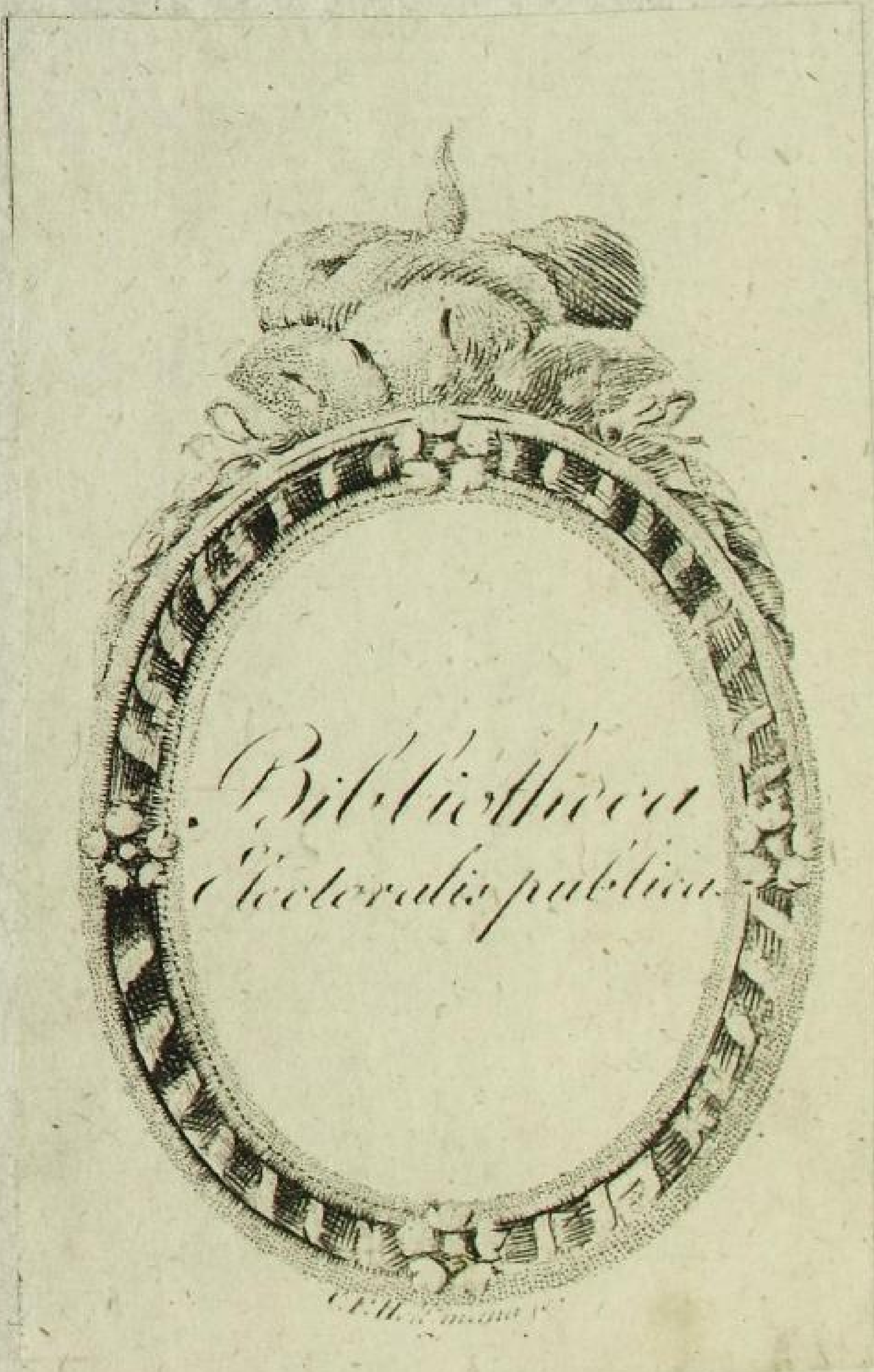

Bibliotheca
Electoralis publica.

# Silv. Franc. Lacroix's Anfangsgründe der ebnen und sphärischen Trigonometrie und der höhern Geometrie

Aus dem Französischen übersetzt

und

mit einigen Zusätzen begleitet

von

E. M. Hahn

Mit 5 Kupfertafeln

Berlin 

bei Heinrich Frölich 1805.

Seinem

unvergeßlichen Lehrer und Freunde

dem Herrn

**Aaron Wolfssohn,**

Oberlehrer und Inspector an der Königl. Wilhelmsschule zu Breßlau,

widmet dieses Buch

als einen Beweis

seiner Hochachtung, Freundschaft und Liebe

der Uebersetzer.

# Vorrede.

Ich habe schon in einer der Anmerkungen zur Vorrede zu meinen **Anfangsgründen der Differential- und Integralrechnung** Gelegenheit gehabt, zum Theil den Gesichtspunct anzugeben, aus welchem ich bey der Umarbeitung des Werks, von welchem jetzt eine dritte Auflage erscheint, ausgegangen bin; allein ich will ihn hier in seinem ganzen Umfange auseinander setzen, weil ich nicht glaube, daß diese Untersuchungen den Fortschritten der Wissenschaft fremd seyn werden, besonders, wenn sie auf Erfahrung aus dem Unterricht gegründet sind. Es ist nicht hinreichend, die Methoden auseinander zu setzen, welche man am angemessensten glaubt, sondern man muß auch die Betrachtungen angeben, welche ihnen vor allen andern den Vorzug geben; und da diese Auseinandersetzungen, welche nur für die mit dem Gegenstande schon vertrauten Männer für die Lehrer selbst bestimmt sind, im Werke selbst dem größten Theil der Lehrlinge dunkle Abschweifungen hervorbringen, und selbst ihre Aufmerksamkeit ermüden könnten, so haben sie wohl in der Vorrede ihre beste Stelle erhalten.

Wir wollen zuvörderst von der den Materien gegebenen Ausdehnung sprechen. In Ansehung der ebnen und sphärischen Trigonometrie habe ich wenig in dieser Rücksicht zu sagen. In der ebnen Trigonometrie hat ein Verfasser der Elemente ohne Zweifel seinen Zweck erreicht, sobald er dem Leser die Natur und Bildung der trigonometrischen Tafeln faßlich gemacht, und ihn in den Stand gesetzt hat, dieselbe auf die Auflösung der Dreyecke in allen Fällen, die sich darbiethen können, anzuwenden. Nächst diesem habe ich die Untersuchung der ersten Beziehungen der trigonometrischen Linien beygebracht, und das hiervon gesagte ist hoffentlich hinreichend zu den vorzüglichsten Resultaten zu gelangen, die man in der Differential- und Integralrechnung sowohl, als in der Mechanik anwendet.

Die Ausdrücke der Sinus und Cosinus durch die nach den Potenzen des Bogens geordneten Reihen, habe ich nicht gegeben, ob mir gleich die Mittel, dies auf eine elementare Art zu thun, gewiß nicht gefehlt haben *). In einer so erschöpften Materie hat man bloß die Schwierigkeit der Wahl; allein ich habe öfters Gelegenheit gehabt, mich von der Nothwendigkeit, einer doppelten Auseinandersetzung auszuweichen, zu überzeugen, und habe daher mir diese Untersuchung für die Differentialrechnung vorbehalten, weil sie für gegenwärtig von keinem Nutzen ist; denn man verlangt hier nicht, daß die Schüler selbst die Sinustafeln berechnen sollen, sondern es soll ihnen bloß die Möglichkeit gezeigt werden, dieselbe zu construiren.

Eben so wenig habe ich den Gebrauch dieser Tafeln, welcher von ihrer besondern Anordnung abhängt, auseinandergesetzt, weil dieses immer von den Verfassern der Tafeln selbst in der Einleitung geschieht, welche sie diesen Büchern vorsetzen.

Die sphärische Trigonometrie ist bisher nur auf die Astronomie und die Steuermannskunst angewendet worden, und die Schriftsteller, welche diese beyden Wissenschaften abhandelten, waren immer darauf bedacht, nach den Kenntnissen, welche sie bey ihren Lesern voraussetzten, die Begriffe der Trigonometrie, und die nöthigen Formeln voraus zu schicken.

---

*) Ich hätte hierzu leicht das Verfahren, welchem ich in der Einleitung zu meinem Lehrbegriff der Differential und Integralrechnung gefolgt bin, entweder unverändert, oder modificirt brauchen können, welches einfach, direct und zugleich strenge ist.

Ein zum allgemeinen Unterricht der mathematischen Wissenschaften bestimmtes Buch, muß im Gegentheile eine einfache und zugleich allgemeine Theorie enthalten, welche sich an den vorhergehenden Theilen anschließt. Der Lehrbegriff der sphärischen Trigonometrie, den ich nach Euler gegeben habe, vereinigt mit diesen Vortheilen zugleich eine Kürze und eine merkwürdige Eleganz; man findet selbst darin eine beträchtliche Anzahl Formeln, welche man in voluminösern Werken vergebens suchen wird. Was die Anwendungen betrift, so habe ich nur eine einzige gegeben, weil die übrigen einige Begriffe aus der angewandten Mathematik vorausgesetzt haben würden, welche meinem Gegenstande ganz fremd sind.

Endlich kommt die Anwendung der Algebra auf die Geometrie (worin auch die höhere Geometrie begriffen ist); dieser Zweig der Mathematik, welchen wir gänzlich den Neuern zu verdanken haben, und dessen Entdeckung ihnen auch wohl den Vorzug vor den Alten verschaft, mußte nothwendigerweise seine Form ändern, je mehr er sich ausdehnte und vervollkommnete.

Man findet die ersten Spuren davon in den Schriften des Viete; denn man kann die Art, deren sich die Algebraisten des funfzehnten Jahrhunderts zur Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade bedienten, nicht als zu dieser Anwendung gehörig betrachten; es war vielmehr eine Anwendung der Geometrie auf die Algebra, oder, um eigentlicher zu reden, auf die Arithmetik; daher rührt es auch, daß die meisten Ausdrücke, in Beziehung auf diese Theorie, aus der Geometrie gezogen sind.

Bis auf Descartes wurde die Algebra nur als ein Hülfsmittel gebraucht, um die Verbindung der Lehrsätze der Geometrie, in der Auflösung der unbestimmten Aufgaben, zu erleichtern; allein indem sie dieser Philosoph zur Darstellung der Natur jeder beliebiger Linien und Flächen brauchbar machte, vermehrte er beträchtlich ihren Vortheil, und bildete daraus die eigentliche Erfindungs-Methode in der Geometrie und Mechanik.

So wie alle Erfinder, wußte er nicht, wie weit sich die Kraft des Mittels, welches er in die Wissenschaft eingeführt hat, erstrecke; und da er nur darauf dachte, es auf die Aufgaben anzuwenden, mit welchen sich die meisten gleichzeitigen Geometer beschäftigten, so hielt er sich nur deshalb an den Curven, um vermittelst ihrer Durchschnitte die Wurzeln der bestimmten Gleichungen zu construiren, oder um ihnen Tangenten zu führen. Daß die alten, welche aus der Natur ihrer Methoden nur eine geringe Anzahl der einfachsten Curven zu betrachten genöthigt waren, sich mehr daran hielten, die Eigenschaften derselben so auseinander zu setzen, als wenn sie dieselbe erschöpfen wollten, ist ganz natürlich; diese Arbeit war auch die der Geometer, welche dem Descartes vorgegangen sind, die dieses Philosophen selbst, und einiger seiner Schüler, für welche die Curven einen neuen Schauplatz bildeten. Allein Newton empfand, daß die Vorstellung, die Curven aus ihren Gleichungen zu betrachten, dem Gegenstande eine solche Ausdehnung gegeben hat, daß es unmöglich war, die vorzüglichsten Auseinandersetzungen derselben durchzuführen; und er zeigte dieses wohl bey der Aufzählung, welche er von verschiedenen Arten der krummen Linien machte, welche die Gleichung vom dritten Grade mit zweyen unbestimmten Größen darbiethen kann, und deren Anzahl er auf 73 steigen ließ.

Im Anfange des achtzehnten Jahrhunderts unternahmen einige Geometer von den Academien der Wissenschaften, z. B. Newton, auch die in der allemeinen Gleichung mit zweyen unbestimmten Größen enthaltenen Curven zu analysiren. Die Arten vermehrten sich dergestallt, daß sie nicht wagten, oder nicht im Stande waren, ein Detail davon zu liefern, und sie beschränkten sich auf die Geschlechter derselben, deren Anzahl noch immer sehr beträchtlich war.

Ueberzeugt, daß sie darauf Verzicht leisten müssen, eine allgemeine Ansicht von den Curven zu liefern, sahen die Geometer wohl ein, daß dieser Theil die größte Vollkommenheit, deren er fähig ist, erreichen würde, wenn sie Methoden auffinden könnten, um aus der Gleichung einer Curve ihre vorzüglichsten Eigenschaften, und die verschiedenen Umstände ihres Fortganges zu bestimmen; und dieses haben Euler und Cramer gethan, welches auch durch die Differentialrechnung sehr erleichtert wird.

Es würde alsdann natürlich scheinen, auf ihre Schritte zurück zu kehren, und an denselben Faden die ganze Theorie der geraden oder krummen Linien fort zu führen, welche am natürlichsten nach ihren Gleichungen geordnet wären; man that dieses indessen nicht. Die Macht der Gewohnheit bewog die Geometer, die alten Methoden mit den neuern gleichsam zu amalgamiren; und diese ungestaltete Zusammensetzung trug immer das Gepräge der ersten Zeiten der Wissenschaft. Man wendete die Betrachtung der Gleichungen nur auf die Linien der zweyten Ordnung an; man überladete die Theorie dieser Linien mit einer großen Anzahl abgesonderter Sätze, welche auf unzusammenhängenden Wegen erhalten oder bewiesen waren, und aus welchen nicht abzunehmen war, wie man sich bey nicht vorher gesehenen Fällen zu verhalten habe.

Indessen haben Descartes, Huygens und Newton die Mechanik der festen und flüßigen Körper ge-schaffen, welche bey den Alten gar nicht existirte. Die mathematischen Wissenschaften, welche, außer der Arithmetik und Elementargeometrie, nur reine speculative Theorien darbothen, sind die Basis der Physik, der Astronomie und der Steuermannskunst geworden. Das Bedürfniß, das Studium derselben viel weiter zu treiben, als bis dahin geschehen, und ihnen die wichtigsten ihrer Anwendungen beyzufügen, machte nothwendig in den Schriften der Geometer eine Auswahl der Sätze zu treffen, um in den Anfangsgründen nur diejenigen beyzubringen, welche zu den Anwendungen dienen könnten, oder welche zur Auseinandersetzung der Methoden unentbehrlich nöthig sind, und die, welche seltner sind, in den Originalschriften zu lassen, welche man als das Archiv der Wissenschaften betrachten muß.

Man muß indessen eingestehen, daß sich dieses Verfahren nur in unsern Zeiten völlig anbringen läßt, weil die große Vorliebe, welche Newton für die Synthesis hatte, und welche mehr vom Geist der Zeit als vom besondern Geschmack dieses großen Mannes herrührte, die eigentliche Anwendung der Algebra auf die Mechanik sehr verzögert hat. Die vorzüglichsten Umstände der Bewegung der Körper sind seit langer Zeit nur aus den besondern Eigenschaften der Curven hergeleitet worden. Euler war es, der sie zuerst gänzlich aus dem Calcul zu ziehen suchte. Seine

Nachfolger haben seine Arbeiten bis auf einen Punct ausgedehnt und vervollkommnet, daß nichts zu wünschen übrig bleibt; denn die noch zu übersteigenden Hindernisse sind von der Art, daß sie gar nicht durch geometrische Betrachtungen gehoben werden können.

Dieses Historische, welches die Gesichtspuncte angiebt, aus welchem die Verfasser der Anfangsgründe der Anwendung der Algebra auf die Geometrie, im vorigen Jahrhundert, in Ansehung der Wahl und der Ausdehnung der Materien, hätten ausgehen müssen, zeigt ferner, daß man keine Ursache hat ihnen nachzuahmen, und daß man im Gegentheile einen dem ihrigen ganz entgegengesetzten Weg einschlagen muß, weil man einen ganz andern Zweck zu erreichen hat. Da alles, was sie in ihren Werken als wesentlich angesehen haben, zur Verständlichkeit derjenigen, welchen die unsrigen als Einleitung dienen sollen, von keinem Nutzen sind, so muß man deren Stelle durch Betrachtungen ergänzen, welche mit denen, die in den höhern Theilen gegeben werden, übereinstimmen. Wir müssen daher überall abkürzen; denn die Reichthümer, welche die physikalischen Wissenschaften angehäuft haben, und die Berührungspuncte, welche sie miteinander gemein haben, erlauben es nicht, daß derjenige, der sich nicht gänzlich dem Studium der reinen Mathematik widmen will, auf curiöse Aufgaben, die für die Gegenwart von keinem Nutzen sind, eine Zeit verschwenden sollte, in welcher er durch das Studium andrer Wissenschaften mehr Nutzen ziehen könnte.

Man kann daher aus dem Vorhergehenden folgende Frage leicht beantworten: **Was muß ein Compendium der Anwendung der Algebra auf die Geometrie enthalten, wenn man es für diejenigen Zöglinge bestimmt, welche sich den physikalisch = mathematischen Wissenschaften widmen sollen, wie z. B. für die jungen Leute, welche auf der polytechnischen Schule studiren?**

Man muß offenbar alles das hineinbringen, welches zur Verständlichkeit der neuesten und vollständigsten Werke, welche von den physikalisch = mathematischen Wissenschaften handeln, oder der Vorlesungen, welche in der polytechnischen Schule gehalten werden, unentbehrlich sind.

Wenn man in diesen Büchern oder in diesen Vorlesungen die Linien nur nach ihren allgemeinen Eigenschaften behandelt, so führe man nur einige der merkwürdigsten ihrer besondern Eigenschaften an; wenn darin alle Aufgaben der Mechanik, durch den Calcul auf die einfachsten Gleichungen, auf die nächsten Formeln gebracht sind, hat man wohl noch nöthig, sich in in eine Menge von Sätzen und verschiedenen Methoden einzulassen, die die Anfänger abschrecken, und sie durch dieselben und nur auf verschiedene Arten dargestellten Resultate führen, wobey sie eine Zeit verlieren, in welcher sie etwas neues hätten erlernen können.

