$x = \frac{\mu^o}{\tau} \, 206264 = \frac{1}{\mu^o} \varepsilon^o ;$$

also in diesem Fall

$$ACB = \left(h + 1 - \frac{1}{\mu^o}\right) \varepsilon^o .$$

Von dieser Methode, Winkel zu messen, gibt Herr Brander zuerst Nachricht in der Beschreibuug seines neuen geometrischen Universal-Meß-Tisches.

D. Vierte Art, Winkel vermittelst eines Scheiben-Instruments, durch Hülfe der Magnet-Nadel, zu messen.

Unter den mancherley Gattungen dieser Werkzeuge wähle eines aus, dessen Gebrauch am gewöhnlichsten ist; nehme also an, es sey der Bau des Werkzeugs, mit welchem man, vermittelst der Magnet-Nadel, Winkel messen will, nach seinen Haupt-Bestandtheilen folgender.

Eine Magnet-Nadel ruhet auf einer feinenn Spitze (A) von gehärtetem Stahl, und diese Spitze ist zugleich das Centrum eines Ringes, dessen Durchmesser um etwas größer als die Länge der Nadel ist. Dieser Ring liegt mit der äussersten Schärfe der Nadel in einerley Ebene; ist in 360° auf der Oberfläche eingetheilt. Auf seiner Ebene kann ein Index mit einer Nonius-Abtheilung sanft geschoben werden, und die Nadel spielet an demselben, jedoch ohne ihn

ihn zu berühren, an. Der Ring selbst ruhet auf einer Platte (B) von Messing, in welcher die Spitze (A) eingeschraubt ist, und diese Platte (B) ist auf ein Lineal (C) befestiget, an dessen Enden entweder Dioptern stehen, oder an dessen Seite ein Fernrohr auf- und nieder beweglich ist. Die Methode, mit diesem Instrument Winkel zu messen, ist folgende.

Es seyen in Fig. 16 A und B die beyden Gegenstände in C das Instrument, und C ist zugleich auch der Mittelpunct der Bewegung desselben.

Der Geometer stellet dasselbe aufs genaueste horizontal und visiret nach dem Gegenstande A, und bemerket den Stand der Nadel an dem Indice der Eintheilung und siehet nach, wie viel Grade und Minuten auf dem Limbo der Nonius weiset. Dieser zeige u Grade. Eben so visiret er auch nach B, während er das Instrument sanft um sein Centrum drehet. Der Nonius zeige n Grade, und es ist $n > u$; folglich hat sich das Instrument vom Anfange bis zum Ende der Operation um einen Bogen $n - u = (h + x)$ gewendet.

Dieser Bogen aber ist noch nicht das wahre Maas des Winkels ACB, welchen zwey Vertical-Ebenen durch C und A und B in C mit einander machen; er ist das Maas des Winkels BDA, um welchen sich das Lineal $\alpha\alpha$ gedrehet hat, und $BDA > ACB$.

Es hängt aber der Unterschied dieser beyden Winkel von dem mehr oder mindern Abstand $aC = bC$ der Axe des Fernrohrs auf der Regel $\alpha\alpha$ oder der Visirlinie der Dioptern, von dem Centro C der Bewegung des Instruments und der Entfernung beyder Gegenstände von demselben ab. Je größer demnach der Abstand der Visirlinien $\alpha\alpha$ von dem Mittelpuncte C, und je näher sich die Gegenstände A und B dem Instrument befinden, desto größer ist dieser Unterschied. Diesen Unterschied will ich nun durch Δh bezeichnen und denselben aufsuchen.

Während das Fernrohr oder die Dioptern nach A gerichtet waren, stund die Nadel in x und der Nonius zeigte u Grade auf dem

dem Limbo, während dessen Index genau mit der Central-Linie der Nadel in einerley Ebene stund. Die Tangente der Visirlinie schnitte dieselbe in dem Punct a senkrecht. Nun wurde das Instrument um den Horizont so lange gewendet, bis der Gegenstand B in der Axe $A\alpha$ sich befand: in dieser Lage der Linien $\alpha\alpha$ stund der Punct B des Limbi oder nte Grad der Eintheilung desselben mit der Central-Linie der Nadel in einerley Ebene, und die Tangente aC fiel nun in die Richtung Cb, und es ist $aCb = xCB = BDA$.

Nun ist der Winkel $ACB + ACa = aCb + bCB$; auch sey $aC = \tau$; $AC = d$; $BC = \delta$; $ACa = 90 - aAC$ $bCB = 90 - bBC$; und $\tan ACa = \frac{aC}{aA} = \frac{\tau}{d}$; $\tan bBC = \frac{\tau}{\delta}$. Demnach ist, weil $ACB + ACa = h + x + bCB$; auch $ACB = (h+x) - \Delta h$; oder $ACB = (h+x) + bCB - ACa$. $= (h+x) - (ACa - bCB)$.

E. Methoden, die Winkel durch ihre Chorden oder Tangenten zu messen.

Ich habe bisher der gewöhnlichsten Methoden, die Winkel nach Theilen des Kreises auf dem Felde zu messen, Erwähnung gethan; ich will also nunmehr in möglichster Kürze und gröster Allgemeinheit auch noch einige gewöhnliche Verfahren anzeigen, nach welchen man auch die Größe eines abgemessenen Winkels, nach Theilen des Halbmessers des Werkzeugs, dessen man sich hiezu bedienet, zu bestimmen pflegt. Das Verfahren selbst ist folgendes.

Es stellen Fig. 17. die Linien $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ Visirlinien nach den beyden bisher angenommenen Gegenständen A und B vor. C ist das Centrum des Instruments, $C\gamma$ der Halbmesser desselben.

Um nun die Größe des Winkels $\alpha C\beta$ anzugeben, müßte man entweder den Bogen $\gamma c\gamma$ nach Theilen des Kreises auf dem Limbo des

des Instruments aufgezeichnet finden, oder man kann auch denselben Winkel $\alpha C\beta$, vermittelst eines geraden Lineals (D), nach Theilen des Halbmessers ausfindig zu machen.

Diese Methode, den Winkel $\alpha C\beta$ vermittelst einer geraden Regel (D) zu bestimmen, theilet sich in zwey Theile, nach der Art, wie dieselbe an den Halbmesser $C\gamma$ angelegt wird. Denn einmal kann dieselbe so angelegt werden, daß dieselbe die Visirlinien $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ unter dem Winkel $\gamma\gamma C$ schneidet, oder auch, daß sie mit einer derselben einen rechten Winkel $\delta\gamma C$ macht; im ersten Fall heißt sie die Chorde des Winkels $\gamma C\gamma$; im andern Fall aber die Tangente dieses Winkels.

Ist diese Regel (D) die Chorde des Winkels $\gamma C\gamma$, so ergibt sich aus der Länge $\gamma\gamma$ derselben und dem bekannten Halbmesser $C\gamma$ der Winkel $\gamma C\gamma$ durch folgende Gleichung.

Es sey der Winkel $\gamma C\gamma = C$; der Halbmesser $C\gamma = r$; die Länge der Chorde $\gamma\gamma$, gleich d, so ist $d = 2\,r\ \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}C$; also $\mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\frac{d}{r}$.

Im andern Fall, wenn die Regel (D) die Tangente des Winkels C vorstellt, sey die Länge $\gamma\delta$, welche auf derselben von beyden Visirlinien abgeschnitten wird, gleich δ, so ist $\delta = r\ \mathrm{tang}\,C$; also $\mathrm{tang}\ C = \frac{\delta}{r}$.

In jeden von beyden Fällen findet man also aus dem Halbmesser $C\gamma$ des Instruments, und der Länge $\gamma\gamma$; oder $\gamma\delta$, welche durch irgend eine Vorrichtung auf der Regel (D) abgeschnitten wird, die Größe des Winkels C. Die Regel selbst ist von mancherley Einrichtung, je nachdem der Bau des Werkzeugs dieselbe erheischet. Sie ist bey Herrn Tobias Mayers Recipiangel ein 1000theiliger Maasstab, auf welchem der Abstand $\gamma\gamma$ jedesmal mit einem Stangen-Cirkel abgemessen wird.

Sie ist bey dem Branderschen Goniometer, dem neuen Meßtisch, dem Spiegel-Sextanten, dem geometrischen Proportional-Cirkel, ein messingenes Lineal, auf welchem Theile des Halbmessers aufgezeichnet sind, und bey dem dioptrischen Sector, dem tubo Campi amplissimi, und allen Meß-Tubis eben dieses Künstlers, vertritt die Stelle derselben eine fein eingetheilte Glas-Scala.

F. Art und Weise, Winkel auf dem Felde, vermittelst catoptrisch-dioptrisch- und catoptrischer Werkzeuge aufzunehmen.

Herrn Tobias Mayers catoptrischer Winkelmesser.

Die Construction dieser Werkzeuge ist verschieden: in der Hauptsache aber kommen dieselben alle darinnen überein, daß das Licht von den Gegenständen A oder B oder A und B auf Spiegel-Ebenen trifft und von denselben, nach catoptrischen Gesetzen, gegen das Auge des Beobachters gebracht wird.

Eine der einfachsten und besten Einrichtung eines solchen Werkzeugs hat uns Herr Tobias Mayer gegeben, von welcher man auch in seines Herrn Sohns, Johann Tobias Mayers, practischen Geometrie Nachricht finden kann.

aCbu ist das Corpus des Instruments. Fig. 18. in C, als dem Centro der Eintheilung des Limbi, steht auf der Alhidade Cx ein Spiegel senkrecht: von diesem Spiegel gehen die Strahlen gegen einen kleinen Spiegel γ, und werden von diesem gegen das Aug in u gebracht.

Ist nun uA die Visirlinie des Auges nach dem Objekte A und $\gamma\eta$ der reflectirte Strahl von dem Gegenstand B, so kann durch eine Bewegung der Alhidade Cx der Spiegel C in eine Lage gebracht werden, daß die Linie $\gamma\eta$ und γu in einerley Vertical-Ebene fallen,

fallen, also beyde Bilder einander schneiden, und in diesem Augenblick ist der Winkel bCx gleich 2 . ACB. Man findet also hiedurch den Winkel ACB, welchen beyde Gegenstände A und B in C mit einander machen.

Herrn Hadleys Spiegel-Octant.

Mit dieser Methode, Winkel zu machen, kommt jene ziemlich nahe überein, welcher man sich heut zu Tag fast durchgehends auf der See bedienet, Abstände am Himmel zu messen.

Der Bau und Gebrauch des nach Hadleys Theorie verfertigtigten Instruments ist dieser.

In Fig. 19. ist aCb das Corpus des Instruments; Cx die Alhidade desselben, welche um C beweglich ist. Ueber C steht auf der Alhidade ein Spiegel senkrecht, in γ aber ein durchsichtiges Plan-Glas senkrecht auf die Ebene des ganzen Instruments. Auf dieses Glas γ fallen die Strahlen, welche von dem Objekte B an die Ebene des Spiegels C kommen, und werden von demselben nach der Richtung γu in das Auge des Beobachters gebracht. Stellet man nun die Alhidade Cx in einer solchen Lage fest, daß das Bild von dem Gegenstande B genau das Bild von dem Gegenstande A, welcher durch das Glas γ directe gesehen wird, schneidet, so ist der Winkel xCB = 2ACB, also ACB hieraus bekannt.

Herrn Branders Spiegel-Octant.

Herrn Branders Spiegel-Octant weicht von dem eben angezeigten in Ansehung seiner Construction viel ab. Nach Herrn Brander ist in Fig. 19. an der Stelle des Reflexions-Glases in γ ein Spiegel von Metall senkrecht aufgestellt, und auf dem Spiegel C ein Creuz-Schnitt eingezogen. Von diesem Creuz-Schnitt ist also jedesmal in u ein Bild (U) auf dem kleinen Spiegel in γ zu sehen.

Mit diesem Instrument wird der Winkel ACB auf folgende Art gemessen.

 Wenn

Wenn A sehr weit entfernt ist, wird der Index x der Alhidade auf den Punct o der Eintheilung des Limbi gestellt, und das Instrument so lange nach A gewendet, bis das reflectirte Bild von A an dem Bilde (U) des Creuz-Schnittes stehet; sodann führet man die Alhidade auf dem Limbo so lange fort, bis das Bild von dem Gegenstande B dem Auge in u ebenfalls an dem Creuz-Schnitt U genau zu stehen scheint. Der Winkel in bCx ist sodann gleich 2 ACB.

Herrn Höschels catoptrischer Winkelmesser.

Herrn Höschels Winkelmesser kommt denjenigen etwas näher, die heut zu Tage nach Hadley's Theorie verfertiget werden, als Herrn Branders Octant.

Herr Höschel stellt an die Stelle des Metall-Spiegels in γ Fig. 19. einen Spiegel von Glas, dessen untere Hälfte mit Folie belegt, die obere Hälfte aber durchsichtig ist; mitten durch diesen durchsichtigen Theil ist eine Linie (z) senkrecht auf das Instrument gezogen, und so eine eben dergleichen (U) durch die Mitte des Spiegels C.

Bey Abmessung des Winkels ACB visiret der Beobachter aus der Stelle u nach dem Gegenstande A durch den obern durchsichtigen Theil des Spiegels γ, und bringet A an die Schärfe des Striches (z); während er nun das Instrument in dieser Lage erhält, drehet er die Alhidade Cx so lange, bis daß der Strich (U) und das Bild von dem Gegenstande B genau in einerley Vertical-Ebene in u gesehen werden können; alsdann zeiget der Index den Bogen bCx gleich 2 ACB.

G. Winkelmessung, bey Bestimmung der Entfernungen der Gegenstände A und B von dem Standort C, aus einer einzigen Station, vermittelst sogenannter Pantometer oder auch Engymeter.

Bey Messungen dieser Art vertritt die Stelle der Grundlinie das Werkzeug selbst. Denn wenn in Fig. 20. αC die Länge (r) des

des Halbmessers des Werkzeugs, und AC eine Visirlinie senkrecht auf αC nach dem Gegenstande A ist, so kommt es nur darauf an, den Winkel AαC zu messen, um daraus AC selbst finden zu können.

Herrn Pacenos Pantometer.

Diesen Winkel zu finden, befestigte Herr Paceno auf einem Brete in C und α in der Entfernung $\alpha C = r$ zwey Fernröhre (u) und (w). Das Fernrohr (u) stund in C auf dem Brette fest, und seine Axe machte mit den fixen Puncten α und C einen rechten Winkel. Das Fernrohr (w) stund in α, und war, um einen Winkel von einigen Graden, um ein Centrum beweglich.

Bey wirklicher Messung selbst ist der Gebrauch des Instruments folgender. Der Beobachter wendet das Corpus des Instruments so lange, bis er durch das Fernrohr (u) in der Axe desselben den Gegenstand A siehet; in unverrückter Stellung des Instruments stehet sodann das bewegliche Fernrohr parallel mit dem Fernrohr (u), und der Index weiset auf dem Limbo den Punct o.

Nun bringt der Beobachter das Fernrohr (w) allmählig aus der Richtung $\alpha\beta$ in die Richtung αA, bis der Gegenstand A von dem verticalen Strich in dem Fernrohr (w) geschnitten wird. Am Ende dieser Operation hat sodann der Index der Alhidade um den Winkel $\beta\alpha A = \alpha AC$ sich auf dem Limbo verschoben, und es ist hiedurch das Maas des Winkels αAC bekannt worden, und hiemit auch die Entfernung des Gegenstandes A von dem Standort C. Denn es ist

$$AC = \frac{r \cdot \mathrm{Sin}\,(90 - \alpha AC)}{\mathrm{Sin}\,\alpha AC.} = r \cdot \mathrm{Cot}\,\alpha AC.$$

Bey den Pacenischen Pantometer aber wird eigentlich der Winkel nicht durch seinen Bogen auf einem Limbo, sondern durch seine Tangente, vermittelst der Umgänge einer Schraube gemessen.

Es sey demnach $\varkappa$ das Centrum der Bewegung des beweglichen Fernrohrs (w); A'C die möglichst gröste Weite, welche man

 mit

mit diesem Instrument messen mag; AC sey eine andere Weite, welche man zu messen in einem vorkommenden Fall verlangt.

Es müsse ferner die Schraube νmal umgewandt werden, bis die Axe des Fernrohrs (w) aus der Richtung $\alpha\beta$ in die Richtung $\varkappa A'$, und μmal, bis sie in die Richtung $\varkappa A$ gebracht wird.

Es bezeichne auch der Buchstabe λ den Winkel $\varkappa A'C$; d die Weite $A'C$; δ die Weite AC, und $\varkappa\lambda$ sey gleich r, und $\varkappa\alpha = \varepsilon$; so ist einmal

$$\alpha\varepsilon : \varkappa\alpha = \varkappa\lambda : A'\lambda.$$
$$\alpha\varkappa : \alpha\gamma = A\lambda : \varkappa\lambda.$$
$$\text{also} \quad \alpha\varepsilon : \alpha\gamma = A\lambda : A'\lambda = \nu : \mu.$$

Ferner sey $\alpha\varepsilon = \varepsilon$, so ist $\varepsilon\varkappa\alpha = \varkappa AC = \lambda = \frac{\varepsilon}{\varrho}\, 206264$ in Secunden; oder $\tang \lambda = \frac{\varepsilon}{\varrho}$; demnach auch

$$d = A'\lambda = r \operatorname{Cot} \lambda = \frac{r}{\tang \lambda} = \frac{r \cdot \varrho}{\varepsilon}; \text{ und } \delta = \frac{\nu}{\mu}\, d = \frac{\nu}{\mu}\, \frac{\varrho}{\varepsilon}\, r.$$

Herrn Branders Pantometer.

Herr Brander verfertigte dergleichen Instrumente von verschiedener Einrichtung: von zweyen derselben gibt er Nachricht in seiner Beschreibung eines neuerfundenen Distanzen-Messers. Die Theorie dieser beyden Werkzeuge will ich hier auch beyfügen. Von einem derselben gedenket auch Herr Lambert in seinem Schreiben vom 1sten May 1765 an Herrn Brander, welches nach Berlin gekommen. Die Theorie dieses Instruments ist diese.

In Fig. 21. stelle die Linie $\alpha\alpha$ die Axe einer viereckigten, ohngefähr 6 Fuß langen hölzernen Röhre (E) vor, in β und δ befinden sich 2 Plan-Spiegel unter einem Winkel von 45° in derselben feste. In γ und γ und ε sind eben dergleichen Spiegel; diese Spiegel sind in einem Rohre (F) befestiget, das vermöge der Schraube z um ein Centrum bey γ um einen Winkel beweglich ist.

Ein Strahl also, der von dem Gegenstande A auf den Spiegel β fällt, wird von demselben nach δ und von diesem Spiegel gegen das Creuz-Mikrometer in α reflectirt; kommt also nach der Direction δa ins Auge.

Ein mit dem Strahl $A\beta$ paralleler Strahl $\tau\gamma$ trift den Spiegel in γ, und wird von demselben nach ε reflectirt; der Strahl $A\gamma$ aber nach der Richtung $n\omega$ gesehen werden müssen.

Soll aber dieser Strahl die Axe in dem Punct o, wo das Creuz-Mikrometer sich befindet, schneiden, so muß der Spiegel γ um den Winkel $n\gamma\varepsilon$ vermittelst der Schraube z gewendet werden, und es ist alsdann der Winkel $n\gamma\varepsilon$ gleich dem Winkel $\varkappa A\lambda$ in Fig. . Bey gegenwärtigem Instrument ist also $r=\gamma\beta . \varepsilon=\gamma\nu$; alles übrige bleibt wie vorhin.

Herrn Branders Engymeter.

Von diesem Instrument gibt Herr Brander in eben angezeigter Schrift Nachricht, und es ist das neueste und vorzüglichste unter allen, die wir heut zu Tage zu diesem besondern Zwecke haben, und erhielt von der Königl. Academie der Wissenschaften zu Coppenhagen den auf die Auflösung dieser Aufgabe ausgesezten Preis. Seiner Constitution nach besteht es aus folgenden Haupt-Bestandtheilen.

α und β sind zwey Plan-Spiegel in der Axe einer kupfernen Röhre (ε) unter einem Winkel von 45° angebracht. Fig. 22. Die Röhre (ε) ist bey α um ein Centrum, vermittelst der Schraube z, beweglich; in der Vertical-Fläche dieser Schraube z ist über derselben rechtwinklicht auf die Axe $\alpha\upsilon$ ein Gregor. Telescop feste; übrigens die Operation und Rechnung die nemliche, wie bey dem Instrument in Fig. 21. Nur ist hier $r=\alpha\beta=\varrho$.

Dies wåren nun die vornehmsten Werkzeuge, deren man sich bey Abmessung der Winkel auf dem Felde bedienen möchte. Ich werde in der Folge Formeln construiren, nach welchen sich der Grad der Genauigkeit, welchen man mit jedem derselben, in Rücksicht auf die wahre Größe des abgewichenen Winkels ACB erreichen mag, beurtheilen kann, und die Resultate für dieselbe nachgehends mit einander vergleichen, und wie bisher in diesen Untersuchungen mit dem Scheiben-Instrument den Anfang machen.

Untersuchungen über die Zuverlåßigkeit, mit welcher ein Landmesser sich von dem wahren Maase des Winkels ACB überzeugen kann, wenn er denselben mit dem zum Grunde gelegten Scheiben-Instrument gemessen hat.

Nach dem vorhergehenden §. in N. III. angesezten Ausdruck für den Bogen C° låsset sich also wohl das corrigirte Maas des Winkels ACB erhalten; allein, um den Grad der Genauigkeit angeben zu können, den man hiebey in Ansehung seiner wahren Größe zu erwarten hat, sind noch andere, ausser den bisher angestellten, Betrachtungen nöthig. Da sich nun das Maas des Winkels ACB bey dem in §. 1. zum Grunde gelegten Winkelmesser aus viererley Abmessungen ergibt, so könnte man über jedes einzelne Maas desselben besondere Betrachtungen anstellen, über den Grad der Zuverlåßigkeit, der jeder derselben entspricht: ich begnüge mich aber, hier nur den Grad der Genauigkeit zu untersuchen, über die wahre Größe des Winkeis ACB, wenn derselbe blos allein durch die 90 Theilung auf dem Limbo, mit Anwendung der Mikrometer-Schraube, abgemessen wird. Diese Untersuchung wird also nur darinnen bestehen, die Folgen zu berechnen, welche die Fehler, so bey Abmessung dieses Winkels begangen werden können, auf die Größe des Winkels selbst haben mögen.

Fehler,

Fehler, welche bey Abmessung des Winkels ACB in der mehrern oder mindern Schärfe unsers Gesichts ihren Grund haben.

Unter die erste Classe der Fehler zähle ich diejenigen, welche von der mehr oder mindern Schärfe unsers Gesichts abhängen. Es ist nemlich eine durch die Erfahrung ausgemachte Wahrheit, daß ein Punct unserm Auge zweymal undeutlich wird, einmal, wenn derselbe von dem Auge zu weit entfernt, und das anderemal, wenn er demselben gar zu nahe gebracht wird, zwischen diesen beyden Gränzen aber gibt es eine Entfernung dieses Punctes vom Auge, wo derselbe in seiner grösten Deutlichkeit dem Auge erscheinet, und diese Entfernung heißet man die Gesichts-Ferne, den Winkel aber, unter welchem der Punct in dieser Entfernung sich dem Auge darstellet, nennt man den Sehungs-Winkel. Bezeichnet man diesen Winkel mit ψ, die Gesichts-Ferne mit δ'; die Dimension des Puncts, der in der Gesichts-Ferne δ' dem Auge unter dem Winkel ψ erscheinet, mit $\mathfrak{B}'$, so ist $\tan \psi = \frac{\mathfrak{B}'}{\delta'}$ und $\mathfrak{B}' \delta' = \tan \psi$. Ein Punct also, der sich in der nemlichen Gesichts-Ferne unserm Auge unter einem kleinen Winkel darstellet, kann von demselben nicht mehr vollkommen deutlich bemerket werden. Es richtet sich übrigens die Größe dieses Sehungs-Winkels nach der Farbe, Figur und Beleuchtung des Gegenstandes, der gesehen werden soll. Bey einem schwarzen und rothen Punct auf weißem Papier bey einerley Grad der Erleuchtung erhalten sich diese Sehungs-Winkel ungefähr wie 20 : 17; bey einem krünen Punct, wie 20 : 14. Betrachten wir ferner einen Punct durch ein Convex-Glas (U), das unserm Auge denselben mmal vergrössert, so sehen wir einen Punct $\frac{1}{m}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ eben so deutlich durch dasselbe, als wir den Punct $\mathfrak{B}'$ in der Entfernung δ' mit blosem Auge sehen.

Wenn ich nun voraussetze, der Index an der Alhidade, und die Dicke der Theilstriche auf dem Limbo sey der Dimension $\mathfrak{B}'$ gleich, so wird das Auge, während der Index auf dem Anfangs-

Punct der Eintheilung stehet, in Ansehung des Standes des Indicis über diesem Anfangs-Punct, nur bis auf das kleine Spatium $\mathfrak{B}'$ gewiß seyn können. Eben so wird sichs auch verhalten, wenn der Index auf den $(h+1)$ten Theilstreich, vermittelst der Mikrometer-Schraube, geführt wird; das Auge wird in der Entfernung δ', in Ansehung des Standes des Indicis über dem $(h+1)$ten Theilstrich, für keinen Punct stehen können, der kleiner als die Dimension $\mathfrak{B}'$ ist. Bedienen wir uns aber des Glases (U), so bleibt das Auge in Ansehung der Chorde des Bogens $(h+1)\varepsilon^\circ$ nur bis auf die Dimension $2\,\mathfrak{B}$ gewiß; und es ist der Fehler, welcher hieraus auf die Größe des Bogens $(h+1)\varepsilon^\circ$ entstehen kann, gleich $\frac{2\,\mathfrak{B}}{r \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(h+1)\varepsilon^\circ}$ nach §. 3. N. II. b.

b. Ein zweyter Fehler, der in der Beschaffenheit unsers Auges seinen Grund hat, bestehet darinnen, daß das Auge, während es nach dem Objekte A und B durch das Fernrohr siehet, immer um einen kleinen Theil ungewiß bleibt, ob der senkrechte Faden des Mikrometers im Fernrohr genau an demselben stehet oder nicht. Bezeichnet man die Länge der Entfernung des Bildes hinter dem Objektiv-Glase mit dem Buchstaben F, die Vergrößerung des Fernrohrs mit $\mathfrak{M}$, so ist $\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}}$ ein Punct, welchen das Auge in dem Fernrohr noch deutlich siehet, vorausgesezt, daß die Gläser des Fernrohrs aufs genaueste ihre sphärische Figur haben, und die Lichtmenge, welche von einer Fläche (w) auf dem Gegenstande, deren Bild der Punct $\mathfrak{B}'$ ist, ins Auge kommt, nicht zu geringe ist, um ein vollkommen deutliches Sehen zu bewirken. Dieser Punct nimmt in dem Centro des Objektivs einen Winkel (z) ein, und es ist $\operatorname{tang} z = \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{B}}{F}$; also z ein Winkel, vor welchem das Auge noch stehen kann, wenn das Fernrohr nach den Objekten A und B gerichtet wird; das ist, der Beobachter kann in der Richtung des Fernrohrs nach dem Gegenstande, bis auf einen Winkel gewiß seyn, der kleiner als der Winkel z ist, um z selbst kann er nicht fehlen. Weil nun dieser Winkel immer nur sehr klein seyn wird, so kann man auch setzen $z = \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{B}'}{F} \cdot 206264.$

c. Ein

c. Ein dritter Fehler bey Abmessung des Winkels ACB könnte entstehen aus der Dicke des senkrechten Fadens des Mikrometers, wenn der Beobachter den Gegenstand mit demselben durchschneiden wollte, weil derselbe immer einen gewißen Theil des Objekts verdecket, und er also hiedurch um einen gewißen Winkel ungewis würde, ob derselbe genau nach dem Objekte A und B gerichtet ist. Dieses Fehlers aber kann ein geübter Beobachter sich entübrigen, wenn er ein für allemal sich angewöhnt, die Gegenstände A und B nur an den Strich des Mikrometers zu führen, statt dieselbe durch die Mitte des Fadens zu schneiden.

Zählet man diese zweyerley Gattungen von Fehlern in eine Summe, so wird man ersehen, daß bey Abmessung des Winkels ACB, ein Bogen von der Größe $\left(\frac{2}{\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{B}'}{F}+\frac{2\mathfrak{B}}{r.\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,(h+1)^{\prime\prime}{}^{\circ}}\right)206264$ die äusserste Gränze der zu begehen möglichen Fehler wäre, wenn man nemlich annehmen könnte, daß die Objekte A und B in einerley Ebene mit einander lägen, die Ebene des Winkelmessers selbst eben, der Gang der Alhidade concentrisch mit dem Theil-Kreise, und die Weite der Schrauben-Gänge durchaus von gleicher Dimension wäre.

d. Nun aber ist für gegenwärtigen Fall, da die Ebene des Limbi gebogen, der Gang der Alhidade nicht concentrisch, der Gang des Fernrohrs über der Alhidade nicht senkrecht auf der Ebene des Werkzeugs selbst, die Weite der Schrauben-Gänge der Mikrometer-Schraube ungleich, und die Objekte selbst in verschiedenen Horizontal-Ebenen liegen, auch eben zuvor angenommen worden, daß der Winkel ACB blos allein durch die 90 Theilung auf dem Limbo mit Beyhülfe der Mikrometer-Schraube gemessen worden, der Winkel ACB oder $C^{\circ} = C' + x + P - (Q - R)$; demnach ist auch $dC^{\circ} = dC' + dx + dP - (dQ - dR)$.

e. Was nun den Werth von dC anbetrift, so setze ich, weil §. 2. angenommen habe, die Eintheilungen auf dem Limbo seyen gänzlich ohne allen Fehler auf die Ebene desselben aufgezeichnet worden, es sey dC′ gleich $\left(\frac{2}{\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{B}'}{F} + \frac{2\,\mathfrak{B}}{r.\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(h+1)\varepsilon^{o}}\right)$ 206264.

Fehler, die von dem Gang der Mikrometer-Schraube herrühren.

f. Der Ordnung der Glieder in dem Ausdruck für dC° gemäs, käme es also nunmehr darauf an, den Werth von dx zu entwickeln.

Es zeiget aber dx einen kleinen Bogen an, für welchen man in Abmessung des Bogens x nicht stehen kann, weil man in Ansehung der wahren Größe eines jeden Ganges der Mikrometer-Schraube um einen gewißen kleinen Theil ungewiß bleibt. Es bestimmt sich dieser Theil jedesmal aus der Methode, welcher man sich bedient, den Gang der Schraube zu prüfen: ich bediene mich hiebey folgender. Ich befestige auf der Ebene des Limbi zwey lineal-gerade Bleche, die ich mit (X) und (Y) bezeichne, nach der Tangente eines Bogens; lege die Alhidade über dieselbe, und bemerke, durch einen äusserst feinen Strich an einer Schärfe derselben gezogen, auf beyden Blechen (X) und (Y) ihren Stand; diesen Strich über beyde Bleche bezeichne mit o: sodann wende die Schraube in ihrer Hülse einmal herum, bemerke abermals auf beyden Blechen, vermittelst eines äusserst feinen Striches, den nunmehrigen Stand der Alhidade, und so fahre mit Umdrehung der Schraube und Bezeichnung des jedesmaligen Standes der Alhidade über beyden Blechen fort; bis m Schrauben-Gänge einen Bogen ε auf dem Limbo, der jedoch nicht über zwey Grade messen darf, vollbracht sind.

Nunmehro trenne das Blech (Y) von dem Bleche (X), befestige es dergestalt an die Alhidade, daß, indem die Alhidade über dem Blech (X) geschoben wird, das Blech (Y) mit derselben zugleich sich verschiebe, und beyde lineal-gerade Schärfen dieser Bleche auf das genaueste streifen: ist diese Vorrichtung gehörig zu Stande gebracht, so bringe nach und nach alle auf dem Bleche (Y) auf-

aufgezeichnete Spatia an das Spatium zwischen dem Theilstrich o und dem darauf folgenden auf dem Bleche (X), und schließe daraus folgendes.

Erstlich muß das Spatium vom Theilstrich o bis zum darauf folgenden auf beyden Blechen (X) und (Y) einander gleich seyn. Dieses Spatium oder die Höhe des ersten Schraauben-Ganges bezeichne mit dem Buchstaben z.

Es müssen sich zweytens alle andere auf dem Bleche (Y) aufgezeichnete Spatia mit dem Spatio z auf (X) vergleichen lassen: sind dieselbe alle durchgehends gleich z, so ist der Gang der Schraube durch alle m-Gänge durchaus gleich; sind aber dieselbe entweder größer oder kleiner als z, so wird sich der Unterschied durch Theile von z ausdrücken lassen.

Nun wähle von diesen beyden Fällen den leztern, und nehme, um die Formel allgemein zu machen, an, daß kein Gang der Schraube dem andern gleich sey, bezeichne die Unterschiede, die sich hiebey vorfinden in Rücksicht des Schrauben-Ganges z, mit den Buchstaben α, β, γ, δ, ε ꝛc. nach alphabetischer Ordnung, und so würde demnach

$$z+z+\alpha+z+\beta+z+\gamma+z+\delta+z+\varepsilon+z+\zeta+z+\eta\ldots+z+x=\varepsilon.$$

$$m\,z+z\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\theta+\iota\ \ldots\ +x)=\varepsilon.$$ und

$$z=\frac{\varepsilon}{m.+\alpha+\beta+\gamma\ \ldots\ldots\ +x}.$$ Nun ist ferner

$$m\,z+z\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+x):z+\alpha=\varepsilon:m-(m-2)$$ten Schrauben-Gang.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots:z+\beta=\varepsilon:m-(m-3)$$ten Gang.

Nach dieser geometrischen Proportion kann man also auch die übrigen Gänge bestimmen.

Wenn aber die n ersten Gänge der Schraube einander durchaus gleich sind, und die (m—n)ten Gänge auch einander gleich, aber um δ Umgänge jeder größer als z ist, so wird für diesen

 Fall

Fall $\alpha, \beta, \gamma = 0$; $\delta = \varepsilon = \zeta = \eta$ etc. und ein Schrauben-Gang von den n Gängen misset $\frac{\varepsilon}{m + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta + \iota \ldots\ldots}$ Secunden, wenn ε in Secunden gegeben ist; oder $\frac{\varepsilon}{m + (m - n)\delta}$ Secunden.

Von jedem der $(m - n)$ übrigen Gänge aber misset jeder $\frac{(z + \delta)\varepsilon}{z . (m + (m - n)\delta)}$ Secunden.

Aus diesen Betrachtungen wird sich also leicht die Größe des Bogens x bestimmen lassen, da man die Größe jedes einzelnen Schrauben-Ganges weiß, und die Anzahl derselben auf dem Limbo wirklich abmißt.

Zuverläßigkeit in Rücksicht auf die wahre Höhe eines Schrauben-Ganges.

Mit welcher Genauigkeit aber man die Größe dieses Bogens hiedurch findet, wird sich aus folgendem ergeben.

g. Ich lege hiebey den oben angezeigten Fall zum Grunde, und setze, es sey $\alpha, \beta, \gamma = 0$; $(m - n)$ Gänge seyen durchaus jeder um δ Umgänge größer als z, so ist einmal

$$z\,(m + (m - n)\,\delta) = \varepsilon; \text{ und}$$

$$m . dz + (m - n)\,(\delta dz + z d\delta) = d\varepsilon.$$

$$dz = \frac{d\varepsilon - (m - n) . z d\delta}{m + (m - n)\,\delta}.$$

Nun ist aus dem vorhergehenden bekannt, daß, indem man die Spatia auf dem Bleche (Y) mit dem Spatio z auf dem Bleche (X) vergleicht, man bey jedem einzelnen Spatio in Ansehung seiner wahren Größe, wegen mehr oder mindern Schärfe unsers Gesichts, nur bis auf einen Theil von der Dimension B' gewiß seyn könne. Es ist also möglich, daß ein jedes von den Spatiis um den Theil B' zu zu groß oder zu klein gemessen würde, eben so ist es aber auch möglich, daß einige zu groß, andere zu klein gemessen würden, ja eben sowohl ist es auch möglich, daß diese kleinen Fehler sich unter einander heben könnten, dergestalt, daß also in dem obigen Differential-Ausdruck $d\delta = 0$ würde, und für diesen Fall würde

$$dz = \frac{d\varepsilon}{m+(m-n)\delta}$$

h. Um in diesem Ausdruck den Werth von $d\varepsilon$ angeben zu können, gehe folgendermassen zu Werke.