Wenn ein Schriftsteller, indem er sich mit einem Zweige besonders beschäftigt, elegante Verfahrungsarten, oder neue Eigenschaften entdeckt, so ist es nützlicher sie in ein für diejenigen bestimmtes Buch zu bringen, welches den Zweig der Mathematik, mit welchem sie sich besonders beschäftigen, vervollkommnet: wenn man sorgfältig die große Anzahl der Lehrbücher von den Kegelschnitten auflegte, eine Materie, über welche man gewiß so viele Schriften, als über jede andre, hat, so würde man darin viele vergessene Sachen finden, die einem alsdann neu scheinen. Allein alles, was nicht die Macht der Methode vergrößert, oder, welches nicht den Weg, der die Resultate mit einander verbindet, abkürzt, muß aus den Elementarbüchern ausgelassen werden.

Nach diesen Betrachtungen habe ich nun bestimmt, was ein **Elementarbuch der Anwendung der Algebra auf die Geometrie enthalten muß.**

Man muß nehmlich den doppelten Gesichtspunct angeben, unter welchem man die Anwendung der Algebra auf die Geometrie beabsichtigen kann; nehmlich zuerst auf die Art, wie sie sich den ersten Erfindern dargestellt hat, und zwar als ein Mittel, die verschiedenen Sätze der Geometrie mit einander zu verbinden; und welche dann durch die glückliche Idee des Descartes, und durch die Arbeiten des Euler, Lagrange, Monge, das allgemeine Mittel wurde, aus der möglichst kleinsten Anzahl von Principien, die Eigenschaften der Ausdehnung herzuleiten.

Hierauf muß man durch Beyspiele zeigen, welche Vorzüge diese beyden Arten, die Aufgaben aufzulösen, haben, was an ihnen inconvenient ist, und wie die Auswahl der gegebenen und der unbekannten Stücke auf die Auflösung Einfluß hat.

Dann muß man die Linien nach ihren Gleichungen classificiren, und zeigen, daß diese Gleichungen nicht eine einzige Form haben, sondern daß sie mehr oder weniger verwickelt sind, je nachdem die Beziehungen es sind, welche die durch sie ausgedrückten Linien zu denen, auf welche man sie bezieht, haben; woraus dann die Nothwendigkeit gezeigt werden muß, die Coordinaten zu umformen, und diese Umformungen zur Classification der Linien durch Vereinfachung ihrer Gleichung anzuwenden.

Hiernächst komme man auf einem entgegengesetzten Wege von einigen Eigenschaften der Linien auf ihre

Glei-

Gleichungen zurück, um zu zeigen, daß die verschiedenen Gleichungen der Linien nur Ausdrücke ihrer verschiedenen Eigenschaften sind, von denen die einen die andern enthalten, sobald sie characterisirt sind.

Hiernächst leite man aus den allgemeinen Gleichungen der Curven vom zweyten Grade ihre gemeinschaftlichen Eigenschaften her, und bediene sich derselben, um einen Begriff von der Art zu geben, nach welcher sich die Alten dieselben vorstellten, um die Kenntnisse der Alten mit denen der Neuern zu verbinden.

Hierauf bestimme man die Tangenten der Curven vom zweyten Grade durch eine analytische Methode, welche allen dreyen Curven gemein ist, und welche sich selbst auf alle Curven ausdehnt; zeige die Gränzen der Tangenten, der Hyperbel, oder die Asymptoten; und dann im Kurzen die Art, wie die Alten die Tangenten zu den Kegelschnitten führten.

Man gehe dann zur Bestimmung der Curven durch die Anzahl der sie characterisirenden Puncte über.

Endlich zeige man mit Wenigem den Gebrauch der Curven zur Construction der Wurzeln der bestimmten Gleichungen, und um die Umstände ihrer Auflösung darzustellen.

Dieses, glaubte ich, muß in meinem Werke anzutreffen seyn.

Wenn man sich an der Zeit der ersten Ausgabe hält, so wird man diesen Plan ohne Zweifel neu finden; die Mittel, die ich zur Ausführung desselben anwendete, waren es ebenfalls, wenigstens in Betreff der Elemente; und diese Neuheit konnte den auseinandergesetzten Principien ein Ansehen von Schwierigkeit geben, welche sie an und für sich nicht haben.

Uebeigens muß ich glauben, daß man mir in verschiedenen Werken, ohne mich zu nennen, die Ehre eines Commentars erzeigt hat; allein, wenn einer wirklich nöthig seyn sollte, um sich mit dem Meinigen vertraut zu machen, so würde ich das Werk vom Bürger Puissant, Recueil de diverses propositions de Géom. etc., vorschlagen. Dieser geschickte Professor, der mit ausgezeichneten Talenten Wohlanständigkeit verbindet, hat sein Werk mit elegant aufgelösten Aufgaben angefüllt, welche den Zöglingen, die sich üben wollen, von großem Nutzen seyn können.

Was die Methode anbelangt, der ich gefolgt bin, so wird sie wechselweise analytisch und synthetisch scheinen; und diejenigen, welche die Vorrede zu den Anfangsgründen der Geometrie gelesen haben, werden nicht darüber erstaunen, denn sie werden vielleicht wie ich denken, daß die Vereinigung dieser beyden Methoden, zur Vervollständigung einer jeden Wissenschaft nothwendig ist; allein die zweyte muß der ersten untergeordnet werden, wenn man die Verknüpfung der Sätze in Evidenz setzen, und bey allen wesentlichen Umständen, den Ursprung der auseinander zu setzenden Begriffe, und den Zweck, welchen man zu erreichen strebt, anzeigen will.

Wenn es z. B. darauf ankäme, die Identität der in der Gleichung vom zweyten Grade enthaltenen Curven mit denen zu vergleichen, welche die Alten im Kegel betrachtet haben, so würde man offenbar die synthetische Methode anbringen, um den Gang darzustellen, welchem die Alten bey ihren Untersuchungen gefolgt sind. Allein man sieht leicht ein, daß es unsrer Zeit nicht angemessen wäre, zuerst den Kegel zu betrachten, um daraus die Curven vom zweyten Grade herzuleiten; warum sollte man mit dieser Fläche eher anfangen als mit jeder andern? Wenn man selbst ihre Gleichung anbrächte, so wäre dieses eine Anwendung der Algebra und nicht der Analysis.

Man könnte vielleicht glauben, es wären die beyden Methoden, vermittelst derer ich successiv die allgemeine Gleichung vom zweyten Grade mit zweyen unbekannten Größen analysire, zwey Mahl angebracht, weil ich unmittelbar mit der Umformung der Coordinaten hätte anfangen können; allein die erstere, deren sich Descartes zuerst im 2ten Buche seiner Geometrie, und dann Herrmann im IV. Bande der Petersburger Memoiren bediente, welche sehr geschickt ist, zu zeigen, wie man eine jede Curve aus ihrer Gleichung bestimmt, dürfte wohl aus dieser Ursache nicht ausgelassen werden.

Da mich die Bekanntmachung der Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung die Nothwendigkeit hat fühlen lassen, von dem 3ten und 4ten Bande des Lehrbegriffs der Differential- und Integralrechnung, die ersten Begriffe von den krummen Flächen, und den Curven von gedoppelter Krümmung, abzusondern, so habe ich sie hier in Gestalt eines Anhangs beygefügt.

# Inhalt.

## Erster Abschnitt.

### Von der ebnen Trigonometrie.

## Zweyter Abschnitt.

### Von der sphärischen Trigonometrie.

## Dritter Abschnitt.

### Von der höhern Geometrie.

## Anhang,

### welcher die ersten Gründe der Anwendung der Algebra auf die krummen Flächen, und die Curven von gedoppelter Krümmung enthält.

---

Anfangs=

Anfangsgründe
der
# ebnen und sphärischen Trigonometrie
und der
# höhern Geometrie.

## Erster Abschnitt.
### Von der ebnen Trigonometrie.

§. 1.

Ein jedes geradlinigte Dreyeck besteht aus sechs Stücken, nehmlich: aus dreyen Seiten und dreyen Winkeln; man braucht indessen nur eine gewisse Anzahl dieser verschiedenen Stücke zu kennen, um die andern zu bestimmen. Es folgt nehmlich aus den in der Geometrie in Betreff der Gleichheit der Dreyecke bewiesenen Sätzen, daß sich aus dreyen von den Stücken, die das Dreyeck bilden, dasselbe construiren läßt, wofern unter diesen bekannten Stücken wenigstens eine Seite anzutreffen ist. Damit nun über die Theorie der Dreyecke nichts zu wünschen übrig bleibe, muß man bey den geometrischen Constructionen den Calcul anzubringen suchen, weil der Grad der Genauigkeit der erstern, wegen der Unvollkommenheit der Instrumente begränzt ist, indeß uns nichts hindert, den letztern bis auf jeden beliebigen Grad der

Genauigkeit zu treiben. Dieses ist der Gegenstand, welcher in der ebnen Trigonometrie vorgetragen werden soll.

Denjenigen, welche zuerst darauf gefallen sind, die zwischen den verschiedenen Theilen eines Dreyecks anzutreffenden Beziehungen, durch eine Reihe arithmetischer Operationen, oder durch algebraische Formeln auszudrücken, mußte sich die Schwierigkeit entgegensetzen, die Größe der Winkel in die Rechnung zu bringen, welche, von Kreisbogen gemessen, gar nicht mit geraden Linien verglichen werden können. Sie haben aber gleich eingesehen, daß, wenn sie durch irgend ein Mittel eine Reihe Dreyecke berechnen könnten, deren Winkel alle mögliche Werthe erhielten, in dieser Reihe nothwendigerweise eins anzutreffen seyn müßte, welches dem zu bestimmenden ähnlich wäre, von welcher Beschaffenheit dieses letztere auch seyn mag; und in diesem Falle würden ein Paar einfache Proportionen hinreichend seyn, um aus den Theilen des ersten die des zweyten herzuleiten. Folgendes Exempel wird das abstracte dieser Betrachtungen mehr versinnlichen.

§. 2.

Wir wollen annehmen, daß man im Dreyeck ABC Fig. 1. den Winkel B, den Winkel C und die Seite BC kenne; so würde man in der Reihe der berechneten Dreyecke, dasjenige aufsuchen, welches zwey Winkel b und c respectiv den Winkeln B und C gleich hat. Dieses wird nothwendigerweise dem vorgelegten Dreyecke ABC ähnlich seyn; und da alle seine Theile ab, ac, bc bekannt sind, so wird man folgende Proportionen haben:

$$bc : ab = BC : AB, \quad bc : ac = BC : AC,$$

in deren jeder die drey ersten Glieder gegeben sind. Man wird folglich finden

$$AB = \frac{BC \times ab}{bc}, \quad AC = \frac{BC \times ac}{bc};$$

und da man überdies $A = a$ hat, so würden alle Theile des Dreyecks ABC bestimmt seyn.

§. 3.

Nachdem wir nun den Nutzen eingesehen haben, welchen man aus einer Reihe Dreyecke, deren Winkel alle mögliche Werthe erhalten, und deren Seiten berechnet sind, ziehen könnte, ist es natürlich, die Mittel zu suchen, eine dergleichen Reihe zu bilden. Um den einfachsten Fall zu betrachten, wollen wir setzen, daß die zu bildenden Dreyecke alle rechtwinkligt seyen; es ist leicht einzusehen, daß sie alle im vierten Theile eines Kreises construirt werden können, wenn man von jedem Puncte des Bogens AB Fig. 2. die senkrechten Linien MP, M'P', M''P'' rc. auf den Halbmesser AC fällt, und dann die Halbmesser MC, M'C, M''C rc. zieht; die hierdurch entstehenden Dreyecke MPC, M'P'C, M''P''C rc. werden sämmtlich in P, P', P'' rc. rechtwinklicht seyn, und die Winkel MCP, M'CP', M''CP'' rc. werden nach und nach alle mögliche Werthe erhalten; endlich werden die Winkel CMP, CM'P', CM''P'' rc., welche mit den Vorhergehenden einen rechten Winkel bilden, auch von der Beschaffenheit seyn, wie es die Natur der rechten Winkel erfordert, und es wird kein rechtwinkligtes Dreyeck geben, welches nicht mit einem von denen, welche die gegenwärtige Construction darbiethet, gleichwinklicht seyn sollte. Es ist beyläufig zu merken, daß alle diese letztern eine gemeinschaftliche Hypothenuse haben, welche dem Halbmesser des Bogens AB gleich ist.

§. 4.

Man könnte auch auf eine andre Art eine Reihe rechtwinkligter Dreyecke bilden, in deren jedem eine der den rechten Winkel einschließenden Seiten, dem Halbmesser des Kreises gleich ist. Man braucht hierzu nur an dem äußersten

Punkt A des Halbmessers AC auf diesen Halbmesser die unbestimmte Berührungslinie AT zu errichten, und aus dem Mittelpuncte C durch die Puncte M, M′, M″ ꝛc die Secanten CN, CN′, CN″ ꝛc. zu ziehen. Die Dreyecke CAN, CAN′, CAN″ ꝛc. werden offenbar successiv alle mögliche Verbindungen der Winkel enthalten, die in einem rechtwinkligten Dreyecke existiren können; und unter diesen Dreyecken muß nothwendigerweise ein dem zu bestimmenden ähnliches Dreyeck anzutreffen seyn.

§. 5.

Die Seiten PM, P′M′, P″M″ ꝛc., welche in den Dreyecken CPM, CP′M′, CP″M″ ꝛc., deren Hypothenuse unveränderlich ist, mit den Winkeln ACM, ACM′, ACM″ ꝛc., oder mit den diese Winkel messenden Bogen AM, AM′, AM″ ꝛc. zugleich wachsen oder abnehmen, haben wegen dieser Abhängigkeit eine besondere Benennung erhalten. Die Linie PM wird der Sinus des Bogens AM genannt; eben so ist die Linie P′M′ der Sinus des Bogens AM′, und so von den übrigen. Hieraus folgt, daß der **Sinus eines Bogens, die von dem einen Endpunct dieses Bogens auf den durch den andern äußersten gehenden Halbmesser, gefällte senkrechte Linie ist.** Die Linien CP, CP′, CP″ ꝛc., welche abnehmen, wenn die Bogen AM, AM′, AM″ ꝛc. zunehmen, werden, als Paralle zwischen Parallelen, respectiv den von den Puncten M, M′, M″ ꝛc. auf den auf AC senkrechten Halbmesser CB gefällten Perpendikeln MQ, M′Q′, M″Q″ ꝛc. gleich seyn; und es sind offenbar die Linien MQ, M′Q′, M″Q″ ꝛc. in Rücksicht auf die Bogen BM, BM′, BM″ ꝛc. eben das, was die Linien PM, P′M′, P″M″ ꝛc., in Rücksicht auf die Bogen AM, AM′, AM″ ꝛc. sind, das heißt MQ ist der Sinus von BM, M′Q′, der von BM′ und M″Q″ der von BM″ ꝛc.

Zwey Bogen, welche zusammengenommen oder von einander abgezogen, den vierten Theil des Umkreises geben, werden **Ergänzungen**, **Complemente** des einen zum andern genannt. Die Bogen BM, BM′, BM″ ꝛc. sind respectiv die Ergänzungen von AM, AM′, AM″ ꝛc. Man hat die Linien MQ, M′Q′, M″Q″ ꝛc., so wie die ihnen gleichen CP, CP′, CP″ ꝛc. mit dem Nahmen des **Cosinus**, der Bogen AM, AM′, AM″ ꝛc. belegt. Diesen Betrachtungen zufolge ist der **Cosinus irgend eines Bogens, der Sinus der Ergänzung dieses Bogens, und demjenigen Theile des Halbmessers gleich, welcher zwischen dem Mittelpuncte und dem Endpuncte des Sinus liegt.**

Die Dreyecke CPM, CP′M′, CP″M″ ꝛc., welche alle einerley Hypetenuse haben, sind also aus dem Halbmesser des Kreises, und dem Sinus und Cosinus desjenigen ihrer spitzen Winkel gebildet, dessen Scheitel am Mittelpuncte liegt *).

## §. 6.

Wir wollen nun zu den Dreyecken CAN, CAN′, CAN″ ꝛc. übergehen. Ihre Hypothenusen sind die Secanten der Bogen AM, AM′, AM″ ꝛc., denn man nennt **die Secante eines Bogens, den durch einen der äußersten Puncte dieses Bogens gezogenen, und bis an die durch den andern äußern Punct geführte Tangente verlängerten Halbmesser.** Die auf der Tangente AT genommenen Stücke AN, AN′, AN″ ꝛc. sind die Tangen-

---

*) Der zwischen dem Endpunct des Sinus und dem äußersten Punct des Bogens enthaltene Theil AP des Halbmessers AC wird der Sinus Versus genannt. Diese Linie ist übrigens von keinem Gebrauch in der Trigonometrie.

ten der Bogen AM, AM′, AM″ ꝛc., weil man übereingekommen ist, die Tangente eines Bogens denjenigen Theil zu nennen, welchen die durch die äußersten Puncte dieses Bogens gezogenen Halbmesser, von der durch einen diesern äußern Puncte geführten Tangente zwischen sich fassen *).

§. 7.

Wenn man durch den äußersten Punct B des Bogens AB Fig. 3. die Tangente Bn führt, und sie so lange verlängert, bis sie die Secante CN schneidet, so ist die Linie Cn die Secante des Bogens BM oder des Complements von AM und wird die Cosecante des Bogens AM genannt; die Linie Bn oder die Tangente von BM ist die Cotangente von AM; denn man ist übereingekommen die Tangente und Secante der Ergänzung eines Bogens, mit dem Nahmen der Cotangente und Cosecante dieses Bogens zu belegen. Die Cotangente und Cosecante machen also, wie aus der Figur zu ersehen ist, nicht so wie der Sinus und Cosinus, mit der Tangente und Secante Theile eines und eben desselben Dreyecks aus.