Es zeiget $d\varepsilon$ das Wachsthum oder Abnehmen des Bogens ε an, oder in diesem Falle einen kleinen Bogen, für welchen man in Ansehung der wahren Größe des Bogens ε, der durch m Schrauben-Umgänge auf deu Blechen (X) und (Y) gemessen worden, nicht stehen kann. Denn wenn ich annehme, die Chorde dieses Bogens ε heiße e, und den kleinen Theil, um welchen man bey Abmessung dieser Chorde nach Theilen eines Maasstabs, in Rücksicht der Schärfe unsers Gesichts und der Dicke der Cirkel-Spitzen, an jedem Ende derselben ungewiß ist, mit dem Buchstaben $\mathfrak{A}$ bezeichne, so ist einmal $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{e}{2r}$, und $d\varepsilon = \frac{de - 2r\,dr\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varepsilon}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varepsilon}$; aber de ist gleich $2\mathfrak{A} = dr$, oder allgemein $dr = (1+n')\,\mathfrak{A}$; demnach ist $d\varepsilon = (1+n')\,\mathfrak{A}\,.\,(1 - 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon)\,.\,\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon$: oder wenn man annimmt, es sey der Halbmesser um $dr = (1+n')\,\mathfrak{A}$ zu klein gemessen worden, so bekommt $d\varepsilon$ seinen möglichst grösten Werth; es wird nemlich $d\varepsilon = (1+n')\,\mathfrak{A}\,.\,(1 + 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon).\,\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon$. Weil aber auch $2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{\mathrm{Sin}\,\varepsilon}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varepsilon}$, so ist auch

$d\varepsilon = (1+n')\,\mathfrak{A}\,.\,\frac{(\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varepsilon + \mathrm{Sin}\,\varepsilon)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varepsilon}\,.\,\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}\,C$; aber $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon + \mathrm{Sin}\,\varepsilon =$
$= 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,(\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon + 90).\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,(\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon - 90) = 2\,\mathrm{Sin}(\frac{1}{4}\varepsilon + 45).\,\mathrm{Cos}(\frac{3}{4}\varepsilon - 45)$
es ist also $d\varepsilon = 2(1+n')\,\mathfrak{A}\,.\,\mathrm{Sin}\,(\frac{1}{4}\varepsilon + 45^\circ)\,.\,\mathrm{Cos}\,(\frac{3}{4}\varepsilon - 45).\,\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon^2 : r$. Demnach ist auch in Secunden

$$dz = \frac{2\,.\,(1+n')\,\mathfrak{A}.}{r\,.\,(m+(m-n)\,\delta)}\,\mathrm{Sin}\,({}^{1}.\,\varepsilon + 45)\,.\,\mathrm{Cos}\,(\tfrac{3}{4}\,\varepsilon - 45)\,\mathrm{Sec}\,\tfrac{1}{2}\,\varepsilon^2\,.\,206264.$$

Weiß

Weiß man nun einmal den möglichst grösten Fehler, welchen man in Bestimmung des Werthes eines Schrauben-Umganges begehen kann, so weiß man für x übrige, welche auf den kleinen Bogen x gehen, kann also dx daraus herleiten.

Zuverläßigkeit in Ansehung der wahren Bewegungs-Ebene des Fernrohrs.

i. Was den Werth von dP anbetrift, so ist einmal, weil $P = \lambda . (\tang a^\circ + \tang b^\circ)$ auch $dP = d . \lambda (\tang a^\circ + \tang b^\circ)$ Wenn man aber annimmt, daß man in Ansehung des horizontalen Standes der Ebene des Winkelmessers um einen kleinen Bogen ζ ungewiß bleibt, so wird auch $P = (\lambda \pm \zeta) . (\tang a^\circ + \tang b^\circ)$; oder $\lambda \pm \zeta = \dot{N}$ gesezt, ist $P = \dot{N} . (\tang a^\circ + \tang b^\circ)$. Demnach auch

$$dP = dN (\tang a^\circ + \tang b^\circ) + \frac{N d a^\circ}{\cos^2 . a^\circ} + \frac{N d b^\circ}{\cos^2 b^\circ}$$

oder wenn man annehmen darf, es sey $da^\circ = db^\circ$, so ist

$$dP = dN (\tang a^\circ + \tang b^\circ) + N d a^\circ \left(\frac{1}{\cos^2 a^2} + \frac{1}{\cos^2 b^\circ}\right)$$

$$= dN (\tang a^\circ + \tang b^\circ) + N d a^\circ . (\sec^2 a^\circ + \sec^2 b^\circ)$$

$$dP = dN (\tang a^\circ + \tang b^\circ) + N d a^\circ . \left(\frac{2 \cos \frac{1}{2}(a^\circ + b^\circ) \cos \frac{1}{2}(a^\circ - b^\circ)}{(\cos a^\circ . \cos b^\circ)^2}\right)^2.$$

In diesem Differential-Ausdruck müssen noch die Werthe von da° und $d\dot{N}$ aufgesucht werden.

Was nun erstern betrift, so setze ich $da^\circ = 0$, weil mich die Entwickelung des Werthes von da° auf Betrachtungen über den Grad der Genauigkeit bey Messung der Höhen-Winkel führen müste, welches für meine dermalige Absicht viel zu weitläuftig wäre.

Es ist ferner $dN = d(\lambda + \zeta)$, wo ich $d\zeta = 0$ annehme, so daß also nur noch $d\lambda$ anzugeben übrig bleibt.

Es

Es zeiget nemlich $d\lambda$ einen kleinen Bogen an, um welchen man in Ansehung der Größe des Neigungs-Winkels der Bewegungs-Ebene des Fernrohrs gegen eine auf die Ebene des Winkelmessers senkrechte Ebene ungewiß bleibt. Dieser Winkel λ lässet sich durch Versuche aus dem Bogen α, der wirklich auf dem Theil-Kreise des Limbi abgemessen wird, auf folgende Weise finden.

Man stellet die Ebene des Winkelmessers horizontal, und das Fernrohr genau mit derselben parallel, drehet in dieser Stellung das Fernrohr nach einer in einer gewißen Entfernung senkrecht hangenden Schnur, bis der senkrechte Faden im Fernrohr dieselbe genau schneidet. In dieser Richtung stehet also das Fernrohr nach Fig. 1. in der Linie PF; bringet man aber dasselbe in die Richtung εP, welche mit PF den Winkel $\varepsilon PF = a^\circ$ macht, so weichet eine Vertical-Ebene $G\varepsilon L$ durch ε, als die Mitte des Objektiv-Glases, von der Vertical-Ebene DAC durch die Mitte des Winkelmessers und die senkrecht hangende Schnur, und den Bogen $A\alpha$ ab, welcher auf dem Theil-Kreise vermittelst der Mikrometer-Schraube gemessen werden kann. Und so wäre also in der Formel $\alpha = \lambda \tan a^\circ$ §. 3. c. α und a° bekannt; daraus $\lambda = \frac{\alpha}{\tan a^\circ} = \alpha \cot a^\circ$ wird. Es ist also $d\lambda = d\alpha \cot a^\circ - \frac{\alpha\, d a^\circ}{\sin^2 a^\circ}$; oder für $d a^\circ = 0$ ist auch $d\lambda = d\alpha \cot a^\circ$. Substituirt man diesen Werth von $d\lambda$ in den Differential-Ausdruck für dP, so wird $dP = d\alpha \cot a^\circ (\tan a^\circ + \tan b^\circ)$.

In diesem leztern Ausdruck ist noch der Werth von $d\alpha$ zu untersuchen.

Es zeiget nemlich $d\alpha$ einen kleinen Bogen an, um welchen man bey Abmessung des Winkels α auf dem Limbo fehlen kann. Diese Fehler theile folgendermassen ein. Man ist erstlich gewiß, bis auf den Winkel $\frac{1}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{F}}$, ob der senkrechte Faden des Mikrometers genau den Faden berühret, einmal, wenn das Fernrohr in

der

der Richtung PF, und das anderemal, wenn dasselbe in der Richtung εP ist: beyde Theile könnten einander aufheben, aber eben sowohl können sie auf entgegengesezte Seiten fallen, so daß hieraus die äusserste Gränze desselben gleich $\frac{2}{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{B}'}{F}$ würde.

Hiezu muß auch noch jener kleine Winkel gerechnet werden, um welchen man fehlen kann in dem Bogen α, weil man die wahre Höhe der Schrauben-Gänge niemals ohne allen Fehler angeben kann. Bezeichnet man den kleinen Winkel, um welchen man aus dieser Ursache fehlen kann, mit dx, so ist der möglichst gröste Werth von

$$d\alpha = \frac{2}{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{B}'}{F} + dx.$$

Verfahren bey Abmessung der Ebene des Limbi.

k. Nun soll der Werth von dQ aufgesucht werden. Es stellet aber nach §. 3. N. III. Q den kleinen Bogen dC' vor, um welchen der Bogen C' kleiner wird, wenn seine Chorde auf der Ebene des Limbi in eine gekrümmte Ebene gebogen wird; es wäre also $dQ = ddC'$. Ich setze aber $ddQ = 0$, weil die Fehler, die bey Abmessung der Abscissen und Ordinaten der gekrümmten Ebene des Limbi möglich sind, so klein sind, daß die Folgen, welche hievon auf die Größe ihrer Bögen, welchen sie zugehören, entstehen, gänzlich als unbedeutend können weggelassen werden.

Das Verfahren, um die Abscissen und Ordinaten zu messen, ist übrigens folgendes. Ich nehme ein Stück (O) von Holz, Eisen oder Meßing rc., das an einem Ende genau rund und lineal-gerade abgedrehet, an der entgegengesezten Seite aber mit einer Spalte versehen ist: in diese Spalte stecke ein Lineal und lasse durch dasselbe sowohl, als durch das Stück (O) einen rund abgedrehten Zapfen gehen, an dessen vorderer Seite eine Schraube eingeschnitten ist, um das Lineal, vermittelst einer Schrauben-Mutter, die an die Wände des Spaltes in dem Stück (O) drückt, feststellen zu können.

Wenn

Wenn nun das Lineal also in dem Stück (O) gleichsam als in einem Gewinde auf= und nieder bewegt werden kann, so stelle das Stück (O) auf die Central=Ebene des Winkelmessers, dergestalt, daß dasselbe, vermittelst des an demselben angebrachten runden Zapfens, der in das Central=Loch des Winkelmessers gesteckt wird, auf der Central=Ebene herumgewendet werden, und in jedem Stande, vermittelst einer Schraube, festgestellt werden kann. Ist dieses geschehen, so lege das Lineal auf die Ebene des Limbi herunter, und suche die Stelle, wo derselbe seinen höchsten Punct hat; während das Lineal auf diesem Puncte ruhet; ziehe die Schraube in dem Stück (O) an, dergestalt, daß das Lineal in dieser Lage feste und unbeweglich stehet: führe sodann dasselbe um den Kreis herum, indem ich das Stück (O) in seinem Zapfen drehe, und messe auf diese Weise bey jeder Vertiefung des Limbi die senkrechte Tiefen der gebeugten Ebene des Limbi um den ganzen Kreis herum.

Zuverläßigkeit bey Aufsuchung der Excentricität des Winkelmessers.

1. Noch ist übrig, in dem Differential=Ausdruck für dC° auch den Werth von dR aufzusuchen.

Es zeiget aber dR einen kleinen Bogen an, um welchen man in der Größe des Winkels ACB ungewiß bleibt, weil der Gang der Alhidade nicht concentrisch ist, und die Excentricität des centri motus von dem Centro des Theil=Kreises nicht ohne allen Fehler abgemessen werden kann. Es ist nemlich §. 3. N. III. für diesen Fall

$$c - \gamma = \frac{2g}{r} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \left((C + x') + \phi\right) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} (C + x'),$$

oder wenn man den kleinen Bogen x gänzlich weglassen will, weil derselbe auf den Bogen $c - \gamma$ beynahe gar keinen Einfluß hat, und also blos allein den Winkel ACB gleich C, für $c - \gamma$ aber den Buchstaben s sezt, so wird auch

$$s = \frac{2g}{r} \operatorname{Cos}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right) . \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C;$$ demnach auch

$$\log s = \log 2 + \log g + \log \operatorname{Cos}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right) + \log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C - \log r.$$

Wird dieser Ausdruck differentiirt, so wird

$$\frac{ds}{s} = \frac{dg}{g} + \left(\tfrac{1}{2} dC + d\phi\right) \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right) - \tfrac{1}{2} dC \cot \tfrac{1}{2} C - \frac{dr}{r}$$

$$\frac{ds}{s} = \frac{dg}{g} - \frac{dr}{r} + \tfrac{1}{2} dC \left(\cot \tfrac{1}{2} C - \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)\right) - d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)$$

$$\frac{ds}{s} = \frac{dg}{g} - \frac{dr}{r} + \tfrac{1}{2} dC \left(\frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C} - \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)\right) - d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)$$

$$= \frac{dg}{g} - \frac{dr}{r} + \frac{dC}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} C} \left(1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)\right) - d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)$$

$$= \frac{dg}{g} - \frac{dr}{r} + \frac{dC}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} C} \cdot \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C + \operatorname{tang}\left(C \frac{1}{2} + \varphi\right)}{\operatorname{tang}\left(C + \varphi\right)} - d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)$$

$$= \frac{dg}{g} - \frac{dr}{r} + \frac{dC . \operatorname{Sin}(C + x)}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C . \operatorname{Cos}\left(\frac{1}{2} C + \varphi\right) \operatorname{tang}(C + \varphi) \operatorname{tang} \frac{1}{2} C} - d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)$$

$$= \frac{dg}{g} - \frac{dr}{r} + \frac{dC . \operatorname{Sin}(C + \phi)}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} C . \operatorname{Cos}\left(\frac{1}{2} C + \varphi\right) \operatorname{tang}(C + \varphi)} - d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)$$

$$\frac{ds}{s} = \frac{dg}{g} - \frac{dr}{r} + dC . \frac{\operatorname{Cos}(C + \varphi)}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2} C . \operatorname{Cos}\left(\frac{1}{2} C + \phi\right)} - d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)$$

Wollte man annehmen, es sey $dC = \frac{(1 + n')\mathfrak{A}}{r \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C}$ nach §. 2. N. II. b. so würde hieraus

$$\frac{ds}{s} = \frac{dg}{g} - \frac{dr}{r} + \frac{(1 + n')\mathfrak{A} . \operatorname{Cos}(C + \varphi)}{2 r \operatorname{Sin} \frac{1}{2} C . \operatorname{Cos} \frac{1}{2} C . \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(C + \varphi)} - d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right)$$

$$= \frac{(1 + n')\mathfrak{A} . \operatorname{Cos}(C + \varphi)}{r \operatorname{Sin} C \ \operatorname{Cos}\left(\frac{1}{2} C + \varphi\right)} + \frac{dg}{g} - \left(d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right) + \frac{dr}{r}\right);$$ also

$$ds = d(c - \gamma) = (c - \gamma)\left(\frac{dg}{g} + \frac{(1 + n')\mathfrak{A} \operatorname{Cos}(C + \phi)}{r \operatorname{Sin} C . \operatorname{Cos}\left(\frac{1}{2} C + \varphi\right)} - \left(d\phi \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2} C + \phi\right) + \frac{dr}{r}\right)\right)$$

Zähler

Zählet man die sämtlichen Werthe von dC, dx, dP, dR, in eine Summe zusammen, so wird für den Fall, daß die Eintheilung auf dem Limbo gänzlich ohne allen Fehler, bey gegenwärtigem Scheiben-Instrument, der Werth von

m. $$dC^\circ = \left(\frac{2}{\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{B}'}{F} + \frac{2\mathfrak{B}}{r \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(h+1)\varepsilon^\circ}\right) \text{ nach e.}$$

$$+ \frac{2\mathfrak{x}.(1+n')\mathfrak{A}}{r.(m+(m-n)\delta)} . \operatorname{Sin}\left(\tfrac{1}{4}\varepsilon+45\right) . \operatorname{Cos}\left(\tfrac{3}{4}\varepsilon-45\right) \operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}\varepsilon^\circ . \text{ nach h.}$$

$$+ d\alpha \operatorname{Cot} a^\circ . (\operatorname{tang} a^\circ + \operatorname{tang} b^\circ) \text{ nach i.}$$

$$+(c-\gamma)\left(\frac{dg}{g} + \frac{(1+n')\mathfrak{A} \operatorname{Cos}(C+\varphi)}{r \operatorname{Sin}C \operatorname{Cos}(\frac{1}{2}C-\varphi)} - d\left(\Phi \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}C+\Phi) + \frac{dr}{r}\right)\right) \text{nach l.}$$

Aus diesem zusammengesezten Fall leite nunmehr einige einfache her:

1. Wenn die Objekte A und B in einerley Horizontal-Ebene liegen, so ist, wenn sonst alles übrige bleibt,

$$dC^\circ = \left(\frac{2}{\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{B}'}{F} + \frac{2\mathfrak{B}}{r. \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(h+1)\varepsilon^\circ}\right)$$

$$+ \frac{2.\mathfrak{x}(1+n')\mathfrak{A}}{r(m+(m-n)\delta)} \operatorname{Sin}\left(\tfrac{1}{4}\varepsilon+45\right) \operatorname{Cos}\left(\tfrac{3}{4}\varepsilon-45\right) . \operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}\varepsilon^\circ$$

$$+(c-\gamma)\left(\frac{(1+n')\mathfrak{A}. \operatorname{Cos}(C+\varphi)}{r \operatorname{Sin} C . \operatorname{Cos}(\frac{1}{2}C+\varphi)} + \frac{dg}{g} - \left(d\Phi \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}C+\Phi)\frac{dr}{r}\right)\right)$$

2. Wenn ausser diesem auch der Gang der Schraube als gänzlich gleichförmig angenommen und dz = o gesezt wird.

$$dC^\circ = \left(\frac{2}{\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{B}'}{F} + \frac{2\mathfrak{B}}{r} \operatorname{Sec}. \tfrac{1}{2}(h+1)\varepsilon^\circ\right)$$

$$+(c-\gamma)\left(\frac{(r+n')\mathfrak{A}. \operatorname{Cos}(C+\varphi)}{r \operatorname{Sin} C . \operatorname{Cos}(\frac{1}{2}C+\varphi)} + \frac{dg}{g} - d\left(\Phi \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}C+\Phi) + \frac{dr}{r}\right)\right)$$

3. Wenn ausser diesem auch noch der Winkelmesser keine Excentricität hat, sondern der Gang der Alhidade concentrisch mit dem Theilungs-Kreise ist, so ist in Secunden

$$dC^\circ = \left(\frac{2}{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{B}'}{F} + \frac{2\mathfrak{B}}{r.\,Cos\frac{1}{2}(h+1)\varepsilon^\circ}\right) 206264;\text{ oder weil } \mathfrak{B} = \frac{1}{\mathfrak{M}}\mathfrak{B}',$$

$$\text{so ist auch } dC^\circ = 2\mathfrak{B}'\left(\frac{1}{\mathfrak{M}F} + \frac{1}{mr}\right) 206264,\text{ beynahe.}$$

n. Ein anderer Fall wäre, wenn man die Voraussetzung nicht wollte gelten lassen, daß die Eintheilung anf dem Limbo gänzlich ohne allen Fehler sey; alsdann müste man auch die Lage des $(h+1)$-ten Theilstrichs der 90 Theilung auf dem Limbo prüfen. Wollte man den kleinen Bogen, für welchen man bey Prüfung der Lage dieses Theilstriches nicht stehen kann, aus Ursache der mancherley Fehler, die sich hiebey einschleichen können, mit $d.(h+1)\varepsilon^\circ$ bezeichnen, so könnte der kleine Bogen $dC^\circ \pm d.(h+1)\varepsilon^\circ$ die äusserste Gränze der Fehler abgeben, zwischen welche diejenigen Fehler, welche der Landmesser, ohnerachtet alles angewandten Fleißes und Sorgfalt, bey Abmessung des Winkels ACB wirklich begangen hat, hineinfallen müssen.

§. 5.

Erläuterung der bisher construirten Formeln für die Correction des gemessenen Winkels durch Zahlen-Exempel.

a. Ich gedenke diese angestellte Betrachtungen, sowohl über die Größe des abgemessenen Winkels ACB, als auch über den Grad der Genauigkeit, den man sich bey dieser Abmessung in Rücksicht auf seine wahre Größe versprechen kann, mit Einem Exempel zu erläutern, und nehme zu dem Ende folgendes an.

Ein Landmesser habe einen Winkelmesser von solcher Beschaffenheit, wie er in §. 1. und §. 2. beschrieben worden. Die 90 Theilung,

lung, deren Halbmesser 1 Schuh ist, streife die Schärfe eines Bleches, auf welchem 31 Theile der 90 Theilung in 30 abgetheilt sind.

Die 96 Theilung, deren Halbmesser 0',998 ist, berühret die Nonius-Abtheilung (*N*), bey welcher 33 Theile der 96 Theilung in 32 Theile getheilt sind. Von der Mikrometer-Schraube gehen 10 Umgänge auf einen Theil oder Grad der 90 Theilung.

n. 1. Mit diesem Winkelmesser nun will der Landmesser die Neigung der beyden Vertical-Ebenen ADC und BDC oder, welches das nemliche ist, den Winkel ACB Fig. 1. von dem Puncte C aus, messen. Während er aber das Fernrohr, bey horizontalem Stande des Winkelmessers, nach dem Objekte A gerichtet hat, und nunmehr dasselbe nach dem Objekte B wendet, habe der Index von N auf der 90 Theilung von dem Punct 0 aus, anf welchem er gestanden, da das Fernrohr nach dem Objekte A gerichtet war, einen Bogen von 59 ganzen Graden, und noch etwas darüber, durchgegangen. Der 8te Theilstrich der Nonius-Abtheilung N passet genau mit dem (59+9)ten Theilstrich der 90 Theilung zusammen.

n. 2. Während dieses Standes des Indicis auf der 90 Theilung stehet der Index der Nonius-Abtheilung *N* zwischen dem 63sten und 64sten Theilstrich inne; der (63+9)te Theilstrich dieser 96 Theilung aber schneidet genau den 8ten Theilstrich der Nonius-Abtheilung.

n. 3. Ergreifet man die Mikrometer-Schraube, so sind noch 7 ganze Umgänge derselben erforderlich, um den Index von *N* genau über den 64sten Theilstrich der 96 Theilung zu bringen.

n. 4. Und bey dem jetzigen Stande des Indicis muß man noch 0,18 einer Revolution vornehmen, bis der Index von N genau den 60sten Theilstrich der 90 Theilung schneidet.

Aus diesen gegebenen Stücken kann nun die Größe des Winkels ACB gefunden werden, und zwar ergeben sich bey diesem Winkelmesser von diesem Winkel ACB auf einmal viererley Maase. Es ist nemlich einmal

durch

durch die 90 Theilung und ihre Nonius - Abtheilung

$$\text{N.I. } ACB = \left(h + \frac{t-1}{m'-1}\right)\varepsilon^\circ = \left(59 + \frac{8}{30}\right)1^\circ = 59^\circ + 16'. \text{ nach §.2. N.I.}$$

durch die 96 Theilung und ihre Nonius - Abtheilung

$$\text{N.II. } ACB = \left(\upsilon + \frac{u-1}{\omega-1}\right)\frac{90}{96}\varepsilon^\circ = \left(63 + \frac{8}{32}\right)\frac{90}{96}60' = 59^\circ + 17' + 48'',8.$$

durch die 96 Theilung mit Hülfe der Mikrometer=Schraube

$$\text{N.III. } ACB = \left(\upsilon + 1 - \frac{32\,\mu}{30.\,q}\right)\frac{90}{96}\varepsilon^\circ = \left(63 + 1 - \frac{7}{10}\right)(56' + 15'') = 59^\circ + 20' + 37'',5.$$

durch die 90 Theilung mit Hülfe der Mikrometer=Schraube

$$\text{N.IV. } ACB = \left(h + 1 - \frac{\mu + \nu}{q}\right)\varepsilon^\circ = \left(59 + 1 - \frac{7,18}{10}\right)1^\circ = 59^\circ + 16' + 55'',2.$$

b. Ein Landmesser, der sich dieses Winkelmessers bedienet, bekommt also von jedem Winkel, den er mit demselben abmißt, zugleich viererley Maase. Treffen diese viererley Maase genau mit einander überein, so hat er auch zugleich das wahre Maas desselben gefunden: sind aber dieselbe, wie in diesem Falle, von einander unterschieden, so hängt es blos von seiner Beurtheilungskraft ab, welches Maas er unter den vieren für das wahre Maas des abgemessenen Winkels halten will. Insgemein bedienet man sich, wenn nicht auffallende Fehler in einer der Theilungen eine Ausnahme machen, des Weges der Näherung, und suchet die Größe des Winkels ACB durch das arithmetische Mittel aus den verschiedenen Maasen dieses Winkels zu bestimmen. Bezeichnet man nach §.3. lit. c. den Bogen von $59^\circ + 16$ mit b'; den Bogen von $59^\circ + 16' + 55'',2$ mit a'; den Bogen von $59^\circ + 18' + 2''$ mit c'; den Bogen von $59^\circ + 17' + 8'',8$ mit d', so wird das acquirte Maas des Winkels

$$ACB = \tfrac{1}{4}(a' + b' + c' + d') = 59^\circ + 17' + 11,''5.$$

Vergleichet man die Bögen a' und d' mit einander, so wird man sehen, daß der Winkel ACB, vermittelst der 96 Theilung und ihrer

ihrer Nonius-Abtheilung gemessen, sehr nahe zusammentreffe mit der Größe des nemlichen Winkels, wenn derselbe durch die 90 Theilung mit Beyhülfe der Mikrometer-Schraube gemessen wird.

Wollte man aus beyden Resultaten das arithmetische Mittel nehmen, so würde hieraus

$$ACB = 59^{0} + 17' + 2''.$$

Auf diese Weise könnte also ein Landmesser dem wahren Maas des Winkels ACB ziemlich nahe kommen, und es möchte auch dieses Verfahren in solchen Fällen immer noch statt finden, wo eben nicht die gröste Schärfe bey Abmessung eines Winkels nöthig ist. In Fällen aber, wo die möglichste Genauigkeit erfordert wird, muß ein Landmesser noch nähere Untersuchungen über die Beschaffenheit seines Winkelmessers anstellen. Er muß nemlich, wenn ich auch annehmen wollte, daß beyde Eintheilungen auf dem Limbo, und auch beyde Nonius-Abtheilungen gänzlich ohne allen Fehler aufgezeichnet angesehen werden könnten, die Lage beyder Anfangs-Puncte der Theilungen auf dem Limbo untersuchen, ob nemlich beyde in einer geraden Linie gegen das Centrum zu liegen. Eben diese Untersuchungen muß er auch anstellen über die Lage der Anfangspuncte beyder Nonius-Abtheilungen; und drittens muß er auch die Weite der Schrauben-Gänge durch Versuche prüfen.

c. Von diesem leztern Fall gehe nunmehr aus, und beschreibe das Verfahren, welches ein Landmesser beobachten mag, wenn es die Beschaffenheit der Umstände erfordert, das Maas des abgemessenen Winkels ACB nach der möglichsten Genauigkeit anzugeben. Ich setze voraus: der Landmesser lege hiebey das Maas des Winkels ACB zum Grunde, so wie solches die 90 Theilung auf dem Limbo ergibt, da dieser Winkel nach dieser Theilung mit Beyhülfe der Mikrometer-Schraube abgemessen worden.

Um aber nach **möglichster Genauigkeit** das Maas des Bogens C+x angeben zu können, wird derselbe Prüfungen über alle diejenigen Theile an seinem Winkelmesser anzustellen haben, welche nur immer auf die Größe des abgemessenen Winkels ACB einen Einfluß haben können.

Er wird also einmal zu prüfen haben: die Lage des 60ten Theilstrichs auf dem Limbo.

Zweytens: den Gang der Mikrometer-Schraube.

Drittens: den Gang des über der Alhidade befindlichen Fernrohrs, ob seine Bewegungs-Axe parallel mit der Ebene des Winkelmessers ist, oder mit derselben einen Winkel macht.

Viertens: die Ebene des Limbi innerhalb des Bogens der Chorde von 60 Graden.

Fünftens: den Gang der Alhidade, ob selbiger mit dem Theilungs-Kreise concentrisch ist.

Was nun die Prüfung über die Lage des 60ten Theilstriches auf dem Theil-Kreise der 90 Theilung anbetrift, so nehme ich an, es seye derselbe gänzlich ohne allen Fehler an seinem rechten Orte auf dem Theil-Kreise aufgezeichnet, weil mich die Beschreibung der Prüfungs-Methoden über die Lage dieses Theilstrichs auf ein sehr weit ausgedehntes Feld führen und mich von meinem vorhabenden Plan gar zu weit entfernen würde. Ich gedenke bey einer andern Gelegenheit besondere Betrachtungen über die Prüfungs-Methoden über die Eintheilung auf einem Winkelmesser anzustellen, und zugleich auch Formeln ausfindig zu machen, nach welchen man den Grad der Genauigkeit bey jeder der verschiedenen Prüfungs-Methoden angeben kann. Was nun also die Prüfung über den Gang der Mikrometer-Schraube anbetrift, so nehme ich an, der Landmesser prüfe seine Schraube nach der im §. 3. f. angezeigten Methode. Er befindet, daß 10 Umgänge der Schraube genau 0',01745 Theile eines Schuhes messen. Es fragt sich also zuerst, wie groß ist der Bogen oder Winkel ε, welchen diese 10 Schrauben-Gänge in der Entfernung eines Schuhes in dem Centro des Winkelmessers messen? Die Gleichung $\text{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{n}{2r}$ leistet dieser Frage ein Genüge: es ist nemlich in gegenwärtigem Fall $r = 1'$ $n = 0',01745$; demnach $\text{Sin}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{0',01745}{2}$; oder, weil der in §. 3. f. gemachten Bedingung gemäs,

gemäs, der Bogen ε nicht über zwey Grade seyn darf, so ist auch $\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{0',01745}{2} . 206264$; also $\varepsilon = 0',01745 . 206264 = 3600'' = 1°$.

Wenn nun alle 10 Schrauben-Gänge einander gleich wären, so wäre die Höhe eines Schrauben-Ganges gleich $\frac{n}{m} = \frac{0',01745}{10}$; oder in Theilen eines Grades gleich $\frac{3600}{10} = 360'' = 6$ Minuten.

Alleine der Landmesser befindet, daß die vier ersten Schrauben-Gänge einander durchaus gleich; von den sechs leztern aber jeder um 0,04 eines Umganges größer, als einer der vier erstern seyn.

Setzet man nun, es sey z die Höhe des ersten Schrauben-Ganges, und in der Formel vor z §. 3. f.

$$\delta = 0{,}04 = \varepsilon = \eta = \vartheta = \zeta = i;\ m = 10.\ \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

so misset einer der vier ersten Schrauben-Gänge

$$\frac{3600''}{10 + 6 . 0{,}04} = 351'',56 \text{ Secunden.}$$

und einer der sechs leztern misset

$$\frac{(365{,}62)\ 3600''}{351{,}56 . (10 + 6 . 0{,}04)} = 365{,}62 \text{ Secunden.}$$

Nun aber habe ferner der Landmesser bemerket, daß, während er den Index der Nonius-Abtheilung der 90 Theilung aus seiner Lage, in welcher er sich befand, da das Fernrohr nach dem Objekte B gerichtet war, gebracht, und vermittelst der Schraube auf den 60sten Theilstrich gestellet, bey dieser Verrichtung, die vier ersten Schrauben-Gänge, und 3,18 der übrigen in Activität gewesen. Da er nun dieses, und auch zugleich nunmehr die Weite jedes Schrauben-Ganges seiner Schraube weiß, so kann er dadurch sehr leicht die Größe des Bogens x' finden, es ist nemlich

$$x' = 1° - (351'',56)\,4 - (365{,}62) . 3{,}18 = 3600'' - 2568'',91 = 17' + 11'',9.$$

Demnach das Maas des Bogens $C + x = 59° + 17' + 11'',9$.

d. Dieses würde nun also wohl das wahre Maas des Bogens $C+x$ auf dem Limbo seyn, wenn die Ebene des Limbi zwischen der Chorde von 60 Graden plan, und der Gang der Alhidade concentrisch mit dem Theilkreise wäre.

Nachdem aber der Landmesser die Ebene seines Winkelmessers nach §. 3. k. prüfet, findet er, daß die Ebene desselben vom Theilstrich 0 bis zum 15ten Grade eben sey: von diesem an aber fängt sich eine Vertiefung an, welche bey dem 42sten Grade eine Krümmung des Limbi zeiget, der eine Abscisse von 0',008 eines Schuhes zugehöret, bey dem 52sten Grade aber wird die Ebene des Limbi wieder plan.

Um nun den Fehler, welcher hieraus auf den Bogen $C+x$ entstehet, zu berechnen, lege ich die Formel §. 2. N. II. f. zum Grunde; es ist also in derselben $x'' = 0',008$; $\beta = 27°$; $\gamma = 10°$; demnach

$$dC = 0'008^2 \frac{\text{Cos}\left(\frac{1}{4}27 + \frac{10}{4}\right) \text{Cos}\left(\frac{27}{4} - \frac{10}{4}\right) . 206264}{\text{Cos}\frac{27}{2} . \text{Cos}\frac{10}{2} . \text{Cos}\frac{1}{2}(27+10)}$$

welches sich durch Logarithmen also berechnen läßt

$$\begin{aligned}
\log 0{,}008^2 &= 1{,}8061800 - 6.\\
\log \text{Cos}\, 9:15 &= 9{,}9943156 - 10.\\
\log \text{Cos}\, 4:15 &= 9{,}9988041 - 10.\\
\log\ 206264 &= \underline{5{,}3144252.}\\
&\quad 27{,}1137249 - 26.\\
&\quad \underline{29{,}9631323 - 30.}\\
\log dC &= 3{,}1505926 - 2,\\
dC &= -\ 14'',15.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \text{Cos}\, 13:30 &= 9{,}9878315 - 10\\
\log \text{Cos}\, 5°:- &= 9{,}9983442 - 10\\
\log \text{Cos}\, 18:30 &= \underline{9{,}9769566 - 10}\\
&\quad 29{,}9631323 - 30
\end{aligned}$$

Auf diese Weise würde also das Maas des Bogens $C+x$ auf die Horizontal-Ebene reducirt, gleich

$$C+x = 59° + 17' + 11'',9 - 14'',15 = 59° + 16' + 57'' + 75.$$

e. Aber

e. Aber der Index der Alhidade gehet nicht in dem Bogen ACB, dessen Maas der Bogen $C+x$ ist; sondern er durchstreifet, während das Fernrohr aus der Richtung nach dem Objekte A in die Richtung nach dem Objekte B gebracht wird, auf dem Limbo einen Bogen $aO\beta$, der den Theilkreis der 90 Theilung in dem Puncte O durchschneidet.

Um also den Fehler angeben zu können, der hieraus auf die Größe des abgemessenen Winkels ACB entstehen mag, macht der Landmesser mit seinem Winkelmesser folgenden Versuch.

Er stellet nach Fig. 3. den Index der Alhidade auf den Anfangspunct der Eintheilung A, drehet sodann die Alhidade von der Linken zur Rechten nach B, und findet, daß der Cirkelbogen, welchen der Index auf dem Limbo beschreibet, bey dem 41°: 17′ den Theilkreis der 90 Theilung durchschneidet. Oder es ist auch nach §. 2. N. III. und Fig. 3.

$$\left.\begin{array}{r|c} \text{der Bogen} & \text{die Abscisse.} \\ AO = 41^\circ:17' & ..\ 0 \\ AOc = 131:17 & 0',001. \\ AOco = 221:17 & ..\ 0 \\ AOcof = 311:17 & 0',001. \\ AOcofA = 360:- & \end{array}\right\} \text{demnach } \Phi = 360^\circ - 311^\circ:17 = 48^\circ:43'.$$

Es ist also $c-\gamma = 2 \,.\, 0',001 \,.\, \mathrm{Cos}\left(\frac{1}{2}(59+17)+48:43\right) \,.\, \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(59^\circ:17') \,.\, 206264$, welches durch Logarithmen also berechnet wird

$$\begin{array}{rl} \log\ 0',002 & = 0,3010300-3 \\ \log \mathrm{Cos}\,(78^\circ:21) & = 9,3052066-10 \\ \log\ \mathrm{Sin}\,(29^\circ:38) & = 9,6941203-10 \\ \log\ 206264 & = 5,3144252 \\ \hline \log\,(c-\gamma) & = 3,6147821-2\ .\ \text{also} \\ c-\gamma & = 41'',19. \end{array}$$

Der Index der Alhidade hat sich also bey Abmessung des Winkels ACB auf dem Limbo um einen Bogen D von $59^\circ + 16' + 57,73 + 41'',19 = 59^\circ + 17' + 38'',94$ verschoben.

f. Allein dieses ist noch nicht der Bogen, um welchen sich die Central-Axe des Fernrohrs, während dasselbe von dem Objekte A nach dem Objekte B geführet würde, gedrehet hat; denn in Fig. 1. ist ab dieser Bogen, AB aber der Bogen, welchen der Index bey Abmessung des Winkels ACB auf dem Limbo durchgegangen hat. Es sey aber $AB = D$; und $ab = C + \lambda\,(\tan a^\circ + \tan b^\circ)$; den Werth von λ findet der Landmesser nach §. 3. lit. i. Wenn nemlich alldorten $\alpha = 30$ Secunden und $a^\circ = 5^\circ$ ist, so ist $\lambda = 30''$. $\mathrm{Cot}\ 5^\circ . 206264 = 5' + 42'',7$.