§. 8.

Die Tangente und die Secante stehen mit dem Sinus und Cosinus in den einfachsten Verhältnissen, vermittelst

*) Hier werden die Ausdrücke Secante und Tangente in einem ganz andern Sinne als in den Anfangsgründen der Geometrie genommen. In diesem Theile der Mathematik sind die Secante und Tangente unbegränzte gerade Linien, von denen die erste den Zirkel schneidet, und die andre ihn berührt; allein in der Trigonometrie werden mit diesen Benennungen Linien von einer bestimmten Größe belegt. Wenn es sich zuträgt, daß eine Zweydeutigkeit entstehen kann, so nennt man die letztern trigonometrische Tangenten und Secanten.

deren man die einen finden kann, wenn die andern bekannt sind. Denn die Aehnlichkeit der Dreyecke CPM und CAN biethet folgende Proportion dar CP : PM = CA : AN, woraus man zieht $AN = \frac{PM \times CA}{CP}$; setzt man nun statt der Linien CP, PM und AN ihre Bezeichnungen, nehmlich cos AM, sin AM und tang AM, und bezeichnet den Halbmesser CA durch R, so wird man haben

$$\text{tang } AM = \frac{R \sin AM}{\cos AM}.$$

Aus eben diesen Dreyecken CPM und CAN leitet man auch her CP : CM = CA : CN, welches auf $CN = \frac{CM \times CA}{CP}$ führt; da aber CN = sec AM, CM = CA = R, CP = sos AM, so wird man haben sec AM $= \frac{R^2}{\text{sos } AM}$.

## §. 9.

Wenn man die Dreyecke CAN und CBn mit einander vergleicht, welche ebenfalls einander ähnlich sind, weil sie beyde rechtwinklicht sind, und weil ACN = CnB, als innere Wechselwinkel in Rücksicht auf die Secante Cn, so wird man die Proportion haben:

$$AN : CA = CB \text{ oder } CA : Bn,$$

welche giebt $Bn = \frac{CA^2}{AN}$,

welches darauf zurückkommt

$$\cot AM = \frac{R^2}{\text{tang } AM}.$$

Diese Proportion und diejenige, welche wir für die Secante gefunden haben, lehren uns, daß der Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Secante und dem Cosinus, oder zwischen der Tangente und der Cotangente ist, weil man hat

$$\cos AM \times \sec AM = R^2, \quad \tan AM \cot AM = R^2.$$

§. 10.

Nächst dem Vorhergehenden fehlen uns zur Construction der zur Trigonometrie erforderlichen Tafeln nur noch die Mittel, bloß die Sinus und Cosinus zu berechnen. Aber auch der Cosinus läßt sich unmittelbar aus dem Sinus herleiten; denn das rechtwinkligte Dreyeck CPM, welches beyde enthält, und welches den Halbmesser zur Hypotenuse hat, giebt

$CP^2 + PM^2 = CM^2$ oder $(\sin AM)^2 + (\cos AM)^2 = R^2$,

das heißt, das Quadrat des Halbmessers ist gleich der Summe der Quadrate des Sinus und des Cosinus, woraus folgt

$$\cos AM = \sqrt{[R^2 - (\sin AM)^2]}.$$

Der folgende Satz, welcher den Ausdruck für den Sinus und Cosinus der Summe oder der Differenz zweyer Bogen giebt, verdient die größte Aufmerksamkeit, weil er unausschließlich alle Eigenschaften des Sinus und des Cosinus in sich begreift.

§. 11.

Man habe irgend zwey Bogen a und b; so wird seyn:

$$\sin (a \pm b = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{R}$$

$$\cos (a \pm b = \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{R}.$$

Um sich hiervon zu überzeugen, nehme man Fig. 4. auf dem Kreise AMB den Bogen AM = a; man trage dann auf jeder Seite des Punctes M, die Bogen MN und MN′ gleich b; hierauf ziehe man die Sehne NN′ und lasse von den Puncten N, M, N′ die senkrechten NQ, MP, N′Q′

auf den Halbmesser AC herab. Durch den Punct M ziehe man den Halbmesser CM, und lasse vom Puncte E, in welchem dieser die Sehne NN′ schneidet, auf AC die senkrechte EF herab. Endlich führe man durch die Puncte E und N′ die Linien ED und N′G zu AC parallel.

Nachdem dieses geschehen ist, bemerken wir 1) daß NQ der Sinus des Bogens $AN = AM + MN = a + b$ ist, und daß CQ der Cosinus eben dieses Bogens ist; 2) daß N′Q′ der Sinus des Bogens $AM - AN = a - b$, und daß CQ′ der Cosinus desselben ist. Da aber nach der Construction der Halbmesser CM durch die Mitte des Bogens NN′ geht, und daher die Sehne NN′ nothwendigerweise halbirt, so folgt aus der offenbaren Aehnlichkeit der Dreyecke NED, NN′G, daß auch NG im Puncte D in zwey gleiche Theile getheilt ist, und daß $DN = DG$. Ferner ist wegen der Parallelen $DQ = EF$, $GQ = N'Q$, $DE = FQ$; und da DE die Hälfte von N′G ist, so wird auch FQ die Hälfte von QQ′ seyn, so daß $Q'F = QF = DE$ ist. Endlich

$$NQ = DQ + DN = EF + DN,$$
$$N'Q' = GQ = DQ - DG = EF - DN,$$
$$CQ = CF - FQ = CF - DE,$$
$$CQ' = CF + FQ = CF + DE;$$

setzt man nun für NQ, N′Q′, CQ, CQ′ ihre Bezeichnungen, nehmlich:

$$\sin(a+b),\ \sin(a-b),\ \cos(a+b),\ \cos(a-b),$$

so wird man haben

$$\sin(a+b) = EF + DN, \quad \cos(a+b) = CF - DE$$
$$\sin(a-b) = EF - DN, \quad \cos(a-b) = CF + DE.$$

Es bleibt uns nun nur noch übrig die vier Linien EF, CF, DN und DE zu berechnen; die beyden ersten werden vermittelst der Aehnlichkeit der Dreyecke CMP und CEF erhalten, woraus man zieht

$$CM : PM = CE : EF, \quad CM : CP = CE : CF,$$

Da nun $AM = a$, so ist $MP = \sin a$, $CP = \cos a$; ferner folgt aus den Erklärungen von Sinus und Cosinus (§. 3.), daß EN der Sinus des Bogens MN, und daß CE der Cosinus dieses Bogens ist, so daß man hat $NE = \sin b$, $CE = \cos b$; überdieß ist $CM = R$. Substituiren wir nun diese Werthe in der obigen Proportion, so wird man finden

$$EF = \frac{MP \times CE}{CM} = \frac{\sin a \cos b}{R},$$

$$CF = \frac{CP \times CE}{CM} = \frac{\cos a \cos b}{R}.$$

Vergleicht man endlich die Dreyecke CMP, DEN, welche, weil die Seiten des einen auf den des andern senkrecht stehen, ähnlich sind, so kann man daraus herleiten:

$$CM : EN = CP : DN, \quad CM : EN = MP : DE.$$

Substituirt man in jede drey ersten Glieder dieser Proportionen, die oben beygebrachten Bezeichnungen, so werden sie geben

$$DN = \frac{EN \times CP}{CM} = \frac{\sin b \cos a}{R}$$

$$DE = \frac{MP \times EN}{CM} = \frac{\sin a \sin b}{R}.$$

Nimmt man nun diese Werthe mit den vorhergehenden zusammen, um die von $\sin(a+b)$ und von $\sin(a-b)$ zu bilden, so kommen die vier Gleichungen

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \dfrac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{R} \\[2ex] \sin(a-b) = \dfrac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \dfrac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{R} \\[2ex] \cos(a-b) = \dfrac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{R} \end{cases}$$

welche sich auf die zu Anfange dieses Satzes gegebenen zwey Gleichungen bringen lassen.

Vermittelst dieser Gleichungen kann man den Sinus und Cosinus des Doppelten, Dreyfachen, und überhaupt des Vielfachen desjenigen Bogens finden, dessen Sinus und Cosinus bekannt sind. Denn wenn man successiv $b = a$, $b = 2a$ setzt, so wird man haben

$$\begin{cases} \sin 2a = \dfrac{2 \sin a \ \cos a}{R} \\[2ex] \cos 2a = \dfrac{\cos a^2 - \sin a^2}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3a = \dfrac{\sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a}{R} \\[2ex] \cos 3a = \dfrac{\mathrm{sos}\, a \cos 2a - \sin a \sin 2a}{R}, \end{cases}$$

und man kann aus beyden letzten Gleichungen $\sin 3a$ und $\cos 3a$ erhalten, wenn $\sin 2a$ und $\cos 2a$ berechnet sind.

## §. 12.

Die Gleichung $\sin 2a = \dfrac{2 \sin a \cos a}{R}$ führt auch von dem Sinus eines Bogens $a$ auf den Ausdruck für den Sinus seiner Hälfte. Wenn man statt $\cos a$ dessen Werth $\sqrt{(R^2 - \sin a^2)}$ *) setzt, so erhält man

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \sqrt{(R^2 - \sin a^2)}}{R}$$

und erhebt man zum Quadrat, so erhält man

$$R^2 \sin 2a^2 = 4R^2 \sin a^2 - 4 \sin a^4;$$

*) In der Folge werden wir immer das Quadrat des Sinus eines Bogens a durch $\sin a^2$ bezeichnen, ein Ausdruck, welcher nicht mit dem Sinus des Quadrats des Bogens a verwechselt werden darf. Es ist demnach $\sin a^2 = (\sin a)^2$.

nimmt man nun in dieser Gleichung sin a für die unbekannte, so läßt sie sich nach Art der Gleichungen vom zweyten Grade auflösen, und man wird haben

$$\sin a = \pm \sqrt{[\tfrac{1}{2}R^2 \pm \tfrac{1}{2}R \sqrt{(R^2 - \sin 2a^2)}]}.$$

Setzt man nun $2a = a'$, so wird man haben $a = \frac{1}{2}a'$, und folglich

$$\sin \tfrac{1}{2}a' = \pm \sqrt{[\tfrac{1}{2}R^2 \pm \tfrac{1}{2}R \sqrt{(R^2 - \sin a'^2)}]},$$

oder

$$\sin \tfrac{1}{2}a' = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2R^2 \pm 2R \cos a'^2)},$$

wenn man $\cos a'^2$ statt $R^2 - \sin a'^2$ setzt (§. 10.), die Größen unter den Wurzelzeichen mit 4 multiplicirt, und außerhalb desselben durch 2 dividirt, welches den Ausdruck nicht ändert. Diese Formel giebt also den Sinus der Hälfte eines Bogens, wenn man den dieses ganzen Bogens kennt.

## §. 13.

Man kann durch eine sehr einfache Construction zu eben diesem Resultate gelangen.

Wenn man den Bogen AM Fig. 5. in zwey gleiche Theile theilt, so wird die Sehne AQM ebenfalls in zwey gleiche Theile getheilt seyn, und MQ wird der Sinus von MN, oder der Hälfte von AM seyn; das in P rechtwinkligte Dreyeck AMP wird geben

$$AM = \sqrt{(\overline{PM}^2 + \overline{AP}^2)},$$

und da $AP = AC - CP = R - \cos AM = R - \cos a'$ und überdieß $PM = \sin AM = \sin a'$, so wird man haben

$$AM = \sqrt{(\sin a'^2 + R^2 - 2R\cos a' + \cos a'^2)}$$
$$= \sqrt{(2R^2 - 2R\cos a')}$$

weil $\cos a'^2 + \sin a'^2 = R^2$ (§. 10.), und man erhält hieraus

$$QM = \tfrac{1}{2}AQM = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2R^2 - 2R\cos a')}.$$

Auf diese Art findet man nur den zweyten Werth von

$\cos \frac{1}{2} a'$, der andre ist MQ'; denn der Bogen MN'A,, welcher mit dem Bogen AM zusammengenommen, den halben Umkreis beträgt, hat ebenfalls zum Sinus PM, weil diese Linie ebenfalls die von seinem Endpuncte M auf den Halbmesser CA', welcher durch den andern äußersten Punct geht, gefällte senkrechte Linie ist (§. 5.), und da in der Gleichung, von welcher wir ausgegangen sind, nichts vorhanden ist, welches zu erkennen giebt, welchen von diesen beyden Bogen man theilen soll, so muß man auch zu gleicher Zeit der Sinus der Hälfte des ersten, und den der Hälfte des zweyten finden. Nach unsrer Construction würde man haben

$$\begin{aligned} A'M &= \sqrt{(PM^2 + A'P^2)} = \sqrt{[PM^2 + (A'C + CP)^2]} \\ &= \sqrt{[\sin a'^2 + (R + \cos a')^2]} \\ &= \sqrt{(\sin a'^2 + R^2 + 2R \cos a' + \cos a'^2)} \\ &= \sqrt{(2R^2 + 2R \cos a')}, \end{aligned}$$

und folglich

$$MQ = \sin \tfrac{1}{2} a' = \tfrac{1}{2} \sqrt{(2R^2 + 2R \cos a')},$$

ein Resultat, welches den ersten Werth von $\sin \frac{1}{2} a'$ giebt. Es ist wohl zu merken, daß, obgleich $\sin a'$ für beyde Werthe von $\sin \frac{1}{2} a'$ derselbe bleibt, dennoch der Bogen $a'$ verschieden ist; für einen derselben ist es der Bogen AM, und für den andern A'M, welcher das Supplement von AM ist; denn man versteht unter **Supplement eines Winkels oder eines Bogens das, was man zu diesem Winkel oder zu diesem Bogen hinzusetzen muß, damit er zwey Rechte oder den halben Umkreis ausmache.** Man kann aus dem Vorhergehenden schließen, daß der Sinus des Supplements eines Bogens mit dem dieses Bogens einerley ist. Wir werden weiter unten allgemeine Begriffe über die verschiedenen Bogen geben, welche einerley Sinus, einerley Tangente &c. haben können.

§. 14.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß der Sinus irgend eines Bogens AN die Hälfte der Chorde AM des doppelten Bogens ANM ist, und daß umgekehrt die Chorde AM, das Doppelte des Sinus des Bogens AN der Hälfte von ANM ist; es würden sich also, sobald die Sinus bekannt sind, die Chorden bestimmen lassen, und umgekehrt.

§. 15.

Nun sind wir im Stande auseinander zu setzen, auf welche Art man die Sinus- und Cosinustafeln verfertigen kann. Man hat sich zuvörderst den vierten Theil des Kreises in einer gewissen Anzahl gleicher Theile zertheilt gedacht, welche man **Grade** nennt. Bis jetzt wurde meistentheils der ganze Umkreis in 360 Grade getheilt; jeden dieser Grade theilte man wiederum in 60 gleiche Theile, welche man **Minuten** nannte; jede Minute wurde in 60 **Secunden**, jede Secunde in 60 **Terzien** etc. eingetheilt. Das Zeichen der Grade ist die Ziffer $^\circ$, welche zur rechten Seite etwas oberhalb der Zahl gesetzt wird; das der Minuten, Secunden, Terzien etc. sind respectiv $'$, $''$, $'''$ etc., so daß $42^\circ, 31', 14'', 5'''$, 42 Grade, 31 Minuten, 14 Secunden und 5 Terzien bezeichnet.

Es ist leicht einzusehen, daß man bey dem Maaße der Winkel den absoluten Werth des Bogens ganz außer Acht lassen kann, und bloß auf dessen Verhältniß zum ganzen Umkreise Rücksicht zu nehmen hat. Es ist daher sehr natürlich, diesen letztern für die Einheit anzunehmen, und die Bogen durch Brüche auszudrücken. Wenn wir nun die obige Eintheilung des Kreises in 360 Grade, des Grades in 60 Minuten, der Minute in 60 Secunden etc. beybehalten, so werden die Zahlen, welche mit den Zeichen $^\circ$, $'$, $''$ etc. behaftet sind, die Zähler der Brüche angeben, deren

Nenner respectiv 360, 360 × 60 oder 21600, 360 × 60 × 60 oder 1296000 ꝛc. sind. So bezeichnet z. B. der Ausdruck $42^\circ\ 31'\ 14''$, $\frac{42}{360} + \frac{31}{21600} + \frac{14}{1296000}$ des ganzen Umkreises.

Desgleichen hat man nicht nöthig den absoluten Werth der Sinus zu berechnen, sondern bloß deren Verhältniß zum Halbmesser, weil man in allen Dreyecken CPM, CP′M′ ꝛc. Fig. 2. nur das Verhältniß der Seiten zu einander zu wissen braucht (§. 2.). Man kann daher, mehrerer Einfachheit wegen, den Halbmesser für die Einheit annehmen, diese Einheit sich dann in einer beliebigen Anzahl gleicher Theile getheilt denken, z. B. in 10000000, wie dieß in den gewöhnlichen Tafeln geschieht, und hierauf bestimmen, wie viele solcher Theile ein jeder der Sinus PM, P′M′, P″M″ ꝛc. enthält.

## §. 16.

Wenn der Halbmesser des Kreises, nach welchem man die Tafeln construiren will, 1 ist, so wird, wenn man dessen Umkreis durch $\pi$ bezeichnet, der Sinus von AB Fig. 6. oder $\sin \frac{1}{4}\pi = \sin 90^\circ = 1$ seyn; man hat überdieß $\cos \frac{1}{4}\pi = \cos 90^\circ = 0$. Setzt man nun $a' = \frac{1}{4}\pi$, so wird die Formel $\sin \frac{1}{2} a' = \frac{1}{2}\sqrt{(2R^2 - 2R \cos a')}$, für $\sin \frac{1}{8}\pi$ als den Sinus der Hälfte vom vierten Theil des Umkreises, oder für $\sin 45^\circ\ \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geben.