Weiß der Landmesser ferner, daß er bey Abmessung des Winkels ACB in Ansehung des horizontalen Standes seines Winkelmessers nur bis auf einen Winkel von 5 Minuten $= \zeta$ gewiß seyn konnte, so wird in Fig. 1. $ab = D + (\lambda \pm \zeta)\ (\tan a^\circ + \tan b^\circ)$ $= D + (\lambda + \zeta) . \dfrac{\mathrm{Sin}\,(a^\circ + b^\circ)}{\mathrm{Cos}\,a^\circ\ \mathrm{Cos}\,b^\circ}$; oder in diesem Fall der Bogen

$$ab = 59^\circ + 17' + 38'',94 \mp (10' \mp 43'') . \frac{\mathrm{Sin}\,(5^\circ + 4^\circ)}{\mathrm{Cos}\,5^\circ\ \mathrm{Cos}\,4^\circ}\ 206264.$$

Es ist aber

$$\begin{array}{rlrl}
\log 10' + 43'' = & 7,4917541 - 10. & \log \mathrm{Cos}\,5^\circ = & 9,9983442 - 10 \\
\log \mathrm{Sin}\,9^\circ = & 9,1943324 - 10. & \log \mathrm{Cos}\,4^\circ = & \underline{9,9989408 - 10} \\
\log 206264 = & \underline{5,3144252} & & 19,9972950 - 20 \\
& \overline{22,0005117 - 20.} & & \\
& \underline{19,9972950 - 20.} & & \\
\log P = & 3,0032267 - 1 & & \\
P = & 100'',8 = 1' + 40'',8. & &
\end{array}$$

Demnach ist also das wahre Maas des abgemessenen Winkels ACB oder $C = D + P$; oder auch, weil an diesem Falle $D = C + x' + R + Q'$ ist, so ist auch

$C^\circ =$

$$
\begin{aligned}
C^{\circ} &= C + x' + P + R - Q; \\
&= \left.\begin{array}{l} 59^{\circ} + 17' \pm 11'',9. \\ \quad + \;\; 1 \mp 40',8. \\ \qquad\;\; + 41,19. \\ \qquad\;\; - 14,15. \end{array}\right\} = 59^{\circ} + 19' + 19'',74.
\end{aligned}
$$

§. 6.

Auflösung der Formeln für die Zuverläßigkeit in Rücksicht der wahren Größe des abgemessenen Winkels ACB, in Zahlen.

Nachdem ich in §. 5. gezeiget habe, auf was Art man verfahren müsse, um das Maas des abgemessenen Winkels ACB nach möglicher Schärfe und Genauigkeit angeben zu können, so bleibt mir nur noch übrig, auch durch ein angenommenes Beyspiel zu zeigen, mit was für einem Grad der Zuverläßigkeit man die Größe dieses Winkels bestimmen kann, wenn derselbe nach den in §. 4. gegebenen Regeln berechnet wird.

a. Ich verfahre hiebey nach der Ordnung der Glieder in dem Differential-Ausdruck von dC°; suche also fürs erste den Werth von dC auf. Es ist aber nach §. 3. e.

$$dC = \left(\frac{2}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{\mathfrak{B}'}{F} + \frac{2\,\mathfrak{B}}{r.\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(h+1)\varepsilon^{\circ}} \right) 206264.$$

Nun sey auf einem Gegenstand, welchen der Landmesser in einer Entfernung von 8 Zollen, bey Erleuchtung der Atmosphäre, noch sehr deutlich siehet, der Punct $\mathfrak{B}'$ der kleinste Punct, welchen derselbe auf dem Gegenstande noch sehr deutlich zu sehen vermag, und sey gleich 0,00012 eines Schuhes. Die Vergrößerung des Fernrohrs sey 20mal, und die Brenn-Weite des Objekts von 2 Fuß, so ist einmal $dC = \left(\frac{0{,}00012}{20} + \frac{0{,}00024}{0{,}5} \right) 206264 = 37{,}12$ Secunden.

b. Es

b. Es ist ferner $dx = \frac{2 \cdot \mathfrak{r}(1+n')\mathfrak{A}}{r(m+(m-n))\delta} \mathrm{Sin}(\frac{1}{4}\varepsilon+45)\mathrm{Cos}(\frac{3}{4}\varepsilon-45)\mathrm{Sec}\frac{1}{2}\varepsilon^{\circ}$.
In diesem Ausdruck von dx zeiget $\mathfrak{A}$ die äusserste Gränze des Fehlers, welchen der Landmesser bey Abmessung einer jeden Länge (L) mit dem Zirkel, in Ansehung der Schärfe seines Gesichts und der Dicke der Zirkel-Spitzen an jedem Ende derselben begehen mag; um den Theil $\mathfrak{A}$ selbst aber kann er nicht fehlen. Ist nun die abzumessende Länge an ihren beyden Enden gleich scharf, so wird $n'=1$, und es sey $\mathfrak{A}$ 0,00015 eines Schuhes in diesem Fall, wenn der Landmesser den Bogen ε mit blosem Auge betrachtet; oder $\mathfrak{A} = 0{,}00012 + 0{,}00003$; bedient er sich aber eines convexen Glases (U) von $1\frac{1}{3}$ Zoll Brenn-Weite, das ihm also jeden Punct $\frac{8}{1\frac{1}{3}} = 6$mal vergrößert, so ist für diesen Fall der Werth von $\mathfrak{A} = 0{,}00002 + 0{,}00003 = 0{,}00005$; also gerade den dritten Theil so groß als vorhin.

Es ist ferner für diesen Fall, nach §. 4. l. c. $\mathfrak{r} = 7$; $\varepsilon = 1^{\circ}$. $m = 10$; $n = 4$; $\delta = 0{,}04$; $r = 1 = n$. Demnach ist

$$dx = \frac{4\ 7\ 0',00015}{10+(10-6)0',04} \cdot \mathrm{Sin}(\tfrac{1}{4}{}^{\circ}+45)\,\mathrm{Cos}(\tfrac{3}{4}{}^{\circ}-45)\,\mathrm{Sec}^2\tfrac{1}{2} \cdot 206264$$

welches durch Logarithmen also berechnet wird.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Es ist } \log 28 \,.\, 0',00015 & = & 2{,}6232493-5 \\
\log \mathrm{Sin}(45^{\circ}+15') & = & 9{,}8503717-10 \\
\log \mathrm{Cos}(\frac{3}{4}{}^{\circ}-45') & = & 9{,}8550961-10 \\
\log \mathrm{Sec}\ 30' & = & 0{,}0000350 \\
\log 206264 & = & 5{,}3144252 \\
\hline
 & & 27{,}6441753-25 \\
\log 10{,}16 & = & 3{,}0068937-2 \\
\hline
\log dx & = & 3{,}6372816-2 \\
dx & = & -\ 43'',38.
\end{array}$$

ohne das Glas (U), mit Beyhülfe desselben aber ist $dx = -\ 14{,}46$.

Man

Man könnte also in Abmessung des Bogens x nur bis auf 14,46 Secunden gewis seyn, wenn man denselben mit der Mikrometer-Schraube mißt, und übrigens noch Verzicht auf diejenigen kleinen Fehler thut, welche von dem Spiel-Raum der Schraube in ihren Gängen entstehen können.

c. Was dP anbetrift, so ist $dP = d\alpha . \text{Cot } a^\circ . (\text{tang } a^\circ + \text{tang } b^\circ)$ und $d\alpha = \frac{2 . 0{,}00012}{20 . 2} + dx$.

Ich setze $dx = 0$, weil α nur ungefähr der 12te Theil eines Schrauben-Umganges, also dx gleichsam verschwindend ist. Demnach ergibt sich $d\alpha = 0{,}00006 . 206264 = 12'',37$; und

$$dP = \frac{\alpha \text{ Cot } a^\circ \text{ Sin } (a^\circ + b^\circ)}{\text{Cos } a^\circ \text{ Cos } b^\circ}\, 206264 = \frac{13'',4 . \text{Cot } 5^\circ \text{ Sin } (5^\circ + 4^\circ)}{\text{Cos } 5^\circ \text{ Cos } 4^\circ}$$

Dieser Ausdruck logarithmisch berechnet, gibt folgendes.

Es ist

$$\begin{array}{rl} \log 13'' = & 5{,}7995197 - 10. \\ \log \text{Cot } 5^\circ = & 11{,}0580482 - 10. \\ \log \text{Sin } 9^\circ = & 9{,}1943324 - 10. \\ \log 206264 = & \underline{5{,}3144252.} \\ & 31{,}3663215 - 30. \\ & \underline{19{,}9972850 - 20.} \\ \log dP = & 3{,}3690409 - 2. \\ dP = & 21{,}6 \text{ Secunden.} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \text{Cos } 4^\circ = & 9{,}9989408 - 10 \\ \log \text{Cos } 5^\circ = & \underline{9{,}9983442 - 10} \\ & 19{,}9972850 - 20 \end{array}$$

d. Leztlich ist auch dR, wenn $d\Phi = 0$ gesezt wird, gleich

$$(c - \gamma)\left(\frac{(1 + n')\mathfrak{A} . \text{Cos } (C + \varphi)}{r . \text{Sin } C \text{ Cos } (\frac{1}{2} C + \varphi)} \mp \frac{dg}{g} + \frac{dr}{r}\right) 206264.$$

In dieser Formel ist nach §. 4. e. $c - \gamma = 41'',19$. $\Phi = 48^\circ : 43'$. $g = 0',001$. $dg = dr = \mathfrak{A} = 0',00015$. C sey $59^\circ : 17$.

 Durch

Durch Logarithmen lässet sich dR also berechnen

$$\log 41'' = 5{,}2983508 - 8. \quad \log \mathrm{Sin}\, 59^\circ : 17 = 9{,}9343488 - 10$$
$$\log 0{,}0003 = 0{,}4771213 - 4. \quad \log \mathrm{Sin}\, 11^\circ : 39 = 9{,}3052066 - 10$$
$$\log \mathrm{Sin}\, 72 = 9{,}9782063 - 10. \qquad\qquad 19{,}2395554 - 20$$
$$15{,}7536784 - 22.$$
$$19{,}2395554 - 20.$$
$$3{,}5141230 - 9.$$ Hiezu gehört die Zahl $- 0{,}000003267$.

Es ist ferner $\frac{dg}{g} = \frac{0',00015}{0{,}001} = 0',15$. $\frac{dr}{r} = 0{,}00015$.

und es ist $\log (0',000003267 + 0',15 + 0'00015)$ folgender

$$4{,}1765253 - 5$$
$$4{,}2983508 - 8 = \log 41''.$$
$$5{,}3144252$$
$$3{,}7893013 - 3 = \log dR.$$
$$+ 6'',156 = dR.$$

Bedienet sich der Landmesser des Vergrösserungs-Glases, so ist $dR = 2'',06$.

Zählet man die für dC, dx, dP, dR gefundenen Werthe in eine Summe, und sezt voraus, die 90 Theilung auf dem Limbo seye ohne Fehler, so wird der möglichst gröste Werth von

$$dC^\circ = 37'',12 + 14'',46 + 12'',37 + 21'',6 + 2'',06 = 1' + 8''.$$

Man bleibt also, wenn der Winkel ACB mit dem zum Grunde gelegten Winkelmesser abgemessen wird, in dem unstreitig allerseltensten Fall, wo nemlich alle während der Operation mögliche Fehler, auf eine Seite fallen, in Ansehung seiner wahren Größe bis auf einen Bogen von $1' + 8'$ gewiß.

Wollte man setzen, es sey $dx = 14'',46 = 0$, wie es auch in den meisten Fällen erlaubt seyn wird, weil die kleinen Fehler, denen man sich bey Abmessung der Weite der Schrauben-Gänge aussezt, sich meistentheils gegen einander aufheben, so wird hierdurch

$$dC^\circ = 53{,}15 \text{ Secunden.}$$

d. Einen

d. Einen größern oder kleinern Werth müste dC° überkommen, wenn man die Voraussetzung aufgiebt, daß die 90 Theilung auf dem Limbo ohne allen Fehler sey: in diesem Fall müste man auch noch den kleinen Bogen in Rechnung bringen, um welchen man bey Prüfung der Größe des Bogens $(h+1)\varepsilon^\circ$ auf dem Limbo ungewiß bleibt. Diesen kleinen Bogen bezeichne mit $d.(h+1)\varepsilon^\circ$; es wird also diesem zu Folge

$$dC^\circ = 53''15 \pm d.(h+1)\varepsilon^\circ.$$

Aus diesem zusammengesezten Falle leite nunmehr einige andere etwas einfachere her; als nemlich:

n. 1. Wenn zwar der Winkel ACB mit dem bey diesen Untersuchungen zum Grunde gelegten Winkelmesser abgemessen wird, aber die Objekte A und B in einerley Horizontal-Ebene liegen. In diesem Fall wird $dP = 0$

$$dC^\circ = 31'',55 + (h \pm 1)\varepsilon^\circ.$$

Eben diesen Werth muß dC° auch haben, wenn $\lambda = 0$, also die Bewegungs-Ebene des Fernrohrs senkrecht auf die Ebene des Limbi ist.

n. 2. Wenn $\lambda = 0$, und der Gang der Alhidade concentrisch mit dem Theilkreise der 90 Theilung ist, wird $dR = 0$

$$dC^\circ = 29''49 \pm d.(h+1)\varepsilon^\circ.$$

n. 3. Setzet man in dem Differential-Ausdruck für dC §. 3. $B = \frac{0,00012}{6}$, so würde bey einem Winkelmesser, dessen Fernrohr senkrecht auf seine Ebene auf- und niedergehet, und bey welchem der Gang der Alhidade concentrisch mit dem Theilkreise ist,

$$dC^\circ = 9'',45 \pm d.(h+1)\varepsilon^\circ.$$

§. 7.

Vergleichung der viererley Maaße, welche man für den Winkel ACB mit diesem Scheiben-Instrument erhalten hat.

Wenn man nach dem in §. 4. gezeigten Verfahren die Größe des Winkels ACB, so wie derselbe nach der 96 Theilung mit Anwendung der Mikrometer-Schraube mit diesem Winkelmesser abgemessen worden, zu wissen verlangte, so würde derselbe, wenn die in §. 4. c. für die Schrauben-Gänge angestellte Correction auch hier vorgenommen wird, folgendes Maas haben. Es würde nemlich

$C° = C + \gamma' + P + R - Q$; oder, wenn die Werthe von P, R, Q beybehalten werden, wie sie nach der 90 Theilung gefunden worden, so würde

$$C° = 59° + 19' + 16'',18.$$

Beyde Werthe von C° würden also folgendermaßen neben einander.

Wenn der Winkel ACB nach der 90 Theilung mit Beyhülfe der Mikrometer-Schraube gemessen wird, so ist	$59° + 19' + 19'',74$	$\Big\}= C°.$
Wenn der Winkel ACB nach der 96 Theilung mit Beyhülfe der Mikrometer-Schraube gemessen wird, so ist	$59° + 19' + 16'',18$	
Und wenn der Winkel ACB nach Graden der 90 Theilung und Theilen ihrer Nonius-Abtheilung gemessen wird, so ist	$59° + 18' + 56'',64$	$\Big\}= C°.$
Wenn der Winkel ACB nach Theilen der 96 Theilung und ihrer Nonius-Abtheilung gemessen wird, so ist	$59° + 18' + 56'',68$	

Ver-

Vergleichet man die verschiedenen Maaße für den Winkel ACB unter einander, so wird man folgendes finden.

Erstlich treffen die Maaße für den Winkel ACB, wenn derselbe nach Theilen der 96 und 90 Theilung mit Beyhülfe der Mikrometer-Schraube abgemessen wird, sehr gut zusammen, denn ihr Unterschied ist nur 3,56 Secunden.

Zweytens: Auch die Maaße des Winkels ACB, wenn derselbe nach Theilen der 96 und 90 Theilung und ihren Nonius-Abtheilungen gemessen wird, treffen ziemlich genau überein, denn ihr Unterschied ist 49,52 Secunden.

Am grösten aber ist der Unterschied zwischen den Maaßen des Winkels ACB, wenn derselbe nach der 90 Theilung entweder nach Theilen der Mikrometer-Schraube, oder nach Theilen der Nonius-Abtheilung derselben, bey diesem Winkelmesser gemessen wird; denn dieser Unterschied beträgt in diesem Falle $1' + 12''62$. Aus diesem auffallenden Unterschiede wird also ein Landmesser Gelegenheit nehmen, insbesondere die Lage des $(h+t+1)$ten Theilstriches auf dem Limbo und t ten auf der Nonius-Abtheilung dieser 90 Theilung zu prüfen.

Untersuchung über die Lage der Anfangs-Puncte der 90 und 96 Theilung auf dem Limbo.

Die Anfangs-Puncte der 90 und 96 Theilung auf dem Limbo scheinen bey diesem Winkelmesser so ziemlich in einerley Central-Linien zu liegen, weil die Maaße für den Winkel ACB, wenn derselbe nach Theilen der 96 und 90 Theilung und Theilen ihrer Nonius-Abtheilungen gemessen wird, so ziemlich genau mit einander übereintreffen. Dem ohngeachtet aber muß ein Landmesser niemals unterlassen, bey einem Winkelmesser die Lage der beyden Anfangs-Puncte der Nonius-Abtheilungen und die Lage beyder Anfangs-Puncte der 90 und 96 Theilung auf das schärfeste zu prüfen; in Ansehung der Prüfung der leztern aber gehe folgendermaßen zu Werke.

Es sey in Fig. 10. $\delta O \gamma$ ein Stück des Theil-Risses der 90 Theilung; dfc ein Stück des Theil-Risses der 96 Theilung; fO die durch beyde Anfangs-Puncte der 90 und 96 Theilung, äusserst fein gezogene Linie. Um nun zu untersuchen, ob diese Linie fO auch senkrecht auf den Kreis $\delta O \gamma$ sey, bezeichne mit einer beliebigen Zirkel-Weite aus O auf cfd, zwey äusserst feine Pünctgen d und c, setze die Zirkel-Spitze genau in d und c, und bemerke auf dfc zwey Pünctgen a und b in gleichen Entfernungen von d und c; jedoch daß die Weite ab immer noch innerhalb eines Grades bleibe.

Ist nun der Punct f oder der Anfangs-Punct der 96 Theilung an seinem rechten Orte, so ist $af = fb$.

Nun nehme ferner an, der Landmesser messe das Spatium ab durch Schrauben-Umgänge, und es messe nach denselben die Weite ab v Secunden; die Weite fb aber messe w Secunden, und es sey $fb < af$; oder $w + o = \frac{1}{2} v. =$ oder $fb + cf = ac = \frac{1}{2} ab$. Demnach ist $o = \frac{1}{2} v - w$ Secunden, und um diesen kleinen Bogen o wiche also der Anfangs-Punct der 96 Theilung au dem Limbo von seinem gehörigen Platze ab, und es würde in diesem Fall jeder auf der 96 Theilung abgemessene Winkel um den Winkel x zu groß, wenn auch übrigens diese Eintheilung selbst ohne allen Fehler wäre.

Um dieses mit einem Exempel deutlicher zu machen, so seyen 6 Schrauben-Gänge erforderlich, um den Index von N von b nach a zu bringen. Von b bis f wird die Schraube dreymal gewendet, und es sind diejenigen Schrauben-Gänge in Activität, von welchen einer 351,56 Secunden mißt, von den drey übrigen aber misset jeder 365,62 Secunden. Es ist also $w = 1054,68$; $v = 2151,54$; demnach $o = 1075,77 - 1054,68 = 21'',9$ Secunden.

Unter-

Untersuchung, mit welcher Zuverläßigkeit man sich nach diesem angezeigten Verfahren von der Lage der Anfangs-Puncte der 90 und 96 Theilung überzeugen kann.

b. Was den Grad der Genauigkeit betrift, den man bey dieser Prüfung nach dieser Methode in Ansehung der wahren Lage des Punctes f zu erwarten hat, so ist einmal $d o = \frac{1}{2} d v - d.w$; oder wenn man annimmt, fb sey um dw zu klein gemessen, so ist

$$d o = \tfrac{1}{2} d.v + d.w.$$

Aber es ist $d v = (1 + n')\mathfrak{B}$, weil man in Ansehung des wahren Standes des Indicis bey dem Puncte a und b jedesmal nur bis auf den Theil $\mathfrak{B}$ gewiß ist. Aus dem nemlichen Grunde ist auch $d.w = (1 + n')\mathfrak{B}$; demnach $d o = \frac{3.(1+n')\mathfrak{B}}{2.\varrho.\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2} v}\,206264.$ Und dieses würde auch zugleich der möglichst gröste Werth von do seyn.

c. Demnach ist, wenn der Winkel ACB durch die 90 Theilung mit Hülfe der Mikrometer-Schraube gemessen wird,

$$dC^\circ = dC + dx + dP + dR \pm d(h+1)\varepsilon^\circ.$$

Wenn der Winkel ACB durch die 96 Theilung mit Hülfe der Mikrometer-Schraube gemessen wird,

$$dC^\circ = dC + dy + dP + dR \pm d.(v+1)\varepsilon^\circ \pm do.$$

Wenn der Winkel ACB nach der 90 Theilung und Theilen der Nonius-Abtheilung gemessen wird,

$$dC^\circ = dC + dP + dR \pm \begin{cases} d.(h+t+1)\varepsilon^\circ \\ d.t(\varepsilon^\circ + \alpha^\circ) \end{cases}$$

Wenn der Winkel ACB nach der 96 Theilung und Theilen der Nonius-Abtheilung derselben gemessen wird,

$$dC^\circ = dC + dP + dR \pm \begin{cases} d.(v+u+1)\varepsilon' \\ d.u(\varepsilon' + \alpha') \end{cases} \pm do.$$

Ich

Ich halte dafür, alle von §. 1. bis jezt angestellte Betrachtungen mögen hinlänglich seyn, einen Landmesser in den Stand zu setzen, die wahre Größe eines jeden mit einem dergleichen Winkelmesser abgemessenen Winkels nach möglichster Genauigkeit anzugeben, und den Grad der Zuverläßigkeit, welchen er bey dieser Abmessung in Rücksicht der wahren Größe dieses Winkels erreichen kann, zu untersuchen.

Es bleibt also noch übrig, ähnliche Betrachtungen anzustellen über die Abmessung solcher Winkel, welche auf einer Ebene aufgezeichnet sind; und hierüber bemerke in möglichster Kürze folgendes.

§. 8.

Abmessung des Winkels ACB, wenn derselbe auf einer Ebene aufgerissen ist.

Die Arbeit des Landmessers bey Abmessung eines Winkels auf dem Felde hat sehr viel ähnliches mit der Arbeit bey Abmessung eines auf einer Ebene aufgezeichneten Winkels: bey ersterer untersuchet er die Größe des Neigungs-Winkels, welchen zwey Vertical-Ebenen, die man sich aus einem Standpuncte nach zweyen Gegenständen verlängert denkt, an diesem Standpuncte bilden; bey der andern aber untersucht er die Größe des Neigungs-Winkels, welchen zwey in einem Puncte sich durchkreuzende Linien in diesem Puncte formiren. Aus dem Grunde kommen auch die Werkzeuge, deren man sich zu diesen beyderley Gattungen von Abmessungen bedient, sehr viel mit einander überein. Denn man misset die Größe der auf einer Ebene aufgezeichneten Winkel eben sowohl nach Graden und deren Theilen entweder durch ihren Bogen selbst, oder nach der Chorde oder Tangente dieses Bogens; eben so wie die Winkel auf dem Felde; nur sind die Werkzeuge weniger zusammengesezt, als diejenigen, deren man sich zu Abmesseung eines Winkels auf dem Felde bedienet. Denn um die Größe eines auf einer Ebene aufgezeichneten Winkels abzumessen, bedient man sich blos des sogenannten Transporteurs, oder auch einiger Lineale, auf deren Ebene entwe-

entweder Theile des Halbmessers, oder auch nach diesen Theilen berechnet, Chorden oder Tangenten der Winkel aufgezeichnet sind. Es würde höchst überflüssig seyn, die Behandlungs-Maximen mit einem jeden dieser Werkzeuge bey Abmessung eines Winkels, allhier näher aus einander zu setzen, weil diese analytischen Betrachtungen nicht für Feldmesser vom gemeinen Schlag geschrieben sind, und überdas hierüber in sehr vielen Büchern Anweisung gegeben wird.

Ich begnüge mich also, hier nur einige Untersuchungen anzustellen über den Grad der Zuverläßigkeit bey Abmessung eines Winkels ACf Fig. 3. auf dem Papier, vermittelst eines sogenannten Transporteurs.

Dieser Transporteur sey in seine Grade, halbe und Viertels-Grade, genau durch äußerst feine Theilstriche abgetheilt; auch sey die Ebene seines Limbi und Centri also beschaffen, daß in Ansehung der Dicke desselben keine Parallaxis zu befürchten sey.

Nun aber messe der Winkel ACf $h\varepsilon^\circ$ ganze Grade und noch einen Theil x eines Grades darüber, und dieser Bogen heiße, wie in §. 2. $C+x$; das wahre Maas des Winkels ACf seye C°; die Ebene des Limbi sey plan; demnach ist in dem Ausdruck für C° der Werth von P, $Q = 0$; also

$$C^\circ = C + x. + R. = C' + R.$$

Aber R ist gleich $\frac{2.\mathfrak{B}}{r}.\, \mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{2} C'.\, \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2} C'.\, 206264.$

Weil man nemlich in Ansehung der Lage des Centri bis auf die Dimension Cc gleich $\mathfrak{B}$ in diesem Falle gewis bleibt, ob das Centrum genau den Punct C decke oder in c sich befindet. Auch ist für diesen Fall $\Phi = 0$. Demnach ist

$$R = \frac{2.\mathfrak{B}}{r}.\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C'.\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}C.\,206264;\ \text{und}\ dC^\circ = \frac{r\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}C}{(1+n')\mathfrak{B}}\,1.206264.$$

Nimmt man hiebey auch Rücksicht auf den kleinen Bogen $d.(C+x)$, um welchen man in der Größe des Bogens $C+x$ während der Prüfung desselben ungewiß bleibt, so wird hieraus

$$dC^\circ = \frac{(1+n')\,\mathfrak{B}}{r\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(C+x)}.\,206264 \pm .d.(C+x).$$

Um von diesem Ausdruck auch ein Exempel zu geben, so sey $C+x=59\frac{1}{4}$ Grad; auch sind der erste Strich und der Theilstrich $59\frac{1}{4}$ gleich scharf an die Ebene des Limbi eingerissen, so wird in diesem Falle $n'=1$; auch sey $B'=0{,}00012$. Es ist also, wenn $r=\frac{1}{4}$ Schuh ist,

$$dC=\frac{2.\,0{,}00012}{0{,}25.\,\mathrm{Cos}\,29:38}.206264 \pm d(C+x)=225'',6 \pm d(C+x);$$

oder wenn man sich des Vergrößerungs-Glases bedienet,

$$dC=37''1+d(C+x).$$

Man wäre also, wenn auch die Eintheilung auf diesem Halb-Cirkel gänzlich ohne Fehler wäre, bey Abmessung dieses Bogens, bis auf 37 Secunden gewiß.

§. 9.

Abmessung des Winkels ACB vermittelst des Diopter-Lineals auf der Ebene eines Meßtisches.

Nachdem ich nunmehr gezeigt habe, auf welche Art ein Landmesser die wahre Größe eines abgemessenen Winkels nach möglichster Genauigkeit finden könne, wenn der Winkel auf dem Felde mit einem sogenannten und in §. 1. beschriebenen Scheiben-Instrument oder auf dem Papier mit einem Transporteur abgemessen worden, so werde jetzo noch ähnliche Betrachtungen anstellen, über die Genauigkeit, mit welcher ein Winkel vermittelst des sogenannten Meßtisches und der im vorhergehenden §. angezeigten Meß-Werkzeuge abgemessen werden kann.

Was nun den Meßtisch anbelangt, so lege ich abermal einen der verwickeltsten Fälle zum Grunde. Ich setze nemlich einmal folgendes voraus: Der Winkel ACB in Fig. 1. soll auf der Ebene eines Meßtisches, durch Hülfe eines sogenannten Diopter-Lineals, abgemessen werden.

Das

Das Diopter-Lineal selbst sey mit zwey senkrecht stehenden Dioptern, die ich mit (M) und (N) bezeichne, versehen. In Fig. 6. stelle AB die Schärfe des Lineals vor, an welcher die Linien, vermittelst eines äußerst spitzigen Crayons, nach möglichster Feinheit auf das Papier über der Ebene des Meßtisches gezogen werden. ABab sey eine Vertical-Ebene auf diese Schärfe des Lineals. In dieser Ebene sollen in der Diopter *N* der ausgespannte Faden oder Haar und in der Diopter M der ausgefeilte Schlitz oder Spalt, oder auch die eingebohrten Visier-Löcher sich befinden, wenn das Lineal seine gehörige Dienste leisten soll.

Nun aber mache die Linie αA in M, in welcher die Visierlöcher eingebohrt sind, mit der Ebene ABab auf ihrer linken Seite den Winkel $\alpha Aa = \phi$. Auch mache der ausgespannte Faden *N* mit der Ebene ABab rechts dieser Ebene den Winkel $\beta Bb = \psi$.

Während das Diopter-Lineal nach dem Objekte A gerichtet ist, befinde sich das Auge hinter M in o; und die Visier-Linie nach dem Objecte A schneide den Faden an *N* in dem Punct i; und AB sey die während dieses Standes des Lineals auf dem Meßtische gezogene Linie.

Fället man aus den Puncten o und i senkrechte Linien i𝔅 und oa auf die Ebene des Meßtisches, und denket sich durch dieselbe eine Vertical-Ebene, so schneidet diese Ebene die Ebene ABab in dem Punct u, unter dem Winkel $𝔅uB = uaA = x$.

Nun werde das Lineal nach dem Objekte B gerichtet, und es sey o'i die Visier-Linie; AB' aber die auf dem Meßtische gezogene Linie. Eine Vertical-Ebene durch die Puncte o' und i schneidet die Vertical-Ebene AB'a'b' in dem Punct u', unter dem Winkel $B'u'𝔅' = a'u'A = y$.

Die auf dem Meßtische gezogene Linien AB und AB' machen also in A den Winkel $BAB' = C'$ mit einander. Die Visierlinien oi und o'i' aber machen unter sich den Winkel 𝔅O𝔅', und dieser ist das wahre Maas des Winkels ACB in Fig. 1, den ich hier mit C° bezeichne. Den Winkel 𝔅O𝔅 aber finde folgendermaßen.

$$\text{Es ist einmal } a'mA = BAB + Au'm = C' + y.$$
$$\text{ferner } Omu = 180 - a'mA = 180 - (C' + y).$$
$$Oum + uOm + Omu = 180.$$
$$\text{oder } x + uOm + 180 - (C' + y) = 180.$$
$$\text{demnach } uOm = \mathfrak{B}O\mathfrak{B}' = C' + y - x.$$

Um die Werthe von x und y zu finden, so sey $AB = a\mathfrak{B}$. Demnach $\mathfrak{B}B \cdot au = aA \cdot u\mathfrak{B}$.

$$\mathfrak{B}B \cdot au = aA\,(AB - au).$$
$$au = \frac{aA}{B\mathfrak{B} + aA} \times A\mathfrak{B}; \text{ und } u\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}B}{B\mathfrak{B} + aA} \times AB.$$

Es sey ferner die Weite des Objects A von N gleich D;

$$\text{so ist } au : aA = D + \frac{\mathfrak{B}B}{B\mathfrak{B} + aA} \times AB : a^{\circ}A^{\circ}; \text{ und}$$

$$a^{\circ}A^{\circ} = D \cdot \frac{((\mathfrak{B}B + aA) + \mathfrak{B}B)}{B\mathfrak{B} + aA} \cdot \frac{aA}{au} = D \cdot \frac{(B\mathfrak{B} + aA) + \mathfrak{B}B \cdot AB}{AB.}$$

$$\text{Demnach } \tan \mathfrak{B}uB = \tan x = D \cdot \frac{(B\mathfrak{B} + aA) + \mathfrak{B}B \cdot AB}{AB}$$

Weil aber $\frac{\mathfrak{B}B}{D}$ immer nur ein sehr kleiner Bruch seyn wird, so kann man denselben auch weglassen, und so wird

$$\tan x = \frac{B\mathfrak{B} + aA}{AB};$$

oder auch, weil dieser Winkel immer nur klein seyn wird, so ist auch

$$x = \frac{B\mathfrak{B} + aA}{AB} \cdot 206264.$$

Unter der nemlichen Bedingung ist auch

$$y = \frac{B\mathfrak{B}' + a'A}{AB} \cdot 206264.$$

Es

Es ist aber in Fig. 6. $aA = oA . \text{Cos}\, oAa$; und $oAa = 90 - \phi$; also $aA = oA . \text{Cos}(90 - \phi) = oA . \text{Sin}\phi$; also auch $\mathfrak{B}B = iB . \text{Sin}\phi$.

Bezeichnet man die Länge oA mit α. die Längen iB mit β

$o'A \ . \ . \ \alpha' \quad . \ . \ . \ . \ i'B \ . \ . \ \beta'$

$AB = L.$

$$\left.\begin{aligned} \text{so ist } x &= \alpha \text{ Sin } \phi + \beta \text{ Sin } \psi : L. \\ y &= \alpha' \text{ Sin } \phi + \beta' \text{ Sin } \phi : L. \end{aligned}\right\} \text{demnach}$$

$$\mathfrak{BOB}' = C' + y - x = C' + \frac{\alpha' \text{Sin}\,\varphi + \beta' \text{Sin}\,\psi - \alpha \text{Sin}\,\varphi - \beta \text{Sin}\,\psi}{L.}$$

$$\mathfrak{BOB}' = C' + \left(\frac{(\alpha' - \alpha) \text{Sin}\,\varphi + (\beta' - \beta') \text{Sin}\,\psi}{L}\right) 206264 = C^o.$$

Bey dieser Beschaffenheit des Diopter-Lineals würde man also um einen Bogen von der Größe $\frac{(\alpha' - \alpha)\text{Sin}\,\varphi + (\beta' - \beta)\text{Sin}\,\psi}{L} . 206264$ fehlen, wenn das Maas des Winkels C', so wie derselbe auf der Ebene des Meßtisches aufgezeichnet worden, für das wahre Maas des abgemessenen Winkels gehalten würde.

Anmerkung.

Wenn dieses Diopter-Lineal auf dem in §. 1. beschriebenen Scheiben-Instrument um sein Centrum beweglich wäre, statt des auf der Alhidade beweglichen Fernrohrs, und mit demselben der Winkel ACB abgemessen würde, so würde, wenn alles übrige wie zuvor bliebe, in §. 2. N. III. $P = \frac{(\alpha' - \alpha)\text{ Sin}\,\varphi + (\beta' - \beta)\text{Sin}\,\psi}{L} . 206264$. und also für diesen Fall in §. 4. f.

n. 1. $C^o = D + \frac{(\alpha' - \alpha) \text{ Sin}\,\varphi + (\beta' - \beta) \text{ Sin}\,\psi}{L} . 206264.$

n. 2. Aus diesem zusammengesezten Falle lassen sich einige andere einfachere herleiten.

Wenn ψ negativ ist, oder $B\beta$ mit $A\alpha$ auf einer Seite ist, wird $P = \frac{(\alpha' - \alpha) \operatorname{Sin} \varphi + (\beta - \beta') \operatorname{Sin} \psi}{L} . 206264.$

n. 3. Wenn φ negativ ist, oder αA mit $B\beta$ auf einer Seite ist, $P = \frac{(\alpha - \alpha') \operatorname{Sin} \varphi + (\beta - \beta') \operatorname{Sin} \psi}{L} . 206264.$

Wenn in n. 1. $\varphi = 0$, so ist $P = \frac{(\beta' - \beta) \operatorname{Sin} \psi}{L} . 206264.$

. . . . . . $\psi = 0$ . . $P = \frac{(\alpha' - \alpha) \operatorname{Sin} \varphi}{L} . 206264.$

. . . . . . $\beta' = \beta$ . . $P = \frac{(\alpha' - \alpha) \operatorname{Sin} \varphi}{L} . 206264.$

. . . . . . $\beta' = \beta = \alpha' = \alpha . P = 0.$

In dem leztern Falle ist also jederzeit $P = 0$, die Winkel φ und ψ mögen so groß seyn als sie wollen, β' aber kann nur alsdann gleich $\beta = \alpha = \alpha'$ seyn, wenn die Objekte A und B in einer Horizontal-Ebene mit der Ebene des Meßtisches liegen.

Auflösung der construirten Formel.

Um die Größe des Fehlers, der entstehet, wenn die Linien $A\alpha$ auf M und βB auf N nicht in der Vertical-Ebene ABab sich befinden, durch ein Exempel anzugeben, setze ich folgendes. Z. E. Es seyen auf die Ebene eines Diopter-Lineals die Dioptern M und N dergestalt befestiget, daß eine senkrechte Linie Aa die Linie αA auf M unter dem Winkel φ von 5 Minuten schneidet. Auf der Diopter N schneidet die Linie bB die Linie βB unter dem Winkel ψ von 5 Minuten, und es liege nach n. 2. φ und ψ auf einer Seite der Ebene ABab. Es sey ferner die Länge AB = 2 Schuh; $\alpha = 0',1$; $\beta = 0,4$; $\alpha' = 0',5''$; $\beta' = 0''1$; demnach ist also nach n. 2.

P =

$$P = \frac{(0',5 - 0',1 + 0',4 - 0',1) \cdot \text{Sin}\, 5'}{2} \cdot 206264.$$

$$= \frac{0',7 \cdot \text{Sin}\, 5'}{2} \cdot 206264. = 105'' = 1' + 45''.$$

Der auf der Ebene des Meßtisches aufgezeichnete Winkel würde also in diesem Falle um $1' + 45''$ zu klein aufgerissen worden seyn.

Zuverläßigkeit, wenn der Winkel ACB vermittelst des gegebenen Diopter-Lineals auf den Meßtisch aufgezeichnet wird.

Was nun den Grad der Genauigkeit anbelangt, mit welcher dieser Winkel ACB auf dem Meßtische aufgerissen werden kann, so wäre einmal

$$dC^{\circ} = dC' + dP.$$

Ich setze aber $dP = 0$, weil die Folgen der Fehler, die bey Abmessung der Winkel Φ und ψ und der Längen α, α', β, β' vorfallen können, so geringe sind, daß sie füglich weggelassen werden können; es blieben also hiebey einzig und allein die Fehler noch übrig, welche der Landmesser im Visieren nach den beyden Gegenständen begehen kann.

Von diesen suche nunmehr, wie bisher, die äußerste Gränze auf und bedinge hiebey, der Faden der Diopter sey äußerst scharf, und der Landmesser schneide die Gegenstände nicht durch desselben Mitte, sondern bringe dieselben blos an dessen äussere Umfangs-Seite. So würde also im gegenwärtigen Falle die Zuverläßigkeit der Beobachtung blos noch abhängen von der Deutlichkeit, mit welcher der Beobachter den Faden der Diopter und die Gegenstände siehet, nach welchen er dieselbe richten will, und leztere hängt von dem Bau seines Auges, von der Erleuchtung, Entfernung, Farbe und Größe der Gegenstände selbst ab.

Wir bemerken aber in Rücksicht des Baues unsers Auges bey verschiedenen Menschen eine große Verschiedenheit. Nicht alle sehen einen

einen entfernen Gegenstand unter einerley Abstand, Erleuchtung, Größe und selbst bey einerley Empfindsamkeit ihrer Sehe-Nerven gleich deutlich; denn ausser der Empfindsamkeit der Nerven und der Reinigkeit der Feuchtigkeiten des Auges hängt das mehr oder minder deutliche Sehen eines entfernten Gegenstandes, auch von der Lage des Bildes im Auge ab. Diese Lage des Bildes aber hängt mit der Figur der Hornhaut und der Chrystall-Linse zusammen.

Diese Theile unsers Auges aber sind so eingerichtet, daß wir einen Gegenstand nur in einer gewißen bestimmten Entfernung mit der möglichst größten Deutlichkeit sehen, in jeder andern Entfernung die entweder größer oder kleiner als jene ist, sehen wir denselben unter einerley Erleuchtung minder deutlich; wir müssen also hieraus schließen, es müsse in unserm Auge einen gewißen festen Punct (τ) geben, in welchem, wenn die Strahlen zusammen treffen, das vollkommenste Sehen bewirkt wird. Eben so müssen wir auch schließen, es müsse das wahre Bild eines Gegenstandes nicht mehr im Auge auf einen fixen Ort fallen, so bald der nemliche Gegenstand ausser dieser bestimmten Entfernung gebracht wird, es muß also in jedem Falle eine Deviatio des wahren Bildes statt finden; und es muß die Deutlichkeit, mit welcher wir den nemlichen Gegenstand sehen, mit dieser Deviation zusammenhängen, und die Deviatio gewissermaßen eine Function der Entfernung des Gegenstandes seyn. Ist nun der Faden der Diopter dieser Gegenstand, so ist leicht einzusehen, daß der Abstand desselben von unserm Auge unstreitig in Betrachtung kommen müsse, und daß derselbe mit der möglichst grösten Deutlichkeit gesehen werden müsse, wenn er sich in der bestimmten Entfernung, in welcher das wahre Bild auf den fixen Punct ins Auge fallen muß, befindet. Aber auch selbst bey dieser möglichst grösten Deutlichkeit, mit welcher wir einen Gegenstand sehen, hat unser Gesicht seine Gränzen; es ist der Punct B′ der kleinste Punct, welchen wir noch mit möglichster Deutlichkeit sehen, und der Punct B* ist der kleinste Punct, der auf dem Gegenstande in dieser Entfernung unserm Auge verschwindend ist. Der Landmesser bleibt also in diesem Falle in Ansehung der Richtung des Fernrohrs nach dem Gegenstand A und B bis auf einen Punct B′ an dem Faden gewiß,

wiß, folglich bis auf einen Winkel von $\frac{B'}{L}$. 206264 Secunden; und für einen Winkel von $\frac{B^*}{L}$. 206264 Secunden kann er gar nicht mehr stehen; er weiß also mit aller Zuversicht, daß, wenn er auch bey Aufzeichnung des Winkels ACB auf die Ebene des Meßtisches gefehlt hat, der möglichst gröste Fehler noch kleiner als der Winkel von $\frac{2B'}{L}$. 206264 Secunden seyn müsse.

Anderst verhält sichs, wenn der nemliche Landmesser nach den nemlichen Gegenständen mit einem Diopter-Lineal visieret, dessen Länge $L \pm \Delta L$, das also um den Theil ΔL länger oder kürzer als seine gewöhnliche Gesichtsferne ist.

Denn er siehet in keinem von beyden Fällen den Rand des Fadens in der Diopter vollkommen deutlich, weil im ersten Fall das Bild des Fadens vor, und im andern hinter dem fixen Punct (τ) ins Auge fällt; in jedem Falle zerstreuet sich also das Licht, welches sich in einem Punct unmittelbar an der fixen Stelle (τ), für welche wir die Netzhaut nehmen können, vereinigen sollte, in einem Zerstreuungs-Kreis aus, ist also nicht vermögend, einen Eindruck auf die Seele hervorzubringen, vermöge dessen sich die Seele einen reinen und vollkommen klaren Begriff von dem Faden machen könnte. Da sich nun die Seele von dem Faden selbst in diesem Falle keinen klaren Begriff machen kann, so kann sie auch nicht mit Zuverläßigkeit urtheilen, ob derselbe sich genau in der Visier-Linie nach dem entfernten Gegenstand befinde.

Hiedurch aber wird der Beobachter, in Rücksicht der Richtung der Diopter nach dem Gegenstand A und B, um einen Winkel ϕ ungewiß, der größer als der Winkel $\frac{B'}{L}$. 206264 ist. Wie groß dieser Winkel ϕ aber seyn möge, kann sich ein Landmesser am besten durch Versuche überzeugen: er hat nemlich hiebey nichts zu thun, als 2 Fäden in der Entfernung $L \pm \Delta L$ einander so lange nahe zu bringen, bis es ihm scheint, als berührten sie einander genau. Wenn nun zu dieser Zeit die Fäden wirklich noch um die Weite δ^* von einander abstehen, so ist für sein Auge der Winkel ϕ gleich $\frac{\delta^*}{L \pm \Delta L} \cdot 206264$ Stunden.

Für einen Winkel von so viel Secunden kann der Landmesser also bey der Richtung seines Diopter-Lineals nach den Gegenständen A und B nicht mehr stehen; er bleibt also in diesem Falle, wenn er mit bloßem Auge nach den Gegenständen siehet, bis auf einen Winkel von $\frac{2\delta^*}{L \pm \Delta L} \cdot 206264$ Secunden ungewiß.

Geringer wird dieser Winkel, wenn der Landmesser, im Fall, da sein Auge kurzsichtig seyn sollte, er sich eines Fern-Glases bedient. Denn gesezt, seine Gesichtsferne sey gleich d Fuße, er siehet aber mit seinem Fern-Glase in einer Distanz von md Fußen den nemlichen Gegenstand eben so deutlich, wie in seiner Gesichts-Ferne, so kann man annehmen, der Winkel ϕ sey in diesem Fall für ihn gleich $\frac{1\delta^*}{m(L+\Delta L)} \cdot 206264$ Secunden; es wäre also in Rücksicht der wahren Größe des aufgezeichneten Winkels ACB ein Winkel von $\frac{2\delta^* \, 206264}{m \cdot (L+\Delta L)}$ Secunden der kleinste Fehler, welchem er gar nicht ausweichen könnte.

Messung des Winkels ACB mit einem Meß-Lineal, auf welchem sich ein Fernrohr befindet.

Ein anderer Fall ist hier auch noch zu untersuchen übrig, welchen ich in Fig. 4. vorstellen will.

Es sey in Fig. 4. die Linie XX die scharfe Kante des Meß-Lineals; $\alpha\delta Dh\alpha$ ist eine senkrechte Ebene durch die Axe des Fernrohrs, wenn dasselbe horizontal nach der Richtung gh stehet. Diese Ebene fällt um den Theil $c\delta$ über die scharfe Kante XX heraus, und macht noch überdas mit denselben den Winkel $\varepsilon\delta\alpha$.

Diese

Diese Ebene $\alpha\delta Dh\alpha$ aber ist nicht die Bewegungs-Ebene des Fernrohrs, sondern dasselbe gehet in der Ebene nhm auf und nieder, die mit der Ebene $\alpha\delta Dh\alpha$ den Winkel mhD macht.

Das Fernrohr stehet über dem Horizont um den Winkel uga $= a^0$ nach der Richtung ga erhoben, während der Beobachter für dasselbe nach dem Gegenstande A siehet, und eine senkrechte Ebene DuaδD durch die Mitte des Objekts u und den Mittelpunct g der Bewegung des Fernrohrs schneidet den Horizont nach der Richtung ACa, und diese ist die eigentliche wahre Visier-Linie nach dem Gegenstande A. Statt dieser aber ziehet der Landmesser auf seinem Meßtisch die Linie XX, welche mit derselben den Winkel XaA macht.

Eben so verhält es sich nun auch mit diesem Instrument, wenn dessen Fernrohr nach dem Gegenstande B gerichtet wird.

In dieser Richtung ist g' der Mittelpunct der Bewegung des Fernrohrs, gw die horizontale Richtung desselben, und Ddwα eine Vertical-Ebene durch die Axe des Rohrs.

Während das Fernrohr nach dem Gegenstande B gerichtet ist, stehet dasselbe in der Richtung gb, um den Winkel bcw, über den Horizont erhoben, und eine Vertical-Ebene durch dieselbe schneidet die Ebene des Meßtisches nach der Richtung BC𝔅; statt dieser aber ziehet der Landmesser auf dem Meßtisch die Linie cY; am Ende der Operation hat er also den Winkel XcY auf dem Meßtisch verzeichnet, statt des Winkels ACB, welches eigentlich der Winkel ist, um welchen sich die Axe des Fernrohrs gewendet hat.

Soll demnach der Landmesser die wahre Größe des Winkels ausfindig machen, welchen die Gegenstände A und B an der Stelle seines Meßtisches einnehmen, so muß er dieselbe aus dem gemessenen Winkel XcY und den Winkeln c𝔅C und cαC, welche von der Construction seines Instruments abhängen, herleiten.

Es ist nemlich $ACB = \upsilon Ca = f\gamma c + c\gamma a.$

$$c\gamma a = 180 - (\gamma ac + ac\gamma)$$

$f\gamma c = cBC$; $ac\gamma = 180 - XcY$; demnach ist

$$ACB = cBC + 180 - caC + XcY.$$

$$ACB = XcY - (caC - cBC).$$

Um diese Winkel caC und cBC zu finden, bezeichne λ den Winkel mhD, wie bisher; a° den Winkel uca, b° den Winkel wcb. So ist einmal

$$caC = \varepsilon Ca = \varepsilon C\alpha + \alpha Ca.$$

Es ist aber

$$\varepsilon\alpha : \alpha C = \alpha' z : C\alpha'; \text{ oder } \varepsilon\alpha \times (\alpha\alpha' - C\alpha) = \alpha C \times \alpha' z.$$

Hieraus ergiebt sich $C\alpha = \frac{\varepsilon\alpha \times \alpha\alpha'}{\varepsilon\alpha + \alpha' z}$; und Sin $\varepsilon ca = \frac{\varepsilon\alpha}{\alpha C}$.

oder in Secunden $\varepsilon Ca = \frac{\varepsilon\alpha}{\alpha C} \cdot 206264 = \frac{(\varepsilon\alpha + \alpha' z)}{\alpha\alpha'} \cdot 206264.$

Ferner ist $\varepsilon\alpha = X\alpha - X\varepsilon = X\alpha - c\delta$; und $\alpha' z = a' z - a\alpha$;

hieraus ergiebt sich $\varepsilon Ca = \left(\frac{X\alpha - a\alpha'}{\alpha\alpha'}\right) 206264.$

Auch ist in Secunden $\alpha Ca = \lambda \tang a^\circ . 206264$; demnach $caC = \left(\frac{X\alpha - a\alpha'}{\alpha\alpha'} \lambda \tang a^\circ\right) 206264$ in Secunden; und eben so auch $cBC = \left(\frac{X\alpha - a\alpha'}{\alpha\alpha'} - \lambda \tang b^\circ\right) 206264$; oder wenn der Gegenstand B, wie bisher, immer unter dem Horizont des Instruments geneigt angenommen wird, so ist der Winkel

$cBC = \left(\frac{X\alpha - a\alpha'}{\alpha\alpha'} + \lambda \tang b^\circ\right) 206264$; und diesem zufolge

$$ACB = XcY - \lambda (\tang a^\circ + \tang b^\circ) 206264; \text{ oder}$$

$$ACB = XcY - \lambda \frac{\sin (a^\circ + b^\circ)}{\cos a^\circ \cos b^\circ} . 206264. = XcY - k.$$

Um

Um diesen Winkel k würde also der Winkel XcY zu groß auf die Ebene des Meßtisches aufgezeichnet worden seyn, wenn man sich eines Meß-Lineals von dieser Construction bedienet hätte.

Untersuchung über die Zuverläßigkeit, mit welcher der Winkel ACB vermittelst der Magnetnadel nach der Art D §. 3. abgemessen werden kann.

Der Landmesser ist einmal gewiß bis auf einen Winkel $\frac{(1+n')B'}{MF} \cdot 206264$, ob der Faden vor dem Ocular jedesmal genau die Gegenstände A und B geschnitten hat, da er glaubte, dieselbe auf das genaueste an denselben gebracht zu haben.

Er ist zweytens nur bis auf den Punct $\frac{1}{m} B'$ gewiß, ob die Nadel jedesmal an dem Indice des Nonii genau gestanden hat. Eben so verhält sichs auch mit dem Zusammenpassen des (h+t)ten Theilstrichs mit dem (t—1)ten des Nonii; die Summe aller dieser Theile wäre also, in Secunden, gleich

$$\left(\frac{4}{m}\,\frac{B'}{r} + \frac{(1+n')B'}{MF}\right) 206264.$$

Ein Winkel von dieser Größe wäre also die äußerste Gränze, zwischen welche die Fehler, welche bey Abmessung des Winkels ACB begangen werden können, hinein fallen müssen.

Aeußerste Gränze des Fehlers, welcher bey Abmessung des Winkels ACB begangen werden kann, wenn man sich hiezu des Branderschen Goniometers bedienet.

Das Verfahren Herrn Branders bey Abmessung des Winkels ACB mit diesem Instrument, ist folgendes. Siehe die neue Art Winkel zu messen. —

Herr Brander visieret mit beyden Tubis seines Instruments auf den Gegenstand A oder B, während dasselbe auf einer Ebene horizontal fest liegend sich befindet: bemerket hiebey den Stand (I) des Nonii auf dem Chorden-Lineal (D), und heißt den Winkel ξ, welchen derselbe auf (D) anzeiget, den Auxiliar-Winkel; führet lezt-lich den beweglichen Tubum nach dem andern Gegenstande und bemerket den Stand (K) des Indicis; nun zieht er den Winkel vor den Stand (I) von dem Winkel vor den Stand (K) ab, und so ist nach der Construction dieses Instruments der Winkel, welcher der Chorde (K—I) zugehört, der wahre corrigirte Winkel, welchen die Gegenstände A und B in dem Stand des Instruments mit einander machen.

Was für eine Genauigkeit dieses Verfahren gewähre, will ich durch folgende Untersuchung erweisen.

Bekanntlich pflegt Herr Brander in allen seinen Meß-Werkzeugen, die von ihm mit äußersten Fleiß verfertigten Glas-Scalen anzubringen; er zeichnet dieselbe auf einer Schrauben-Maschine vermittelst der Spitze eines feinen Diamants auf die Ebene des Glases, welches er zum Mikrometer in das Fernrohr bestimmt hat. Herr Brander nimmt hiebey den Satz zum Grunde an, daß, vermittelst eines solchen feinen Strichs auf dem Glase, jederzeit die Gegenstände A und B geschnitten werden müssen, und nimmt sich hiebey zur Regel, die Dicke dieses Strichs so fein, als nur immer möglich ist, zu machen, damit derselbe nur einen kleinen Theil des Objekts verdecke. Herr Brander hat es auch in diesem Stücke sehr weit gebracht; denn das Gefühl seiner Hand ist so außerordentlich durch vielfältige Uebnng in diesen Theilungen geschärft worden, daß er im Stande ist, mit der Spitze seines Diamants eine Linie auf Glas zu ziehen, deren Dicke nur $\frac{1}{30}$ eines pariser Scrupels ist.

Die gleiche Dicke einer solchen Linie aber hängt, außer dem äusserst feinen Gefühl dieses Künstlers, auch noch von der Masse des Glases ab, auf welche dieselbe gezogen wird. Ist dieselbe ungleich hart, so wird auch die Dicke der Linie ungleich, wenn auch der Druck der Hand während der Operation immer der nemliche geblie-

ben

ben wäre: auch selbst auf die Dauer dieser Linie hat die Masse des Glases Einfluß; diese ist der Ausdehnung und Zusammenziehung unterworfen; ist dieselbe durch die ganze Ebene des Glases nicht durchaus gleich verbreitet, so wirken ungleich große Kräfte auf die Breite des Strichs, und derselbe springt mehr oder minder aus, je nach dem der Unterschied der wirkenden Kräfte mehr oder minder groß ist. Aus diesem Grunde erklärt sich die Erscheinung, vermöge deren das schönste Brandersche Mikrometer nach einiger Zeit zum Theil oder wohl ganz ausgesprungen sich darstellen kenn.

Mit solchen Mikrometern hat es also eine ganz andere Bewandnis als mit den Faden-Kreuzen in den Fernröhren. Diese Faden sind durch ein Loch gezogen, haben also gleiche Dicke, stellen sich also auch durch das Ocular nach aller Schärfe dar, so daß man im Stande ist, das Bild eines entfernten Gegenstandes demselben bis zur Berührung so nahe zu bringen, daß man in Rücksicht dieser Berührung immer noch auf einen kleinen Theil gewiß, der kleiner als der Theil $\frac{1}{\mathfrak{M}}\mathfrak{B}'$ ist; wo $\mathfrak{B}'$, wie bisher, den kleinsten Punct bedeutet, welchen ein Beobachter auf einem Gegenstand, den er bey Beleuchtung der heitern Atmosphäre in seiner Gesichtsferne betrachtet, noch mit möglichster Deutlichkeit siehet; $\mathfrak{M}$ aber die Vergrößerungs-Kraft des Fernrohrs anzeiget.

Bey dem Branderschen Mikrometer aber muß jederzeit der Gegenstand hinter den Strich auf dem Glase gebracht werden; er deckt also jederzeit einen Theil auf demselben zu; bezeichnet δ die Dicke dieses Striches, so deckt dieser Strich auf dem Gegenstande einen Streifen (w) zu, dessen Durchmesser an der Stelle dieses Strichs unter einem Winkel von $\frac{\delta}{F}$ 206264 Secunden gesehen wird.

Es sey ferner die Breite des Objects selbst gleich (u). Hiebey sind folgende Fälle möglich. Entweder ist $w > u$ oder $u > w$ oder $u = w$.

Im ersten Fall bleibt der Beobachter bey der Observation auf den Theil $\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}}$ gewiß, ob der Strich die Mitte des Objects genau schneidet oder nicht.

Im

Im andern Fall ist dieser Theil die Dicke δ des Strichs selbst; und im dritten bleibt er nur bis auf einen Theil (z) gewiß, der kleiner als $\frac{B'}{M}$ ist, ob nemlich das Bild von dem Gegenstande genau vor dem Striche gedeckt wird. Dieser Theil hängt auch noch sehr viel von der Reinigkeit des Striches selbst ab.

Wäre B^* der Punct, welcher von dem Beobachter auf einem Gegenstande, welchen er bey der Beleuchtung der reinsten Atmosphäre betrachtet, gerade noch bemerkt werden kann; so wäre $\frac{B^*}{M}$ dieser Theil (z), wenn auch selbst der Strich anf dem Glase gänzlich rein und scharf wäre.

Ich will nun ein für allemal den kleinen Theil, auf welchen der Beobachter in Rücksicht des wahren Standes des Gegenstandes hinter dem senkrechten Strich eines Branderschen Mikrometers irrig seyn kann, durch den Ausdruck B^* bezeichnen, so wird $\frac{B^*}{F}$ der Tangente eines Winkels seyn, um welchen der Beobachter in Rücksicht der wahren Richtung seines Fernrohrs nach einem entfernten Gegenstande irrig seyn kann, $\frac{B^*}{F} \cdot 206264$, diesen Winkel selbst aber in Secunden ausgedrückt, vorstellen können.

Nach diesen vorangeschickten Bedingungen berechne nun den Grad der Zuverläßigkeit bey Abmessung des Winkels ACB, vermitmittelst des Branderschen Mikrometers, folgendermaßen.

Es sey Fig. 23. A der Gegenstand, nach welchem der fixe Tubus zuerst gerichtet wird; αA die Visierlinie nach demselben, in der Horizontal-Ebene desselben oder neben derselben befindet sich an der äußern Fläche des Fernrohrs der Mittelpunct γ der Bewegung des Chorden-Lineals γh, und dieser ist auch zugleich der Anfangs-Punct der Eintheilung auf demselben.

δuA ist die Visier-Linie durch den andern Tubus nach dem Gegenstande A; C das Centrum der Bewegung beyder Fernröhre des Gonio-

Goniometers, und in u steht in dieser Richtung der Fernröhren der Index des Nonii, welcher das Chorden-Lineal auf der Eintheilung desselben streifet; er steht also von C um die Chorde ug ab.

Während nun, daß das unbewegliche Fernrohr nach A gerichtet ist, also die Visier-Linie αA immer in ein und ebenderselben Vertical-Ebene bleibt, wird das bewegliche Fernrohr nach dem Gegenstande B geführt; das Chorden-Lineal kommt hiedurch aus der Richtung γk in die Lage γb, und der Index des Nonius steht in dieser Richtung auf der Stelle b. Der Index hat sich also auf dem Lineale um den Theil nb verschoben.

Um den Winkel zu finden, dessen Chorde der Theil nb ist, bezeichne der Buchstabe C diesen Winkel; r den Halbmesser $C\gamma$; d die Entfernung AC; η die Entfernung beyder Visier-Linien an die Stelle des Auges; so ist einmal die Chorde

$$u\gamma = n\gamma = 2.(d-r) \text{ Sin } \tfrac{1}{2} (\alpha A \delta);$$

weil aber $\alpha A \delta$ in jedem Falle immer nur klein ist, weil $\alpha\delta$ nicht größer als ungefähr 2 Zoll ist, so kann man auch setzen die Tangente vor den Sinum; so wäre also $\gamma u = 2(d-r)\frac{1}{2}\frac{\eta}{d} = \frac{(d-r)}{d}\eta$.

Nun sey der Abstand des Indicis b von dem Mittelpunct γ gleich τ; so ist einmal $2r \text{ Sin } \frac{1}{2} C + \frac{(d-r)}{d}\eta = \tau$; demnach

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2}\left(\tau - \frac{(d-r)}{d}\eta\right) : r.$$

Dieser Winkel C kann also in den Tabellen durch seinen Sinum gefunden werden.

Nun sey auch $\text{Sin } \frac{1}{2} C = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau - k}{r}\right)$; so ist in Secunden

$$dC = \left(2 \text{ Cot } \tfrac{1}{2} C . \left(\frac{d\tau - dk}{\tau - k}\right) - \frac{dr}{r}\right) 206264.$$

In diesem Ausdruck ist einmal $dr = (1+n')\mathfrak{A}$; ferner $d\tau = dk = \mathfrak{B}^*$; und in diesem Falle ist $\mathfrak{B}^* = \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{B}'$; wenn sich nemlich der Landmesser eines Glases von mmaliger Vergrößerung zu Beobachtung des jedesmaligen Standes des Indicis bedienet.

Werden diese Werthe für dr, $d\tau$ in den Ausdruck für dC substituirt, so kann man nach demselben die äußerste Gränze finden, innerhalb welche der möglichst gröste Fehler, welcher bey Abmessung des Winkels ACB mit diesem Instrument begangen werden kann, hineinfallen muß.

Construction der Formel für die Zuverläßigkeit bey Abmessung des Winkels ACB, vermöge des Branderschen Spiegel-Sextanten.

Herr Brander gibt von dem Gebrauch und der Einrichtung dieses Instruments Nachricht in seiner Beschreibung eines Spiegel-Sextanten.

Die Arbeit des Landmessers bey Abmessung des Winkels ACB mit diesem Instrument ist folgende.

In Fig. 4. wird der Sector $C\gamma\gamma$ erst horizontal und der Index auf ε als dem Mittelpuncte der Bewegung der Chorden-Scala $\gamma\gamma$ festgestellt; in der Vertical-Ebene durch ε und den Mittelpunct C des Limbi $\gamma\gamma w$ befindet sich die Axe eines Fernrohrs (α), und eines dergleichen (β) ist auf der Ebene des Instruments rechts und links beweglich.

Der Tubus (α) wird nach dem Gegenstande A gerichtet und festgestellt, der Tubus (β) aber nach dem Gegenstande B geführet. In dieser Richtung steht der Index der Eintheilung der Chorden-Scala $\gamma\gamma$ in γ, und sein Stand wird durch ein Mikroscop (L) beobachtet, in welchem ein Glas-Mikrometer sich befindet. Dieses Glas-Mikromekrometer vertritt bey diesem Instrument die Stelle eines Nonii, indem auf demselben ein Theil der Chorden-Scala in 50 gleiche Theile abgetheilt wird.

Es ist übrigens bey diesem Instrument, wenn die Weite $\varepsilon\gamma = \tau$ genannt wird, wie bisher

$$\tau = 2r \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C; \quad \text{oder} \quad \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} C = \frac{\tau}{2r}; \text{ demnach in Secunden}$$

$$dC = \left(2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C . \left(\frac{d\tau}{\tau} - \frac{dr}{r}\right) + \frac{2\mathfrak{B}^*}{F}\right) 206264.$$

In dieser Formel ist erstlich $\mathfrak{B}^* = \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}}$.

Wenn ferner f die Focal-Länge des Objektivs des Mikroscops (L) ist, und der Index auf dem Chorden-Lineal dicker als die Breite des Strichs auf dem Mikrometer ist, so ist einmal der Landmesser in Ansehung des Standes des Indicis auf dem Chorden-Lineal und eines Striches des Mikrometers über dem Indice, ob alle drey in einer Linie liegen, gewiß, bis auf den Theil δ, das ist, bis auf einen Winkel von $\frac{\delta}{f}$ 206264 $= \psi$ Secunden. Wenn nun f′ die Entfernung des Objektivs des Mikroscops von dem Lineale ist, so ist $d\tau = (1+n) f' \operatorname{tang} \psi$; und $dr = (1+n')\mathfrak{A}$; wo $\mathfrak{A}$, wie bisher, den Punct bedeutet, auf welchen ein Beobachter bey Abmessung einer Linie mit dem Stangen-Cirkel in Rücksicht der Schärfe seines Gesichts und der Dicke der Cirkel-Spitzen gewiß ist.

Wäre statt des Striches auf Glas in dem Mikroscop (L) ein Faden ausgespannt, so könnte der Beobachter die Puncte auf dem Chorden-Lineal jedesmal mit der Seite derselben schneiden, und so wäre in diesem Falle $d\tau = \frac{2\mathfrak{B}'}{m}$.

Bestimmung der äußersten Gränze, zwischen welche die Fehler hineinfallen müssen, welche der Landmesser begehen kann, wenn er den Winkel ACB vermittelst des Branderschen dioptrischen Sectors abmißt.

Herr Brander gibt von diesem Instrument Nachricht in seiner Beschreibung eines neuerfundenen dioptrischen Sectors ꝛc.

Das Verfahren des Landmessers bey Abmessung des Winkels ACB mit diesem Instrument ist folgendes.

Der Landmesser richtet das fixe Fernrohr nach dem Gegenstande B, so daß die Visierlinie in die Linie $\beta\beta$ fällt; stellt das Instrument in dieser Lage fest; führet sodann das bewegliche Fernrohr nach dem Gegenstande A, daß seine Visierlinie in die Linie $\alpha\alpha$ trift, und zählet sodann auf dem Chorden-Lineal $\gamma\gamma$ die Länge der Chorde $\gamma\gamma$ ab. Dieses Chorden-Lineal ist bey diesem Instrument von Spiegel-Glas, und auf seine Ebene sind von Herrn Brander äußerst feine Striche eingeschnitten. Dieses Lineal ist bey γ um ein Centrum beweglich, so daß dasselbe immer in gleicher Entfernung vom Centro C abstehet, und auf seiner Ebene ist jederzeit der Ort des Bildes von dem entfernten Gegenstand.

An der Fläche dieses Glases an der Seite gegen das Ocular des Fernrohrs streifet ein zarter Silberfaden senkrecht auf die Fläche des Instruments, welcher dem Instrument die Stelle des Indicis vertritt; dieser Faden wird beym Anfang der Operation auf den Strich o gestellt, so daß er genau den Gegenstand B, der von diesem Strich geschnitten wird, schneidet; und eben so verhält sichs auch bey dem Gegenstand A; jederzeit muß die Mitte des Strichs auf dem Glase, und der äußere Umfang des Draths in einer Ebene liegen, wenn man genau observiren will; im widrigen Fall sezt man sich dem Fehler aus, welcher aus der Dicke dieses Fadens zu begehen möglich wird.

Es

Es ist übrigens die allgemeine Gleichung für dieses Instrument, wie bisher, $\text{Sin}\ \frac{1}{2}\ C = \frac{1}{2}\frac{\tau}{r}$;

woraus sich, mit Zuziehung der Sinustafeln, der Winkel C selbst ergibt.

Dieser Winkel muß noch in etwas verringert werden, weil die Masse des Sectors und der Chorden-Scale desselben bey einerley Temperatur verschiedene Ausdehnung und Zusammenziehung äussern.

Den Winkel, um welchen der gemessene Winkel C aus diesem Umstand verbessert werden muß, will ich mit ΔC bezeichnen; das correcte Maas des Winkels ACB aber mit C^*; so ist nach Beschaffenheit der Umstände

$$C^* = C \pm \Delta C.$$

Es sey ferner die Scale unter der Temperatur u von dem Künstler eingetheilt worden; der Landmesser messe den Winkel ACB mit diesem Instrument bey der Temperatur ω, und es ist ω größer als u, um p Grade des Reaumürs Thermometer. Die Ausdehnung der Masse des Sectors sey gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ und der Scale $\frac{1}{\eta}$ seiner Länge bey der Veränderung der Temperatur von 1 Grad.

Wäre nun die Masse der Scale die nemliche des Sectors, so würde die Länge derselben proportional mit dem Radio des andern Instruments: allein so ist dieselbe von Glas, also seine Ausdehnung immer größer als die Masse des Instruments, es mag dasselbe von Holz, Messing, Kupfer oder Eisen seyn; also in jedem Falle $\eta > z$.

Aus diesem Grunde mißt der Landmesser die Chorde des Winkels ACB um einen Theil $\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{z}\right)$ p zu groß, und diesem Theil entspricht im Centro des Winkelmessers der Winkel ΔC; weil aber ΔC immer nur klein ist, so ist auch nach Secunden

$$\Delta C = \left(\frac{\varepsilon - \eta}{r . z . \eta}\right) p . 206264.$$

 Auch

Auch wäre $dC^* = dC + d\Delta C$; wo ich aber $d\Delta C = 0$ setzen will; so bliebe also

$$dC = \left(2 \text{ tang } \tfrac{1}{2} C \left(\frac{d\tau}{\tau} - \frac{dr}{r}\right) + \frac{2\mathfrak{B}^*}{F}\right) 206264.$$

In diesem Ausdruck ist $\mathfrak{B}^* = \frac{1}{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{B}'$; $dr = (1 + n')\,\mathfrak{A}$; $d\tau = 2 \cdot \mathfrak{B}^*$; $= \frac{2}{z}\,\mathfrak{B}'$.

Formeln für Hrn Branders Tubum Campi amplissimi.

Die Beschreibung dieses Tubi ist der Beschreibung des Branderschen Spiegel-Sextanten beygefügt. Im Ganzen genommen besteht die Construction dieses Instruments im folgenden.

Wenn C die Mitte eines Objektiv-Glases ist, so ist Fig. 24. $\alpha o \alpha$ die Brenn-Linie. Mit dieser Brenn-Linie nun läßt Herr **Brander** 2 Ocular- (x) und (y) Gläser zur Rechten und Linken sich parallel bewegen, so daß der gröste Campus des Fernrohrs ungefähr 18° wird. Um nun den Winkel mit diesem Instrument zu messen, hat Herr **Brander** bey x eine Scale von Glas rechtwinklicht auf die Axe xC des Fernrohrs angebracht; er stellt also das Fernrohr nach dem Gegenstande A, so daß in dieser Stellung die Linie oC die Visierlinie nach demselben, und der Punct o der Mittelpunct des Oculars x ist. Nun bleibt x unverrückt, das Ocular (y) aber wird so lange zur Rechten in einer False fortgeführt, bis der Mittelpunct desselben in β fällt, und $C\beta$ die Visierlinie nach dem Gegenstande B ist. Ist nun der Halbmesser xC bekannt, so kann man auf der Scale $L\alpha$ die Tangente $x\alpha$ nach Theilen desselben abzählen und so mithin aus den bekannten Stücken $xC = r$ und $x\alpha = \tau$ den Winkel C finden; es ist nemlich

$$\text{tang } C = \frac{\tau}{r}; \text{ und in Secunden}$$

$$dC = \left(\tfrac{1}{2} \text{ Sin } 2\,C \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{(1+n')\,\mathfrak{B}^*}{F}\right) 206264.$$

In

In dieser Formel ist der Werth von Δr aufzusuchen. Herr Brander findet den Werth von r nach folgender Methode.

Er steckt in einer beliebigen Entfernung CD einen Gegenstand EF rechtwinklicht auf die Visierlinie oCD; und findet hierauf aus der Gleichung $\frac{\tau}{r} = \frac{ED}{DC}$ den Werth von r.

Bezeichnet man nemlich ED mit d; DC mit k; so ist

$$r = \frac{k}{d} . \tau.$$

Hat nun Herr Brander einmal von einer gegebenen Entfernung DC aus einem angenommenen Objekt DE den Halbmesser Cx bestimmt, so theilet er auf die äußere Fläche der Objektiv-Röhre des Fernrohrs Theile der Glas-Scale, und findet hieraus für eine jede andere Entfernung, die größer oder kleiner als DE ist, den Halbmesser. Denn je kleiner DE, desto größer ist der Halbmesser, und so im umgekehrten Fall; nur in dem Fall, wenn DE eine sehr große Weite ist, kann der Halbmesser ohne Fehler als eine constante Größe betrachtet worden.

Ich will nunmehr die Entfernung DE die Normal-Weite heissen. In dieser Entfernung ist nun der Geometer in Rücksicht auf ihre wahre Länge gewiß, bis auf den Theil dk; es ist demnach

$dr = \frac{\tau}{d} . dk$, wenn ich $d\tau$ und dd gegen dk als sehr klein annehme.

Bis auf diesen Theil ist also der Landmesser bey Bestimmung des Halbmessers aus der Normal-Weite gewiß. Anderst aber verhält es sich mit dem Theil Δr, auf welchen derselbe bey Abmessung des Winkels ACB gewiß ist, daß der Brennpunct des Objektivs auch genau in den Brennpunct des Oculars falle.

Denn dieser Theil hängt ab von der Deutlichkeit, mit welcher jeder Gegenstand durch das Fernrohr gesehen wird, (die Deutlichkeit selbst aber ist eine Function der Lichtmenge, welche von dem

Gegenstand durch das Fernrohr ins Auge kommt), der Vergrößerung des Fernrohrs und der Figur der Gläser.

Bey einem vorzüglich guten Fernrohr, das aber nicht achromatisch ist, darf man diesen Theil bey einer 12maligen Vergrößerung bis auf $\frac{1}{4}$ Linie $= d'r$ anschlagen.

Es ist also einmal der Anfangs-Punct der Eintheilung auf der Objektiv-Röhre des Fernrohrs um den Theil dr beynahe ungewiß, es muß also die äußerste Gränze des Fehlers, der in Bestimmung des Halbmessers möglich ist, gleich seyn

$$dr = dr' = \frac{r}{d}\,dk + 0{,}00125 = \frac{r}{d}\,dk + \Delta k.$$

So wäre also

$$dC = \left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,2\,C\,.\left(\frac{r\,.\,dk}{d} + u\right) + \frac{(1+n')\,\mathfrak{B}^*}{F}\right)\,206264.$$

Formeln für die catoptrischen Winkelmesser, nach welchen sich die Zuverläßigkeit angeben läßt, mit welcher man sich von der wahren Größe des Winkels ACB überzeugen kann, wenn derselbe mit diesen Instrumenten abgemessen wird.