Man kann sich auch hiervon unmittelbar überzeugen, weil das Dreyeck CPM alsdann gleichschenklich ist, und man daher haben wird

$$2PM^2 = CM^2 = 1,$$

woraus folgt

$$PM^2 = \tfrac{1}{2} \text{ und } PM = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{2 \times \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Wenn man diesen Werth berechnet, so wird man finden

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0{,}707106781186.$$

Setzt man nun $a' = 45°$, so wird man erhalten

$$\sin \tfrac{1}{2} a' = \sin 22° \, 30' = 0,382683432365$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a' = \cos 22° \, 30' = 0,923879532511.$$

Geht man von diesen letzten Werthen aus, so wird man vermittelst derselben Formel zu den Werthen von

$$\sin \frac{22° \, 30}{2} = 11° \, 15' \text{ und } \cos \frac{22° \, 30'}{2} \cos 11° \, 15'$$

gelangen; von diesen letztern zu den von

$$\sin \frac{11° \, 15'}{2} = \sin 5° \, 37' \, 30'' \cos \frac{11° \, 15'}{2} = \cos 5° \, 37' \, 30'';$$

von diesen wiederum zu den von

$$\sin \frac{5° 37' 30''}{2} = 2° 48' 45'' \text{ und } \cos \frac{5° 37' 30''}{2} = \cos 2° 48' 45'';$$

und wenn man so fortfährt, jeden Bogen in zwey gleiche Theile zu theilen, so wird man endlich zu einem sehr kleinen Bogen gelangen. Bey der vierzehnten Theilung wird man auf einen Bogen stoßen, welcher $\frac{1}{16384}$ vom vierten Theile des Umkreises ist; und dieser Bogen ist so klein, daß er in den ersten zwölf Decimalstellen von seinem Sinus nicht unterschieden ist.

§. 17.

Um die Ursache hiervon einzusehen, muß man in Erwägung ziehen, daß die Länge eines Bogens immer kleiner ist, als die ihrer Tangente, und größer, als die ihres Sinus. Denn wenn man Fig. 7. $AM = AM'$ macht, die Sehne $MM'$ zieht, und die Tangenten $MT$, $MT'$ führt, so müssen, wegen der Gleichheit der Dreyecke $CMT$, $CM'T$, diese Tangenten in einem und demselben Punct des Halbmessers $AC$ zusammenkommen. Da nun die Linien $MT$ und $M'T$, so wie die Linien $PM$ und $P'M'$, und die Bogen $AM$ und $AM$, einander gleich sind, so wird man haben $2AM < 2MT$ und $2AM > 2PM$, weil die Länge eines Kreisbogens zwischen denen der correspondirenden Theile

des

des eingeschriebenen und des umschriebenen Polygons liegt *) (Geom. §. 150.), und folglich AM < MT und AM > MP.

Ich will bey dieser Gelegenheit anmerken, daß das Verhältniß zwischen der Tangente und dem Sinus eines Bogens sich immer mehr und mehr der Einheit nähert, je mehr dieser Bogen abnimmt. In der That zieht man aus $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ folgende Gleichung $\frac{\sin a}{\tan a} = \cos a$; und da sich $\cos a$ unaufhörlich der Einheit nähert, so folgt, daß sich die Tangente und der Sinus ebenfalls immer mehr und mehr der Gleichheit nähern, weil die Gränze ihres Verhältnisses (Alg. 1. Th. §. 200.) die Einheit ist.

## §. 18.

Hieraus fließt offenbar, daß, wenn der Werth der Tangente und der des Sinus eines kleinen Bogens AM, in einer gewissen Anzahl ihrer ersten Ziffern einander gleich

---

*) Der oben citirte Satz ist ein besonderer Fall von diesem andern: Die Linien, welche zwischen zweyen Puncten nach einerley Richtung hohl sind, werden desto größer, je mehr sie von der geraden Linie abweichen. Denn wenn man zur krummen Linie ACB, Fig. 8., innerhalb der krummen Linie AMB eine Tangente DE zieht, so wird diese Tangente kleiner als der Bogen DME, und man hat ADEB < AMB. Zieht man dann zu den zwischen A und C, C und B, liegenden Puncten H und L die Tangenten FG und IK, so wird man eine neue gebrochene Linie AFGIKB bilden, welche kleiner als die erste seyn wird, weil FG < FD + DG, IK < IE + EK. Es ist leicht einzusehen, daß man auf eben die Art eine unendliche Anzahl gebrochener Linien bilden kann, welche desto kleiner werden, je mehr sie sich der krummen Linie ACB nähern, die daher nicht nur kleiner als AMB, sondern auch als alle diese gebrochenen Linien seyn werden.

sind, diese ersten Ziffern auch zugleich einen annähernden Werth für den Bogen geben werden. Nimmt man z. B. $AM = \frac{1}{8192}$ vom rechten Winkel $= 0°, 0', 32'', 8'''$, so ist

$$\tan \frac{1}{8192} = \tan 0° \, 0' \, 32'' \, 8''' = 0{,}000191749$$

und $$\sin \frac{1}{8192} = \sin 0° \, 0' \, 32'' \, 8''' = 0{,}000191747,$$

welche bloß in der zehnten Decimalziffer von einander unterschieden sind. Man kann also hieraus schließen, daß dieser Sinus von seinem Bogen in den ersten acht Ziffern nicht unterschieden ist, und daß folglich die oben angegebene Zahl zugleich den annähernden Werth des gegebenen Bogens ausdrückt.

§. 19.

Hieraus ergiebt sich, daß bey dergleichen kleinen Bogen sich die Sinus wie die Bogen verhalten, und dieses giebt uns ein Mittel an die Hand, den Sinus von $1'$ oder von $\frac{1}{5400}$ des rechten Winkels zu berechnen, wenn man nehmlich folgende Proportion ansetzt:

$$\sin \frac{1}{8192} : \sin \frac{1}{5400} = \frac{1}{8192} : \frac{1}{5400} = 0{,}0001917 : \sin 1'$$

oder $$5400 : 8192 = 0{,}0001917 : \sin 1',$$

folglich $$\sin 1' = \frac{8192 \times 0{,}0001917}{5400} = 0{,}0002908.$$

Wollte man den Sinus dieses Bogens bis auf mehr, etwa auf zwölf Ziffern, berechnen, so müßte man auf diesem Wege so weit fortgehen, bis man zu einem Bogen gelangt, dessen Sinus und Tangente in den ersten zwölf Decimalziffern übereinkommen.

Um hiervon zu größern Bogen zu gelangen, kann man sich folgender Formeln bedienen,

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos a^2 - \sin a^2$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b;$$

setzt man $a = 1'$, so wird man haben

$$\sin 2' = 2 \sin 1' \cos 1'$$
$$\cos 2' = \cos 1'^2 - \sin 1'^2.$$

Setzt man ferner $a = 1'$, $b = 2'$, so erhält man vermittelst der beyden letztern

$$\sin 3' = \sin 2' \cos 1' + \cos 2' \sin 1'$$
$$\cos 3' = \cos 2' \cos 1' - \sin 2' \sin 1' \text{ etc.}$$

Diese Auseinandersetzung wird hoffentlich hinreichend zeigen, wie man die trigonometrischen Tafeln hat bilden können. Es giebt indessen weit bequemere Methoden, den Sinus eines jeden beliebigen Bogens vermittelst convergirender Reihen zu finden, die sich aus den Gleichungen des §. 11. herleiten lassen. Man findet sie in der Einleitung zu meinem **Lehrbegriff der Differential- und Integralrechnung**.

Man kann auch die Sinus und Cosinus auf eine in etwas leichtere Methode berechnen. Erwägt man nehmlich, daß der Halbmesser, der Seite eines im Kreise eingeschriebenen Sechsecks, oder daß er der Sehne eines Bogens von 60° gleich ist, so erhält man, wenn Fig. 9. die Sehne APM = AC genommen wird, ANM = 60°; und PM als die Hälfte von AM oder von AC wird der Sinus des Bogens MN = $\frac{1}{2}$ AMN = 30° seyn; mithin ist der Sinus von 30° = $\frac{1}{2}$ R = $\frac{1}{2}$, wenn man den Halbmesser für die Einheit annimmt. Weiß man einmahl den Sinus dieses Bogens, so läßt sich leicht dessen Cosinus bestimmen, und wenn man nach der vorhergehenden Methode fortfährt, so wird man nach und nach die Sinus und Cosinus aller Bogen bestimmen können.

§. 20.

Die neuern Meßkünstler, welche sich mit der neuen Eintheilung der Maaße und Gewichte beschäftigten, sind durch mancherley Umstände bewogen worden, den rechten Winkel für die Einheit der Winkel, und folglich den vierten Theil des Umkreises oder den Quadranten für die Einheit der Bogen anzunehmen. Diesen theilen sie in hundert gleiche Theile, die sie Grade nennen, und welche sie statt der alten Grade, oder statt des neunzigsten Theils des Quadranten setzten; jeden dieser Grade theilen sie in hundert gleiche Theile. Diese letztern Theile vertreten die Stelle der Minuten, und können nach der Decimalprogression beliebig in Unterabtheilungen eingetheilt werden.

Bey der Anwendung dieser neuen Eintheilung des Zirkels drückt man die Bogen in gewöhnlichen Decimalbrüchen aus. Um aber anzuzeigen, daß der vierte Theil des Zirkels die Einheit ist, und, um nicht die Maaße der Bogen mit den übrigen Zahlen zu verwechseln, setzt man zur rechten Seite der Ziffer der Einheiten etwas oberhalb derselben den Buchstaben q. So bedeutet z. B. $0^q,435$, einen Bogen, welcher $\frac{435}{1000}$ oder $\frac{4350}{10000}$ des Quadranten enthält, und welcher folglich aus 43 Graden und 50 Minuten zusammengesetzt ist *).

Nehmen wir nun auch hier an, daß der Halbmesser

---

*) Die vorzüglichsten Ursachen, daß man den rechten Winkel für die Einheit gewählt hat, sind vermuthlich 1) daß der ganze Umkreis eigentlich zu reden keinen Winkel mißt, weil der bewegliche Halbmesser CM Fig. 2. nach dem Herumdrehen sich an dem Halbmesser CA anschließt; 2) daß der Sinus, von welchem man alle übrige trigonometrische Linien herleitet, in dem Raum des vierten Theils vom Umkreise, oder des rechten Winkels alle mögliche Werthe annimmt, deren er fähig ist.

der Tafeln $= 1$, daß diese Einheit in einer Anzahl, etwa 100000 gleiche Theile getheilt sey, und bezeichnen wir den Umkreis desselben durch $\pi$, so werden sich die Sinus sehr leicht in dergleichen Theile ausdrücken lassen. Man hat erstlich $\sin \frac{1}{4}\pi = 1$, $\cos \frac{1}{4}\pi = 0$. Ferner findet man auf eben die Art wie im §. 16.

$$\sin \tfrac{1}{8}\pi = \sin 0^q,5 = \cos 0^q,5 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$= 0,707106781186.$$

Setzt man nun in die Formel des citirten §. $a' = 0^q,5$, so findet man

$$\sin \tfrac{1}{2} a' = \sin 0^q,25 = 0,382683432365$$
$$\cos \tfrac{1}{2} a' = \cos 0^q,25 = 0,923879532511.$$

Aus diesen letzten Werthen erhält man die von

$$\sin \frac{0^q,25}{2} = \sin 0^q,125, \quad \cos \frac{0^q,25}{2} = \cos 0^q,125;$$

von diesen kommt man auf

$$\sin \frac{0^q,125}{2} = \sin 0^q,0625, \quad \cos \frac{0^q,125}{2} = \cos 0^q,0625;$$

und wenn man dies Halbiren vierzehn Mahl hinter einander verrichtet, so erhält man einen Bogen, welcher nur $\frac{1}{16384}$ des Quadranten beträgt, und welcher in den zwölf ersten Decimalziffern von seinem Sinus nicht unterschieden ist.

Nachdem wir nun (§. 18.) gesehen haben, daß wenn der Werth der Tangente und des Sinus eines kleinen Bogens bis auf einer gewissen Anzahl Decimalstellen übereinkommen, diese Ziffern zugleich einen annähernden Werth für den Bogen geben, ist es uns leicht die Sinus aller Bogen zu berechnen. Nehmen wir z. B. $PM = 0,0001$, so finden wir

$$CP = \sqrt{(CM^2 - PM^2)} = 0,999\,999\,995,$$

und $$MT = \frac{CM \times PM}{CP} = 0,000\,100\,000\,000\,5,$$

einen Werth, welcher erst in der dreyzehnten Ziffer von PM abweicht. Da nun der Sinus von $\frac{1}{16384}$ vom vierten Theil des Umkreises 0, 000 873 799 ist, so kann man daraus schließen, daß dieser Sinus mit seinem Bogen in den ersten zwölf Ziffern übereinkommt, und daß folglich diese Zahl zugleich ein annähernder Werth für den Bogen ist *).

Um nun den Sinus von $0^q,00001$ zu berechnen, hat man nur nöthig folgende Proportion anzusetzen

$$\sin\frac{1^q}{16384} : \sin\frac{1^q}{100000} = \frac{1^q}{16384} : \frac{1^q}{100000}$$

oder $= 100000 : 16384.$

Man wird also haben

$$\sin 0^q,00001 = \frac{16384 \times \sin\frac{1^q}{16384}}{100000} = 0,000015707963,$$

welches wenigstens in den ersten zwölf Decimalstellen genau ist. Auf eben die Art wird man finden

$$\sin 0,00002 = 2 \sin 0,00001$$
$$\sin 0,00003 = 3 \sin 0,00001$$
$$\sin 0,00004 = 4 \sin 0,00001 \text{ ꝛc.}$$

---

*) Dasselbe läßt sich auch einsehen, wenn man den Ausdruck für die Tangente in eine Reihe auflöst. Denn man hat $\tang a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin a}{\sqrt{(1 - \sin a^2)}}$ (§. 8. 10.); da aber $\frac{\sin a}{\sqrt{(1 - \sin a^2)}} = \sin a\,(1 - \sin a^2)^{-\frac{1}{2}}$, so findet man, wenn dieser letzte Ausdruck nach der Formel des Binomiums entwickelt wird,

$$\tang a = \sin a + \tfrac{1}{2}\sin a^3 + \tfrac{3}{8}\sin a^5 + \text{ꝛc.}$$

Wenn nun $\sin a$ ein sehr kleiner Decimalbruch ist, so kann das Glied $\frac{1}{2}\sin a^3$ nur auf die letzten Ziffern des Ausdrucks für den Bogen a Einfluß haben, und in den ersten wird man haben arc. $a = \sin a$.

Setzt man $\sin a = 0,0001$, so findet man $\frac{1}{2}\sin a^3 = 0,000\,000\,000\,000\,5$, ein Resultat, welches nur auf die dreyzehnte Ziffer Einfluß hat.

Es ist nun leicht durch ein ähnliches Verfahren, wie bey der ersten Eintheilung die Sinus größerer Bogen zu berechnen, und wir wollen uns daher nicht länger dabey aufhalten.

§. 21.

Um die Rechnungen zu erleichtern, hat man seit langer Zeit, statt der Werthe der Sinus, der Cosinus, der Tangenten und der Cotangenten ihre Logarithmen substituirt, und in den meisten Tafeln findet man nur diese letztern. Man hat daher immer eine von diesen beyden Aufgaben aufzulösen:

1) **Wenn ein Bogen gegeben ist, den Logarithmus seines Sinus, oder den seines Cosinus, oder den seiner Tangente, oder den seiner Cotangente zu finden.**

2) **Wenn man den Logarithmus des Sinus, oder den des Cosinus, oder den der Tangente, oder den der Cotangente eines Bogens kennt, diesen Bogen selbst zu finden.**

Die Auflösung dieser Aufgaben beruhet auf der Anordnung der Tafeln, welche Anordnung nicht bey allen dieselbe ist, und welche immer in der Einleitnng zu jeder derselben erklärt wird. Wir wollen daher hier nicht mehr davon reden, sondern bloß noch darauf aufmerksam machen, daß die Tafeln von Callet *), in Rücksicht der alten Eintheilung, und die von den Herrn Hobert und Ideler in Betreff der neuern die besten sind.

Alle trigonometrische Tafeln erstrecken sich nur bis

---

*) Auch in Ansehung der trigonometrischen Linien sind die im ersten Theil der Algebra citirten Vega'schen Tafeln sehr zu empfehlen.

A. d. U.

auf den vierten Theil des Umkreises; dessen ungeachtet geben sie die Sinus, die Cosinus, die Tangenten und die Cotangenten aller Bogen, so groß sie auch seyn mögen. Wir werden dieses sogleich zeigen, indem wir den Gang der trigonometrischen Linien, in Rücksicht auf die verschiedenen Grade der Größe untersuchen werden, durch welche ein Kreisbogen gehen kann.

§. 22.

Um das Folgende gehörig verstehen zu können, muß man sich vorher mit dem Zusammenhang bekannt machen, welcher immer zwischen den verschiedenen Resultaten, die man von einer und derselben Formel, oder von einerley geometrischen Construction herleitet, anzutreffen ist. Dieser bestehet darin, daß jedem Werthe, den der Ausdruck, worauf es hier ankommt, annehmen kann, immer andre vorhergehen oder folgen, die so wenig als man will von demselben unterschieden sind, und daß beym Beschreiben einer Linie, jedem Punct andre vorhergehen oder nachfolgen, die unmittelbar daran stoßen. Dieses vorausgesetzt, sieht man leicht ein, daß der Halbmesser MC Fig. 10., welcher vorher auf AC gelegen hat, und sich nun um den Punct C wie um ein Gewinde drehet, nacheinander mit AC alle mögliche Winkel bilden wird; und daß der Punct M nach und nach durch alle Puncte des Zirkels ABA′B′A gehen, oder welches einerley ist, daß er ihn beschreiben wird. Verfolgt man nun mit Aufmerksamkeit die eben angezeigte Bewegung, so sieht man zuvörderst, daß im Puncte A, wo der Bogen Null ist, es auch der Sinus seyn wird, und daß der Cosinus vom Halbmesser AC nicht unterschieden ist. Wenn der Halbmesser CM sich von AC hinweg bewegt, so wird der Sinus PM desto mehr zunehmen, je mehr der Punct M (den ich von nun an den beschreibenden Punct nennen werde) sich gegen B bewegt; und wenn er daselbst anlangt, fällt offenbar PM auf BC, oder wird dem Halbmesser gleich. Unter eben diesen Umständen nimmt der Cosinus PC immer mehr und mehr ab, und wird Null, wenn M in B fällt; der Winkel ACB ist alsdann ein rechter, und der Bogen AB $= \frac{1}{4}\pi$. Setzt der Punct M über B hinaus seine Bewegung fort, so nimmt der Sinus unaufhörlich ab, und der Cosinus, welcher nun auf dem Durchmesser AA′ von einer entgegengesetzten Seite des Punctes C fällt, als er vor dem Puncte B war, nimmt immer zu. Dieses beweist der bloße Anblick der Figur: P′M′, der Sinus von ABM′ ist kleiner als BC, der Sinus von AB; und CP′, der Cosinus von ACP′ übertrifft den Cosinus des letztern, welcher Null ist. Es ist beyläufig zu merken, daß P′M′ und CP′ respectiv der Sinus und der Cosinus des Bogens A′M′ sind, vom Puncte A′ an gerechnet, welcher Bogen das Supplement des Bogens ABM′ ist. Hieraus folgt, daß ein stumpfer Winkel mit seinem Supplement einerley Sinus und Cosinus hat.