Bey diesen Instrumenten kommt alles vorzüglich auf die Deutlichkeit an, mit welcher beyde Bilder, das directe und das reflectirte, im Fernrohr gesehen werden; diese Deutlichkeit aber hängt ab von der scheinbaren Klarheit, unter welcher diese Bilder gesehen werden, und von der Figur der Gläser des Fernrohrs.

Ist die scheinbare Klarheit beyder Bilder einander gleich, und jede so groß, als die scheinbare Klarheit, mit welcher ein Beobachter einen Gegenstand, der mit diesen Bildern einerley Farbe und optischen Winkel hat, während er denselben in seiner Gesichts-Ferne bey der Erleuchtung der reinen Atmosphäre mit möglichster Deutlichkeit siehet, so ist er auch in Ansehung ihres Standes an einander bis

bis auf einen Punct $\frac{1}{\mathfrak{M}}\mathfrak{B}'$ gewiß, das ist, er weiß gewiß, daß die beyden Bilder im Fernrohr um einen Winkel noch von einander abstehen können, der kleiner als der Winkel $\frac{1}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{\mathfrak{B}'}{F}$ 206264 ist, in dem Augenblick, da er glaubt, die beyden Bilder berühren einander.

In diesem Falle ist also nach Secunden

$$dC = \left(\frac{2\mathfrak{B}'}{m \cdot r \operatorname{Cos} \frac{1}{4} C} + \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M} \cdot F}\right) 206264.$$

Eben diese Formel findet auch bey Herrn Hadleys Octanten ihre Anwendung, so lange der Winkel ACB nicht so groß wird, daß die Deutlichkeit, mit welcher das reflectirte Bild im Fernrohr gesehen wird, zu geringe ist, als daß der Beobachter die Gränze desselben noch gut bemerken könnte, weil in diesem Falle das Licht, welches vor dem Spiegel gegen das Reflexions-Glas des Instruments gehet, meistens durch seine Masse hindurch gehet, und nur ein geringer Theil gegen das Fernrohr zurückgehet.

Etwas anders fällt die Formel für den Branderschen Spiegel-Octanten aus. Denn wenn ein Landmesser mit diesem Instrument den Winkel ACB mißt, so ist er nur bis auf den Punct $\frac{n}{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{B}'$ gewiß, ob das Bild von dem Gegenstande A und B jedesmal an dem auf dem großen Spiegel gezogenen und nach dem kleinern reflectirten senkrechten Striche stehe, oder nicht.

Auch hängt der Factor n in diesem Falle ab von der Deutlichkeit, mit welcher die Bilder von A und B im Fernrohre jedesmal gesehen werden, und von der Schärfe und Feinheit, mit welcher der senkrechte Strich auf die Ebene des Central-Spiegels eingezogen worden.

Es wäre also in der grösten Allgemeinheit in Secunden

$$dC = \left(\frac{2\mathfrak{B}'}{m \cdot r \operatorname{Cos} \frac{1}{4} C} + \frac{n\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M} F}\right) 206264.$$

 Eben

Eben diese Formel findet auch bey Herrn Höschels catoptrischen Cirkel ihre Anwendung, wenn an demselben ein Fernrohr angebracht wäre; ist dieses Instrument aber ohne Fernrohr, so ist für dasselbe

$$dC = \left(\frac{2\,\mathfrak{B}'}{r \operatorname{Cos} \frac{1}{4} C} + \frac{\mathfrak{B}'}{c}\right) 206264.$$

In diesem Ausdruck zeigt, wie bisher, der Buchstabe $\mathfrak{B}'$ den kleinsten Punct an, welchen ein Landmesser auf einem Gegenstand bey hellem Tage in seiner Gesichts-Ferne noch mit aller Deutlichkeit beobachten kann. Ist nun in Fig. 19. die Entfernung $u\gamma = c$ des Visier-Lochs des Instruments von dem senkrechten Strich gleich der Gesichts-Weite des Landmessers, so fällt das Bild desselben unmittelbar auf die Nezhaut seines Auges; er siehet also diesen Strich so scharf als möglich mit der vollkommensten Deutlichkeit.

Ist aber $u\gamma$ größer oder kleiner als die Gesichts-Ferne des Landmessers, so fällt im erstern Fall das Bild des Strichs vor und im leztern hinter die Nezhaut seines Auges; in jedem Falle entsteht aber ein undeutliches Sehen desselben.

Formel, nach welcher sich die Genauigkeit untersuchen läßt, mit welcher vermittelst eines Pantometers oder Engymeters aus einer Station eine Weite abgemessen werden kann.

Bey diesen Instrumenten ist durchgehends

$$\frac{s}{r} = \frac{r}{\delta} = \operatorname{tang} C; \text{ demnach}$$

$$dC = \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\,C \,.\left(\frac{ds}{s} - \frac{dr}{r}\right) + \frac{(1+n')\,\mathfrak{B}^*}{F}\right) 206264.$$

Nun ist aber auch $dC = d.\frac{r}{d} = \frac{dr}{r} - \frac{dd}{d}$; demnach

$$\frac{dd}{d} = (1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\,C)\,\frac{dr}{r} - \left(\tfrac{1}{2}\frac{ds}{s} \,.\, \operatorname{Sin} 2\,C + (1+n')\,\mathfrak{B}^*\right).$$

In

In diesem Ausdruck ist $dr = (1+n')A$; und der Werth von $d\varepsilon$ hängt von der Zuverläßigkeit ab, mit welcher man von dem gleichen Gang der Schraube überzeugt ist.

Vergleichung des Effekts zweyer Scheiben-Instrumente unter einander, wovon das eine in seinem Fernrohr mit einem Silberfaden, das andere aber mit einem feinen Schnitt auf Glas versehen ist.

Aufgabe. I. Es sind zwey Scheiben-Instrumente (D) und (E) durchaus von gleicher Dimension vorhanden, das Scheiben-Instrument (D) ist in seinem Fernrohr mit einem Glas-Mikrometer, das Scheiben-Instrument (E) aber mit einem feinen ausgespannten Silberdrath versehen. Ein Landmesser mißt an einer Stelle (C) den Winkel ACB mit jedem derselben: er bekommt durch das Fernrohr eines jeden Instruments so viel Licht von den entfernten Gegenständen in sein Auge, als er von einer Scheibe R bekommen würde, welche er bey der Beleuchtung der Atmosphäre in seiner Gesichts-Ferne betrachtet, und welche ihm in dieser Entfernung unter einem Winkel erscheint, der genau dem Winkel gleich ist, unter welchem er den Gegenstand im Fernrohr siehet. Es fragt sich, mit welchem von beyden Instrumenten kann er den Winkel ACB schärfer und zuverläßiger abmessen?

Diese Frage zu beantworten, setze ich folgendes voraus.

Lage, Grösse und Abstand der Gegenstände.

Es seyen beyde Gegenstände A und B mit der Ebene des Instruments in einerley Horizontal-Ebene; es sey ferner

der Abstand des Gegenstandes.	von der Station C gleich.	die senkrechte Breite.
A	d	η
B	δ	y

Maase der Winkelmesser.

Der Halbmesser der Eintheilung beyder Instrnmente sey gleich r.
Die Focal-Länge der Objektive — — — — — F.
Die Vergrößerungs-Kraft der Fernröhren — — — M.
— — — — — der Luppe auf dem Limbo — m.
Die Breite des senkrechten Strichs auf dem Glase in dem Fernrohr von (D) — — — — ε.

Gesichts-Schärfe des Beobachters.

Der Beobachter siehet auf einem Gegenstande (R), welchen er bey der Beleuchtung der heitern Atmosphäre in seiner Gesichts-Ferne betrachtet, noch einen Punct B′ mit der möglichst grösten Deutlichkeit; ein Punct B* aber ist der kleinste, der seinem Auge beynahe verschwindend ist.

Grundsätze.

α. Wenn der Beobachter auf dem Gegenstande (R) einen Punct B′ bey der Beleuchtung (H) mit möglichster Deutlichkeit siehet, so siehet er auch durch die Fernröhre beyder Instrumente auf jedem Gegenstand A und B noch einen Raum (Q), dessen Bild im Fernrohr die Dimension $\frac{B'}{M}$ hat, weil er durch das Fernrohr eine gleiche Licht-Menge von dem Gegenstand A oder B bekommt, als er von der Ebene (R) erhält.

β. Sind 2 Puncte (α) und (β) auf dem Bilde eines Gegenstandes A in dem Fernrohr gegeben, so ist er in Rücksicht ihrer wahren Lage bis auf die Dimension $\frac{1}{M} B'$ gewiß, daß dieselbe nicht näher oder weiter von einander sich befinden als sie wirklich sind.

γ. Auch ist der Punct $\frac{1}{M} B^*$ der kleinste auf dem Bilde im Fernrohr, welchen der Beobachter auf demselben noch erkennen kann.

Folge-

Folgerungen.

δ. Wenn demnach ein gewißer Punct (λ) des Bildes im Fernrohr an den Silberfaden desselben geführt werden soll, so ist der Beobachter bis auf einen Theil von der Größe $\frac{1}{\mathfrak{M}}$ B* ungewiß, ob der Punct λ genau an dem Faden stehet oder nicht; weil ein Punct von der Dimension $\frac{1}{\mathfrak{M}}$ B* der kleinste ist, welchen er auf dem Bilde kaum noch erkennen kann.

Eben so weiß auch der Beobachter, daß der Punct (λ) niemalen um einen Theil von dem Faden abstehen könne, der so groß als der Punct $\frac{1}{\mathfrak{M}}$ B′ wäre, weil er einen Punct von dieser Größe mit möglichst gröster Deutlichkeit siehet. Wäre nun der Theil (λ) die Spitze eines Thurms, so weiß er zuverläßig, daß das Bild desselben in dem Augenblick, da er willens ist, dasselbe an den Rand des Fadens zu bringen, nur noch um einen Streifen von demselben abstehen könne, dessen Breite kleiner als die Breite $\frac{1}{\mathfrak{M}}$ B′ ist. Eben so bleibt er auch bis auf einen Streifen von der Dimension $\frac{1}{\mathfrak{M}}$ B* ungewiß, ob der Faden die Spitze (λ) nicht schon geschnitten hat, in dem Augenblick, da er willens ist, denselben an die Spitze zu führen. Er bleibt also diesem zufolge, in der Richtung des Fernrohrs nach dem Gegenstande A und B, immer nur bis auf einen Winkel gewiß, der zwischen dem Winkel $\frac{1}{\mathfrak{M}\,F}$ B* und $\frac{1}{\mathfrak{M}\,F}$ B′ hineinfällt, in dem Augenblick, da er willens ist, die Spitze (λ) an den Faden des Fernrohrs zu führen.

Eben so verhält sichs auch mit dem Stande des Theilstrichs (x) des Nonii über dem Theilstrich (y) des Limbi; er betrachtet dieselbe durch eine Luppe von m maliger Vergrößerung; er bleibt also nur bis auf einen Theil $\frac{1}{m}$ B′ gewiß, ob beyde Striche auf einander genau passen, so wie der Punct $\frac{1}{m}$ B* der kleinste ist, welchen er auf dem Limbo kaum mehr zu sehen vermag.

 Bezeich-

Bezeichnet nun, wie bisher, der Buchstabe C den abgemessenen Winkel, dC aber einen Winkel, welcher die Summe aller Fehler, die kaum bey Abmessung des Winkels C zu begehen möglch sind, so ist in Secunden

$$dC = 2\,B'.\left(\frac{1}{MF} + \frac{\text{Séc}\ \frac{1}{2}\ C}{m\ .\ r}\right)\ 206264.$$

wenn der Winkel ACB mit dem Scheiben-Instrument (D) gemessen wird.

II. Auf mehrere Umstände ist bey Construction der Formel für dC Rücksicht zu nehmen, wenn der Winkel ACB mit dem Scheiben-Instrument (E) abgemessen wird.

In den Fernröhren dieses Instruments befindet sich statt des ausgespannten Silberfadens ein auf die Ebene eines Plan-Glases äußerst fein gezogener Strich, senkrecht auf die Ebene des Instruments.

Diese Erfindung gehört noch in unsere Zeiten. Herr Tobias Mayer gab hiezu die nächste Veranlassung, da er in sein astronomisches Fernrohr ein Plan-Glas anbrachte: er hatte hieben die Absicht, kleine Winkel am Himmel, vermittelst eines solchen sogenannten Glas-Mikrometers, zu messen. Dieser Absicht ein Genüge zu leisten, muste natürlicher Weise alles darauf ankommen, die Striche auf das Glas so fein als möglich zu ziehen, damit sie nicht einen großen Raum am Himmel zudecken möchten, und wirklich that Herr Mayer alles, was man nur immer in diesem Stücke nach seiner Methode, die er vorgeschlagen hatte, thun konnte. Allein die höchste Vervollkommnung dieser Glas-Mikrometer schien Herrn Brander in Augsburg vorbehalten zu seyn.

Dieser Künstler schlug bey Verfertigung dieser Art von Mikrometern einen andern Weg ein; er zog nemlich die Striche nicht mit Tusche auf die Ebene des Plan-Glases, sondern schnitte dieselbe mit der Spitze eines Diamants in die Masse des Glases selbst ein. Er erwarb sich durch vielfältige Uebung ein so feines Gefühl seiner Hand, daß er im Stande war, Schnitte in die Masse eines Glases zu ziehen, von solcher Feinheit, die man nach der Mayrschen Methode niemals erreichen kann.

Herr

Herr Brander machte nachgehends von diesen Mikrometern häufige Anwendungen. Er brachte sie in allen seinen astronomischen und geometrischen Fernröhren zu mancherley Gebrauch an, und hatte dabey die Absicht, die Schnitte in die Masse des Glases so fein als nur immer möglich ist, zu ziehen, damit nicht ihre Breite der Observation nachtheilig seyn möchte: weil er hiebey den Satz zum Grunde legte, daß der Gegenstand, nach welchem das Fernrohr gerichtet wird, jedesmal vor diesem Schnitt mußte durchschnitten werden.

Vielleicht mag Herrn Brander zu diesem Grundsatz das alltägliche Verfahren der meisten Beobachter, welche den Gegenstand durch den Faden in dem Fernrohr zu durchschneiden gewohnt sind, oder auch das unbequeme seiner eigenen Mikrometer, Veranlassung gegeben haben: weil vermittelst derselben der Gegenstand nicht immer scharf geschnitten werden kann; indem dieselbe dem Ausspringen immer ausgesezt sind, wenn sie auch von der Hand des Künstlers mit äußerster Feinheit und rein geschnitten sind.

Legt man nun diesen Satz zum Grunde, daß der Gegenstand jederzeit mit dem senkrechten Schnitt auf dem Glase durchschnitten werden müsse, so lassen sich hieraus folgende Folgerungen herleiten.

α. Es mißt der Schnitt in dem Centro des Objektiv den Winkel von $\frac{\varepsilon}{F}$ 206264 Secunden; er deckt also auf einem Gegenstand der in der Entfernung x vom Objektiv-Glas abstehet, einen Streifen (T) zu, dessen Breite gleich ist $\frac{\varepsilon}{F} . x$.

β. Ist nun des Gegenstandes A Breite gleich $\frac{\varepsilon}{F} d = \eta$, so wird derselbe von dem Schnitt ganz zugedeckt. Wäre nun die Gesichs-Schärfe des Beobachters so scharf, daß er einen gleichsam unendlich kleinen Punct d^x noch mit der vollkommensten Deutlichkeit auf dem Gegenstande (R) beobachten könnte, so könnte er auch in Ansehung der Richtung des Fernrohrs noch auf einen Streifen von der Breite $\frac{1}{\mathfrak{M}} d^x$ gewiß seyn, daß der Schnitt der Gegenstand A und

und die Axe seines Auges in einer und ebenderselben Vertical-Ebene sich wirklich befinden müssen, in dem Augenblick, da er glaubt, daß sich dieselbe darinnen befinden.

Nun ist aber dem Beobachter auf dem Gegenstand (R) der Punct $\mathfrak{B}^*$ beynahe verschwindend; er ist also immer noch nicht recht gewiß, ob der Schnitt, der Gegenstand A und sein Auge in einerley Vertical-Ebene sich befinden, oder ob der Schnitt nicht noch um den Theil $\frac{1}{\mathfrak{M}}\mathfrak{B}^*$ von dieser Ebene rechts oder links abweichet, in dem Augenblick, da er sich für überzeugt hält, der Schnitt decke genau den Gegenstand A, wenn auch der Schnitt auf dem Glase selbst der allerreinste wäre. Eben so verhält sichs nun auch mit dem Gegenstande B.

γ. Ist der Gegenstand A oder B etwas breiter als der Streifen (T), so hat der Beobachter die Absicht, denselben vermittelst des Schnitts auf dem Glase in der Mitte durchzuschneiden.

Wäre nun das Augen-Maas des Beobachters das beste, das man sich nur denken kann, so wäre es ihm, vermöge der Construction seines Auges, doch nicht möglich, den Gegenstand A in seiner Mitte mit Gewißheit durchzuschneiden auf einen Punct, der kleiner wäre, als der Punct, welchen er auf demselben noch vollkommen siehet. Dieser Punct ist aber für sein Auge, vermittelst des Fernrohrs, gleich $\frac{1}{\mathfrak{M}}\mathfrak{B}'$; hieraus folgt, daß der Beobachter des Fernrohrs nach dem Gegenstande A, in Rücksicht des Theils, welchen er an demselben durchzuschneiden willens ist, nur gewiß seye bis auf einen Punct $\frac{1}{\mathfrak{M}}\mathfrak{B}'$, folglich auf dem Gegenstand selbst, auf einen Streifen, dessen Breite gleich ist $\frac{\mathfrak{B}'.d}{\mathfrak{M}.F}$.

δ. Noch ist ein dritter Fall übrig, da nemlich der Gegenstand A oder B kleiner als der Streifen (T) ist.

Führet der Beobachter das Fernrohr gegen diesen Gegenstand, so ist ihm derselbe schon beynahe verschwindend in dem Augenblick,

da

da sein Bild von dem Schnitt noch um den Punct $\frac{1}{M}$ B* abstehet; er ist ihm gänzlich unsichtbar, wenn seine äussere Fläche mit der Schärfe des Schnittes und seinem Auge wirklich in einer Ebene liegen, und kommt ihm erst alsdann wieder zum Vorschein, wenn er das Fernrohr um einen kleinen Winkel (ϕ) wendet, in dem Augenblick, da die eine Seite des Gegenstandes oder das Bild desselben schon um den Punct $\frac{1}{M}$ B* wieder über die andere Schärfe des Schnittes hinaus ist.

Hieraus folgt nun, daß der Beobachter in Ansehung der Richtung des Fernrohrs nach dem Gegenstande A und B jederzeit nur bis auf einen Theil gewiß seyn könne, dessen Bild im Fernrohr gerade so groß ist, als die Breite des Schnitts auf dem Glase, auch selbst in dem Falle, wenn der Schnitt äusserst rein in die Masse des Glases eingezogen ist.

Es kommt also bey Beurtheilung der Zuverläßigkeit, mit welcher der Winkel ACB, vermittelst eines Scheiben-Instruments, nach dieser Messungs-Methode abgemessen wird, jederzeit die Breite der Gegenstände mit in Betracht; da hingegen bey der Messungs-Methode, nach welcher der Gegenstand nur blos an den Rand des Silberfadens geführt wird, dieselbe niemalen in Rechnung gebracht werden darf.

In Rücksicht der scheinbaren Breite der Gegenstände können also folgende Fälle statt finden.

Wenn $\varkappa$ den Durchmesser des Bildes von $\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}$ vorstellet,
. . τ . . . .

so kann seyn $\varkappa > \varepsilon$; $\varkappa < \varepsilon$; $\varkappa = \varepsilon$.

$\tau > \varepsilon$; $\tau < \varepsilon$; $\tau = \varepsilon$.

Ist $\varkappa > \varepsilon$ oder $\varkappa < \varepsilon$ oder $\varkappa = \varepsilon$;

so kann seyn $\tau = \varepsilon$.

$\tau > \varepsilon$.

$\tau < \varepsilon$.

Wenn ich nun annehme, unter diesen Fällen, den Fall, da $\varkappa > \varepsilon$ und $\tau = \varepsilon$ ist, so muß seyn mit dem Scheiben-Instrument (E)

$$dC = \left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}\,F} + \frac{\varepsilon}{F} + \frac{2\,\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}\,C}{m.r}\right)\,206264.$$

Beyde Werthe von dC, mit dem Scheiben-Instrument (D) und (E), verhalten sich also gegen einander, wie

$$2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{1}{\mathfrak{M}\,F} + \frac{\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}\,C}{m\,r}\right) : \left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}\,F} + \frac{\varepsilon}{F} + \frac{2\,\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}\,C}{m\,r}\right);$$

und der Unterschied zwischen beyden Resultaten hängt also in diesem Falle blos noch davon ab, ob $\varepsilon > \frac{1}{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{B}'$ oder $\varepsilon < \frac{1}{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{B}$ ist.

Vergleichung des Effects verschiedener Meß-Werkzeuge, mit welchen der Winkel ACB abgemessen werden kann.

Ich setze hiebey, wie bisher, den Satz zum Grunde, die Licht-Menge, welche der Beobachter von dem entfernten Gegenstande durch das Fernrohr ins Auge bekommt, sey so groß, als die Licht-Menge, welche er von einem Gegenstand (R) bekommt, welchen er in seiner Gesichts-Ferne bey der Erleuchtung der reinen Atmosphäre betrachtet, und welche ihm in dieser Entfernung unter dem nemlichen optischen Winkel erscheint, als der entfernte Gegenstand durch das Fernrohr.

Auch nehme ferner an, in den Fernröhren der Instrumente seyen feine Silberfäden von äusserster Glätte und gleicher Dicke ausgespannt, und die Gegenstände A und B werden bey Abmessung des Winkels ACB vermittelst derselben geschnitten, nicht durchschnitten.

So wäre also für das Scheiben-Instrument

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{1}{\mathfrak{M}\,F} + \frac{\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}\,C}{m.r}\right)\,206264.$$

Mit

Mit dem Meßtisch und Diopter-Lineal.

Wird der Winkel ACB vermittelst des Diopter-Lineals auf den Meßtisch gerissen, und seine Größe vermittelst des Transporteurs oder der Chorden-Scala abgenommen, so ist

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{v}{F} + \frac{\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}C}{r'.m}\right) 206264.$$

Mit dem Meßtisch und dem Fernrohr.

Ist statt der Dioptern ein Fernrohr auf der Ebene des Lineals angebracht, so ist unter den nemlichen Umständen

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{1}{\mathfrak{M}\,F} + \frac{\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}C}{r'.m}\right) 206264.$$

Mit dem Scheiben-Instrument, durch Hülfe der Magnetnadel.

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{1}{\mathfrak{M}\,F} + \frac{2\,\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}C}{r.m}\right) 206264.$$

Mit dem Branderschen Goniometer, wenn das Fernrohr mit Fäden versehen ist.

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{1}{\mathfrak{M}\,F} + \frac{2\,\mathrm{Cot}\,\frac{1}{2}C}{m.(\tau-\varkappa)} - \frac{(1+n')\,\mathfrak{A}}{r.\mathfrak{B}'\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}C}\right) 206264.$$

In dieser Formel bezeichnet $\varkappa$ die Chorde des Auxiliar, und τ die Chorde des Auxiliar und Winkels ACB zusammen genommen. $\mathfrak{A}$ ist der Theil, auf welchen der Beobachter in Abmessung einer Linie mit dem Stangen-Cirkel in Rücksicht der Schärfe seines Gesichts und der Dicke der Cirkel-Spitzen gewiß ist, in dem Fall, wenn das äusserste Ende der Linie sehr scharf und deutlich gesehen ward: $n\mathfrak{A}$ aber ist dieser nemliche Theil, wenn das Ende der abzumessenden Linien aus mancherley Umständen und Ursachen nicht deutlich gesehen werden kann. Der kleinste Werth von n ist also gleich 1.

Mit dem Branderschen Spiegel-Sextant; wenn in den Fernrohren Fäden angebracht sind.

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{2\ \mathrm{tang}\ \frac{1}{2}C}{m.\tau} - \frac{(1+n)\,\mathfrak{A}}{r.\mathfrak{B}'\ \mathrm{Cot}\ \frac{1}{2}C} + \frac{1}{\mathfrak{M}F}\right) 206264.$$

Mit dem Branderschen dioptrischen Sector.

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{2\ \mathrm{tang}\ \frac{1}{2}C}{m.\tau} - \frac{(1+n')\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}'.r.\mathrm{Cot}\ \frac{1}{2}C} + \frac{1}{\xi\,\mathfrak{M}F}\right) 206264.$$

In dieser und in der folgenden Formel bedeutet $\frac{1}{\xi}$ einen Factor, mit welchem der Punct $\mathfrak{B}'$ multiplicirt werden muß, wenn nach Beschaffenheit der Breite der Gegenstände, in der Formel der Punct $\mathfrak{B}'$ entweder $\mathfrak{B}^*$ oder gleich ε werden soll; weil mit diesem Instrument die Gegenstände jedesmal von dem Schnitt auf der Glas-Scale durchschnitten werden müssen. Der kleinste Werth von ξ ist also gleich 1.

Mit dem Tubo Campi amplissimi.

$$dC = \frac{2\,\mathfrak{B}'}{r}\left(\frac{1}{\xi.\mathfrak{M}} + \frac{\mathrm{Sin}\ 2C}{4.\mathfrak{B}'}\right) 206264.$$

Mit dem Mayerschen catoptrischen Winkelmesser und Hadley's Spiegel-Octant.

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{1}{2.\mathfrak{M}F} + \frac{\mathrm{Sec}\ \frac{1}{4}C}{m\,r}\right) 206264.$$

Mit dem Branderschen Spiegel-Octant.

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{n}{\mathfrak{M}F} + \frac{\mathrm{Sec}\ \frac{1}{4}C}{m\,r}\right) 206264.$$

Mit

Mit dem Höschelschen catoptrischen Cirkel.

$$dC = 2\,\mathfrak{B}'\left(\frac{\mathrm{Sec}\,\frac{1}{4}\,C}{r} + \frac{\frac{1}{2}\,n\,v}{c}\right)206264.$$

In dieser Formel, so wie in der vorhergehenden, hängt der Werth des Factors n von der Schärfe und Reinigkeit der Schnitte ab, welche auf die Spiegel-Gläser des Instruments gezogen sind; er ist also in dem Fall, wenn diese Striche so rein und scharf als nur immer möglich ist, gezogen sind, gleich 1, in jeglichem Falle aber größer als 1. Mit dem Factor v hat es folgende Bewandnis.

Weil mit diesem Instrument mit bloßem Auge nach dem Gegenstande gesehen wird, so kommt es nur darauf an, ob der Abstand (c) des Schnitts auf dem offenen Glase von dem Visier-Loch nicht größer oder kleiner als die Gesichts-Ferne (G) des Beobachters seye. Ist dieses, so ist $\mathfrak{B}'$ der Punct, auf welchen der Beobachter gewiß ist, daß der Gegenstand A oder B auch wirklich an dem Schnitt stehe, in dem Augenblick, da er glaubt, die äussere Schärfe des Schnitts schneide denselben.

Ist dieses aber der Fall nicht, sondern der Abstand c ist größer oder kleiner als die Gesichts-Ferne G des Beobachters, so findet man den Werth von dem Factor v folgendermaßen.

Der Beobachter stellet in die Entfernung c von seinem Auge zwey Fäden, und nähert dieselbe einander so lange, bis er glaubt, die beyden Fäden berühren einander. In diesem Augenblick aber stehen die Fäden noch um die Weite η aus einander; der Beobachter kann also in dieser Entfernung c für einen Punct von der Dimension η nicht mehr gut stehen; er ist also auch in Rücksicht des Standes des Gegenstands A und B an dem Schnitte auf dem Glase, nur bis auf einen Winkel gewiß, dessen Tangente gleich $\frac{\eta}{c}$ ist.

In diesem Falle ist also der Ausdruck $\frac{n\,\mathfrak{B}'\,v}{c} = \frac{n\,\eta}{c}$; woraus sich der Factor $v = \frac{\eta}{\mathfrak{B}'}$ ergiebt. Eben so wird auch der Factor v für die Formel gefunden, wenn der Winkel mit dem Diopter-Lineal gemessen wird.

Wird der Winkel ACB mit dem Branderschen Engymeter gemessen,

so ist

$$dC = \left(\frac{1}{\xi \mathfrak{M} F} + \frac{d\varepsilon \ \mathrm{Sin}\, 2C}{1 \ \mathrm{tang}\, C} - \frac{(n+n)\mathfrak{A}}{2.\mathfrak{B}' r} \right) 206264.$$

Dies wären also in allem ein Dutzend verschiedene Werthe für das Incrementum dC des Winkels C, wenn derselbe mit zwölf verschiedenen Gattungen von Winkelmessern von einerley Beobachter abgemessen wird.

Ein Landmesser wird hierdurch in den Stand gesezt, die Genauigkeit eines Instruments mit der Genauigkeit eines andern zu vergleichen, er mag entweder mit demselben selbst, oder es mag auch ein anderer, dessen Gesichts-Schärfe ihm bekannt ist, mit denselben manipuliren.

Ich halte dafür, diese angestellten Untersuchungen mögen für diese Absicht befriedigend seyn. Ohne mich also länger hieben aufzuhalten, beschließe ich hiermit die Untersuchungen über die Zuverläßigkeit, mit welcher ein Winkel mit verschiedenen Werkzeugen abgemessen werden kann, und gehe nunmehr zu ähnlichen Untersuchungen über, über die Genauigkeit, mit welcher ein Landmesser Linien auf dem Felde und Papier abmessen kann.

Ich habe diesen Untersuchungen den zweyten Abschnitt gegenwärtiger Betrachtungen eingeräumt, und werde mich übrigens auch in demselben, wie bisher, der möglichsten Kürze und Gründlichkeit befleißigen, weil ich, wie ich bereits in der Vorrede angezeigt habe, voraussetze, daß jeder Landmesser schon weiß, was Winkel und Linien messen heißt.

Zweyter Abschnitt.

Betrachtungen über die Abmessung gerader Linien.

§. 1.

Bey Abmessung einer jeden Linie, sowohl auf dem Felde als auf dem Papier, hat der Landmesser die Absicht, die Anzahl von Schuhen oder Theilen eines Schuhes ausfindig zu machen, welche diese Linie in sich hält. Er bedient sich hiezu gewißer Werkzeuge, deren verschiedene Arten sich auf zwey besondere, nemlich die sogenannte Meßkette und Meßruthe einschränken lassen. Ich setze auch bey diesen Untersuchungen über die Abmessung gerader Linien auf dem Felde, welche ich hier zuerst zum Gegenstand nehme, voraus, daß die Meß-Werkzeuge also beschaffen seyen, daß man in Ansehung ihrer Länge sich keines Fehlers befürchten darf: weil ich nachher etwas über die Prüfung derselben zu sagen gedenke.

Soll der Landmesser mit einem dieser Meß-Werkzeuge, nemlich der Meßkette, oder den Meßruthen, die Linie AE Fig. 7. abmessen, so muß er sich über dieselbe eine Vertical-Ebene abstechen, vermittelst der Stäbe N. 1. N. 2. . . . . N. m., welche er in gewißen Entfernungen AB, BC, CD, DE . . . . von einander dergestalt senkrecht in den Erdboden stecket, daß, wenn er mit dem Auge in dem Punct w nach dem Gegenstande Eε visieret, die Visier-Linie wε an den Seiten-Flächen aller dieser Stäbe genau vorbeystreife, und also alle zusammen in einerley Vertical-Ebene AaEε sich befinden. Hat dieses genau seine Richtigkeit, und wäre es möglich, die Weiten AB, BC ꝛc. ohne allen Fehler abzumessen, so würde man also das

das wahre Maas der Linie AE überkommen. Anderst aber würde sichs verhalten, wenn die Stäbe N. 1. N. 2. N. 3. 2c. nicht senkrecht in dieser Ebene wären, sondern entweder zur Rechten oder zur Linken dieser Vertical-Ebene $AaE\varepsilon$ eine Neigung gegen den Horizont hätten, gesezt auch, daß es möglich wäre, eine gerade Linie auf dem Felde abzumessen. Denn wenn ich annehme, die Stange N. 1. stecke nach der Richtung $A\alpha$ in dem Erdboden, so siehet das Auge in o das Objekt ε in der Visier-Linie $o\alpha\varepsilon$, welche mit der Visier-Linie $wa\varepsilon$ den Winkel aEA macht; oder, wenn ich ferner voraussetze,

es stecke auf dem Erdboden nach der Richtung	der Stab	und schneide die Visierlinie $o\alpha\varepsilon$ in dem Punct
$A\alpha$	N. 1.	. . . . . α
$b\beta$	N. 2.	. . . . . β
$f\gamma$	N. 3.	. . . . . γ
$d\delta$	N. 4.	. . . . . δ
$E\varepsilon$	N. 5.	. . . . . ε

so nimmt der Landmesser die Summe der abgemessenen Längen Ab, bf, fd, dE für das wahre Maas der Länge AE an, das doch der Summe der Längen AB, BC, CD, DE gleich ist; er begeht also einen Fehler, der gleich $Ab+bf+fd+dE-(AB+BC+CD+DE)$ ist.

Es ist aber $AB=\sqrt{(Ab^2-bB^2)}$.

$$uB=\sqrt{(ub^2-bB^2)}. \qquad ub=\frac{bB\,.\,bf}{bB+Cf}$$

$$uC=\sqrt{(uf-Cf)} \qquad uc=\frac{Cc\,.\,bf}{bB+Cf}$$

$$C\omega=\sqrt{(f\omega^2-Cf^2)} \qquad \omega c=\frac{Cf\,.\,fd}{Cf+dD}$$

$$D\omega=\sqrt{(\omega d^2-dD^2)} \qquad \omega c=\frac{dD\,.\,fd}{Cf+dD}$$

$$DE=\sqrt{(dE^2-dD^2)}.$$

Bezeichnet man nun den Unterschied $Ab+bf+df+dE-(AB+BC+CD+DE)$ mit dem Buchstaben d, so ist

d =

$$\mathfrak{d}=Ab+bf+fd+dE-\left\{\begin{array}{l}\sqrt{(Ab^2-bB^2)}+\sqrt{(ub^2-bB^2)}+\sqrt{(uf^2-Cf^2)}\\+\sqrt{(f\omega^2-Cf^2)}+\sqrt{(\omega d^2-dD^2)}+\sqrt{(dE^2-dD^2)}.\end{array}\right.$$

Wenn aber bB gegen Ab und ub, Cf . . . uf . . $f\omega$, dD . . . ωd . . dE sehr klein ist,

so findet auch hier die in §. 3. c. 1sten Abschnitt gemachte Annäherung statt, und es wird diesem zufolge

$$\mathfrak{d}=Ab+bf+fd+dE-\left\{\begin{array}{l}Ab+\frac{bB^2}{2\,Ab}+ub+\frac{bB^2}{2ub}+uf+\frac{Cf^2}{2uf}\\+f\omega+\frac{Cf^2}{2\omega f}+\omega d+\frac{dD^2}{2\omega d}+dE+\frac{dD^2}{2DE}\end{array}\right\}\text{ oder}$$

$$\mathfrak{d}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{bB^2}{Ab}+\frac{bB^2}{ub}+\frac{Cf^2}{uf}+\frac{Cf^2}{f\omega}+\frac{dD^2}{\omega d}+\frac{dD^2}{dE}\right)$$

$$\mathfrak{d}=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{bB^2}{Ab}+\frac{(bB+Cf)\,bB}{bf}\mp\frac{Cf\,(bB+fC)}{bf}\\+\frac{Cf.(Cf+dD)}{fd}+\frac{dD.(Cf+dD)}{fd}+\frac{dD^2}{dE}\end{array}\right.$$

n. 1. $$\mathfrak{d}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{bB^2}{Ab}\mp\frac{(bB+Cf^2)}{bf}+\frac{Cf+dD^2)}{fd}+\frac{dD^2}{dE}\right).$$

Aus diesem zusammengesezten Falle lassen sich einige andere einfachere herleiten, als

n. 2. Wenn der Punct b in Ansehung der Fläche AaEε negativ ist, also b in g fällt, so ist

$$\mathfrak{d}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{AB^2}{Ab}+\frac{(bB-Cf^2)}{bf}+\frac{Cf+dD^2)}{fd}+\frac{dD^2}{dE}\right).$$

n. 3. Wenn außer n. 2. auch noch $dD=0$ ist, also die Stange N. 4. senkrecht in D stehet; ist

$$\mathfrak{d}=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{bB^2}{Ab}+\frac{(bB-Cf^2)}{bf}+\frac{Cf^2}{fd}\right).$$

 Wenn

Wenn außer n. 3. auch noch $Cf - = 0$ ist, so ist

$$d = - \frac{1}{2} \frac{1\, bB^2}{2(Ab + bf)}.$$

Substituirt man die jedesmaligen Werthe von bB, Cf, dD, Ab, bf, fd, dE in den in n. 1. n. 2. n. 3. gegebenen Ausdrücken für d, so wird sichs zeigen, um wie viel in jedesmaligem Falle die Linie AE fehlerhaft gemessen würde, vorausgesezt, daß die Puncte b, f, d, A, E, mit B, C, D, in einerley Horizontal-Ebene liegen. Es wird zwar der Werth von d immer nur sehr klein seyn, aber er kann größer werden, wenn man annimmt, daß die Puncte b, f, d, nicht in einerley Horizontal-Ebenen liegen mit den Puncten B, C, D; hievon werde ich in dem folgenden §. etwas mehreres sagen.