Wenn der Punct M′ in A′ angelangt ist, so ist der Sinus, so wie im Puncte A, gleich Null, und der Cosinus ist abermahls dem Halbmesser gleich. Im Puncte A′ ist der Bogen ABA′ dem halben Umkreise oder $\frac{1}{2}\pi$ gleich, und der Winkel ACM hat seine äußerste Gränze erreicht. Allein es ist nichts vorhanden, das sich der Bewegung des Halbmessers CM und des beschreibenden Punctes M unter den Diameter AA′ entgegensetzte. Der Sinus, welcher alsdann P″M″ wird, fällt ebenfalls unterhalb dieses Durchmessers, und nimmt desto mehr zu, je mehr der Punct M″ sich dem Puncte B′ nähert, indeß der Cosinus CP″ abnimmt. Im Puncte B′, wo der Bogen ABA′B′ $\frac{3}{4}$ des Umkreises, oder $\frac{3}{4}\pi$ beträgt, ist der erste dem Halbmesser CB′ gleich, und der andre ist Null. Endlich nimmt von B′ bis A der Sinus $P'''M'''$, welcher noch immer unterhalb $AA'$ bleibt, immer mehr ab, und der Cosinus $CP'''$, welcher dann mit dem im ersten Viertheil des Kreises $AB$ einerley Lage hat, wächst wiederum, und wird in $A$ abermahls den Halbmesser gleich. In diesem Puncte ist der Sinus Null, und der Halbmesser hat einen Umlauf beendigt; allein er kann einen neuen anfangen. Betrachtet man nun immer den ganzen vom Anfange der Bewegung an, vom Pncte $M$ zurückgelegten Weg, als einen einzigen Bogen, so wird man größere Bogen als der ganze Umkreis haben, deren Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten mit den der beym ersten Umlauf beschriebenen einerley sind. Diese Betrachtungen führen auf wichtige Folgerungen für die Analysis, welche ich im dritten Capitel des ersten Theils meiner Differential- und Integralrechnung entwickelt habe.

## §. 23.

Wir wollen nun untersuchen, in wie fern die analytischen Ausdrücke des Sinus und Cosinus mit den eben betrachteten verschiedenen Umständen übereinstimmen. Wir wollen in dieser Hinsicht in den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b\\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a\end{aligned}\right\}\ldots(A)$$

$a = \frac{1}{4}\pi$ setzen. Erwägt man nun, daß $\cos\frac{1}{4}\pi = 0$ und $\sin\frac{1}{4}\pi = 1$, so werden wir finden

$$\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi \pm b\right) = \mp \sin b$$
$$\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi \pm b\right) = \cos b,$$

woraus folgt, daß, wenn man die Snus und Cosinus Fig. 10. eines kleinern Bogens als der vierte Theil des Kreises, als positiv betrachtet, der Cosnus eines größern negativ seyn wird, dahingegen der Sinus noch immer positiv bleibt. Setzt man nun $b = \frac{1}{4}\pi$, so wird man haben $\cos\frac{1}{2}\pi = -1$, $\sin\frac{1}{2}\pi = 0$.

Setzen wir ferner in der Gleichung (A), $a = \frac{1}{2}\pi$, so werden wir nach dem Vorhergehenden erhalten

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi \pm b\right) = -\cos b$$
$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi \pm b\right) = \mp \sin b,$$

welches uns zu erkennen giebt, das ein jeder zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{4}\pi$ enthaltener Bogen einen negativen Sinus und Cosinus haben wird; und wenn $b = \frac{1}{4}\pi$, so hat man

$$\cos \tfrac{3}{4}\pi = 0, \quad \sin \tfrac{3}{4}\pi = -1.$$

Untersuchen wir endlich den Fall, wo $a = \frac{3}{4}\pi$, so werden sich vermittelst der vorhergehenden Werthe die Gleichungen (A) in folgende verwandeln

$$\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi \pm b\right) = \pm \sin b$$
$$\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi \pm b\right) = -\cos b,$$

und es folgt hieraus, daß die zwischen $\frac{3}{4}\pi$ und $\frac{4}{4}\pi$ oder $\pi$ enthaltenen Bogen einen negativen Sinus und einen positiven Cosinus haben.

Nimmt man diese verschiedenen Resultate zusammen, so wird man sehen, daß

1) vom Puncte A bis A′, oder im Bogen $ABA' = \frac{1}{2}\pi$, die Sinus positiv sind,

2) daß vom Puncte A′ bis A, oder von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\pi$ die Sinus negativ sind.

3) Daß vom Puncte A bis B Fig. 10., oder zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$ die Cosinus positiv sind.

4) Daß die zwischen B und B′ oder zwischen $\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{3}{4}\pi$ sich endigenden Bogen, wo der Bogen $ABA'B' = \frac{3}{4}$, negative Cosinus haben. Endlich

5) daß vom Punct B′ bis A, wo der Bogen $ABA'B'A = \pi$, das heißt, wo die Bogen zwischen $\frac{3}{4}\pi$ und $\pi$ fallen, die Cosinus negativ sind.

Man wird sich nun leicht merken können, daß die Sinus die Zeichen ändern, wenn sie von einer Seite des Durchmessers AA′ auf die andre übergehen, und die Cosinus, wenn sie in Rücksicht auf den Punct C, oder in Rücksicht des Durchmessers BB′ ihre Lage ändern.

§. 24.

Wenn man den Fortgang der Tangenten beobachtet, wird man finden, daß sie vom Puncte A bis B, wo der Bogen AM gleich $\frac{1}{4}\pi$ wird, unaufhörlich zunehmen. Da bey diesem Puncte die Secante NC mit CB zusammenfällt, so ist sie ihr parallel, und trift sie folglich gar nicht, so daß der Bogen AB, eigentlich zu reden, gar keine trigonometrische Tangente hat. Man bedient sich indessen des Ausdrucks, die Tangente desselben sey unendlich; man versteht aber unter diesem Ausdruck nichts anders, als daß man, wenn der Punct hinlänglich nahe an B genommen wird, eine Tangente AN finden kann, welche größer als jede beliebige Größe wird. Dies beweist auch die Gleichung $\tang a = \frac{\sin a}{\cos a}$, welcher für $\tang a$ einen desto größern Werth giebt, je kleiner $\cos a$ wird, oder je mehr man sich dem Puncte B nähert.

Wenn man $a = 45°$ hat, so ist $\cos a = \sin a$, und folglich $\tang 45° = 1$.

Dieses läßt sich auch aus dem Dreyeck CAN abnehmen, welches gleichschenklicht wird, wenn ACN der Hälfte eines rechten Winkels gleich wird; weil es alsdann der Winkel ANC nothwendigerweise auch seyn muß, und die Tangente ist daher dem Halbmesser gleich.

Wenn der Bogen AM größer als $\frac{1}{4}\pi$ wird, so kann der Halbmesser MC die Linien AN nicht mehr oberhalb, sondern nur unterhalb des Durchmessers AA′ schneiden. Die eigentliche Tangente AN′ ist, wie leicht einzusehen ist, der Tangente A′n′ des Bogens A′M′, oder des Supplements von AM gleich; allein sie hat eine entgegengesetzte Lage. Im dritten Quadranten geht die Tangente, welche im Puncte A′ Null war, wiederum oberhalb des Durchmessers AA′, und AN ist noch die Tangente des Bogens ABA′M″. Da im Puncte B′ wiederum der Halbmesser der Linie AN parallel wird, so wird die Tangente in diesem Puncte abermahls unendlich, und im vierten Quadranten fällt sie wieder unterhalb des Durchmessers; in der That hat der Bogen AA′M‴ z. B. zur Tangente die Linie AN′.

### §. 25.

Wir wollen nun untersuchen, was sich aus dem algebraischen Ausdruck

$$\text{tang } a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

herleiten läßt.

Der Werth desselben wird offenbar in allen den Fällen positiv, wo der Sinus und Cosinus einerley Zeichen haben, welches von $0$ bis $\frac{1}{4}\pi$ und von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{4}\pi$ der Fall ist; von $\frac{1}{4}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$ und von $\frac{3}{4}\pi$ bis $\pi$ hingegen wird er negativ. Hieraus folgt, daß bey den Tangenten eben so wie bey den Sinus und Cosinus die Aenderung der Zeichen mit der der Lage correspondirt. Man wird auf eben die Art finden, daß die Cotangenten von $0°$ bis $\frac{1}{4}\pi$ und von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{4}\pi$ positiv sind; dahingegen sie von $\frac{1}{4}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$, und von $\frac{3}{4}\pi$ bis $\pi$ negativ werden.

### §. 26.

Aus dem im §. 11. bewiesenen Satze lassen sich sehr wichtige Folgerungen ziehen, von denen wir einige in der Folge benutzen werden, weshalb wir sie hersetzen wollen.

1) Wenn man die beyden Gleichungen

$$\sin(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{R}$$

$$\sin(a-b) = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{R}$$

zusammennimmt, so wird man haben

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \frac{2 \sin a \cos b}{R}$$

woraus folgt

$$\sin a \cos b = \frac{R}{2} \sin(a+b) + \frac{R}{2} \sin(a-b).$$

2) Zieht man die zweyte Gleichung von der ersten ab, so wird man haben

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = \frac{2 \cos a \sin b}{R},$$

und folglich

$$\sin b \cos a = \frac{R}{2} \sin(a+b) - \frac{R}{2} \sin(a-b).$$

Setzt man $b = a$, so geben diese Formeln und die vorhergehende

$$\cos a \sin a = \frac{R}{2} \sin 2a.$$

3) Nimmt man die beyden Gleichungen

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{R}$$

$$\cos(a-b) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{R},$$

zusammen, so wird man haben

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \frac{2 \cos a \cos b}{R}$$

und folglich

$$\cos a \cos b = \frac{R}{2} \cos(a+b) + \frac{R}{2} \cos(a-b).$$

Wenn $a = b$ ist, so hat man

$$\cos a^2 = \frac{R}{2} \cos 2a + \frac{R^2}{2},$$

wenn man in Erwägung zieht, daß der Cosinus dem Halbmesser gleich ist, wenn der Bogen Null wird.

4) Zieht man die erste Gleichung von der zweyten ab, so kommt

$$\cos(a-b)-\cos(a+b)=\frac{2\sin a\sin b}{R},$$

woraus folgt

$$\sin a\sin b=\frac{R}{2}\cos(a-b)-\frac{R}{2}\cos(a+b).$$

Wenn $a=b$ ist, so giebt diese Formel

$$\sin a^2=\frac{R^2}{2}-\frac{R}{2}\cos 2a.$$

5) Wenn man $a+b=a'$, $a-b=b'$ setzt, so findet man, wenn man diese beyden Gleichungen addirt, $2a=a'+b'$, und wenn man die zweyte von der ersten abzieht, $2b=a'-b'$; hieraus folgt $a=\frac{a'+b'}{2}$, $b=\frac{a'-b'}{2}$.

Setzt man nun diese Werthe von a und b in die im Vorhergehenden für $\sin a\cos b$, $\sin b\cos a$, $\cos a\cos b$, $\sin a\sin b$ erhaltenen Ausdrücke, so wird man finden

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'+b')\cos\tfrac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\sin a'+\sin b')$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'-b')\cos\tfrac{1}{2}(a'+b')=\frac{R}{2}(\sin a'-\sin b')$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a'+b')\cos\tfrac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\cos a'+\cos b')$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'+b')\sin\tfrac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\cos b'-\cos a').$$

Dividirt man die zweyte der vorhergehenden Formeln durch die erste, so wird man haben

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')\cos\frac{1}{2}(a'+b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')\cos\frac{1}{2}(a'-b')}=$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\cos\frac{1}{2}(a'-b')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a'+b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\sin a'-\sin b'}{\sin a'+\sin b'}.$$

Erwägt man nun, daß $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{tang } A}{R}$ (§. 8.), und daß folglich $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R}{\text{tang } A}$, so wird man erhalten

$$\frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a' - b')}{\text{tang } \frac{1}{2}(a' + b')} = \frac{\sin a' - \sin b'}{\sin a' + \sin b'}.$$

Auf eben diese Art kann man aus den beyden letzten der oben beygebrachten Formeln herleiten, daß

$$\frac{\cos b' - \cos a'}{\cos a' + \cos b'} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a' + b') \text{ tang } \frac{1}{2}(a' - b')}{R^2}.$$

6) Wenn man den für $\sin(a \pm b)$ entwickelten Ausdruck durch den von $\cos(a \pm b)$ dividirt, so wird man haben

$$\frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b};$$

dividirt man dann den Zähler und Nenner des Bruchs im zweyten Theile durch $\cos a \cos b$, so verwandelt er sich in

$$\frac{\frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b}}{1 \mp \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}};$$

und da im Allgemeinen $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{tang } A}{R}$ (§. 8.), so wird man hierdurch erhalten

$$\frac{\text{tang}(a \pm b)}{R} = \frac{\frac{\text{tang } a}{R} \pm \frac{\text{tang } b}{R}}{1 \mp \frac{\text{tang } a}{R} \cdot \frac{\text{tang } b}{R}} = \frac{R(\text{tang } a \pm \text{tang } b)}{R^2 \mp \text{tang } a \text{ tang } b},$$

und endlich $\text{tang}(a \pm b) = \frac{R^2(\text{tang } a \pm \text{tang } b)}{R^2 \mp \text{tang } a \text{ tang } b}$.

Erinnert man sich, daß $\cot A = \frac{R^2}{\text{tang } a}$ (§. 9.), so wird man finden

$$\cot(a \pm b) = \frac{R^2}{\text{tang}(a \pm b)} = \frac{R^2 \mp \text{tang } a \text{ tang } b}{(\text{tang } a \pm \text{tang } b)} =$$

$$\frac{R^2 \mp \frac{R^2}{\cot a} \cdot \frac{R^2}{\cot b}}{\frac{R^2}{\cot a} \pm \frac{R^2}{\cot b}},$$

oder, wenn man reducirt, gelangt man zu

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp R^2}{\cot b \pm \cot a}.$$

§. 27.

Die Gleichung $\frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a' - b')}{\text{tang } \frac{1}{2}(a' + b')} = \frac{\sin a' - \sin b'}{\sin a' + \sin b'}$, aus welcher folgt, daß die Summe der Sinus zweyer Bogen sich zu ihrer Differenz verhält, wie die Tangente der halben Summe dieser Bogen zur Tangente der halben Differenz derselben, kann auch unmittelbar durch eine elegante geometrische Construction erhalten werden.

Wenn AM und AN Fig. 10.* die Bogen $a'$ und $b'$ ausdrücken, so wird man haben $MP = \sin a'$, $NQ = \sin b'$; zieht man nun NC parallel zu AB und verlängert MP bis M′, so wird man haben

$$MR = MP - NQ = \sin a' - \sin b'$$
$$M'R = M'P + NQ = \sin a' + \sin b'.$$

Nachdem dieses geschehen ist, beschreibe man aus dem Puncte C, als aus einem Mittelpuncte mit einem Halbmesser CD, welcher dem des Kreises ACB gleich ist, einen Bogen EDG, und führe durch den Punct D eine Tangente dieses Kreises: so werden offenbar DF und DH die Tangenten der Bogen DE und DG seyn, welche die Winkel MCN und NCM′ messen; und da die Scheitel dieser Winkel im Umkreise des Zirkel ACB liegen, so werden sie zum Maaße haben die Hälfte von

$$NM = AM - AN = a' - b',$$

und die von

$$NM' = AM' + AN = a' + b'.$$

Mithin wird man haben

$$DF = \tang \tfrac{1}{2}(a' - b'),\quad DH = \tang \tfrac{1}{2}(a' + b').$$

Da aber MM′ und FH parallel sind, so wird man folgende Proportion haben

$$MR : M'R = DF : DH,$$

$$\sin a' - \sin b' : \sin a' + \sin b' =$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(a' - b') : \tang \tfrac{1}{2}(a' + b'),$$

welches auf die vorgelegte Gleichung zurückkommt.

Es ist leicht, die obige Construction dergestalt zu modificiren, daß man alle die verschiedenen Gleichungen davon herleiten kann, welche der eben bewiesenen ähnlich sind.

## §. 28.

Da man öfters Gelegenheit hat, von den im Vorhergehenden bewiesenen Formeln Gebrauch machen zu können, so haben wir sie nebst einigen andern, die sich leicht entwickeln lassen, in folgender Tafel zusammengestellt.

Die bey jeder Formel gesetzte Zahl zeigt den §. an, aus welchem sie gefunden worden sind, oder gefunden werden können.

# Tafel
## der gebräuchlichsten trigonometrischen Formeln.

$$\sin a^2 + \cos a^2 = R^2 \quad (\S.\ 10.)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{R} \\ \cos(a \pm b) &= \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{R} \end{aligned}\right\} (\S.\ 11.)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin a \cos b &= \tfrac{1}{2} R [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a \sin b &= \tfrac{1}{2} R [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \\ \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2} R [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \sin b &= -\tfrac{1}{2} R [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \end{aligned}\right\} (\S.\ 26.)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin a + \sin b &= \frac{2}{R} \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \\ \sin a - \sin b &= \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(a-b) \\ \cos a + \cos b &= \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \\ \cos a - \cos b &= -\frac{2}{R} \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(a-b) \end{aligned}\right\} (\S.\ 26.)$$

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{R} \ (\S.\ 11.), \quad \sin \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} \sqrt{(2R^2 - 2R \cos a)} \ (\S.\ 13.)$$

$$\cos 2a = \frac{\cos a^2 - \sin a^2}{R} = \frac{2 \cos a^2 - R^2}{R} \quad (\S.\ 11.)$$

$$\sin a^2 = \tfrac{1}{2} R (R - \cos 2a) \quad (\S.\ 26.)$$

$$\cos a^2 = \tfrac{1}{2} R (R + \cos 2a) \quad (\S.\ 26.)$$

$$\sin a^2 - \sin b^2 = \cos b^2 - \cos a^2 = \sin(a+b) \sin(a-b) \quad (\S.\ 11.\ 10.)$$

$$\cos a^2 - \sin b^2 = \cos(a+b) \cos(a-b) \quad (\S.\ 11.\ 10.)$$

$$\tan a = \frac{R \sin a}{\cos a} \ (\S.\ 8.), \quad \cot a = \frac{R^2}{\tan a} = \frac{R \cos a}{\sin a} \quad (\S.\ 9.)$$

$$\sec a = \frac{R^2}{\cos a}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{R^2}{\sin a} \quad (\S.\ 8.)$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{R \sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{R^2 (\tan a \pm \tan b)}{R^2 \mp \tan a \tan b} \quad (\S.\ 26.)$$

## Fortsetzung der Tafeln der trigonometrischen Formeln.

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b &= \frac{R^2 \sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\
\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b &= \frac{R^2 \sin(a-b)}{\cos a \cos b} \\
\cot a + \cot b &= \frac{R^2 \sin(a+b)}{\sin a \sin b} \\
\cot a - \cot b &= -\frac{R^2 \sin(a-b)}{\sin a \sin b}
\end{aligned}\right\} (\S.\ 8.\ 11.)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang} a^2 - \operatorname{tang} b^2 &= \frac{R^4 \sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos a^2 \cos b^2} \\
\cot a^2 - \cot b^2 &= -\frac{R^4 \sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin a^2 \sin b^2}
\end{aligned}\right\} (\S.\ 8.\ 11$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)} \\
&\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{R}, \quad \frac{\sin a}{R + \cos a} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{R} \\
&\frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -\frac{\cot \frac{1}{2}(a-b)}{R}, \quad \frac{\sin a}{R - \cos a} = \frac{\cot \frac{1}{2} a}{R} \\
&\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)}{R} \\
&\frac{\sin a - \sin b}{\cos a - \cos b} = -\frac{\cot \frac{1}{2}(a+b)}{R} \\
&\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = -\frac{\cot \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)} = -\frac{\sec a + \sec b}{\sec a - \sec b}
\end{aligned}\right\} (\S.\ 26.$$

$$\sin a = \frac{R \operatorname{tang} a}{\sqrt{(R^2 + \operatorname{tang} a^2)}}, \quad \cos a = \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 + \operatorname{tang} a^2)}} (\S.\ 8.\ 10.$$

$$R = \sin 90^\circ = \cos 0^\circ = \operatorname{tang} 45^\circ = \cot 45^\circ = \sec 0^\circ = \operatorname{cosec} 90$$
$$= \tfrac{1}{2} \sec 60^\circ\ (\S.\ 23.\ 24.), \quad \sin a = \tfrac{1}{2} \operatorname{chord} 2a\ (\S.\ 14.)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\tfrac{1}{4}\pi \pm a) &= + \cos a, & \cos(\tfrac{1}{4}\pi \pm a) &= \mp \sin a \\
\sin(\tfrac{1}{2}\pi \pm a) &= \mp \sin a, & \cos(\tfrac{1}{2}\pi \pm a) &= - \cos a \\
\sin(\tfrac{3}{4}\pi \pm a) &= - \cos a, & \cos(\tfrac{3}{4}\pi \pm a) &= \pm \sin a \\
\sin(\pi \pm a) &= \pm \sin a, & \cos(\pi \pm a) &= + \cos a
\end{aligned}\right\} (\S.\ 23.$$

§. 29.

Wir wollen nun die trigonometrischen Tafeln auf die Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke anwenden, und uns erinnern, daß man vermittelst der Tafeln, sobald ein Winkel bekannt ist, auch den Werth seines Sinus, seines Cosinus, seiner Tangente und Cotangente finden kann; und daß umgekehrt der Winkel bekannt ist, sobald man eine dieser Linien kennt.

Es sey nun Fig. 11. CDE ein in D rechtwinklichtes Dreyeck; aus einem seiner spitzen Winkel C beschreibe man mit einem dem der Tafeln gleichen Halbmesser den Bogen AM; man ziehe die senkrechte PM und errichte die Tangente AN: so werden hierdurch zwey Dreyecke der Tafeln gebildet, nehmlich: CPM, welches das vom Sinus und Cosinus, und CAN, welches das aus der Tangente und Secante gebildete ist. Jedes derselben ist dem vorgelegten Dreyecke ähnlich, und wenn man sie nacheinander mit diesem vergleicht, findet man

$$\left.\begin{array}{l} CM : MP = CE : DE \\ CM : CP = CE : CD \end{array}\right\} \text{oder} \left\{\begin{array}{l} R : \sin C = CE : DE \\ R : \cos C = CE : CD \end{array}\right.$$

$$CA : AN = CD : DE \quad \text{oder} \quad R : \text{tang}\, C = CD : DE$$

Da der Winkel E das Complement des Winkels C ist, so wird man haben $\cos C = \sin E$; die beyden ersten dieser Proportionen können in einer einzigen zusammengezogen, und folgendermaßen vorgetragen werden: **der Halbmesser verhält sich zum Sinus irgend eines der spitzen Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks, wie sich die Hypothenuse zu der diesem spitzen Winkel gegenüber stehenden Seite verhält.**

Die dritte lehrt uns, daß **sich der Halbmesser zur Tangente irgend eines spitzen Winkels in einem rechtwinklichten Dreyecke verhält, wie die an diesem**

Winkel anliegende Cathete sich zur andern Cathete verhält.

Da der Halbmesser immer gegeben ist, so braucht man nur zwey von den übrigen dreyen Gliedern der obigen Proportionen zu kennen, um das vierte zu bestimmen. Vermittelst der ersten würde man also eins von diesen dreyen Stücken, die Hypothenuse, eine Cathete und einen spitzen Winkel bestimmen können, wenn zwey derselben bekannt sind.

Ich setze schlechtweg einen spitzen Winkel, obgleich die Proportion erfordert, daß dieser Winkel entweder der gegenen oder der gesuchten Seite entgegengesetzt sey, weil man immer vermittelst des einen der spitzen Winkel den andern sogleich bestimmen kann; daher man, wenn derjenige, welchen man kennt oder sucht, dieser Bedingung kein Genüge thut, sein Complement anbringen kann.

Vermittelst der zweyten läßt sich immer eins der folgenden drey Stücke, die beyden Catheten des rechtwinklichten Dreyecks und ein spitzer Winkel bestimmen, wenn man zwey derselben kennt.

Hieraus folgt, 1) daß, wenn eine Seite und ein Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks bekannt sind, die beyden andern Seiten daraus berechnet werden können; 2) daß man aus irgend zweyen bekannten Seiten die spitzen Winkel berechnen kann.

In diesen beyden Fällen ist derjenige nicht begriffen, wo man irgend zwey Seiten des Dreyecks hat, und die dritte daraus bestimmen will; allein dieses läßt sich unmittelbar vermittelst des Pythagoräischen Lehrsatzes auflösen, welcher Fig. 11. giebt

$$CD^2 + DE^2 = CE^2,$$

und woraus man zieht

$$CE = \sqrt{(CD^2 + DE^2)}.$$

Wenn man die Hypothenuse CE, und eine der Catheten z. B. DE kennen möchte, so würde man erhalten

$$CD = \sqrt{(CE^2 - DE^2)};$$

erwägt man nun, daß $CE^2 - DE^2 = (CE + DE)(CE - DE)$, und nimmt man von beyden Theilen der Gleichung $CD = \sqrt{[(CE + DE)(CE - DE)]}$, ihre Logarithmen, so wird man finden

$$lCD = \tfrac{1}{2}[l(CE + DE) + l(CE - DE)].$$

Wenn man Formeln gefunden hat, welche auf Zahlenrechnungen angewendet werden sollen, so muß man sie immer dergestallt zu umformen trachten, daß sich die Logarithmen bequem dabey anbringen lassen; das heißt, daß man so wenig als möglich genöthigt seyn soll, während der Rechnungen von den Logarithmen zu den Zahlen, und von diesen wiederum zu den ersten zurück zu gehen. Wenn man die Logarithmen auf die Bestimmung von CD vermittelst der ersten Gleichung anwendet, so wird man den Gegenstand unsrer Bemerkung leicht empfinden.

Wir wollen diese Auseinandersetzung der Gründe, welche zur Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke dienen, damit endigen, indem wir anmerken, daß die beyden zuletzt abgehandelten Fälle sich auch vermittelst der beyden zu Anfange dieses §. beygebrachten Proportionen auflösen lassen; denn wenn man 1) CD und DE kennt und CE finden will, so kann man einen der spitzen Winkel, z. B. C, vermittelst der Proportion $R : \tang C = CD : DE$, berechnen; und nachdem man diesen Winkel bestimmt hat, läßt sich die Hypothenuse CE durch die Proportion $R : \sin C = CE : DE$ bestimmen, in welcher die drey Glieder R, sin C und DE bekannt sind. 2) Wenn man die Hypothenuse CE und eine der beyden Seiten, z. B. CD kennt, so kann man den dieser Seite gegenüber stehenden spitzen Winkel vermittelst der Proportion $R : \sin E$ oder $\cos C = CE : CD$; worauf man die Seite DE vermittelst der Proportion $R : \sin C = CE : DE$ berechnen kann.

## §. 30.

Was bisher in Betreff der Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke gesagt worden, läßt sich sehr bequem ins Kurze fassen, wenn man die Winkel durch A, B, C bezeichnet (wo A der rechte Winkel ist), und die diesem Winkeln gegenüber stehenden Seiten respectiv durch a, b, c, wie aus Fig. 12. zu ersehen ist.

Nach dem ersten Satz wird man zuvörderst haben

$$R : \sin C = a : c, \quad R : \sin B = a : b,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{R}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{R};$$

schafft man aus beyden Gleichungen a weg, welches geschieht, wenn jeder Theil der ersten durch den correspondirenden des zweyten dividirt wird, so wird man finden

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B};$$

und da $\sin B = \cos C$, und $\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\tang C}{R}$, so wird daraus erfolgen $\frac{c}{b} = \frac{\tang C}{R}$, eine Gleichung, welche den zweyten der im vorhergehenden §. vorgetragenen Sätze ausdrückt.

Quadrirt man endlich jeden Theil der beyden ersten Gleichungen, und nimmt die correspondirenden Theile der hieraus entspringenden Gleichungen zusammen; und erwägt man, daß

$$\sin C^2 + \sin B^2 = \sin C^2 + \cos C^2 = R^2 \text{ (§. 10.)},$$

so wird man haben

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1, \quad \text{oder } b^2 + c^2 = a^2.$$

Hieraus folgt, daß die Gleichungen

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{R}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{R},$$

nebst dem zwischen den Winkeln B und C anzutreffenden Zusammenhange, zur Bestimmung aller Fälle, die beym rechtwinklichten Dreyecke vorkommen können, hinreichend sind.

## §. 31.

Der Grund, auf welchen die Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke beruht, führt unmittelbar zur Auflösung eines jeden Dreyecks. Fällt man aus dem Winkel B des Dreyecks ABC Fig. 13. die senkrechte BD, so bildet man zwey in D rechtwinklichte Dreyecke ABD, BDC; man wird im ersten haben

$$R : \sin A = AB : BD$$

und im zweyten

$$R : \sin C = BC : BD,$$

welches giebt

$$R \times BD = \sin A \times AB, \; R \times BD = \sin C \times BC,$$

woraus sich folglich ergiebt

$$AB \times \sin A = BC \times \sin C, \text{ oder } \sin A : \sin C = BC : AB.$$

Wenn die senkrechte außerhalb fällt, so ist zwar der Winkel C nicht den beyden Dreyecken ABC und BCD gemein, indessen haben die Winkel BCD und BCA, welche zusammen zwey rechte ausmachen, einerley Sinus.

Die eben gefundene Proportion kann in einen allgemeinen Satz verwandelt und folgendermaßen vorgetragen werden: **In einem jeden Dreyecke verhalten sich die Sinus irgend zweyer Winkel zu einander, wie die diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten.**

## §. 32.

Derselbe Satz läßt sich auch auf folgende Art beweisen, welche mit dem im §. 1. und 2. gegebenen Begriff von der Trigonometrie mehr übereinstimmt.

Nachdem man Fig. 13 * das Dreyeck ABC in einem Kreise eingeschrieben, mit einem dem der Tafeln gleichen Halbmesser Oa einen Kreis abc beschrieben, und die Puncte, in welchen die Halbmesser OA, OB, OC, den Kreis der Tafeln schneiden, durch die geraden Linien ab, bc und ac verbunden hat, wird ein dem vorgelegten ähnliches Dreyeck abc gebildet werden, dessen Seiten ab, bc und bc sich aus den Tafeln bestimmen lassen.

Die Aehnlichkeit der beyden Dreyecke ABC und abc wird offenbar, wenn man in Erwägung zieht, daß, weil die graden Linien Oa, Ob und Oc, so wie die geraden OA, OB und OC als Halbmesser eines und desselben Kreises einander gleich sind, die Seiten AO und BO, BO und CO, CO und AO, der Dreyecke ABO, BOC und AOC in den Puncten a und b, b und c, c und b proportional geschnitten seyn, und daher die geraden AB und ab, BC und bc, AC und ac, respectiv parallel seyn werden.

Man wird demnach haben

$$AB : BC : AC = ab : bc : ac$$

oder $= \frac{1}{2} ab : \frac{1}{2} bc : \frac{1}{2} ac$

Da nun die Winkel des Dreyecks abc ihre Scheitel im Umkreise haben, so werden sie respectiv die Hälfte der über den ihnen gegenüber liegenden Seiten stehenden Bogen zum Maaße haben, und jede dieser Hälften wird offenbar die Hälfte der Seite, auf welcher der ganze Bogen steht, zum Sinus haben (§. 14.). Es wird also seyn

$$\frac{1}{2} ab = \sin c = \sin C$$
$$\frac{1}{2} bc = \sin a = \sin A$$
$$\frac{1}{2} ac = \sin b = \sin B$$

und folglich

$$AB : BC : AC = \sin C : \sin A : \sin B.$$

Die Vergleichung der Dreyecke AOB und aob zeigt ferner, daß AB : ab = AO : aO, oder daß AB : 2 sin C = AO : aO, d. h. daß jede Seite des Dreyecks ABC sich zum Doppelten des Sinus des ihr gegenüber stehenden Winkels verhält, wie der Halbmesser des umschriebenen Kreises zu dem der Tafeln *).

§. 33.

Wir wollen nun, so wie im §. 30., die drey Winkel durch A, B, C, und die diesen Winkeln respectiv entgegenstehenden Seiten durch a, b, c bezeichnen; so werden wir nach den Vorhergehenden die Proportionen

$$\sin A : \sin B = a : b$$
$$\sin A : \sin C = a : c$$
$$\sin B : \sin C = b : c$$

erhalten, aus welchen wir folgende Gleichungen herleiten

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}.$$

Vermittelst dieser Proportionen wird man ein Dreyeck unmittelbar auflösen können 1) wenn zwey Winkel und eine Seite desselben bekannt sind, weil alsdann alle Winkel desselben gegeben sind, und daher die gesuchten Seiten nothwendigerweise zweyen von diesen Winkeln entgegengesetzt seyn werden; wenn z. B. a nebst den beyden Winkeln B und C gegeben wären, so würde man die Summe dieser Winkel von zwey Rechten abziehen, um den Winkel A zu

*) Man könnte auch die Linien ab, bc und ac selbst als die Sinus von diesen Winkeln A, B und C ansehen, wenn man den Durchmesser des Kreises abc für die Einheit annimmt; auf diese Art hat sie auch Carnot in seinem Werke, welches betitelt ist: la Géometrie de position dargestellt. Man findet nach dieser Annahme einen sehr einfachen und eleganten Beweis des Satzes, und der wichtigsten der davon hergeleiteten.

erhalten, und aus den beyden ersten Proportionen würde man dann die gesuchten Seiten b und c bestimmen können. 2) Wenn man einen Winkel und zwey Seiten hat, von denen eine dem gegebenen Winkel gegenüber steht: wenn man z. B. den Winkel A nebst den beyden Seiten a und b hätte: so könnte man den Winkel B nach den ersten Proportionen berechnen, und da man dann zwey Winkel kennt, so kommt man auf den vorhergehenden Fall zurück.

Es giebt zwey Fälle, welche, indem sie in keinem der beyden eben untersuchten Fälle begriffen sind, von dieser Methode ausgeschlossen zu seyn scheinen; dies sind diejenigen, in welchen man zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder alle drey Seiten kennt; wir wollen uns nun nacheinander damit beschäftigen.

§. 34.