§. 2.

a. Es soll in Fig. 8. die Länge der Linie $A\beta$ gemessen werden, statt deren aber misset der Landmesser eine Länge von c° Ruthen von A nach b.

δAB ist eine Horizontal-Ebene, und statt βbA eine Ebene, welche mit der Horizontal-Ebene den Winkel $b\beta\gamma$ macht. Die Linie βA macht mit der Horizontal-Linie BA den Winkel $\beta AB = \phi$; die Linie bA mit δA den Winkel $bA\delta = \psi$; die Linie bA mit βA den Winkel $bA\beta = \gamma$. Es fragt sich, wie groß wird bey diesen Umständen der Horizontal-Abstand der beyden Gegenstände A und β seyn?

Errichtet man über den Linien $A\beta$ und Ab Vertical-Ebenen $B\beta CA$, δbCA, so ist δCB der Neigungs-Winkel beyder Ebenen gegen einander, gleich dem Winkel δAB in der Horizontal-Ebene δAB. Diesen Winkel finde vermittelst der 3 Seiten βC, bC, $b\beta$, des sphärischen Dreyecks $bC\beta$, nach §. 1.

$$\mathrm{Cos}\ bC\beta = \frac{\cos b\beta - \cos \beta C \cdot \cos bC}{\mathrm{Sin}\ \beta C \cdot \mathrm{Sin}\ bC}.$$

Es

Es ist aber $\beta C = 90 - \Phi$; $bC = 90 - \psi$; $b\beta = \gamma$; demnach

$$\operatorname{Cos} bC\beta = \frac{\cos\gamma - \cos(90-\varphi) \cdot \cos(90-\psi)}{\operatorname{Sin}(90-\varphi) \cdot \operatorname{Sin}(90-\psi)}.$$

$$\operatorname{Cos} bC\beta = \frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\varphi \cdot \operatorname{Cos}\psi} - \operatorname{tang}\psi \cdot \operatorname{tang}\Phi = \operatorname{Cos}\varepsilon.$$

Fället man von b eine Perpendicular-Linie $b\omega$ auf δA und von ω eine Perpendicular-Linie ωp auf AB;

so ist einmal $\omega A = c^{\circ} \cdot \operatorname{Cos}\psi$; demnach ist auch

$$1 : \omega A = \operatorname{Sin} A\omega p : Ap.$$

$$1 : c^{\circ} \cdot \operatorname{Cos}\psi = \operatorname{Cos}\varepsilon : Ap.$$ und hieraus

$$Ap = c^{\circ} \cdot \operatorname{Cos}\psi \cdot \operatorname{Cos}\varepsilon. = c^{\circ} \cos\psi \left(\frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\varphi \cdot \operatorname{Cos}\psi} - \operatorname{tang}\Phi \operatorname{tang}\psi\right).$$

$$= \frac{c^{\circ} \operatorname{Cos}\gamma}{\cos\varphi} - c^{\circ} \operatorname{Sin}\psi \operatorname{tang}\Phi.$$

$$= c^{\circ} \cdot \left(\frac{\operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Cos}\varphi \cdot \operatorname{Sin}\psi \cdot \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}\right)$$

$$Ap = c^{\circ} \cdot \left(\frac{\operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Sin}\varphi \cdot \operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Cos}\varphi}\right).$$

Drücket man $\operatorname{Sin}\Phi \cdot \operatorname{Sin}\psi$ durch den Cosinus eines Bogen z aus, so ist auch

$$Ap = c^{\circ} \cdot \left(\frac{\operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Cos} z}{\operatorname{Cos}\varphi}\right) = 2 \cdot c^{\circ} \cdot \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\gamma + z) \cdot \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\gamma - z) : \cos\Phi.$$

Diese Weite Ap würde man also für den Horizontal-Abstand beyder Gegenstände A, β bey diesen Umständen halten; es ist aber derselbe gleich $oA = A\beta \cos\Phi$. Aber $A\beta$ ist gleich $c^{\circ} \cos\gamma$, weil βb rechtwinklicht auf $A\beta$ ist. Demnach ist $oA = c^{\circ} \cos\gamma \cos\Phi$; und $Ao - Ap = c^{\circ} \cos\gamma \cos\Phi - 2\, c^{\circ} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\gamma + z) \cdot \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\gamma - z) : \cos\Phi$ würde der Unterschied, oder die Größe des Fehlers seyn, welchen man begehen würde, wenn man die Linie bA statt der Linie βA abmißt.

Wenn der Winkel $\gamma\beta b$ sehr klein ist, so kann man auch γ für ε setzen, und so würde $Ap = c^{\circ} \cos\gamma \cos\psi$; $oA = c^{\circ} \cos\gamma \cos\phi$. Demnach

$$oA - pA = op = c^{\circ} \cos\gamma (\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\psi) = 2c^{\circ} \mathrm{Cos}\,\gamma . \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(\psi+\varphi) . \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(\psi-\varphi).$$

b. Ein anderes Maas würde sich für die Linie AB Fig. 7. ergeben, wenn man annimmt, daß auch außer den Fehlern, welche nach §. 1. von irriger Absteckung derselben herrühren, noch überdas in wirklicher Abmessung der Linien Ab, bc, cd, dE Fehler begangen werden. Unter diese Fehler zähle ich erstlich diejenigen, die entstehen, wenn die Meßstangen oder die Meßkette nicht jedesmal während Abmessung einer Linie genau in der Vertical-Ebene sich befinden, sondern bald rechts, bald links mit derselben einen Winkel machen. Es sey z. E. in Fig. 7. gE und fg, zwey Stangen, die einander in dem Puncte g berühren, die Stange gE macht mit der Ebene der Linie dE den Winkel gEh; die Stange fg aber den Winkel gfh. Ueberdas macht eine Vertical-Ebene durch fg mit der Vertical-Ebene durch dE den Winkel $hfi = \mu$ und eine Vertical-Ebene durch gE den Winkel $hEi = \nu$. Es bezeichne ferner λ die Länge gE, λ' die Länge fg. Bey dieser Lage der Stangen misset also der Landmesser die Länge fE gleich $\lambda + \lambda'$, welche doch gleich ist den Längen $iE + if$, begehet also einen Fehler, den ich $\varkappa$ heiße.

Nun ist einmal $hE = \lambda . \mathrm{Cos}\, gEh$; $hf = \lambda' \mathrm{Cos}\, gfh$.
Ferner $iE = \lambda \mathrm{Cos}\, \nu . \mathrm{Cos}\, gEh$; $fi = \lambda' \mathrm{Cos}\, \mu . \mathrm{Cos}\, gfh$.
Demnach $fE = \lambda . \mathrm{Cos}\, \nu . \mathrm{Cos}\, gEh + \lambda' . \mathrm{Cos}\, \mu . \mathrm{Cos}\, gfh$.

n. 2. Wäre $\lambda = \lambda'$, also die Längen beyder Stangen, einander gleich, so ist auch $\mu = \nu$; also $fE = \lambda \cos\mu . (\mathrm{Cos}\, gEh + \mathrm{Cos}\, gfh)$. und es würde $\varkappa = 2\lambda - \lambda \mathrm{Cos}\,\mu (\mathrm{Cos}\, gEh + \mathrm{Cos}\, gfh) = (2 - \mathrm{Cos}\mu (\mathrm{Cos}\, gEh + \mathrm{Cos}\, gfh)\lambda$.

$$\varkappa = \lambda . \left(2 - 2\,\mathrm{Cos}\,\mu . \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(gEh + gfh)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{gEh - gfh}{2}\right)\right)$$
$$= 2\lambda . \left(1 - \mathrm{Cos}\,\mu\, \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(gEh + gfh)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{gEh - gfh}{2}\right)\right).$$

n. 3.

n. 3. Wenn der Winkel gEh und $gfh = 0$, also die Stangen in der Ebene der Linie dE liegen, so ist

$$\varkappa = 2\lambda . (1 - \mathrm{Cos}\,\mu) = 4\lambda . \mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\mu .$$

und wenn der Winkel μ sehr klein ist, so ist auch

$$\varkappa = \lambda . \mu^2 .$$

Für den Fall n. 3. lässet sich auch fE nach §. 3. finden. Es ist nemlich $iE = hE - \frac{ih^2}{2gE}$ und $if = fh - \frac{ih^2}{2fh}$.

Demnach $fE = hE + fh - \left(\frac{ih^2}{2hE} + \frac{ih^2}{2hf}\right)$ und $\varkappa = \frac{ih^2}{2(hf + hE)}$.

Stellen in Fig. 2. die Linien Ay, gm, mm, Stangen-Längen und die Abscissen yk, lm, nm die Abweichung der End-Puncte der Stangen von der Vertical-Fläche der Linie AA vor, und heißet jede Stangen-Länge λ, die Abscissen aber nach alphabetischer Ordnung x^{I}, x^{II}, x^{III}, so ist

$$AA = \lambda - \frac{x^2}{2\lambda} + \lambda - \frac{(x^{I} + x^{II})^2}{2\lambda} + \lambda - \frac{(x^{II} + x^{III})^2}{2\lambda} + \lambda - \frac{(x^{III} + x^{IV})^2}{2\lambda}.$$

oder wenn die Abscissen alle gleich groß angenommen werden, so ist

$$AA = \lambda - \frac{x^2}{2\lambda} + \lambda - \frac{4x^2}{2\lambda} + \lambda - \frac{4x^2}{2\lambda} + \lambda - \frac{4x^2}{2\lambda} + \lambda - \frac{x^2}{2\lambda}.$$

Wenn überhaupt von A bis b in Fig. 7. m Stangen-Längen gezählt worden, so würde, wenn diese Linie nach dem für die Linie AA in Fig. 2. gegebenen Beyspiel gemessen worden,

$$Ab = m\lambda - \frac{x^2 + (4m-2)x^2 + x^2}{2\lambda} = m\lambda - \frac{(4m-6)x^2}{2\lambda} = m\lambda - \frac{(2m-3)x^2}{\lambda}$$

Würden alle Linien Ab, bc, cd, dE in Fig. 7. nach dem Beyspiel der Linie AA in Fig. 2. gemessen, und

man zählte von	Stangen-Längen,	so würde	gleich
A nach b	α	Ab	$\alpha\lambda - \frac{(2\alpha-3)x^2}{\lambda}$
b . . c	β	bc	$\beta\lambda - \frac{(2\beta-3)x^2}{\lambda}$ etc.
c . . d	γ	cd	$\gamma\lambda - \frac{(2\gamma-3)x^2}{\lambda}$
d . . E	δ	dE	$\delta\lambda - \frac{(2\delta-3)x^2}{\lambda}$

c. Es wurde bisher immer vorausgesezt, daß man von dem Standpunct A frey und ungehindert nach dem Gegenstande E in Fig. 7. visieren könne. Nun aber nehme an, es befinde sich innerhalb der Vertical-Ebenen über beyde Puncte A und E ein Berg, über welchen die Vertical-Ebene von A nach E abgesteckt, und die Horizontal-Linie durch seine Grundfläche in dieser Vertical-Ebene gemessen werden soll.

Man verfahre übrigens hiebey nach der gewöhnlichen Methode, indem man von einigen Puncten an den Wänden des Berges sich senkrechte Linien auf die Horizontal-Ebene denket, und den Abstand beyder solcher Linien auf einem Stabe oder auch mit der Kette abmißt. Das Verfahren selbst ist übrigens zu bekannt, als daß ich dasselbe hier anzeigen sollte; in allen Büchern der practischen Feldmeß-Kunst findet man hiezu Anweisung; auch gedenket hievon Herr Hofrath Mayer im ersten Bande der practischen Geometrie §. 43. Ich werde vielmehr nur die Folgen untersuchen, welche in Absicht auf den abzumessenden Horizontal-Abstand entstehen, wenn der Landmesser dasjenige nicht thut, oder nicht thun kann, was er eigentlich hiebey thun soll.

Es sey zu dem Ende in Fig. 9. HAD ein Theil der Wand des Berges in der abgesteckten Vertical-Ebene. In A liege eine Stange G auf, ouf deren Ebene eine Setzwaage oder eingetheilter Quadrant sich befindet, um nach demselben die jedesmalige Neigung dieser Stange gegen den Horizont abzumessen. In D sey ebenfalls eine Stange eingesezt, welche mit H bezeichne. Hat die Stange G

die

die Lage $A\beta$ und H die Richtung $D\delta$, so schneidet G die Stange H in dem Puncte β, und die Puncte A, β, D liegen nicht nur in einerley Vertical-Ebene EACD, sondern es ist auch $A\beta = ED$. Im gegenwärtig zu betrachtenden Falle aber habe die Stange G die Richtung AB, die mit der Horizontal-Linie den Winkel bAB macht; die Stange H aber stecke nach der Richtung Dg in dem Erdboden, welche mit der Horizontal-Ebene EmDh den Winkel gDh macht, und die Stange G in dem Puncte B schneidet.

Denket man sich durch diesen Punct B und den Punct A durch die Richtung der Stange G eine Vertical-Ebene EACB; so schneidet dieselbe die Ebene ECD unter dem Winkel $DCB = \beta Ab$, dessen Größe aus den beyden Seiten CD, CB und dem Winkel DBC des sphärischen Dreyecks DCB gefunden werden; es ist nemlich, wenn ich den Bogen $D\beta$ mit ϕ, bB mit ψ, den Winkel δDB BD mit γ, den Winkel DCB mit k, BDC mit β und AB mit c bezeichne; $CD = 90 + \phi$; $CB = 90 + \psi$; $DBC = 180 - \gamma$; demnach

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} k = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (90 + \phi - 90 - \psi)}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (90 + \phi + 90 + \psi)} . \operatorname{cot} \tfrac{1}{2} (180 - \gamma + \beta).$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (\phi - \psi)}{\operatorname{Cos} (90 + \frac{1}{2} (\phi + \psi))} . \operatorname{cot} \left(90 + \left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)\right)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} k = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} (\phi - \psi)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} (\phi + \psi)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma).$$

n. 1. Wenn man annehmen darf, daß k immer nur sehr klein sey, so ist auch

$$k = \frac{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} (\phi - \psi)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} (\phi + \psi)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma).$$

In beyden Ausdrücken ist $\operatorname{Sin} \beta = \frac{\operatorname{Sin} (90 + \psi)}{\operatorname{Sin} (90 + \phi)} . \operatorname{Sin} (180 - \gamma)$.

$$= \frac{\operatorname{Sin} \gamma . \operatorname{Cos} \psi}{\operatorname{Cos} \phi.}$$

Es

Es ist ferner $Ab = c \operatorname{Cos} \psi$; und $A\beta = c \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} k$.

n. 2. Wenn ψ negativ ist, also die Stange G über den Horizont um den Winkel ψ erhöhet ist, ist

$$k = \frac{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),\ 206264; \text{ und}$$

$$\operatorname{Sin} \beta = - \frac{\operatorname{Sin} \gamma \cdot \operatorname{Cos} \psi}{\operatorname{Cos} \varphi}.$$

n. 3. Wenn $\psi = 0$; also G horizontal ist, so ist

$$k = \frac{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varphi} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = 2 \operatorname{Cot} \tfrac{1}{2}\varphi \cdot \operatorname{tang} \frac{(\beta - \gamma)}{2} \cdot 206264.$$

$$\operatorname{Sin} \beta = \frac{\operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Cos} \varphi}.$$

Stellet man einen dieser Ausdrücke für den Winkel k nach Beschaffenheit der Umstände in den Ausdruck für $A\beta$, so wird der Fehler, der hieraus auf die Horizontal-Länge ED entstehet, gleich

$$AB - A\beta = c - c \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} k = (1 - \operatorname{Cos} \psi \cdot \operatorname{Cos} k)\, c.$$

Wäre $k = \psi$, so ist

$$AB - A\beta = (1 - \operatorname{Cos} \psi^2)\, c = c \operatorname{Sin} \psi^2.$$

§. 3.

Prüfung der Meß-Stangen und der Meß-Kette.

a. Bey Prüfung der Länge einer Meß-Stange ist das Verfahren kürzlich folgendes.

Man nimmt die Länge α eines Schuhes oder mehrerer Schuhe des Maases D, welches hieben zum Grunde gelegt wird, zwischen die Spitzen eines Stangen-Zirkels, und träget α so oft auf die Ebene, durch Umschlagung des Cirkels, als es angeht. Trift die Spitze des Cirkels bey dem mten Umschlag genau das Ende der Stan-

Stange, so ist das Maas derselben richtig: ist dieses aber nicht, so wird der vorfallende Unterschied d auf dem Maasstab D gemessen. Bezeichnet man die ganze Länge der Stange nach Theilen von D mit dem Buchstaben λ, so ist in diesem Falle $\lambda = m\alpha \pm d$.

Untersuchet man nun den Grad der Zuverläßigkeit, in Ansehung der wahren Größe dieser Stange, so ist,

wenn man den kleinen Theil, um welchen man ungewiß bleibt in Ansehung der Länge	bezeichnet mit	einmal
λ	$d\lambda$	$d\lambda = m \,.\, d\alpha \pm dd.$
α	$d\alpha$	
d	dd	
c°	dc°	

Es ist aber in diesem Ausdruck $d\alpha = (1 \pm 1)\mathfrak{A}$ nach §. 4, weil hier eine Abmessung der Länge α mit dem Cirkel vorkommt; aus dem nemlichen Grunde ist auch $dd = (1 \pm 1)\mathfrak{A}$.

Wenn man ferner annimmt, daß während des Umschlagens des Stangen-Cirkels auf der Ebene der Stange keine Fehler vorgefallen sind, so wird auch $m\,d\alpha = 2m\mathfrak{A}$, und

n. 1. $d\lambda = 2m\mathfrak{A} \pm 2\mathfrak{A}. = 2(m \pm 1)\mathfrak{A}.$

Gehen nun n Stangen von der Länge λ auf eine Länge c°, so ist auch $dc^\circ = 2n(m \pm 1)\mathfrak{A}$.

n. 2. Wenn $d = 0$, so ist $dc^\circ = 2nm\mathfrak{A}$.

b. Bey Prüfung der Länge einer Meßkette ist eines der einfachsten Verfahren folgendes.

Man misset auf einer Ebene längs einer angespannten Schnur eine Linie von n Ruthen, vermittelst einiger Stäbe, von welchen jeder genau die Länge λ hat, und bezeichnet diese Länge auf das genaueste auf der Ebene. Die Länge der Meßkette sey auf n Ruthen angeschlagen. Um nun zu sehen, ob die Länge derselben auch wirklich n Ruthe sey, spannet man dieselbe längs der ausgespannten Schnur an, und siehet zu, ob die Centra der äußersten Ringe derselben genau über die auf der Ebene aufgezeichnete Marken treffen: ist dieses, so hat die Länge der Kette ihre Richtigkeit; findet sich aber ein Unterschied $\pm \delta$, so wird derselbe nach Theilen von D gemessen, und übrigens bey dem Gebrauch der Kette bey Abmessung der Linien in Rechnung gebracht.

Bezeichnete nun von diesem leztern Fall der Buchstabe c die Länge der Kette, so würde

$$c = n\lambda \pm \delta = n.m\alpha \pm \delta. \text{ nach a. n. 1, und}$$
$$dc = n.d\lambda \pm d\delta = 2.nm\mathfrak{A} \pm 2\mathfrak{A} = 2\mathfrak{A}.(nm \pm 1).$$

Wollte man den möglichst grösten Werth von dc haben, so müste hiebey noch auf einen kleinen Theil x Rücksicht genommen werden, um welchen man wegen mehr oder minderer Anspannung der Kette ungewiß bleibt. Denn wenn auch gleich die Ringe, durch welche die Glieder der Kette mit einander verbunden werden, auf das genaueste rund, und über einerley Keil getrieben sind, und also wegen derselben keine Fehler in Ansehung der Länge der Meßkette zu befürchten sind, so lässet doch die Schnellkraft des Metalls, aus welchem diese Ringe verfertiget werden, zu, daß diese Ringe durch das mehr oder mindere Anspannen der Kette in etwas ihre Figur verliehren, und also die Kette selbst um einen Theil, welchen mit x bezeichne, bald länger, bald kürzer wird. Es würde also der möglichst gröste Werth von dc oder der möglichst gröste Werth der Länge, um welche man in Ansehung der wahren Länge der Kette ungewiß bleibt, gleich

$$2\mathfrak{A}.(nm + 1) + x.$$

Ist $\delta = 0$, oder die Länge der Kette genau, $c = n\lambda$, so ist

$$dc = 2\mathfrak{A}nm + x.$$

§. 4.

§. 4.

a. Nunmehr werde diese bereits angestellte Betrachtungen über die Abmessung gerader Linien auf dem Felde auch mit einem Exempel erläutern. Ich wähle auch hier einen der verwickeltsten Fälle, um aus demselben andere einfachere heraus nehmen zu können; ich setze nemlich folgendes. Ein Landmesser wolle den horizontalen Abstand beyder Gegenstände A und E in Fig. 7. wissen: er stecket zu dem Ende die Stange N. II. in den Punct k auf dem Felde.

. . . N. III. . . . . . c . . . . . .

. . . N. IV. . . . . . d . . . . . .

Ferner:

Es liege um den Winkel	der Punct	links der Vertical-Ebene AEaE.	und um den Winkel	
kAh	k		kAb über	dem Horizont von AE.
CBc	c	rechts	fBc unter	
dCD	d	links	o	
o	h		hAB über	

Die Längen Ak, kc, cd, dE werden mit fünf Stangen gemessen von tännenem Holze; jede ist genau 10 Schuh lang, und an beyden Enden mit eisernen Schuhen oder Büchsen versehen, deren äußerste Ebene senkrecht auf die Axe der Stange abgefeilet ist.

Es ist demnach bey dieser Beschaffenheit des Terrains AE = AB + BC + CD + DE.

$$AE = \left\{ \begin{array}{l} Ak \ \text{Cos}\ kAb \ \text{Cos}\ bAB \\ + kc \ \text{Cos}\ kcb \ \text{Cos}\ bcB \ \text{Cos}\ fBC \\ + cd \ \text{Cos}\ fdc \ \text{Cos}\ Cdc \ \text{Cos}\ dCf \\ + dE \ \text{Cos}\ dED. \end{array} \right\}$$

Cos

$$\mathrm{Cos}\ bAB = \frac{\mathrm{Cos}\ kAh}{\mathrm{Cos}\ hAB\ .\ \mathrm{Cos}\ kAb} - \mathrm{tang}\ hAB\ .\ \mathrm{tang}\ kAb$$

$$\mathrm{Cos}\ bcB = \frac{\mathrm{Cos}\ kch}{\mathrm{Cos}\ hcB\ .\ \mathrm{Cos}\ kcb} - \mathrm{tang}\ hcB\ .\ \mathrm{tang}\ kcb.$$

$$\mathrm{Cos}\ fBC = -\frac{\mathrm{Cos}\ CBc}{\mathrm{Cos}\ fBc} - \mathrm{tang}\ fBc.$$

$$\mathrm{Cos}\ Cdf = -\frac{\mathrm{Cos}\ Cdc}{\mathrm{Cos}\ fdc} - \mathrm{tang}\ fdc.$$

oder wenn	Stangen-Längen λ	mißt, und die Winkel kAb, hAB, kcb, hcB, fBc, fdc sehr klein sind, so ist auch
Ak	α°	
kc	β°	
cd	γ°	
dE	δ°	

ohne besondern Fehler

$$\text{n. 1.}\quad AE = \lambda \begin{cases} \alpha^\circ\ .\ \mathrm{Cos}\ kAb\ \ \mathrm{Cos}\ kAh. \\ +\beta^\circ\ .\ \mathrm{Cos}\ kcb\ \ \mathrm{Cos}\ kch\ \ \mathrm{Cos}\ CBc. \\ +\gamma^\circ\ .\ \mathrm{Cos}\ fdc\ \ \mathrm{Cos}\ Cdc\ \ \mathrm{Cos}\ dCc. \\ +\delta^\circ\ .\ \mathrm{Cos}\ dED. \end{cases}$$

Wäre z. E.

$Ak = \alpha^\circ\ \lambda = 500.$	$kAb = 40'$	$fBc = 8'$	so ist
$kc = \beta^\circ\ \lambda = 600.$	$hAB = 0^\circ{,}30'$	$cBc = 7'$	
$cd = \gamma^\circ\ \lambda = 800.$	$hAh = 0^\circ : 14'$	$fDc = 6'$	
$dE = \delta^\circ\ \lambda = 800.$	$kcb = 33'$	$Cdc = 5'$	
	$hcB = 23'$	$dCD = 5'$	
	$kch = 11'$	$dED = 5'$	

$$AE = 499{,}96 + 599{,}83 + 799{,}99 + 799{,}995 = 2699{,}775.$$

Es würde also in diesem Falle die wahre Horizontal-Weite von A nach E um $2700 - 2699{,}775 = 0{,}225$ kleiner seyn, als die gemessene.

n. 2.

n. 2. Wenn die Winkel kAb, hAB, fBc gleich Null sind, so ist

$$AE = \begin{cases} Ab \text{ Cos } bAB \\ + bc \text{ Cos } bcB \,.\, \text{Cos } CBc \\ + cd \text{ Cos } Cdc + dE \text{ Cos } dED. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck für die Weite AE kann in solchen Fällen gebraucht werden, wo die Längen Ab, bc, cd, dE auf einer von Natur, oder durch Kunst gemachten Horizontal-Ebene abgemessen werden können.

Um eine Linie auf einem etwas geneigten Terrain horizontal zu vermessen, schlägt Herr Hofrath Mayer Schemel vor, auf welche die Stäbe nach einer Setzwaage horizontal geleget werden können; §. 34. VI. im ersten Theile der practischen Geometrie.

Herr von Osterwald räth zu gleicher Absicht, in die Vertical-Ebene der abzumessenden Linie Pfähle einzuschlagen, an deren Seiten-Flächen man hölzerne Latten nach horizontaler Richtung fest stellen kann, um über der Ebene dieser Latten die Meßstangen abschieben zu können. Herr von Osterwald erzählt in dem 2ten Bande der churbayerisch-academischen Abhandlungen einen Fall, wo nach dieser Methode von Ihm selbst eine Grundlinie von 43820,5 mit außerordentlicher Genauigkeit abgemessen worden.

b. Diese Linie lege nunmehr bey folgenden Betrachtungen zum Grunde, da ich den Grad der Genauigkeit in Rücksicht der wahren Länge dieser Linie aufzusuchen mich bemühen werde.

Diese Grund-Linie wurde vermittelst 5 tännener Stangen gemessen, deren jede 12 Schuh lang und an beyden Enden mit eisernen Schuhen versehen war. Die Lage der Linie selbst war in der verlängerten Vertical-Ebene durch zwey entfernte Thurm-Spitzen. In dieser Vertical-Ebene wurden Pfähle eingeschlagen, an deren Seiten-Wänden hölzerne Latten befestiget werden konnten, so daß man jedesmal über der Ebene dieser Latten gleichsam als auf einer Brücke eine Linie von 600 Schuhen unabgesezt fortmessen konnte.

Bezeichnet A die ganze Länge der abzumessenden Linie; c die Länge von 600 Schuhen, so ist c in $A = \frac{A}{c} = q$ mal enthalten.

n. 1. Nun nehme an, man seye in Ansehung der Lage jeder Meßstange um einen Theil x ungewiß, ob die Stange genau in der abgesteckten Vertical-Ebene der Linie c liege oder nicht, und bezeichne den Fehler, der hieraus auf die Länge c entstehet, mit δ. Es ist also $\delta = \left(\frac{2\left(\frac{c}{\lambda} - 3\right)x^2}{\lambda}\right) = \frac{(2c - 3\lambda)x^2}{\lambda^2}$; oder wenn $\frac{c}{\lambda} = p$ ist, so ist $\delta = \frac{(2p - 3)x^2}{\lambda}$ nach §. 2. b. n. 3.

n. 2. Man ist ferner in Ansehung der wahren Länge λ jeder Meßstange um einen Theil $d\lambda$ ungewiß; aber $d\lambda = m\,d\alpha. = 2m\mathfrak{A}$; demnach ist $dc = 2pm\mathfrak{A} + \delta$.

n. 3. Leztlich sey man auch in Absteckung jeder Länge c um einen Theil y ungewiß, ob die beyden äußersten Pfähle der aufgeschlagenen Brücke genau in der verlängerten Vertical-Ebene durch beyde Thürme liegen oder nicht.

Heißet $c \pm p\,d\lambda - \delta$, D; der Fehler, welcher aus lezterer Ursache in Ansehung der wahren Länge A entstehet, E; der Fehler, welcher aus n. 1, n. 2, n. 3, zusammen genommen herrühret, dA; so ist einmal $E = \frac{(2q - 3)y^2}{D}$ und der möglichst gröste Werth von $dA = A - (qD + E)$.

Es ist aber der gröste Werth von $D = c - \frac{(2p - 3)x^2}{\lambda} - 2pm\mathfrak{A}$. Demnach $dA = A - q.\left(c - \frac{(2p - 3)x^2}{\lambda} - 2pm\mathfrak{A}\right) - \frac{(2q - 3)y^2}{D.}$ In der vorhin angezeigten Grundlinie ist $A = 43820$; ich setze aber hier $A = 44400$, weil sich dA hierdurch nicht merklich ändert; $c = 600$. x sey $0',05$; $y = 0',3$.

Demnach $q = \frac{44400}{600} = 74$; ferner $p = \frac{600}{12} = 50$.

Jede

Jede Stange werde ferner nach einer eisernen sechsschuhigen Ruthe geprüft, deren Länge hiebey als gänzlich ohne allen Fehler angenommen wird. Man ist aber in Abnehmung der Länge derselben mit dem Cirkel, an beyden Enden derselben um den kleinen Theil $\mathfrak{A} = 0'0015$ ungewiß, folglich in der ganzen Länge jeder Meßstange um einen Theil $2m\mathfrak{A} = 4 \cdot 0',00015 = 0',0006$. Demnach ist

$$dA = 44400 - 74\left(600 - \frac{(2.50-3)0',05^2}{12} - 4.50.0',00015\right)$$

$$\frac{-(2.74-3)\,0',3^2}{600 - \frac{(2.50-3)\,0',05^2}{12} - 4.50.0',00015.}$$

$$= 44400 - 44396,29 = 3',71.$$

Der möglichst gröste Fehler, den man bey diesen Umständen in Abmessung einer so großen Linie begehen könnte, würde also 3',71 seyn.

Herr von Osterwald hatte diese Linie zweymal gemessen, und das erstemal 43824, bey der zweyten Messung aber dieselbe 43834':.3" befunden; dies giebt einen Unterschied von 9',9".. Dieser Unterschied aber wurde beynahe auf nichts herunter gebracht, als Herr von Osterwald den Einfluß auch in Betrachtung zog, welchen Wärme und Kälte nothwendig auf die Länge der Meß-Stangen haben musten, da diese Linie unter verschiedenen Temperaturen der Luft gemessen wurde. Er hatte nemlich die Länge aller fünf Stangen, so wie sie mit ihren fünf Enden zusammengestossen waren und auf einem ebenen Boden lagen, genau markirt, da das Thermometer auf dem 9ten Grad der Wärme stand.

Bey dem 3ten Grad der Wärme maßen alle 5 Stangen $60' + 0',012$.

. . . 15ten . . . . $60' - (1^{III} + 2^{IV})$

. . . 18ten . . . . $60' - (1^{III} + 8^{IV})$

Hieraus schloß Herr von Osterwald, daß 1 Grad Unterschied des Thermometers 2 Decimal-Scrupel auf eine Länge von 60 Schuhen, folglich auf eine Länge von 600 Schuhen 2 Decimal-Linien Unterschied gäbe, und nach dieser angenommenen Voraussetzung fand er, daß in Ansehung der verschiedenen Temperaturen, unter welchen die

die Grundlinie das erstemal gemessen wurde, 43 Zolle, bey der andern Messung aber 13′ : 9″ : 7‴ abgezogen werden musten von den Maaßen, welche die Anzahl der hingelegten Stangen ergeben, es würde also nach der ersten Messung die Grundlinie lang 43820′ : 5″.
. . . zweyten . . . . 43820′ : 5″ : 3‴.

§. 5.

a. Noch ist übrig, auch ähnliche Betrachtungen anzustellen über den Grad der Genauigkeit bey Abmessung einer geraden Linie auf dem Papier. Ich wähle hiezu fürs erste folgenden Fall.

Eine gerade Linie, deren Länge c bezeichne, soll in Theilen eines m 1000theiligen Maasstabs, auf welchem ς Theile, a Schuhe messen, abgemessen werden. Die Linie c messe n ganze Längen des Maasstabs, und noch überdies x Theile desselben. Es ist also $c = m\varsigma + x$, und $dc = md\varsigma + dx$. Aber $d\varsigma = dx$; also $dc = (n+1)d\varsigma$. Es ist aber $a : 2\mathfrak{A} = \varsigma : d\varsigma$; demnach $dc = \frac{2\mathfrak{A}(n+1)\varsigma}{a}$. N. 1. Wenn $m = 0$, also die Linie c, so klein ist, daß der Cirkel gar nicht umgeschlagen werden darf, oder gerade ς Theile, oder weniger als ς Theile des Maasstabs mißt, so ist

$$dc = \frac{2\mathfrak{A}.\varsigma}{a}. \quad \text{N. 2.}$$

b. Wann auf die äußere Schärfe eines Lineals ς Theile, welche a Schuhe messen, aufgezeichnet wären, und die Linie c in N. 2. nach diesen Theilen gemessen werden sollte, so ist für diesen Fall $dc = \frac{2.\mathfrak{B}\varsigma}{a}$; weil hier die Linie mit dem Cirkel nicht abgenommen werden darf, und also die Fehler wegbleiben, welche von der Dicke der Cirkelspitzen herrühren. Ich setze aber hiebey zum voraus, daß die Schärfe des Lineals, auf welcher sich die Eintheilung befindet, dergestalt beschaffen sey, daß, indem dieselbe Schärfe an der abzumessenden Linie anlieget, von der Dicke derselben keine Parallaxis zu befürchten sey.

c. Die-

c. Dieser nemliche Ausdruck würde auch in dem Falle statt finden, wenn diese ς Theile auf die Oberfläche eines Glases aufgezeichnet wären, und die Länge der Linie c gemessen würde, indem man die Linie, auf welcher diese ς Theile auf dem Glase eingerissen sind, genau über die Linie c auf dem Papier bringt, daß beyde in einerley Vertical-Ebene liegen; wenn nicht in einigen Fällen die Dicke des Glases die Abmessung der Linie c aufs neue in etwas ungewiß machte. Denn wenn in Fig. 5. uf die Dicke des Glases, und uA die Entfernung des Auges von der Oberfläche desselben ist; wenn ferner in u ein Theilstrich auf dem Glase, in f aber der äußerste Punct der abzumessenden Linie ist, in A aber das Auge in der verlängerten Richtung durch u und f ist, so wird der Theilstrich in u den Punct f decken; aber die Erfahrung lehret, daß man in Ansehung der wahren Lage des Auges immer um einen gewißen Theil AH ungewiß bleibe, ob A, u und f in gerader Linie liegen oder nicht; hieraus aber entstehet an einem Ende der abzumessenden Linie in Ansehung der wahren Lage des Punctes f, eine Ungewißheit, ob der Punct wirklich in f oder in g liege; es ist aber, wenn uf oder der Abstand der abzumessenden Linie von der eingetheilten Oberfläche des Glases mit h; uA mit γ und AH mit δ bezeichnet wird,

$$fg = \frac{\delta . h}{\gamma}; \quad \text{demnach}$$

$$dc = \frac{2\mathfrak{B}'\varsigma}{a} + \frac{\delta h}{\gamma} \pm \frac{\delta h}{\gamma}.$$

Um diese Betrachtungen mit einem Exempel zu erläutern, setze ich folgendes. Ein Landmesser messe in Fig. 5. die Linie At mit einem Maasstab, auf welchem 1000 Theile genau 0', 5 eines Schuhes messen, und ein Theil desselben messe in diesem Falle einen Schuh. Nun nimmt der Landmesser mit dem Cirkel die Weite von 1000 Theilen, trägt dieselbe von A nach t, und bey dem vierten Umschlag trift die Cirkelspitze in f; er mißt ferner die Weite ft von 480 Theilen des Maasstabs. Es ist also in I. a,

$$\varsigma = 1000; \; n = 4; \; x = 480; \; \mathfrak{A} = 0{,}00015; \; a = 0',5.$$

Demnach $c = 4 . 1000 + 480 = 4480$ Theile,

oder

oder in gegenwärtigem Falle 4480 Schuhe; ferner

$$dc = \frac{2 . 0',00015 . (4+1) . 1000.}{0',5.} = 3 \text{ Theile.}$$

Man könnte also, wenn alle Fehler auf eine Seite fielen, in Abmessung der Länge der Linie At um 3 Theile oder in diesem Falle um 3 Schuhe fehlen.