Wir wollen annehmen, man kennte die beiden Seiten a und b und den eingeschlossen Winkel C, und wollen ferner die Gleichungen

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$$

unter der Form

$$a \sin C = c \sin A, \quad b \sin C = c \sin B$$

ansetzen. Addirt man diese letztern Glied für Glied, und zieht nachher die eine von der andern ab, so werden wir finden

$$(a + b) \sin C = c\,(\sin A + \sin B)$$

$$(a - b) \sin C = c\,(\sin A - \sin B);$$

dividirt man die letzte durch die erste, so verschwindet die unbekannte Seite c, und man hat

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}.$$

Nun haben wir (§. 26.) gesehen, daß

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A - B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A + B)};$$

folglich ist

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A - B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A + B)} \text{ *)},$$

woraus die Proportion

$$a + b : a - b = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A + B) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(A - B)$$

hergeleitet werden kann, die sich folgendermaßen vortragen läßt: **die Summe zweyer Seiten eines Dreyecks verhält sich zu ihrer Differenz, wie sich die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel, zur Tangente der halben Differenz derselben verhält.**

In dieser Proportion ist alles bekannt, außer $A - B$; denn wenn man das Maaß des Winkels C von zweyen rechten abzieht, so giebt der Rest das von $A + B$; nehmen wir folglich den Werth von tang $\frac{1}{2}(A - B)$, so werden wir finden

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \times \text{tang } \tfrac{1}{2}(A + B),$$

eine Formel, welche den Werth von $A - B$ bestimmt. Setzt man nun $A + B = m$ und $A - B = n$, so finden wir, wenn wir diese beyde Gleichungen addiren

$$2A = m + n, \text{ oder } A = \frac{m + n}{2};$$

*) Dies läßt sich auch kürzer beweisen, wenn man die Proportion

$$a : b = \sin A : \sin B$$

ansetzt, aus welcher man unmittelbar erhält,

$$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B,$$

und vermittelst des §. 27. kann man daraus schließen

$$a + b : a - b = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A + B) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(A - B).$$

und wenn wir die zweyte von der ersten abziehen, so kommt

$$2B = m - n, \text{ oder } B = \frac{m - n}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich, daß man, wenn die Summe m und die Differenz n zweyer gesuchten Winkel A und B bekannt sind, den größern findet, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz hinzusetzt, und den kleinern, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz abzieht.

Nachdem man alle Winkel berechnet hat, findet man die dritte Seite nach der Regel des §. 31.

§. 35.

Man kann auch die dritte Seite unmittelbar finden, wenn man auf eine der gegebenen Seiten eine senkrechte Linie fällt; z. B. vom Winkel A auf die gegebene Seite BC Fig. 14. Man wird aus der bekannten Eigenschaft der schiefwinklichten Dreyecke haben $AB^2 = AC^2 + BC^2 \mp 2\,BC \times DC$, wo das obere Zeichen genommen wird, wenn, wie in der Figur, die senkrechte innerhalb, und das untere, wenn sie außerhalb fällt; ferner hat man in dem rechtwinklichten Dreyeck ADC

$$DC = AC \times \sin DAC = AC \times \cos C,$$

wenn man $R = 1$ setzt; man kann also hieraus herleiten

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \times BC \times \cos C,$$

und folglich

$$AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2 - 2\,AC \,.\, BC \,.\, \cos C)},$$

eine Formel, welche sich nach der angenommenen Bezeichnung auf

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C)}$$

bringen läßt, und aus den beyden Seiten a und b nebst dem eingeschlossenen Winkel C die Seite c bestimmen lehrt. Man hat hier nur das Zeichen — gesetzt, weil, wenn der

Winkel C stumpf wird, sein Cosinus negativ ist, und sich folglich das Zeichen — in + verwandelt, wie es die geometrische Construction erfordert.

§. 36.

Diese Formel läßt sich nicht bequem zum logarithmischen Calcul brauchen; da man indessen hat

$$\cos 2C = 1 - 2 \sin C^2 \quad (§. 26.),$$

so wird man auch haben, wenn man $\frac{1}{2}$ C statt C schreibt

$$\cos C = 1 - 2(\sin \tfrac{1}{2} C)^2;$$

und durch diese Umformung wird man erhalten

$$c = \sqrt{[a^2 + b^2 - 2ab + 4ab(\sin \tfrac{1}{2} C)^2]} = \sqrt{[(a-b)^2 + 4ab(\sin \tfrac{1}{2} C)^2]}.$$

Setzt man nun $\frac{2 \sin \frac{1}{2} C}{a-b} \sqrt{ab} = \tang \alpha$, so wird erfolgen

$$c = (a-b)\sqrt{(1 + \tang \alpha^2)} = \frac{a-b}{\cos \alpha},$$

weil $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tang \alpha^2)}}$. Man kann nun vermittelst der vorhergehenden Formel sehr leicht tang $\alpha$ berechnen; und nachdem man den Winkel $\alpha$ gefunden hat, erhält man nach der zweyten

$$c = \frac{a-b}{\cos \alpha}.$$

§. 37.

Die Gleichung $c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos C)}$ zeigt auch, wie man aus den dreyen Seiten a, b und c den Winkel C finden kann. Erhebt man nehmlich zuvörderst jeden Theil derselben zum Quadrat, so erhält man daraus

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C.$$

Wenn man nun 2 C′ statt C schreibt, und $1 - 2 \sin C'^2$ statt cos C setzt (§. 26.), so hat man diesen Ausdruck

$$2 \sin C'^2 = 1 + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}{2ab} =$$

$$\frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab},$$

und folglich

$$\sin C'^2 = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{4ab}$$

$$= \frac{\frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{c-a+b}{2}}{ab};$$

es ist aber leicht einzusehen, daß

$$\frac{c+a-b}{2} = \frac{c+a+b}{2} - b,$$

$$\frac{c-a+b}{2} = \frac{c+a+b}{2} - a;$$

setzt man nun $c + a + b = \int$, so wird man, wenn man die Quadratwurzel zieht, und $\frac{1}{2}$ C statt C′ setzt, diese Formel erhalten

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}\int - a)(\frac{1}{2}\int - b)}{ab}},$$

welche auf folgende allgemeine Regel führt:

Um einen Winkel eines Dreyecks zu finden, in welchem die drey Seiten bekannt sind, ziehe man von der halben Summe der drey Seiten, jede der den gesuchten Winkel einschließenden Seiten nacheinander ab, und multiplicire diese beyden Reste in einander; man dividire dann dieses Product durch das Product der den gesuchten Winkel einschließenden Seiten, und nehme aus dem Quotienten die Quadratwurzel. Diese Wurzel wird den Sinus der Hälfte des gesuchten Winkels geben.

§. 38.

Die Auflösung aller Fälle der schiefwinklichten Dreyecke hängt, wie man sieht, nur von den dreyen in den §. 31. 34. 37.

37. vorgetragenen Regeln ab, und beruht auf eben dem Grunde, aus welchem man (§. 29.) die Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke hergeleitet hat. Es wird daher leicht seyn, diese Regeln zu behalten, und die Berechnung der Exempel, welche wir eben geben wollen, wird hoffentlich den Leser in den Stand setzen, sie anwenden zu können.

## Exempel zur Auflösung der rechtwinklichten Dreyecke.

1. Wir wollen annehmen, daß man im rechtwinklichten Dreyeck BAC Fig. 12. die Hypothenuse a und eine Cathete c kennt, und daß der dieser Cathete gegenüber stehende Winkel C gesucht werde. Es sey z. B. die Hypothenuse $a = 197$ Ruthen, die Seite $c = 87$ Ruthen. Um nun $\sin C$ zu bestimmen muß man folgende Proportion ansetzen

$$a : c = R : \sin C,$$

woraus folgt

$$\sin C = \frac{R \times c}{a},$$

und wenn man die Logarithmen nimmt,

$$l \sin C = lR + lc - la.$$

Mehrerer Einfachheit wegen wollen wir von nun an den Halbmesser der Einheit gleich setzen; der Logarithmus desselben wird Null seyn, und folglich aus der Rechnung ganz außer Acht gelassen werden können; und anstatt der zu verrichtenden Subtractionen werden wir die decadischen Ergänzungen anwenden, deren Theorie zu Ende meines ersten Theils der Anfangsgründe der Algebra auseinander gesetzt ist. Die Operation ist folgende

$$\begin{array}{rcl} lc = l\,87 & = & 1{,}9395193 \\ \text{D. E. } la = \text{D. E. } l\,197 & = & 7{,}7055338 \\ \hline l \sin C = \ldots\ldots & & 9{,}6450531, \end{array}$$

welcher in den Tafeln mit $26°, 12', 27'' = C$ übereinstimmt.

2) Wenn man die Hypothenuse a = 385 Ruthen, den Winkel B = 57°, 28′ annimmt und die Seite b sucht, so wird man haben (§. 30.)

$$R : \sin B = a : b$$

folglich

$$b = \frac{a \times \sin B}{R}$$

$$lb = la + l\sin B - lR = la + l\sin B.$$

Nun ist $la = l385 = \ldots\ldots$ 2,5854607

$l\sin B = l\sin 57° 28' = \ldots\ldots$ 9,9258681

Summe oder $lb = \ldots\ldots$ 12,5113288 — 10,

welcher in den Tafeln mit 324,58 = b übereinstimmt.

3) Gesetzt man wüßte die Seite c = 625 Ruthen den Winkel B = 75°, 39′, und es wird die Seite b gesucht, so wird man haben

$$R : \tan B = c : b$$

woraus folgt

$$b = \frac{c \times \tan B}{R}$$

$$lb = lc + l\tan B - lR.$$

Nun ist $lc = l625 = \ldots\ldots$ 2,7958800

$l\tan B = l\tan 75° 39' = \ldots\ldots$ 10,5920547

folglich $lb = \ldots\ldots$ 13,3879347 — 10,

und vermittelst der Tafeln findet man b = 2443,06 Ruth.

## Exempel zur Auflösung der schiefwinklichten Dreyecke.

1) Wir wollen annehmen, daß man im Dreyecke ABC die Seite c, die Winkel A und B weiß, und daraus b bestimmen will.

Es sey z. B. A = 57°, B = 20° und c = 213 Fuß, so wird der Winkel $C = 180 - (A + B) = 180 - 77 = 103°$, und man wird haben

$$\sin C : c = \sin B : b,$$

woraus folgt

$$b = \frac{c \times \sin B}{\sin C}$$

$$l\,b = l\,c + l \sin B - l \sin C,$$

nun ist $l\,c = l\,213 = \ldots\ldots\ldots\ 2{,}3283796$

$l \sin B = l \sin 20° = \ldots\ldots\ldots\ 9{,}5340517$

D. C. $l \sin C =$ D. C. $l \sin 103° =$

D. C. $l \sin 77° = \ldots\ 0{,}0112761$

mithin $l\,b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 11{,}8737074 - 10$

und $b = 74{,}77$ F.

2) Wenn man im Dreyeck ABC die zwey Seiten a und b nebst dem eingeschlossenen Winkel C kennt, die dritte Seite c zu finden.

Es sey $a = 693$ F, $b = 539$ F, $C = 41° 37'$; wir wollen zuvörderst die übrigen Winkel suchen. Man wird haben (§. 34.)

$$a + b : a - b = \text{tang}\,\frac{A + B}{2} : \text{tang}\,\frac{A - B}{2}$$

oder

$$\text{tang}\,\frac{A - B}{2} = \frac{\text{tang}\left(\frac{A + B}{2}\right) \times (a - b)}{a + b},$$

oder

$$l\,\text{tang}\,\frac{A - B}{2} = l\,\text{tang}\,\frac{A + B}{2} + l(a - b) - l(a + b).$$

Nun ist $A + B = 180° - C = 138° 23'$ und $\frac{A + B}{2}$

$= 69° 11' 30''$,

$a + b = 1232$

$a - b = 154$

$$\mathrm{l\,tang}\,\frac{A+B}{2} = \mathrm{l\,tang}\,69^\circ 11' 30'' = 10,4201812$$

$$\mathrm{l}(a-b) = \mathrm{l}\,154 = \ldots\ldots\ 2,1875207$$

$$\text{D. C. }\mathrm{l}(a+b) = \text{D. C. }\mathrm{l}\,1232 = \ldots\ 6,9093893$$

$$\text{folgl. }\mathrm{l\,tang}\,\frac{A-B}{2} = \ldots\ldots\ldots\ 19,5170912 - 10$$

welches in den Tafeln mit 18°, 12′, 26″ übereinstimmt.

Es ist demnach $\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A = 87^\circ\, 23'\, 56''$

und $\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = B = \ldots\ldots\ 50^\circ\, 59'\, 4''$

Um nun die Seite c zu bestimmen, wird man die Proportion haben

$$\sin B : \sin C = b : c$$

woraus folgt

$$c = \frac{b \times \sin C}{\sin B}$$

und $\mathrm{l}c = \mathrm{l}b + \mathrm{l}\sin C - \mathrm{l}\sin B.$

Nun ist $\mathrm{l}b = \mathrm{l}\,539 = \ldots\ldots\ 2,7315888$

$\mathrm{l}\sin C = \mathrm{l}\sin 41^\circ\, 37' = \ldots\ldots\ 9,8222621$

$\text{D. C. }\mathrm{l}\sin B = \text{D. C. }\mathrm{l}\sin 50^\circ\, 59' 4'' = 0,1095929$

Summe oder $\mathrm{l}c \ldots\ldots\ldots\ 12,6634438 - 10$

und $c = 460,73$ Fuß.

3) Wenn man im Dreyeck ABC die drey Seiten a, b, c kennt, den Winkel C zu finden.

Es sey a = 150 F. b = 140 F. c = 130 F.

Nach dem §. 37. würde man die drey Seiten a, b und c zusammen addiren, von der Hälfte 210 der Summe 420 nacheinander b und c abziehen, wodurch man die Reste 60 und 70 erhalten würde; hierauf würde man haben

| | |
|---|---|
| 170 . . . . . . . . . . | 1,8450980 |
| 160 . . . . . . . . . . | 1,7781513 |
| D. C. l b = D. C. l 140 = . . | 7,8538720 |
| D. C. l a = D. C. l 150 = . . | 7,8239087 |
| Summe . . . . . . . | 19,3010300 |
| also die Hälfte oder l sin $\frac{1}{2}$ A = . | 9,6505150 |

folglich $\frac{1}{2} A = 26° 33' 54''$ und $A = 53° 7' 48''$.

## §. 39.

In einem Werke, wie das gegenwärtige ist, kann man unmöglich eine genaue Auseinandersetzung der Anwendungen erwarten, deren die Trigonometrie fähig ist; und wir wollen uns daher nur darauf einschränken, die Auflösung zweyer Aufgaben zu zeigen, die den Grund zum Aufnehmen der Gegenden enthalten.

Dies ist die erste.

**Wenn die Größe und Lage der Linie AB Fig. 15. in einer Ebne gegeben ist, die Lage eines Punctes C, welcher in eben derselben Ebne liegt, zu bestimmen, oder, welches einerley ist, die Distanzen AC und BC zu finden.**

Um sie aufzulösen, muß man den Abstand AB und die Winkel CAB und CBA messen; die Distanzen AC und BC werden sich hierauf nach der im §. 31. gegebenen Regel berechnen lassen, und nachdem man sie gefunden haben wird, würde man vermittelst eines Maaßstabes von gleichen Theilen, mit den drey gegebenen Seiten das Dreyeck ABC construiren, welches die respective Lage der drey Puncte A, B C angeben wird *).

*) Ich übergehe ganz die Verfahrungsart bey Messung der Winkel, weil der bloße Anblick der hierzu dienlichen Instrumente

Man wird dann vermittelst der Auflösung des rechtwinklichten Dreyecks ACP, in welchem die Seite AC und der Winkel CAP bekannt sind, die Länge der auf AB gefällten senkrechten CP, oder des kleinsten Abstandes des Punctes C von AB, und die Größe des Abschnitts AP bestimmen. Diese Stücke können dazu dienen, die Lage des Punctes C gegen die Linie AB anzugeben.

Man würde auf eben die Art die Lage eines zweyten Punctes D finden, den man zugleich in irgend zweyen der drey Puncte A, B und C wahrnehmen kann.

## §. 40.

Wenn man den Punct D in Rücksicht auf die Linie AB unmittelbar bestimmt hat, so hat man alles, was erforderlich ist, um den Abstand der Puncte C und D von einander zu bestimmen; denn, nachdem man das Dreyeck DAB, so wie das Dreyeck CAB aufgelöst, und den Winkel DAB von CAB abgezogen hat, sind im Dreyeck CAD die beyden Seiten AC und AD nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel CAD bekannt; und die Anwendung des Satzes im §. 34. giebt die beyden andern Winkel DCA, CDA, und die dritte Seite CD, welche der gesuchte Abstand ist. Der Winkel DCA giebt die Lage der geraden CD; und wenn

---

mehr lehrt, als alles, was man in dieser Rücksicht sagen könnte; und um die Möglichkeit dieser Messung einzusehen, braucht man sich bloß auf dem Punct A den Mittelpunct eines Zirkelausschnitts gelegt denken, dessen Halbmesser nach den Seiten AB und AC des auszumessenden Winkels gerichtet sind. Diejenigen, welche sich mit der Ausübung des Aufnehmens bekannt machen wollen, können den Lehrbegriff der Trigonometrie von Cagnoli, und den Artikel Levée de plans im Dictionaire de mathematiques de l'Encyclopédie méthodique nachlesen.

man AC als Secante betrachtet, so wird die Vergleichung der Winkel DCA und CAB zu erkennen geben, welches die Neigung von CD gegen AB sey.

Aus den Puncten C und D kann man wiederum neue bestimmen, welche man in den Puncten A und B nicht wahrnehmen konnte; und wenn man dies so fortsetzt, so wird man die respective Lage aller Puncte eines Feldes bestimmen können. Auf diese Art ist die von Cassini herausgegebene Charte von Frankreich construirt worden.

§. 41.

Die zweyte Aufgabe, mit welcher wir uns zu beschäftigen haben, ist nichts anders, als die erste in einem allgemeinen Sinne genommen, indem man nehmlich annimmt, der Punct C sey außerhalb der Ebne, in welcher AB liegt. Es sey C dieser Punct, und ABC′ Fig. 16. die Ebne, in welcher AB liegt. Die Lage des Punctes C würde bekannt seyn, wenn man die des Punctes C′, in welchem die vom Puncte C auf die Ebne ABC herabgelassene senkrechte diese Ebne trift, und überdieß die Länge der senkrechten CC′ wüßte, welche angiebt, um wie viel der Punct C über C′, welchen man seine Projection nennt, erhöhet ist. In diesem Falle mißt man nicht die Winkel C′AB und C′BA, sondern man nimmt an deren Stelle die Winkel CAB und CBA, die in der Ebne CAB liegen, welche durch die von dem gegebenen Punct nach A und B gezogenen geraden Linien AC und BC gehet. Um nun die Lage dieser Ebne zu bestimmen, mißt man noch einen andern Winkel DBC, welchen die Linie CB mit der auf der Ebne ACB senkrechten, und folglich mit CC′ parallelen Linie, BD einschließt *).