In dem Fall N. 2. ist $dc = \frac{2 . 0',00015 . 1000}{0',5} = 0',6$ Theile; man wäre also in Ansehung der wahren Länge von c ungefehr um $\frac{1}{2}$ Schuh ungewiß bey diesem angenommenen Maasstab. Es stehet übrigens dieser Fehler, wie aus dem Ausdruck für dc zu ersehen, in Verhältnis der Länge des Maasstabs; er würde nemlich nur halb so groß seyn, wenn der Maasstab bey gleicher Anzahl Theile die Länge eines Schuhes hätte.

Hiemit beschließe nunmehr auch diesen zweyten Abschnitt, und werde die Anwendung der in diesem und dem ersten Abschnitte angeführten Formeln in dem folgenden dritten Abschnitte zeigen.

Drit-

Dritter Abschnitt.

Trigonometrische Formeln für geradlinichte Dreyecke.

§. 1.

Wenn in Fig. 11. der Winkel eines Dreyecks ABC mit den Buchstaben A, B, C, und die denselben gegenüber liegende Seiten mit den Buchstaben a, b, c, bezeichnet werden, so ist einmal, weil sich in einem jeden Dreyecke die Seiten gegen einander verhalten, wie die Sinusse der ihnen gegenüber stehenden Winkel,

N. I. $$b \operatorname{Sin} A = a \operatorname{Sin} B.$$

Weil aber die Summe aller drey Winkel in einem Dreyecke 180°. gleich ist, so ist auch

$$B = 180 - (A+C) \text{. und } \operatorname{Sin} B = \operatorname{Sin}(A+C).$$

Es ist also auch $b \operatorname{Sin} A = a \operatorname{Sin}(A+C)$. N. II.

Auch ist ferner $BD = c \operatorname{Sin} A$; $AD = c \operatorname{Cos} A$; $DC = b - c \operatorname{Cos} A$;

$$\text{und } BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

oder

$$a^2 = c^2 \operatorname{Sin} A^2 + (b - c \operatorname{Cos} A^2) = c^2(\operatorname{Sin} A^2 + \operatorname{Cos} A^2) + b^2 - 2bc \operatorname{Cos} A.$$

N. III. $$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \operatorname{Cos} A.$$

Wenn $b = c$, so wird die Formel einfacher, nemlich

$$a^2 = 2c^2 - 2c^2 \operatorname{Cos} A = (1 - \operatorname{Cos} A) \cdot 2c^2 \text{; oder}$$

$$a^2 = 4c^2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A^2 \text{. nach L. I. 25.}$$

$$a = 2c \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A.$$

§. 2.

Differential-Formeln geradlinichter Dreyecke.

Wenn man bezeichnet den Theil, um welchen man ungewiß ist, in Ansehung der Größe

$$\left.\begin{array}{lcl} a & \ldots\ \text{mit} & da \\ b & \ldots\ldots & db \\ c & \ldots\ldots & dc \\ A & \ldots\ldots & dA \\ B & \ldots\ldots & dB \\ C & \ldots\ldots & dC \end{array}\right\} \text{so ist}$$

einmal aus §. 1. N. I. nach dem Methodo differentiandi

$$adB \operatorname{Cos} B + da \operatorname{Sin} B = b \,.\, dA \operatorname{Cos} A + \operatorname{Sin} A \,.\, db\,; \quad \text{oder}$$

$$a \operatorname{Sin} B \left(dB \cot B + \frac{da}{a}\right) = b \operatorname{Sin} A \,.\left(dA \cot A + \frac{db}{b}\right)$$

$$\operatorname{Sin} A = \frac{a \operatorname{Sin} B}{b}$$

$$a \operatorname{Sin} B \,.\left(\frac{da}{a} + dB \cot B\right) = a \operatorname{Sin} A \left(\frac{db}{b} + dA \cot A\right)$$

$$\frac{da}{a} + dB \cot B = \frac{db}{b} + dA \cot A \quad . \quad \text{N. I.}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} + dA \operatorname{Cot} A - dB \operatorname{Cot} B.$$

Wenn $dA = dB$, so wird $\frac{da}{a} = \frac{db}{b} + dA \,.\, \frac{\operatorname{Sin}(B - A)}{\operatorname{Sin} A \,.\, \operatorname{Sin} B}$ nach L. I. 22.

Aus §. 1. N. II. ist auch $b \operatorname{Sin} C = c \operatorname{Sin}(A + C)$; demnach

$$c \,.\, (dA + dC) \operatorname{Cos}(A + C) + dc \,.\, \operatorname{Sin}(A + C) = b \,.\, dC \operatorname{Cos} C + db \,.\, \operatorname{Sin} P.$$

oder

$$c \operatorname{Sin}(A + C) \,.\left((dA + dC) \cot(A + C) + \frac{dc}{c}\right) = b \operatorname{Sin} C \,.\left(dC \cot C + \frac{db}{b}\right)$$

$$c \operatorname{Sin}(A + C) \left(dA \cot(A + C) + dC \cot(A + C) + \frac{dc}{c}\right) = b \operatorname{Sin} C \left(dC \cot C + \frac{db}{b}\right)$$

$$b = \frac{c \operatorname{Sin}(A + C)}{\operatorname{Sin} C.}$$

c Sin

$$c\,\mathrm{Sin}(A+C).\left[dA\cot(A+C)+dC\left(\cot(A+C)-\cot C\right)+\frac{dc}{c}\right]=c\,\mathrm{Sin}(A+C).\frac{db}{b}$$

$$\frac{dc}{c}+dA\,\mathrm{Cot}\,(A+C)-dC.\frac{\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}\,(A+C).\mathrm{Sin}\,C}=\frac{db}{b}.\ \text{nach L. I. 22.}$$

$$\frac{dc}{c}+dA\,\mathrm{Cot}\,(A+C)=\frac{db}{b}+dC.\frac{\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}\,(A+C).\mathrm{Sin}\,C.}\ .\quad \text{N. II.}$$

Aus der Gleichung $a^2 - b^2 = c^2 - 2bc\,\mathrm{Cos}\,A$. §. I. N. 3. folgt, daß auch seyn müsse

$$ada = cdc + bdb + bc.\,dA\,\mathrm{Sin}\,A - cdb\,\mathrm{Cos}\,A - bdc\,\mathrm{Cos}\,A$$
$$= (c - b\,\mathrm{Cos}\,A)\,dc + (b - c\,\mathrm{Cos}\,A)\,db + bcdA\,\mathrm{Sin}\,A.$$

Es ist aber in Fig. 11. $Ac = b\,\mathrm{Cos}\,A$; $Bc = c - b\,\mathrm{Cos}\,A = a\,\mathrm{Cos}\,B$; eben so auch $Ab = c\,\mathrm{Cos}\,A$; $CD = b - c\,\mathrm{Cos}\,A = a\,\mathrm{Cos}\,C$. Diese Werthe in obigen Differential-Ausdruck substituirt, so wird

$$ada = adc\,\mathrm{Cos}\,B + adb\,\mathrm{Cos}\,C + bcdA\,\mathrm{Sin}\,A.$$

dividirt man diesen Ausdruck durchgehends mit a^2, so wird

$$\frac{da}{a} = dC.\frac{\mathrm{Cos}\,B}{a} + db.\frac{\mathrm{Cos}\,C}{a} + \frac{bc.\,dA\,\mathrm{Sin}\,A}{a^2};\ \text{oder auch}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{c\,\mathrm{Cos}\,B.\,dc}{a\ .\ c} + \frac{b\,\mathrm{Cos}\,C.\,db}{a\ .\ b} + \frac{b.\,c.\,dA\,\mathrm{Sin}\,A}{a.\,a}$$

Nun ist aber in jedem Dreyecke

$$\frac{\mathrm{Sin}\,C}{\mathrm{Sin}\,A} + \frac{c}{a};\quad \frac{\mathrm{Sin}\,B}{\mathrm{Sin}\,A} = \frac{b}{a};\ \text{demnach}$$

$$\text{N. III.}\ \frac{da}{a} = \frac{\mathrm{Sin}\,C.\,\mathrm{Cos}\,B}{\mathrm{Sin}\,A}.\frac{dc}{c} + \frac{\mathrm{Sin}\,B.\,\mathrm{Cos}\,C}{\mathrm{Sin}\,A}.\frac{db}{b} + dA\frac{\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}C}{\mathrm{Sin}\,A.}$$

Wenn $\frac{dc}{c} = \frac{db}{b}$, so ist

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c}\,\frac{\mathrm{Sin}\,(B+C)}{\mathrm{Sin}\,A} + dA\,\frac{\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,C}{\mathrm{Sin}\,A};\ \text{nach L. I. 13; oder}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + dA\,\frac{\mathrm{Sin}\,B\,\mathrm{Sin}\,C}{\mathrm{Sin}\,A},\ \text{weil}\ \frac{\mathrm{Sin}\,(B+C)}{\mathrm{Sin}\,A} = \frac{\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}\,A} = 1\ \text{, ist,}$$

§. 3.

Formeln, nach welchen sich die Winkel in einem Dreyeck aus einigen an demselben gemessenen Stücken bestimmen lassen.

Es ist einmal nach §. 1. N. I. aus der Gleichung

$$b \operatorname{Sin} A = a \operatorname{Sin} B; \text{ auch}$$

$$\operatorname{Sin} B = \frac{b}{a} \operatorname{Sin} A. \qquad \text{N. I.}$$

Es ist ferner in Fig. 11; $AC - AD + DB = 1 : \operatorname{tang} C$; also

$$\operatorname{tang} C = \frac{DB}{AC - AD} = \frac{c \operatorname{Sin} A}{b - c \operatorname{Cos} A}; \text{ demnach auch}$$

$$\operatorname{Cot} C = \frac{b - c \operatorname{Cos} A}{c \operatorname{Sin} A} = \frac{b}{c \operatorname{Sin} A} - \cot A. \qquad \text{N. II.}$$

Wenn $b = c$; so ist

$$\operatorname{Cot} C = \frac{1}{\operatorname{Sin} A} - \cot A = \operatorname{cosec} A . (1 - \cos A) = 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A^2 \operatorname{cosec} A.$$

Leztlich ist nach §. 1. N. III. aus der Gleichung

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2bc \cos A, \text{ auch}$$

$$\operatorname{Cos} A = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2bc}; \text{ es ist aber}$$

$$\operatorname{Sin} A^2 = 1 - \cos A^2 = (1 + \cos A)(1 - \cos A).$$

Es ist also in diesem Falle

$$1 - \cos A = 1^2 - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (c - b^2)}{2bc};$$

$$= \frac{a + c - b) . (a - c + b)}{2bc}; \text{ es ist ferner}$$

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{(a + c - b)(a + b - c)}{4bc}; \text{ demnach}$$

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(a + c - b)(a + b - c)}{bc}}. \qquad \text{N. III.}$$

Wenn

Wenn $c = b$, so ist auch

$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{a}{b}.$$

§. 4.

Differential-Formeln, nach welchen man das Wachsthum oder Abnehmen eines Winkels in einem geradlinichten Dreyeck bestimmen kann, wenn diejenigen Stücke an demselben, durch welche er bestimmt wird, etwas irrig gemessen worden sind.

Aus der Gleichung §. 3. N. II, $\text{Cot}\,B = \frac{c}{b\,\text{Sin}\,A} - \cot A$, ist auch

$$-\frac{dB}{\text{Sin}\,B^2} = \frac{bdc\,\text{Sin}\,A + cdb\,\text{Sin}\,A + bcdA\cos A}{c^2\,\text{Sin}\,A^2} + \frac{dA}{\text{Sin}\,A^2}$$

$$= \frac{bdc\,\text{Sin}\,A + cdb\,\text{Sin}\,A + dA.(c^2 - bc\cos A)}{c^2\,\text{Sin}\,A^2.}$$

$$= \frac{bdc\,\text{Sin}\,A + cdb\,\text{Sin}\,A + dA\,(c - b\cos A).c}{c^2\,\text{Sin}\,A^2.}$$

$$= \frac{bc\,\text{Sin}\,A}{c^2\,\text{Sin}A^2}\left(\frac{dc}{c} - \frac{db}{b} + dA\left(\frac{c - b\cos A}{b\,\text{Sin}\,A}\right)\right);\ \text{also}$$

$$dB = -\frac{b\,\text{Sin}\,B_2}{c\,\text{Sin}\,A}\left(\frac{dc}{c} - \frac{db}{b} + dA\left(\frac{c - b\cos A}{b\,\text{Sin}\,A}\right)\right).$$

Wenn die Seite a in dem Dreyecke bekannt, so wird, weil $c - b\cos A = a\,\text{Cos}\,B$ ist, auch

$$dB = -\frac{b\,\text{Sin}\,B^2}{c\,\text{Sin}\,A}\left(\frac{dc}{c} - \frac{db}{b} + dA\left(\frac{a\cos B}{b\,\text{Sin}\,A}\right)\right);\ \text{oder}$$

$$dB = -\frac{b\,\text{Sin}\,B^2}{c\,\text{Sin}\,A}.\left[\frac{dc}{c} - \frac{db}{b} + dA\cot B\right].$$

Wenn

Wenn man in §. 3. N. III. die Gleichung

$$\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+c-b)\ .\ (a+b-c)}{bc}}$$

durch Logarithmen ausdrückt, so wird auch

$$\log \text{Sin}\ \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \log (a+c-b) + \tfrac{1}{2} \log (a-c+b - \tfrac{1}{2} \log (c + \log b + \log 4)$$

Diesem zufolge ist auch nach L. IV. C.

$$\tfrac{1}{2} dA \cot \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \left(\frac{da}{a} + \frac{dc}{c} - \frac{db}{b} + \frac{da}{a} - \frac{dc}{c} + \frac{db}{b} \right) - \tfrac{1}{2} \left(\frac{db}{c} + \frac{db}{b} \right)$$

$$= \frac{da}{a} - \tfrac{1}{2} \left(\frac{dc}{c} + \frac{db}{b} \right) . = \tfrac{1}{2} \left(\frac{2da}{a} - \frac{dc}{c} - \frac{db}{b} \right)\ \text{und}$$

$$\text{N.III.}\ dA = \frac{1}{\cot \frac{1}{4} A} \left(\frac{2da}{a} - \frac{dc}{c} - \frac{db}{b} \right) = \tang \tfrac{1}{2} A \left(\frac{2da}{a} - \frac{dc}{c} - \frac{db}{b} \right)$$

§. 5.

Aufgabe.

a. Wenn in Fig. 12. A, B, C, drey Gegenstände auf dem Felde sind, deren Abstand unter einander man weiß; die Lage eines vierten Orts D gegen diese Gegenstände zu bestimmen, vorausgesezt, daß man nach allen drey Gegenständen von dem Ort D aus visieren kann.

Bey Auflösung dieser Frage kommt es blos darauf an, die Größe des Winkels BAD oder BCD aufzusuchen. Denn da bekanntermaßen in einem jeden Viereck die Summe aller vier Winkel genau 360 Grade ausmacht, so ist $BCD = 360° - ABC - ADC - BAD$. Heißet man nun den Winkel BAD, X, den Winkel $ABC = B$, den Winkel ADB, γ; den Winkel BCD gleich α, so ist der Winkel $BCD = 360 - (B+\alpha+\gamma+X)$; oder wenn man $360 - (B+\alpha+\gamma)$ mit dem Buchstaben Φ ausdrückt, so ist $BCD = \Phi - X$. Es ist ferner

$$\left.\begin{array}{r} c\ .\ \text{Sin}\ X = BD\ .\ \text{Sin}\ \gamma\ \text{im Dreyeck BAD} \\ a\ \text{Sin}\ (\Phi - X) = BD\ .\ \text{Sin}\ \alpha\ \text{im Dreyeck BCD} \end{array}\right\}\ \text{demnach}$$

c Sin

$$\frac{c \operatorname{Sin} X}{\operatorname{Sin} \gamma} = \frac{a \operatorname{Sin}(\varphi - X)}{\operatorname{Sin} \alpha}; \text{ oder}$$

$$\frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{a \operatorname{Sin} \gamma} = \frac{\operatorname{Sin}(\varphi - X)}{\operatorname{Sin} X} = \frac{\operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} X - \cos \varphi \operatorname{Sin} X}{\operatorname{Sin} X} \text{ nach L. I. 13.}$$

$$= \operatorname{Sin} \phi \operatorname{Cot} X - \operatorname{Cos} \phi. \text{ Hieraus}$$

$$\operatorname{Cot} X = \frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{a \operatorname{Sin} \gamma \operatorname{Sin} \varphi} + \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Sin} \varphi} = \frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{a \operatorname{Sin} \gamma . \operatorname{Sin} \varphi.} + \operatorname{Cot} \phi.$$

Dieser Ausdruck, den Winkel BAD zu bestimmen, ist allgemein, der Punct D mag gegen ABC die Lage haben, wie in Fig. 12; oder es mag B dem Punct D näher als A, oder mit A und C in gerader Linie seyn, oder es mag auch der Punct D selbst innerhalb des Dreyecks ABC liegen. Hat man nun die Größe des Winkels BAD gefunden, so läßt sich aus diesem, dem Winkel α und der Seite c, die Weite BD bestimmen.

b. Eine andere Frage bleibt hiebey noch übrig, in Ansehung des Grades der Genauigkeit in Rücksicht der wahren Lage des Punctes D.

Die Beantwortung dieser Frage hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher man den Winkel B, X, α, γ, die Seite c, a angeben kann. Setze ich nun, man sey hiebey in Ansehung der wahren Größe des Winkels ungewiß um

	B	. . . . dB
	α	. . . . $d\alpha$
	γ	. . . . $d\gamma$
	X	. . . . dX
der Seite	a	. . . . da
	c	. . . . dc

so ist nach den Regeln des Differential-Calculs

$$-\frac{dX}{\operatorname{Sin} X^2} = \begin{cases} \dfrac{ac \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi d\alpha \operatorname{Cos}\alpha - ac \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\gamma d\varphi \operatorname{Cos}\varphi}{(a \,.\, \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi)^2} \\ \dfrac{+(adc - cda)\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi - ac \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi d\gamma \operatorname{Cot}\gamma}{(a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi)^2} - \dfrac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi^2} \end{cases}$$

$$-\frac{dX}{\operatorname{Sin} X^2} = \frac{ac \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi}{a^2 \operatorname{Sin}\gamma^2 \operatorname{Sin}\varphi^2}\left(d\alpha \cot\alpha - d\gamma \cot\gamma + \frac{dc}{c} - \frac{da}{a} - d\varphi \cot\varphi\right) - \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi^2}$$

$$= \frac{c \operatorname{Sin}\alpha}{a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi} \cdot \left(d\alpha \cot\alpha - d\gamma \cot\gamma - d\phi \cot\phi + \frac{dc}{c} - \frac{da}{a}\right) - \frac{d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi^2}$$

Es ist aber

$$-d\phi\left(\frac{c \operatorname{Sin}\alpha \cot\varphi}{a \operatorname{Sin}\gamma . \operatorname{Sin}\varphi} + \frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi^2}\right) = -d\phi . \left(\frac{c \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cot}\varphi}{a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi} + \operatorname{cosec}\phi^2\right)$$

$$= -d\phi . \left(\frac{c \operatorname{Sin}\alpha \cot\varphi + a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{cosec}\varphi}{a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi}\right);$$ demnach

N. 1.

$$dX = -\frac{c \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin} X^2}{a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi}\left[\frac{dc}{c} - \frac{da}{a} + d\alpha \cot\alpha - d\gamma \operatorname{Cot}\gamma - d\varphi\left(\operatorname{Cot}\varphi + \frac{a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{cosec}\varphi}{c \operatorname{Sin}\alpha}\right)\right]$$

Wenn $d\alpha = d\gamma$.

N. 2.

$$dX = -\frac{c \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin} X^2}{a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi} . \left[\frac{dc}{c} - \frac{da}{a} + d\alpha \frac{\operatorname{Sin}(\gamma - \alpha)}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\gamma} - d\varphi\left(\cot\varphi + \frac{a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{cosec}\varphi}{c \operatorname{Sin}\alpha}\right)\right]$$

Wenn in N. 1. $\alpha = \gamma$, $d\gamma$ negativ $= d\alpha$ ist; so ist

$$dX = -\frac{c \operatorname{Sin} X^2}{a \operatorname{Sin}\varphi} \cdot \left[\frac{dc}{c} - \frac{da}{a} + 2 d\alpha \operatorname{Cot}\alpha - d\phi \cdot \left(\operatorname{Cot}\phi + \frac{a \operatorname{cosec}\varphi}{c.}\right)\right]$$

§. 6.

Um die bisher angesezten Formeln-Auflösung durch ein Exempel zu erläutern, wähle ich folgenden Fall.

a. Ich

a. Ich setze, ein Landmesser habe in Fig. 12. die Seite AC, den Winkel BAC und ACB gemessen, und hieraus nach §. 1. N. II. die Seite

$$BC = \frac{AC . \text{Sin } BAC}{\text{Sin }(BAC + ACB)} \text{ und } AB = \frac{AC . \text{Sin } ACB}{\text{Sin }(BAC + ACB)}$$

berechnet. Auch sey $AC = 8368',2$. $BAC = 31^\circ + 30' + 25''$ $ACB = 28^\circ + 29' + 35''$. Es ist also $BC = 5050'$; $AB = 4610'$.

An einem Platze bey D siehet der Landmesser die Gegenstände A, B, C, und misset mit seinem Winkelmesser den Winkel BDA von $28^\circ + 15$, und den Winkel BDC von 32 Graden: es fragt sich, was für eine Lage wird bey diesen Umständen der Punct D gegen die Gegenstände A, B, C, haben?

Nach §. 5. kommt es darauf an, den Winkel BAD zu bestimmen. Es ist aber für diesen Fall, nach §. 5,

$$\text{Cot}BAD = \frac{c \text{ Sin } \alpha}{a \text{ Sin } \gamma \text{ Sin } (360 - (B + \alpha + \gamma))} + \cot (360 - (B + \alpha + \gamma)).$$

$$= \frac{4610 . \text{Sin } 32^\circ}{5050 . \text{Sin } 28^\circ 15' . \text{Sin } 179^\circ 45'} + \text{Cot } (90^\circ + 89^\circ 45'$$

$$= \frac{461 . \text{Sin } 32^\circ}{505 . \text{Sin } 28^\circ 15' . \text{Sin } 0^\circ 15'} - \text{tang } (89^\circ 45');$$

welches durch Logarithmen also aufgelößt wird:

$\log c = 3,6637009$	$\log a = 3,7032914$
$\log \text{Sin } \alpha = 9,7242097 - 10$	$\log \text{Sin } \gamma = 9,6751546 - 10$
$13,3879106 - 10$	$\log \text{Sin } \phi = 7,6398160 - 10$
$21,0182620 - 20$	$21,0182620 - 20$

$$\log \frac{c \text{ Sin } \alpha}{a . \text{Sin } \gamma . \text{Sin } \varphi} = 4,3696486 - 2.$$

Diesem Logarithm. gehört die Zahl 234,23.

Auch $-\tan 89^\circ 45 \quad = -229{,}18166.$

Demnach ist $\text{Cot BAD} \quad = \quad 5{,}04834.$

und $\text{BAD} = 78^\circ + 47' + 50''$. Lezlich ist auch

$$\text{BD} = \frac{\text{AB} \times \text{Sin BAD}}{\text{Sin BDA}} = \frac{4610 \cdot \text{Sin } 78^\circ + 47' 50''}{\text{Sin } 28' 15''} = 9554'/2''.$$

b. Was den Grad der Genauigkeit anbetrift, so ist einmal, wenn man BD mit δ bezeichnet,

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{dc}{c} + dx \,\text{Cot}\, x - d\gamma \,\text{Cot}\, \gamma, \text{ nach §. 2. N. I.}$$

Es ist aber auch nach §. 5. N. 2.

$$dX = -\frac{c \,\text{Sin}\, \alpha \,\text{Sin} X^2}{a \,\text{Sin}\, \gamma \,\text{Sin}\, \varphi}\left(\frac{dc}{c} - \frac{da}{a} + \frac{d\alpha \,\text{Sin}(\gamma - \alpha)}{\text{Sin}\, \alpha \,\text{Sin}\, \gamma} - d\phi \cot \phi\right) - \frac{d\varphi \,\text{Sin} X^2}{\text{Sin}\, \varphi^2}$$

Soll der Werth von dX in den Ausdruck für $d\delta$ gestellt werden, so müssen zuerst die Werthe von $\frac{dc}{c}$, $\frac{da}{a}$, $d\phi$ aufgesucht, und $d\alpha$ nach den im ersten Abschnitt angezeigten Regeln bestimmt werden.

Was nun fürs erste den Werth von $\frac{dc}{a}$ anbelangt, so ist nach §. 2. N. II.

a. $$\frac{dc}{c} = \frac{db}{b} + \frac{dC \cdot \text{Sin A}}{\text{Sin}(A+C)\,\text{Sin C}} - dA \,\text{Cot}(A+C).$$

b. $$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} + \frac{dA \,\text{Sin C}}{\text{Sin}(A+C) \cdot \text{Sin A}} - dC \cot A+C).$$

Weil ferner $\phi = 360 - (B + \alpha + \gamma)$; und

$$d\phi = -(dB + d\alpha + d\gamma); \text{ auch}$$

$$\text{Sin } \tfrac{1}{2} B = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+a-c)(b+c-a)}{ac}} \text{ ist, nach §. 2. N. II.}$$

$$\text{so ist auch } dB = \left(\frac{2db}{b} - \left(\frac{da}{a} + \frac{dc}{c}\right)\right) \tan \tfrac{1}{2} B.$$

In

In Ansehung der Werthe von dA, dC, $d\alpha$, $d\gamma$, befinde der Landmesser, daß alle einander gleich, und die Größe eines jeden 2 Minuten seyn könne. Auch sey $db = 4$ Schuh der Theil in der Länge AC, für welchen man in Ansehung der wahren Größe derselben nicht stehen kann, so würde denn nach den angesezten Datis der Ausdruck für $\frac{dc}{c}$ folgender:

$$\frac{dc}{c} = \frac{4}{8368} + \frac{\mathrm{Sin}\ 31^\circ.30'.\ 8{,}0005817764}{\mathrm{Sin}\ (31^\circ 30' + 28^\circ 29')\mathrm{Sin} 28^\circ 29'} - 0'{,}00058177.\mathrm{Cot}(59^\circ 59'),$$

und könnte durch Logarithmen also aufgelößt werden. Es ist nemlich

$$\begin{aligned} \log dA &= 6{,}7647561 - 10 \\ \log \mathrm{Sin}\ A &= 9{,}7180851 - 10 \\ \hline & \quad 16{,}4828412 - 20 \\ \log \mathrm{Sin}(A+C) &= 9{,}9374577 - 10 \\ \log \mathrm{Sin}\ C &= 9{,}6784301 - 10 \\ \hline & \quad 19{,}5158878 - 20 \\ \log \frac{dA.\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Sin}\ A +} &= 3{,}8669534 - 7 \end{aligned}$$

Hieher gehört die Zahl 0,0007361.

$$\begin{aligned} \log \mathrm{Cot}(A+C) &= 9{,}6991887 - 10 \\ \log dA &= 6{,}7647561 - 10 \\ \hline \log dA\mathrm{cot}(A+C) &= 3{,}4639448 - 7. \end{aligned}$$

Hieher gehört die Zahl 0,0002911.

$$.\ \frac{db}{b} = \frac{4}{8368} = 0{,}00047.$$

Demnach ist $\frac{dc}{c} = 0'{,}0007361 + 0{,}0002911 + 0{,}00047 = 0{,}0014972.$

Eben so wird auch der Werth von $\frac{da}{a}$ gefunden. Es ist

$$\begin{aligned} \log dA &= 6{,}7647561 - 10 \\ \log \mathrm{Sin}\ C &= 9{,}6784301 - 10 \\ \hline & \quad 16{,}4431862 - 20 \\ \log \mathrm{Sin}\ (A+C) &= 9{,}9374577 - 10 \\ \log \mathrm{Sin}\ A &= 9{,}7180851 - 10 \\ \hline \log \frac{dA\ \mathrm{Sin}\ C}{\mathrm{Sin}\ (A+C)\ \mathrm{Sin} A} &= 6{,}7876434 - 10 \end{aligned}$$

$$dA.\mathrm{Cot}(A+C) = 00002911.$$

$$\frac{db}{b} = 0{,}00047.$$

Hieher gehört die Zahl 0',0006132.

Also $\frac{da}{a} = 0{,}0006132 + 0{,}0002911 + 0{,}00047 = 0'{,}0013743.$

Es ist ferner auch $dB = \left(\frac{2db}{b} - \frac{da}{a} - \frac{dc}{c}\right) \text{tang} \frac{1}{2}B$; oder

$$dB = \left(\frac{2 \cdot 4}{8368} - 0',0013743 - 0,0014972\right) \text{tang} \frac{120}{2}.$$

$$= -\ 0,0019315 \,.\, \text{tang}\, 60 = -\ 0,003345 = -\ 0°11'.$$

und $d\Phi = -(-11' + 2' + 2') = 7$ Minuten.

Auch ist $\frac{d\alpha \,.\, \text{Sin}(\gamma - \alpha)}{\text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\gamma} = \frac{\text{Sin}(28°15' - 32°3') \,.\, 0,00058177}{\text{Sin}\,32 \,.\, \text{Sin}\,28°15'}$.

$$= -\frac{\text{Sin}\,3°45' \,.\, 0',0005817}{\text{Sin}\,32 \,.\, \text{Sin}\,28°15'} = -\ 0',0001517.$$

Ferner $d\Phi\, \text{Cot}\Phi = 0',0020362 \,.\, \text{Cot}\,(90 + 89\ 45') = -\ 466,7$

und $\frac{d\varphi \,.\, \text{Sin}\,X^2}{\text{Sin}\,\varphi^2} = \frac{0,0020362 \,.\, \text{Sin}^2\, 78°48'}{\text{Sin}^2 \,.\, 179^2\, 45'} = 102,92.$

Diesem zufolge ist

$$-dX = \frac{4610 \,.\, \text{Sin}\,32 \,.\, \text{Sin}^2 \,.\, 78°48'}{5050 \,.\, \text{Sin}\,28°16' \,.\, \text{Sin}\,179\ 45'}(0',0014972 - 0,0013743 - 0,0001517 + 466,79)$$

$$-\ 102,92.$$

$$-dX = \frac{4610 \,.\, \text{Sin}\,32° \,.\, \text{Sin}^2 \,.\, 78°48'}{5050 \,.\, \text{Sin}\,28°15' \,.\, \text{Sin}\,179°45'}, 0,465333 - 102,92.$$

$$dX = -\frac{4610 \,.\, \text{Sin}\,32° \,.\, \text{Sin}^2 \,.\, 78°48'}{5050 \,.\, \text{Sin}\,28\ 15' \,.\, \text{Sin}\,179°45'}\, 0'465333 + 102,92.$$

$$dX = -\ 104,89 + 102,92 = -\ 0,001,97.$$

Dieser Bogen hält nach Theilen eines Grades $0° + 6' + 46'',3$.

Leztlich ist also

$$\frac{d\delta}{\delta} = 0,0014972 - 0,00197 \,.\, \text{Cot}\,78°\,48' + 0,00058\ \text{Cot}\,28°\,15'.$$

$= 0,$

$$= 0{,}00014972 - 0{,}0006435 = 0{,}0005537.$$

und $d\delta = 8368 \cdot 0{,}0008537 = 7',143.$

§. 7.

Formeln, nach welchen man aus einigen an einem Dreyeck gemessenen Stücken die Fläche des Dreyecks berechnen kann.

Bey Berechnung der Grundfläche eines Dreyecks ABC Fig. 11. bezeichne ich die Perpendicular-Linie mit dem Buchstaben p; und die Grundfläche durch S. Es wird demnach, wenn der Winkel

B, C und die Seite a gegeben,

$$S = \tfrac{1}{2} pb;$$

ferner ist

$$p = a \operatorname{Sin} C; \quad b = \frac{a \cdot \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} A}; \quad \operatorname{Sin} A = \operatorname{Sin} 180 - (B+C) = \operatorname{Sin}(B+C)$$

hieraus

$$S = \frac{\operatorname{Sin} C \cdot \operatorname{Sin} B}{2 \operatorname{Sin}(B+C)} a^2. \qquad \text{N. I.}$$

Wenn A, C, a gegeben, ist

$$S = \tfrac{1}{2} pb.$$

$$b = \frac{a \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} A}; \quad p = a \operatorname{Sin} C; \quad \operatorname{Sin} B = \operatorname{Sin}(A+C)$$

$$S = \frac{\operatorname{Sin} C \cdot \operatorname{Sin}(A+C)}{\operatorname{Sin} A} \cdot a^2. \qquad \text{N. II.}$$

Eben so ist auch, wenn A, B, a gegeben

$$S = \frac{\operatorname{Sin} B \cdot \operatorname{Sin}(A+B)}{2 \operatorname{Sin} A} \cdot a^2.$$

Wenn

Wenn A, c, b gegeben, so ist

$$S = \tfrac{1}{2} pb;\quad \text{aber } p = c \operatorname{Sin} A;\quad \text{demnach}$$

$$S = \frac{bc \operatorname{Sin} A}{2}. \qquad \text{N. III.}$$

Wenn A, a, b gemessen worden, ist

$$S = \tfrac{1}{2} pc.$$

$p = b \operatorname{Sin} A$; aus der Gleichung $c^2 + b^2 - a^2 - 2bc \operatorname{Cos} A = 0$, wird $c = b \operatorname{Cos} A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 + b^2 \operatorname{Cos} A^2)}$
$= b \operatorname{Cos} A \pm \sqrt{a^2 - (1 - \cos A^2) b^2} = b \operatorname{Cos} A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \operatorname{Sin} A^2)}$

a. N. IV. Demnach ist $S = \tfrac{1}{2} b \operatorname{Sin} A \left(b \operatorname{Cos} A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \operatorname{Sin} A^2)}\right)$

Wollte man bey Berechnung der Grundfläche des Dreyecks, den Winkel B noch mit in Rechnung bringen, so wird die Rechnung etwas einfacher, es ist nemlich $c = \frac{a \operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} A} = \frac{a \operatorname{Sin} (A + B)}{\operatorname{Sin} A}$; demnach

b. N. IV. $\quad S = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{Sin} (A + B)$; allwo

$$\operatorname{Sin} B = \frac{b}{a} \operatorname{Sin} A.$$

Wenn alle drey Seiten a, b, c gegeben sind, so ist einmal

$$S = \tfrac{1}{2} pb;\quad p = c \operatorname{Sin} A.$$

$$S = \frac{bc \operatorname{Sin} A.}{2}$$

Es ist aber $\operatorname{Sin} A^2 = 1 - \cos A^2 = (1 + \cos A)(1 - \operatorname{Cos} A)$.

und nach §. 4. $1 - \cos A = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc}$; also auch

$$1 + \operatorname{Cos} A = \frac{c + b - a)(c + b + a)}{2bc};\ \text{demnach}$$

Sin

$$\text{Sin } A = \frac{1}{2cb} \cdot \sqrt{(a+b+c)\,(c+b-a)\,(a+b-c)\,(a+c-b)}\text{ ; und}$$

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(c+b-a)\,(a+b-c)\,(a+c-b)}. \quad \text{N. V.}$$

§. 8.

Differential-Formeln, nach welchen man berechnen kann, um wie viel die Fläche eines Dreyecks ab- oder zunimmt, wenn in Abmessung einiger Stücke des Dreyecks, nach welchen die Grundfläche berechnet worden, Fehler vorgefallen sind.

Wenn dS das Wachsthum oder Abnehmen der Grundfläche des Dreyecks bezeichnet, so ist für den ersten Fall §. 7. N. I.

$$2\,dS = \begin{cases} a^2 \text{ Sin }(C+B) \text{ Sin } C dB \cos B + a^2 \text{ Sin }(C+B) \text{ Sin } B dC \cos C : 2\text{Sin }(B+C)^2 \\ + 2a \text{ Sin } C \text{ Sin } B da \qquad - a^2 \text{ Sin} C \text{ Sin} B\,(dC+dB) \cos (C+B) : 2\text{Sin }(B+C)^2 \end{cases}$$

$$2dS = \begin{cases} a^2 \text{Sin}(C+B)\text{Sin}CdB \cos B + a^2 \text{Sin}(C+B)\text{Sin}BdC \cos C + 2a\text{Sin}C\text{Sin}Bda : 2\text{Sin}(B+C)^2 \\ - a^2 \text{ Sin } C \text{ Sin } BdC \cos (B+C) - dB \cos (B+C) : 2\text{Sin }(B+C). \end{cases}$$

$$dS = \frac{a^2 \text{Sin } C \cdot \text{Sin } B}{2\text{Sin }(B+C)} \left[dB \frac{\text{Sin } C}{\text{Sin } B \cdot \text{Sin}(B+C} + \frac{\text{Sin } B}{\text{Sin } C \cdot \text{Sin}(B+C)} + \frac{2da}{a} \right]. \quad \text{N. I.}$$

Wenn der Winkel $B = C$; und $dB = dC$ ist; so ist

$$dS = \frac{a^2 \text{ Sin } C^2}{\text{Sin } 2C} \left[2dC \cdot \text{cosec } 2C + \frac{da}{a} \right]. \text{ lit. a.}$$

Wenn B ein rechter Winkel, und $dB = 0$ ist,

$$dS = \frac{a^2 \text{ tang } C}{2} \cdot \left(dC \text{ cosec } C \cdot \text{cosec } 2C + \frac{da}{a} \right). \text{ lit. b.}$$

In §. 7. N. II. ist $S = \frac{\text{Sin C Sin }(A+C)}{\text{Sin A}} . a^2$; demnach ist

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \text{Sin}(A+C) \text{Sin A} . dC \cos C + 2ada \text{ Sin}(A+C) \text{Sin A Sin C} : \text{Sin A} \\ + a^2 \text{ Sin A Sin C} . (dA+dC) \cos (A+C) - a^2 \text{Sin C Sin}(A+C)\, dA \cos A : \text{Sin A} \end{array}\right\} = 2\, dS.$$

$$\frac{a^2 \text{ Sin}(A+C) \text{Sin C}}{2 \text{ Sin A}} \left[dC . (\cot C + \cot(A+C)) + dA (\cot(A+C) - \cot A) + \frac{da}{a} \right] = 2\, dS.$$

$$\text{N. II.} \quad \frac{a^2 \text{Sin}(A+C) . \text{Sin C}}{2 \text{ Sin A}} \left[dC . \frac{\text{Sin}(A+2C)}{\text{Sin C} . \text{Sin}(A+C)} - dC . \frac{\text{Sin C}}{\text{Sin A Sin}(A+C)} + \frac{2da}{a} \right] = dS.$$

Wenn C = A und dC = dA ist; so wird

$$dS = \frac{a^2 \text{ Sin } 2A}{2} \left[dA . \left(\frac{\text{Sin } 3\, A}{\text{Sin A} . \text{ Sin } 2\, A} - \text{cosec } 2\, A \right) + \frac{2da}{a} \right]$$

$$= \frac{a^2 \text{ Sin } 2\, A}{2} \left(\frac{\text{Sin } 3\, A - \text{Sin A}}{\text{Sin A} . \text{ Sin} 2\, A} . dA . + \frac{2da}{a} \right)$$

$$= a^2 \text{ Sin } 2\, A \left(\frac{\text{Cos } 2\, A . \text{ Sin A}}{\text{Sin A} . \text{ Sin} 2\, A} . dA + \frac{da}{a} \right)$$

$$dS = a^2 \text{ Sin } 2\, A . \left(dA \cot 2\, A + \frac{da}{a} \right). \quad \text{lit. a.}$$

Wenn A = 90, und dA = 0; so ist in N. II.

$$dS = \frac{a^2 . \text{ Sin C} \cos C}{2} \left(\frac{dC . \cos 2\, C}{\text{Sin C} \cos C} + \frac{2da}{a} \right). \quad \text{lit. b.}$$

In §. 7. N. III. ist ferner auch $S = \frac{bc \text{ Sin A}}{2}$; hieraus

$$2\, dS = bcdA \cos A + bdc \text{ Sin A} + cdb \text{ Sin A};$$ demnach

$$dS = \frac{bc \text{ Sin A}}{2} \left(dA \cot A + \frac{dc}{c} + \frac{db}{b} \right). \quad \text{N. III.}$$

Wenn

Wenn $b = c$; so ist

$$dS = \frac{c^2 \operatorname{Sin} A}{2} \cdot \left(dA \cot A + \frac{dc}{c} + \frac{db}{b} \right). \quad \text{lit. a.}$$

Wenn $A = 90^\circ$; so ist in N. III.

$$dS = \tfrac{1}{2} bc \left(\frac{dc}{c} + \frac{db}{b} \right).$$

In §. 7. a. N. IV. ist zwar ein Ausdruck angesezt, nach welchem man aus einem gemessenen Winkel, einer demselben anliegenden und entgegen stehenden Seite, die Fläche des Dreyecks berechnen kann; der Differential-Ausdruck aber für diese Formel bleibt, ohngeachtet der möglichsten Zusammenziehung, immer noch für die wirkliche Anwendung desselben in practischen Fällen äußerst ermüdend und beschwerlich. Es wäre nemlich derselbe folgender.

$$dS = \left\{ \begin{array}{l} + b^2 \operatorname{Sin} A^2 . dA + b^2 dA \cos A^2 + 2bdb \operatorname{Sin} A \cos A \\ + 2a^2 \operatorname{Sin} A^2 bdb + 2a^2 b^2 dA \cos A \operatorname{Sin} A^{2-1} + 2b^2 \operatorname{Sin} A^2 ada \\ - 4 b^{4-1} . db \operatorname{Sin} A^4 - 4 b^2 \operatorname{Sin}^{4-1} dA \cos A \end{array} \right\} \times \tfrac{1}{2} (a^2 b^2 \operatorname{Sin} A^2 - b^4 \operatorname{Sin} A^4)^{-\frac{1}{2}}$$

Ohne mich also länger hiebey aufzuhalten, gehe ich zu der Formel b. N. IV. über, und entwickle aus dem Ausdruck

$$\frac{ab \operatorname{Sin} (A+B)}{2} = S \text{ den Werth von}$$

$$dS = (adb \operatorname{Sin} (A+B) + bda \operatorname{Sin} (A+C) + abdA \cos (A+B) + abdB \cos (A+B)) : 2.$$

In diesem Ausdruck muß der Werth von dB aufgesucht werden, folgendermaßen; es ist

$$\operatorname{Sin} B = \frac{b \operatorname{Sin} A}{2}; \quad \text{demnach}$$

$$dB \cos B = (abdA \cos A + adb \operatorname{Sin} A - bde \operatorname{Sin} A) : a^2; \quad \text{also}$$

$$abdB\cos(A+B) = \frac{b^2 dA\cos A\cos(A+B) + bdb\operatorname{Sin} A\cos(A+B) - b^2 da\operatorname{Sin} A\cos(A+B)}{a\cos B.}$$

$$2dS = adb\operatorname{Sin}(A+B) + bda\operatorname{Sin}(A+) + abdA\cos(A+B)$$
$$+ (b^2 dA\cos A\cos(A+B) + bdb\operatorname{Sin}A\cos(A+B) - b^2 da\operatorname{Sin}A\cos(A+B) : a\cos B.$$

$$= db\begin{cases} a\operatorname{Sin}(A+S) \\ b\operatorname{Sin}A\cos(A+B) \end{cases} + dA\begin{cases} ab\cos(A+B) \\ \dfrac{b^2\cos A\cos(A+B)}{\cos B} \end{cases} + da\begin{cases} b\operatorname{Sin}(A+B) \\ \dfrac{-b^2\operatorname{Sin}A\cos(A+B)}{a\cos B} \end{cases}$$

Nun ist aber $\frac{bdb\operatorname{Sin}A\cos(A+B)}{\cos B}$, auch gleich $adb.\frac{\operatorname{Sin} B\operatorname{Sin} A\cos(A+B)}{\operatorname{Sin} A\cos B.}$

$$= adb\,\frac{\operatorname{Sin} B\cos(A+B)}{\cos B};$$ demnach ist

$$adb\left(\operatorname{Sin}(A+B) + \frac{\operatorname{Sin}B\cos(A+B)}{\cos B}\right) = adb\left(\frac{\cos B\operatorname{Sin}(A+B) + \operatorname{Sin}B\cos(AB)}{\cos B}\right) = adb\frac{\operatorname{Sin}(A+2B)}{\cos B.}$$

Ferner ist auch

$bda\operatorname{Sin}(A+B) - \frac{b^2 da\operatorname{Sin} A\cos(A+B)}{a\cos B}$ gleich $bda\operatorname{Sin}(A+B) - \frac{bda\,b\operatorname{Sin} A\cos(A+B)}{a\cos B}$

gleich $bda.\operatorname{Sin}(A+B) - bda\,\frac{\operatorname{Sin}B\cos(A+B)}{\cos B}$ gleich $bda\left(\operatorname{Sin}(A+B) - \frac{\operatorname{Sin}B\cos(A+B)}{\cos B.}\right)$

gleich $bda\left(\frac{\cos B\operatorname{Sin}(A+B) - \operatorname{Sin} B\cos(A+B)}{\cos B}\right) = bda.\frac{\operatorname{Sin} A}{\cos B}.$ n. 13. L.

Endlich ist auch

$b^2 dA\,\frac{\cos A\cos(A+B)}{\cos B}$ gleich $abdA\,\frac{\operatorname{Sin} B\cos A\cos(A+B)}{\operatorname{Sin} A\cos B}$; also

$abdA\cos(A+B) + b^2 dA\,\frac{\cos A\cos(A+B)}{\cos B}$ gleich $ab.dA.\left(1 + \frac{\operatorname{Sin}B\cos A}{\operatorname{Sin}A\cos B}\right)\cos(A+B)$

gleich $\frac{(\operatorname{Sin} A\cos B + \operatorname{Sin} B\cos A)}{\cos B}\,dA.ab$ gleich $ab.dA\,\frac{\operatorname{Sin}(A+B)\cos(A+B)}{\operatorname{Sin} A\cos C}$ nach L.n.13

gleich

gleich $\frac{1}{2}$ ab dA . $\frac{\text{Sin}\,2(A+B)}{\text{Sin}\,A\,\cos B}$ nach L. I. n. 17.

Werden diese Werthe in den Ausdruck für dS gesezt, so wird

$$\text{N.IV.b.}\quad dS = \tfrac{1}{2}ab.\left[\frac{da}{a}\cdot\frac{\text{Sin}\,A}{\text{Sin}\,B}+\frac{db}{b}\cdot\frac{\text{Sin}(A+2B)}{\cos B}+\tfrac{1}{2}dA\,\frac{\text{Sin}\,2(A+B)}{\text{Sin}\,A\,\cos B}\right]$$

Wenn B = A, so ist

$$dS = \tfrac{1}{2}a^2\left(\frac{da}{a}+\frac{db}{b}\,\frac{\text{Sin}\,3A}{\cos A}+\tfrac{1}{2}dA\,\frac{\text{Sin}\,4A}{\text{Sin}\,A\cos A}\right)$$

Leztlich auch nach §. 7. N. V.

$$\log S = \tfrac{1}{2}\left(\log(a+b+c)+\log(c+b-a)+\log(a+b-c)+\log(a+c-b)\right)-\log 16.$$

Wird dieser Ausdruck differentiirt, nach L. IV. C. so ist

$$\frac{dS}{S} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dc}{c}+\frac{da}{a}+\frac{dc}{c}+\frac{dc}{c}+\frac{db}{b}-\frac{da}{a}+\frac{da}{a}+\frac{db}{b}-\frac{dc}{c}+\frac{da}{a}+\frac{db}{c}-\frac{db}{b}\right)$$

und

$$dS = \tfrac{1}{4}\left(\frac{dc}{c}+\frac{db}{b}+-\frac{da}{a}\right).\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+b-a)(a+c-b)}.\quad\text{N.V.}$$

Wenn b = a; so ist

$$dS = \tfrac{1}{4}c\left(\frac{da}{a}+\frac{db}{b}+\frac{dc}{c}\right).\sqrt{(2a+c)(2a-c)}.\quad\text{lit. a.}$$

Wenn b = c = a; so ist

$$dS = \tfrac{1}{4}a^2\left(\frac{da}{a}+\frac{db}{b}+\frac{dc}{c}\right).\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}a^2\left(\frac{da}{a}+\frac{db}{b}+\frac{dc}{c}\right).\ 1{,}7320508.\quad\text{lit. b.}$$

Wenn in lit. b. auch $\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} = \frac{da}{a}$ ist; so ist

$$dS = \tfrac{3}{4}.\,ada.\ 1{,}7320508\ldots.$$

Alle in diesem und dem vorhergehenden §. angezeigte Formeln sind für alle vorkommende Fälle hinreichend, die Fläche sowohl, als Differential-Fläche eines Dreyecks zu berechnen, das Dreyeck mag auf dem Felde oder auf dem Papier gemessen worden seyn.

Weil aber außer Dreyecken auch in dem Geschäfte des Landmessers Vierecke vorkommen, so gedenke auch von einigen Gattungen derselben ähnliche Formeln zu bearbeiten, nach welchen man nicht nur die Fläche derselben aus einigen gemessenen Stücken unmittelbar berechnen, sondern auch untersuchen kann, was für einen Einfluß Fehler, welche in Abmessung dieser Stücke begangen worden seyn möchten, auf diese Fläche haben mögen. Ich fange zu dem Ende mit dem Parallelogrammo an, und bezeichne in Fig. 13. die Seite AB desselben mit a; die Seite EA aber mit b; es ist also

$$S = ab. \quad \text{N. I.}$$

§. 9.

Wenn in Fig. 13. in dem Trapezio ABCD die Seite AB mit α; CD mit β; AC mit δ; BD mit γ bezeichnet wird, so ist

$$S = \frac{CD \cdot AE + AB \cdot AE}{2}; \quad \text{oder}$$

$$S = \frac{b \cdot (\alpha + \beta)}{2}. \quad \text{lit. a.}$$

Wenn aber der Winkel ACD gemessen worden, ist $b = \delta \operatorname{Sin} C$, und

$$S = \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{Sin} C \cdot (\alpha + \beta). \quad \text{N. I.}$$

Wenn $\beta = \alpha$, so ist

$$S = \delta \operatorname{Sin} C \cdot \alpha. \quad \text{N. II.}$$

Wenn

Wenn der Winkel ACD $= 90°$ und $\delta = b$ ist; so wird

$S = b\alpha$. wie zuvor. N. III.

Aus dem Ausdruck lit. a. folgt auch, daß, wenn in Fig. 13. sich auf dem Papier die Figur ACEGILNPRTSQOMKHFDB ergeben hätte, und dieselbe in mehrere Trapezia vertheilt würde, auch seyn müsse

$$S = \frac{(AB+CD)ab + (CD+EF)bc + (EF+GH)cd + (GH+IK)de + (IK+LM)ef}{2}$$
$$+ \frac{(LM+NO)fg + (NO+PQ)gh + (PQ+RS)hi + RS \,.\, iT.}{2}$$

Bezeichnet man die Linien	mit	Die Winkel	mit	so ist
AB	a	. . . ab	α	$ab = \alpha$
CD	b	. . . ac	β	$bc = \beta - \alpha$
EF	c	. . . ad	γ	$dc = \gamma - \beta$
GH	d	. . . ae	δ	$de = \delta - \gamma$
IK	e	. . . af	ε	$ef = \varepsilon - \delta$
LM	f	. . . ag	ζ	$fg = \zeta - \varepsilon$
NO	g	. . . ah	η	$gh = \eta - \zeta$
PQ	h	. . . ai	ϑ	$ih = \vartheta - \eta$
RS	i	. . . iT	ι	$iT = \iota - \vartheta$.

und wenn diese Werthe in den Ausdruck für S substituirt worden, so ist auch

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(a+b)\alpha + (b+c)(\beta-\alpha) + (c+d)(\gamma-\beta)(d+e)(\delta-\gamma) + (e+f)(\varepsilon-\delta)}{2} \\ \dfrac{(f+g)(\zeta-\varepsilon) + (g+h)(\eta-\zeta) + (h+i)(\vartheta-\eta) + (\iota-\delta)}{2} \end{array} \right. ;$$ oder

N. IV. $$S = \frac{(a-c)\alpha + (b-d)\beta + (c-e)\gamma + (d-f)\varepsilon + (e-g)\zeta + (f-h)\eta + (g-i)\vartheta + (h-k)i}{2}$$

Auf-

Aufgabe.

Ein Landmesser hat von dem Viereck ABCDA gemessen die Seiten $AD = \alpha$; $AB = \beta$; $DC = \delta$; ferner die Winkel $BAD = A$; $ADC = D$.

Das Terrain erlaubet nicht, die Linien BC, auch nicht die Winkel ABC und BCD zu messen; es fragt sich: wie groß wird die Grundfläche dieses Grundstücks seyn? Es ist nach §. 7. N. III.

$$S = \tfrac{1}{2}(CE.EB - ED.AE.)\ \mathrm{Sin}\,BEC.$$

Es ist aber $AE = AD.\frac{\mathrm{Sin}\,ADE}{\mathrm{Sin}\,AED}$; $DE = AD.\frac{\mathrm{Sin}\,DAE}{\mathrm{Sin}\,AED.}$

$$AED = 180 - DAE - ADE;\ DAE = 180 - BAD = 180 - A;$$
$$ADE = 180 - ADC = 180 - D;$$

$$AED = 180 - (180 + A) - (180 + D) = -(180 + (A + D));$$

demnach auch $AE = \frac{\alpha\,\mathrm{Sin}(180 - D)}{-\mathrm{Sin}(A+D)} = -\frac{\alpha\,\mathrm{Sin}\,D}{\mathrm{Sin}(A+D)}$; $DE = -\frac{\alpha\,\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}(A+D)}$

$DE = \beta - \frac{\alpha\,\mathrm{Sin}\,D}{\mathrm{Sin}(A+D)}$; $CE = \delta - \frac{\alpha\,\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}(A+D)}$; und .

$$S = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}(A+D)\ \delta - \frac{\alpha\,\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}(A+D)}.\ \beta - \frac{\alpha\,\mathrm{Sin}\,D}{\mathrm{Sin}(A+D)} + \frac{\alpha\,\mathrm{Sin}\,D}{\mathrm{Sin}(A+D)}.\ -\frac{\alpha\,\mathrm{Sin}\,A}{\mathrm{Sin}(A+D)}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}(A+D)\left(\frac{\beta\delta\,\mathrm{Sin}(A+D)^2 - \alpha\beta\,\mathrm{Sin}(A+D)\,\mathrm{Sin}A - \alpha\delta\,\mathrm{Sin}D\,\mathrm{Sin}(A+D) - \alpha^2\,\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}D + \alpha^2\,\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}D}{\mathrm{Sin}(A+B)^2}\right)$$

N. V. $$S = \frac{\alpha\beta\,\mathrm{Sin}A + \alpha\delta\,\mathrm{Sin}D - \beta\delta\,\mathrm{Sin}(A+D)}{2} = \frac{\alpha\beta\delta}{2}\left(\frac{1}{\delta}\mathrm{Sin}A + \frac{1}{\beta}\mathrm{Sin}D - \frac{1}{\alpha}\mathrm{Sin}(A+D)\right)$$

Wenn $\alpha = \delta$; so ist auch aus N. V.

$$S = \frac{\alpha_2\beta}{2}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{Sin}\,D + \frac{2}{\delta}\mathrm{Cos}\,(A + \tfrac{1}{2}D).\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}D\right).$$ nach L. I. 20.

Wenn

Wenn in N.V. δ unbekannt, hingegen, außer α, β, BAC, ACD, auch noch der Winkel $ABC = B$ gemessen ist, so ist einmal

$$CE = BE \cdot \frac{\text{Sin } CBE}{\text{Sin } BCE} \cdot = \left(\beta - \frac{\alpha \text{ Sin } D}{\text{Sin } (A+D)}\right) \cdot \frac{\text{Sin } CBE}{\text{Sin } BCE.}$$

Es ist aber der Winkel $BCE = 360 - (BAD + ABC + ADE)$

$$= 360 - (A + B + D); \text{ und}$$

$$\text{Sin } BCE = - \text{Sin } (A + B + D); \text{ und}$$

$$CE = \frac{(\beta . \text{Sin } (A+D) - \alpha \text{ Sin } D) \text{ Sin } B}{- \text{Sin } (A+B+D) . \text{Sin } (A+D)}; \text{ demnach}$$

$$S = \tfrac{1}{2} \text{Sin}(A+D)\left[-\frac{(\beta \text{Sin}(A+D) - \alpha \text{Sin} D \text{Sin} B)}{\text{Sin } (A+B+D) . \text{Sin}(A+D)} - \frac{(\beta \text{Sin}(A+D) \alpha \text{Sin} D)}{\text{Sin } (A+D)} - . - \frac{\alpha \text{ Sin } A}{\text{Sin}(A+D)} - \frac{\text{Sin } D}{\text{Sin}(A+D)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \text{Sin } (A+D) . \left[\frac{(\beta \text{ Sin } (A+D) - \alpha \text{ Sin } D)_2 . \text{Sin } B}{\text{Sin } (A+B+D) . \text{Sin}(A+D)^2} + \frac{\alpha^2 \text{Sin} A \text{ Sin} D}{\text{Sin}(A+D)}\right]$$

$$= - \frac{(\beta \text{Sin}(A+D) - \alpha \text{ Sin } D)^2 \text{ Sin } B}{2 . \text{Sin } A+B+D) . \text{Sin } (A+D)} + \frac{\alpha^2 \text{ Sin } A \text{ Sin } D}{2 \text{ Sin } (A+D)}$$

$$= \frac{(\beta^2 \text{Sin}(A+D)^2 - 2\alpha\beta \text{ Sin} D \text{ Sin}(A+D)) \text{Sin} B}{2 . \text{Sin } (A+B+D) . \text{Sin } (A+D)} + \frac{\alpha^2 \text{ Sin } D^2 \text{ Sin} B}{2 \text{Sin}(A+B+D) \text{ Sin}(A+D)} + \frac{\alpha^2 \text{Sin} A \text{Sin} D}{2 \text{ Sin } (A+D)}$$

Aber $\frac{\alpha^2 \text{ Sin } D^2 \text{ Sin } B}{2 \text{Sin}(A+D) \text{Sin}(A+B+D)} + \frac{\alpha^2 \text{ Sin} A \text{ Sin} D}{2 \text{Sin}(A+D)} = \alpha^2 \text{Sin} D \frac{\text{Sin} D \text{ Sin} B + \text{Sin} A \text{Sin}(A+B+D)}{\text{Sin } (A+D) . \text{Sin } (A+B+D)}$

Ferner nach L. n.18. $\text{Sin } D . \text{Sin} B = \tfrac{1}{2}\text{Cos}(D-B) - \tfrac{1}{2}\text{Cos } (B+D)$

$$\text{Sin} A . \text{Sin}(A+B+D) = \tfrac{1}{2}\text{Cos}(A+B+D-A) - \tfrac{1}{2}\text{Cos}(A+B+D-A);$$

also $\text{Sin } D . \text{Sin } B + \text{Sin } A . \text{Sin } (A+B+D) = \tfrac{1}{2} \text{Cos } (D-B) - \tfrac{1}{2} \text{Cos } (B+D)$

$$+ \tfrac{1}{2}\text{Cos}(A+(B+D+A)) - \tfrac{1}{2} \text{Cos}(A+B+D+A)$$

oder weil auch $\text{Cos } (D-B) = \text{Cos } ((A+D) - (A+B))$; und nach L. n. 18.

$\tfrac{1}{2} \text{Cos}(A+D-(A+B)) - \tfrac{1}{2} \text{Cos}(A+B+D+A) = \text{Sin}(A+D) . \text{Sin}(A+B)$ ist; so ist

$S =$

$$S = \frac{(\beta^2 \operatorname{Sin}(A+D)^2 - 2\alpha\beta \operatorname{Sin} D \operatorname{Sin}(A+D)) \operatorname{Sin} B + \alpha^2 \operatorname{Sin} D . \operatorname{Sin}(A+D) . \operatorname{Sin}(A+B)}{2 \operatorname{Sin}(A+D) . \operatorname{Sin}(A+B+D)}$$

$$= \frac{(\beta^2 \operatorname{Sin}(A+D)^2 - 2\alpha\beta \operatorname{Sin} D) \operatorname{Sin} B + \alpha^2 \operatorname{Sin} D . \operatorname{Sin}(A+B)}{2 \operatorname{Sin}(A+B+D)}$$

$$S = \beta . \operatorname{Sin} B . \frac{(\beta \operatorname{Sin}(A+D) - 2\alpha \operatorname{Sin} D) + \alpha^2 \operatorname{Sin} D . \operatorname{Sin}(A+B)}{2 \operatorname{Sin}(A+B+D)} . \quad \text{N.VI.}$$

§. 10.

Differential-Formeln, nach welchen man untersuchen kann, um wie viel sich die Fläche eines der in §. 9. behandelten Vierecke ändert, wenn man in Abmessung einiger Stücke an denselben, durch welche die Fläche bestimmt worden, in Ansehung ihrer wahren Größe um einen gewißen Theil ungewiß ist.

Es ist in §. 9. N. I. $S = \frac{1}{2} \delta \operatorname{Sin} C (\alpha + \beta)$; folglich

$$dS = \frac{\delta \operatorname{Sin} C . (d\alpha + d\beta) + \delta(\alpha+\beta)\, dC \cos C + (\alpha+\beta) \operatorname{Sin} C . d\delta}{2}; \text{ oder}$$

$$dS = \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{Sin} (\alpha + \beta) \left(dC \cot C + \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\beta}{\beta} + \frac{d\delta}{\delta} \right).$$

In N. II. ist $S = \delta \operatorname{Sin} C . \alpha$; folglich

$$dS = \delta \operatorname{Sin} C . \alpha \left(dC \cot C + \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\delta}{\delta} \right).$$

In N. III. ist $S = b\alpha$; folglich

$$dS = b\alpha \left(\frac{db}{b} + \frac{d\alpha}{\alpha} \right).$$

Für

Für den Ausdruck in N. IV. ist

$$dS = \left|\begin{matrix} (a-c)\, d\alpha \\ (b-d)\, a\beta \\ (c-e)\, d\gamma \\ (d-f)\, d\varepsilon \\ (e-g)\, d\zeta \\ (f-h)\, d\eta \\ (g-i)\, d\vartheta \\ (h-k)\, di \end{matrix}\right| : 2 \;+\; \left|\begin{matrix} (da-dc)\, \alpha \\ (db-dd)\, \beta \\ (dc-de)\, \gamma \\ (dd-df)\, \varepsilon \\ (de-dg)\, \zeta \\ (df-dh)\, \eta \\ (dg-di)\, \vartheta \\ (dh-dk)\, i \end{matrix}\right| : 2.$$

In N. V. ist

$$2dS = \begin{cases} \alpha\beta dA \cos A + (\alpha d\beta + \beta d\alpha) \operatorname{Sin} A \\ + \alpha\delta dD \cos D + (\alpha d\delta + \delta d\alpha) \operatorname{Sin} D \\ - \beta\delta(dA + dD) \cos(A+D) - (\beta d\delta + \delta d\beta) \operatorname{Sin}(A+D); \end{cases}$$ oder

$$dS = \begin{cases} \frac{\alpha\beta \operatorname{Sin} A}{2}\left(dA \cot A + \frac{da}{a} + \frac{d\beta}{\beta}\right) + \frac{\alpha\delta \operatorname{Sin} D}{2}\left(dD \cot D + \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\delta}{\delta}\right) \\ - \frac{\beta\delta \operatorname{Sin}(A+D)}{2}\left((dA + dD) \,.\, \operatorname{Cot}(A+D) + \frac{d\delta}{\delta} + \frac{d\beta}{\beta}\right). \end{cases}$$

Da ich die Auflösung einiger Formeln in diesem und dem vorhergehenden Abschnitte bereits durch mehrere Exempel gezeiget habe, so halte ich es nicht für unumgänglich nothwendig, von diesen Formeln einige Zahlen-Exempel herzusetzen. Ein Landmesser, welcher das, was ich im ersten und zweyten Abschnitte vorgetragen habe, hinlänglich eingesehen hat, wird sich leicht auch in diese Formeln zu finden wissen. Ich wollte übrigens bey dem Gebrauche derselben die Vegaischen logarithmischen Tabellen empfehlen, weil diese sehr bequem und correct hiezu und auch nach dem Radius 1, wie diese Formeln, regulirt sind. Daß ich in den wenigsten dieser Formeln mich logarithmischer Differentiationen bedient habe, durch welche ich in manchen Fällen auf einem nähern Weg zu meinem Zweck hätte gelan-

gelangen können, ist aus diesem Grunde geschehen, damit ein Landmesser, welcher etwan noch nicht Uebung genug im Differentiiren und Zusammenziehung der Formeln haben möchte, an denselben Gelegenheit finden möchte, sich zu üben. Ich schließe also hiemit diese Untersuchungen, und wünsche, daß der geneigte Leser und Sachverständige dieselben jederzeit mit Nutzen gebrauchen möge.

Druckfehler und Verbesserungen.

pag. 6. statt $z = \log(1+)$ lies: $z = \log(1+x)$.

pag. 28. ist ein Rechnungsfehler vorgefallen. Es ist nemlich

$$z = \sqrt{(e^2 + r^2 - 2re\cos\psi)} - (r-e); \quad \text{oder}$$

$$z = \sqrt{((e+r)^2 - 4re\cos^2\tfrac{1}{2}\psi)} - (r-e); \quad z = (e+r)\sqrt{\left(1 - \frac{4re\cos^2\frac{1}{2}\psi}{(e+r)^2}\right)} - (r-e)$$

$$z = (e+r)\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}^2 k)}. - (r-e); \quad z = (e+r)\,\mathrm{Cos}\,k - (r-e).$$

In diesem Ausdruck ist $\mathrm{Sin}\,k = \sqrt{\frac{4re\cos^2\frac{1}{2}\psi}{(e+r)^2}} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\psi}{e+r} \cdot \sqrt{re}$.

Nach dieser Formel läßt sich also leicht eine Tabelle für den Winkel k für einen jeden gegebenen Winkel ψ berechnen.

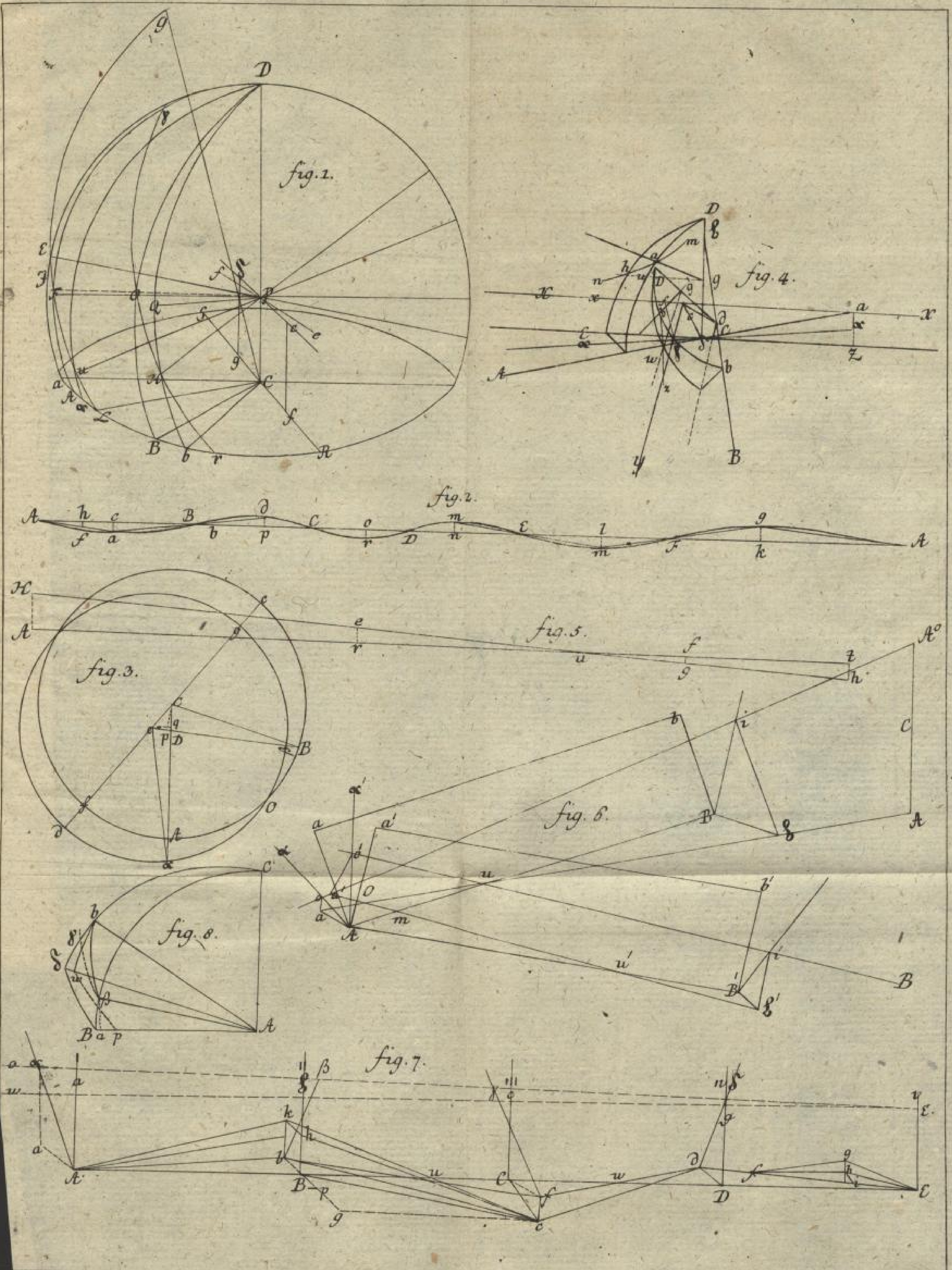
fig.1.
fig.4.
fig.2.
fig.5.
fig.3.
fig.6.
fig.8.
fig.7.

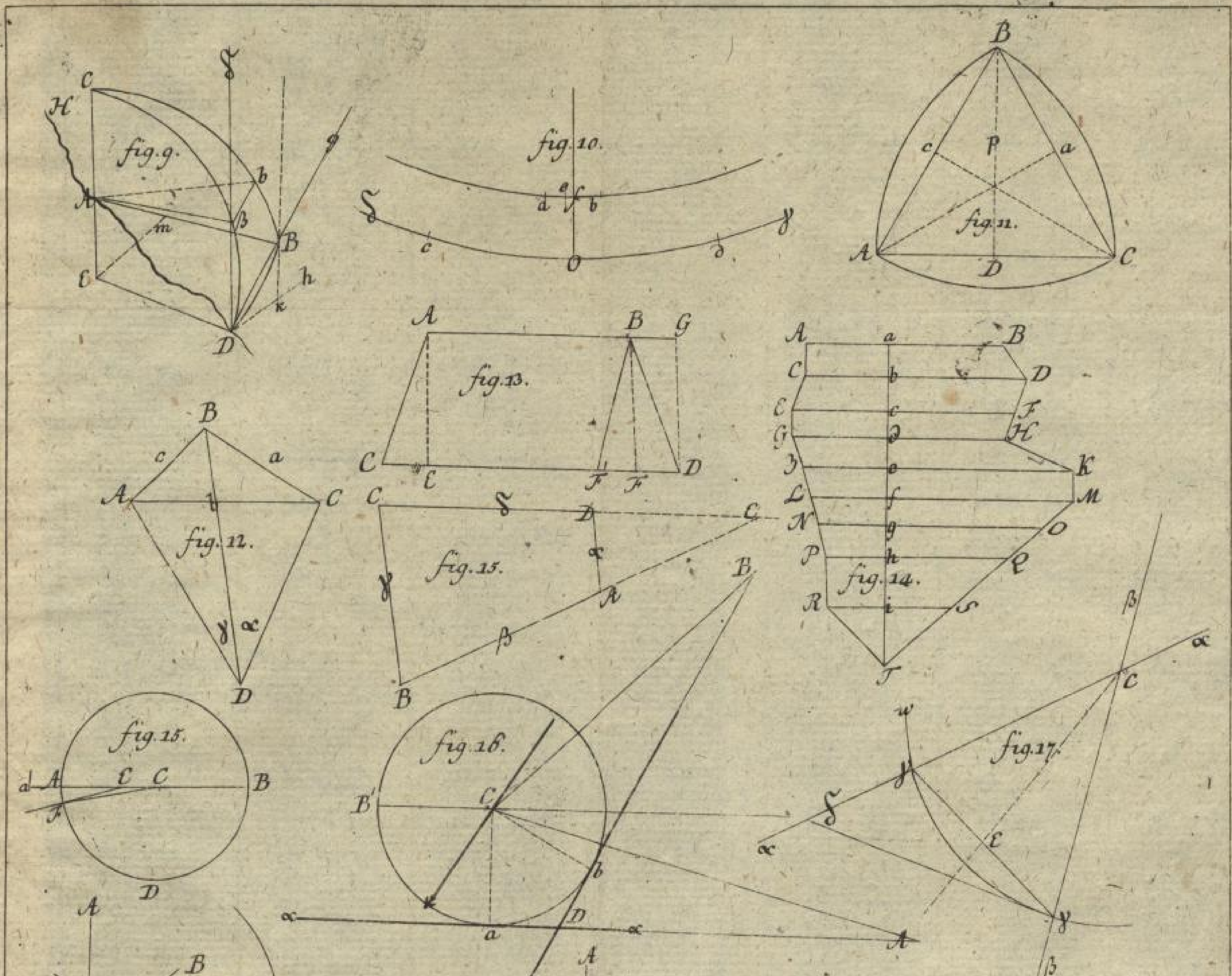
fig. 9.
fig. 10.
fig. 11.
fig. 12.
fig. 13.
fig. 14.
fig. 15.
fig. 15.
fig. 16.
fig. 17.
fig. 18.
fig. 19.
fig. 20.
fig. 21.
fig. 22.
fig. 23.
fig. 24.