*) Wenn es darauf ankommt, Puncte, welche über der Oberfläche der Erde liegen, zu bestimmen, so wählt man zur Ebne

Man lößt nun den Triangel ACB wie den Triangel ACB des vorhergehenden §. auf, weil man in beyden einerley bekannte Stücke hat. Hierauf kennt man in dem in C′ rechtwinklichten Dreyeck CBC′ die Hypothenuse BC und den Winkel C′BC, welcher die Differenz zwischen dem rechten Winkel DBC′ und dem gemessenen Winkel DBC ist; es werden sich daher die Seiten CC′ und C′B daraus berechnen lassen. Die erste ist die Erhöhung des Punctes C über der Ebne C′AB, und dient in Verbindung mit der Seite AC, vermittelst des in C′ rechtwinklichten Dreyecks C′AC, AC′ zu bestimmen; nachdem dieses geschehen ist, hat man die drey Seiten des Dreyecks C′AB, und der Punct C′ ist folglich bestimmt.

---

AC′B eine horizontale Ebne; die Linien C′C und BD sind alsdann vertical; die Ebne C′CB, welche durch diese Linien geht, ist ebenfalls vertical, und findet sich durch den Punct C, welchen man in B wahrnimmt und durch die Linie DB bestimmt. Die Linie C′B ist eine in dieser Ebne liegende Horizontallinie.

## Zweyter Abschnitt.

### Von der sphärischen Trigonometrie.

§. 42.

Ein sphärisches Dreyeck wird dasjenige genannt, welches drey größte Kreise, von denen je zwey und zwey einander schneiden, auf der Oberfläche einer Kugel bilden. Ein sphärisches Dreyeck bestimmt immer eine **körperliche Ecke** (einen von dreyen ebnen Flächen zusammengesetzten körperlichen Winkel), und umgekehrt, kann man immer aus einer dergleichen Ecke ein sphärisches Dreyeck herleiten. Es sey ABC Fig. 17. ein sphärisches Dreyeck, und wir wollen annehmen, daß man von jedem seiner Winkel nach dem Mittelpuncte der Kugel, von deren Oberfläche es einen Theil ausmacht, die Halbmesser AS, BS und CS gezogen habe: so werden die Ebnen ABS, ACS, BCS die der größten Kreise seyn, auf welchen man die Bogen AB, AC, BC, oder die Seiten des vorgelegten Dreyecks genommen hat, und diese Bogen messen die auf jeder dieser Flächen der körperlichen Ecke zwischen den Gränzen SA und SB, SA und SC, SB und SC enthaltenen Winkel. Die Neigung zweyer Ebnen wird, wie bekannt ist, von dem Winkel gemessen, welchen zwey aus einem und demselben Punct des gemeinschaftlichen Durchschnitts, auf diesen Durchschnitt in jeder dieser Ebnen gezogene senkrechte Linien, einschließen. Wenn man daher aus dem Puncte A zwey senkrechte Linien AI und AK auf AS errichtet, von denen die erste in der Ebne CAS und die andre in der Ebne BAS liegt, so wird der geradlinigte Winkel IAK die Neigung dieser beyden Ebnen messen. Es ist übrigens leicht einzusehen, daß die Linie AI die Tangente des Bogens AC, und daß AK die des Bogens AB seyn wird; und da man für den Winkel, welchen zwey krumme Linien einschließen, denjenigen nimmt, welchen die ihnen aus ihrem Durchschnittspunct geführten Tangenten bilden, so wird auch der Winkel IAK das Maaß des von den Bogen AC und AB eingeschlossenen Winkels seyn. Dasselbe findet auch bey jedem der beyden andern Winkel des Dreyecks statt; die Neigung der Seiten der körperlichen Ecke SABC haben demnach mit den correspondirenden Winkeln des sphärischen Dreyecks BAC einerley Maaß. Die körperliche Ecke und das sphärische Dreyeck sind demnach aus sechs Stücken zusammen gesetzt, die mit einander correspondiren, nehmlich: aus den dreyen Seiten des Dreyecks, welche mit den dreyen Winkeln der Durchschnittslinien der körperlichen Ecke übereinstimmen, und aus den dreyen Winkeln des Dreyecks, welche mit den correspondirenden Neigungen der Seiten der körperlichen Ecke übereinkommen.

Euler, welcher sich mit verschiedenen Untersuchungen der sphärischen Trigonometrie beschäftigt hat, um sie in dieser neuen Gestalt darzustellen, lieferte im Jahre 1779 *) eine Abhandlung, welche man als einen vollständigen Lehrbegriff dieser Wissenschaft ansehen kann; wir befinden es für gut, unsern Lesern diese Arbeit vorzulegen, in welcher wir einige, zur Vereinfachung der Resultate dieses berühmten Mannes, uns nöthig geschienene Abänderungen vorgenommen haben.

§. 43.

Alles was wir über die sphärischen Dreyecke sagen

*) Acta Academiae scientiarum Petropolitanae, anno 1779 pars prior.

können, beruht auf folgender Construction, die man daher wohl zu fassen hat.

Von dem Winkel C des Dreyecks ABC lasse man auf die Ebne ASB, der diesem Winkel gegenüber stehenden Seite AB, die senkrechte CD herab; aus dem Puncte D ziehe man die Linien ED und DF respectiv auf SA und SB senkrecht; hierauf ziehe man die Linien CE und CF, so werden diese respectiv auf SA und SB senkrecht seyn (Geom. §. 205). Hieraus folgt, daß die Winkel CED und CFD, die Neigung der Ebnen CSA und CSB gegen die Ebne ASB messen; oder, welches dasselbe ist, daß sie den Werth der Winkel A und B des sphärischen Dreyecks ABC angeben. Wir wollen in der Folge immer die Winkel dieser Dreyecke durch die an ihren Scheiteln stehenden Buchstaben bezeichnen, und die ihnen gegenüber stehenden Seiten durch einen ähnlichen Buchstaben, nach dem kleinen Alphabeth genommen; es wird also hier, wie im §. 30. die Seite BC, welche dem Winkel A gegenüber liegt, mit a bezeichnet seyn, und so fort. Wenn nun der Halbmesser der Tafeln immer der Einheit gleich gesetzt wird, so werden wir haben

$$CE = \sin CA = \sin b, \quad SE = \cos CA = \cos b$$
$$CF = \sin CB = \sin a, \quad SF = \cos CB = \cos a.$$

Aus dem in D rechtwinklichten Dreyeck CDE, worin der Winkel CED $= A$, werden wir finden

$$CD = CE \sin CED = \sin b \sin A$$
$$DE = CE \cos CED = \sin b \cos A.$$

Aus dem Dreyeck CDF, welches ebenfalls in D rechtwinklicht ist, und dessen Winkel CFD $= B$, erhalten wir,

$$CD = CF \sin CFD = \sin a \sin B$$
$$DF = CF \cos CFD = \sin a \cos B.$$

Vergleicht man die beyden Ausdrücke der Linie CD mit einander, so läßt sich daraus herleiten

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B \ldots (A),$$

ein Resultat, welches in Beziehung auf die sphärischen Dreyecke, mit dem im §. 31. für die gradlinigten gefundenen, einerley ist.

Man muß offenbar auf eben die Art die beyden Gleichungen

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$
$$\sin c \sin B = \sin b \sin C$$

erhalten.

## §. 44.

Wir wollen nun durch den Punct E auf SB die senkrechte EG ziehen, und durch D die Linie DH parallel zu SB: so würden wir hierdurch das rechtwinklichte Dreyeck HDE bilden, in welchem HED = ASB, weil, wenn man den Winkel GES vom rechten SED abzieht, HED zum Rest bleibt, und auch ASB oder ESG die Differenz zwischen einem rechten und dem Winkel GES ist. Aus der Auflösung des Triangels EHD kann man folglich herleiten

$$HD = DE \sin DEH = DE \sin c = \cos A \sin b \sin c;$$

nun ist $SF = \cos a = SG + GF = SG + HD$, und $SG = SE \cos ESG = \cos b \cos c$; folglich wird man haben

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c,$$

eine Gleichung, welche das zwischen der Seite a, den beyden übrigen Seiten b und c, und dem von diesen eingeschlossenen Winkel anzutreffende Verhältniß angiebt.

Man kann offenbar, wenn man jede dieser letztern besonders betrachtet, noch zwey der vorhergehenden ähnliche Gleichungen erhalten, und auf diese Art zwischen den sechs Stücken des Dreyecks ABC diese Gleichungen bilden:

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c \\ \cos b = \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c \\ \cos c = \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b \end{array}\right\} \ldots (B).$$

Diese drey Gleichungen begreifen unausschließlich die Gleichung (A). Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man bloß die Werthe von $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ daraus zu bestimmen, und sie in den Gleichungen

$$\sin A^2 = 1 - \cos A^2$$
$$\sin B^2 = 1 - \cos B^2$$
$$\sin C^2 = 1 - \cos C^2$$

zu substituiren. Man findet durch die erste dieser Gleichungen

$$\sin A^2 = 1 - \frac{\cos a^2 - 2\cos a \cos b \cos c + \cos b^2 \cos c^2}{\sin b^2 \sin c^2} =$$

$$\frac{\sin b^2 \sin c^2 - \cos a^2 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos b^2 \cos c^2}{\sin b^2 \sin c^2} =$$

$$\frac{(1-\cos b^2)(1-\cos c^2) - \cos b^2 \cos c^2 - \cos a^2 + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin b^2 \sin c^2}$$

$$= \frac{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin b^2 \sin c^2};$$

multiplicirt man nun beyde Glieder dieses Bruchs durch $\sin a^2$ und zieht hierauf die Quadratwurzel, so wird man erhalten

$$\sin A =$$

$$\sin a \times \sqrt{\frac{(1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c)}{\sin a \sin b \sin c}}\ ^{*)}.$$

---

*) Bertrand hat diesen Ausdruck zuerst gegeben; er hat auch aus den Gleichungen (B), welche als eine einzige betrachtet werden müssen, alle Formeln der sphärischen Trigonometrie hergeleitet (Développement de la partie élémentaire des Mathematiques, Tom. II. pag. 578. Genève, 1778).

Lagrange hat auch im Journal de l'Ecole Polytechnique, eine Abhandlung über diese Materie bekannt gemacht, worin er beweist, daß der Zähler des Bruchs, welcher $\sin a$ multiplicirt, dem sechsfachen Volumen des Tetraedrums gleich ist, welches von den Scheiteln der Winkel des sphärischen Dreyecks, und dem Mittelpuncte der Kugel begränzt wird.

Bezeichnet man nun zur Abkürzung die Größe, welche $\sin a$ im zweyten Theile dieser Gleichung multiplicirt, durch $M$, so wird man haben

$$\sin A = M \sin a;$$

man würde auf eben die Art finden

$$\sin B = M \sin b, \quad \sin C = M \sin c,$$

und durch die Elimination der Größe $M$ wird man auf die Gleichungen (A) zurückkommen. Es ist beyläufig zu merken, daß die drey Seiten $a$, $b$, $c$ alle auf einerley Art in den Ausdruck von $M$ hinein gebracht sind, und bloß aus dieser Ursache ist sie den Werthen der Sinus eines jeden der Winkel gemein.

Die Gleichungen (B) werden demnach zur Auflösung eines jeden sphärischen Dreyecks, in welchem drey seiner Theile bekannt sind, hinreichend seyn, wenn man in Erwägung zieht, daß der Sinus und Cosinus als eine einzige unbekannte betrachtet werden müssen, weil man immer den einen durch den andern ausdrücken kann.

Diese Gleichungen (B) werden vermittelst einiger Umformungen, welche wir sogleich zeigen wollen, zur Anwendung weit brauchbarer.

### §. 45.

Man kann darin die Winkel in die ihnen entgegengesetzten Seiten, und umgekehrt verwandeln, wenn man jedem Cosinus das Zeichen — giebt. Um dies zu beweisen muß man aus beyden letztern $\cos a$ vermittelst der ersten eliminiren, und man wird finden

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos b \cos c^2 + \cos A \sin b \sin c \cos c \\ &\quad + \cos B \sin a \sin c \\ \cos c &= \cos b^2 \cos c + \cos A \sin b \sin c \cos b \\ &\quad + \cos C \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Substituirt man nun $1 - \sin b^2$ statt $\cos b^2$, und

$1 - \sin c^2$ statt $\cos c^2$, so werden sie sich reduciren lassen; die erste wird durch $\sin c$, und die andre durch $\sin b$ theilbar, und sie können dann folgendermaßen geschrieben werden

$$\left.\begin{array}{l}\cos B \sin a = \cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c \\ \cos C \sin a = \sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c\end{array}\right\} \ldots (C).$$

Wenn man nun die zweyte dieser Gleichungen durch $\cos A$ multiplicirt, sie sodann zur ersten hinzusetzt, und $1 - \sin A^2$ statt $\cos A^2$ substituirt, so wird man erhalten

$$\sin a (\cos B + \cos A \cos C) = \sin A^2 \cos b \sin c;$$

es folgt aber aus den Gleichungen (A), daß $\sin c \sin A = \sin a \sin C$; substituirt man diesen Werth in dem zweyten Theil der obigen Gleichung, so wird sie durch $\sin a$ theilbar werden, und man wird zum Resultat erhalten

$$\cos B + \cos A \cos C = \cos b \sin A \sin C,$$

oder, welches dasselbe ist,

$$\cos B = - \cos A \cos C + \cos b \sin A \sin C.$$

Hält man nun diese Gleichung gegen die Gleichungen (B), so wird man sehen, daß sie sich unmittelbar aus der zweiten herleiten läßt, wenn man die großen Buchstaben in die kleinen und umgekehrt verwandelt, und jedem Cosinus das Zeichen — giebt. In der That erhält man, wenn man auf diese Art verfährt,

$$- \cos B = \cos A \cos C - \cos b \sin A \sin C,$$

eine Gleichung, welche in die vorhergehende übergeht, wenn man alle Zeichen ändert.

Wir haben eben die Beziehung gefunden, welche zwischen den Winkel B, den beyden Winkeln A und C, und der von ihnen eingeschlossenen Seite b anzutreffen ist; es findet aber offenbar eine gleiche Beziehung bey jeder der ähnlichen Verbindungen der Winkel und Seiten statt; mithin hat man zu gleicher Zeit folgende drey Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = -\cos B \cos C + \cos a \sin B \sin C \\ \cos B = -\cos A \cos C + \cos b \sin A \sin C \\ \cos C = -\cos A \cos B + \cos c \sin A \sin C\end{array}\right\} \ldots (B').$$

## §. 46.

Es ist wohl zu merken, daß man, indem die Cosinus negativ genommen werden, von den Bogen a, b. c, und von den Winkeln A, B, C, zu deren Supplementen übergeht, weil $-\cos A = \cos(180° - A)$, $-\cos a = \cos(180° - a)$, und so von den übrigen (§. 23.). Wenn man diese Werthe in die obigen Gleichungen substituirt, und zur Abkürzung $180° - A = A'$, $180° - a = a'$ rc. setzt, so werden sie folgende Form annehmen

$$\left.\begin{array}{l}\cos A' = \cos B' \cos C' + \cos a' \sin B' \sin C' \\ \cos B' = \cos A' \cos C' + \cos b' \sin A' \sin C' \\ \cos C' = \cos A' \cos B' + \cos c' \sin A' \sin B'\end{array}\right\},$$

welche Gleichungen den Gleichungen (B) völlig ähnlich sind, und folglich zu einem Dreyeck gehören, dessen Seiten A′, B′, C′, und dessen Winkel a′, b′, c′ sind. Die Winkel eines solchen Dreyecks werden also durch die Supplemente der Seiten des Dreyecks ABC gemessen, und seine Seiten messen die Supplemente der Winkel eben dieses Dreyecks. Es kommt in den Lehrbüchern der Trigonometrie unter dem Nahmen des supplementarischen Dreyecks vor, und man beweist, daß die Scheitel seiner Winkel die Pole der Seiten des ersten sind, und umgekehrt.

## §. 47.

Die im §. 45. unter der Bezeichnung (C) erhaltenen Gleichungen, welche fünf Theile des sphärischen Dreyecks ABC enthalten, können in andre umformt werden, in denen nur vier derselben vorkommen. Man muß in dieser

Hinsicht statt $\sin a$, in die erste, $\frac{\sin b \sin A}{\sin B}$, und in die zweyte $\frac{\sin c \sin A}{\sin C}$ substituiren (§. 43.); und da $\frac{\cos p}{\sin p} = \cot p$, so wird man hiernächst finden

$$\left.\begin{aligned} \cot B &= \frac{\cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c}{\sin A \sin b} \\ \cot C &= \frac{\sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c}{\sin A \sin c} \end{aligned}\right\} \ldots (D).$$

Es ist nun leicht, vermittelst des bloßen Anblicks dieser Werthe, alle diejenigen zu bilden, welche ihnen ähnlich sind, wenn man darin die Buchstaben auf eine angemessene Art versetzt; aber vorzüglich ist hier zu merken, daß man darin, weil sie alle aus den Gleichungen (B) hergeleitet sind, auf dieselbe Art wie oben die Seiten in Winkel und umgekehrt verwandeln kann, wenn man den Cotangenten und Cosinus ein Zeichen giebt, welches dem vorhergehabten entgegengesetzt ist, und es wird dann kommen

$$\left.\begin{aligned} \cot b &= \frac{\cos B \sin C + \cos a \sin B \cos C}{\sin a \sin B} \\ \cot c &= \frac{\sin B \cos C + \cos a \cos B \sin C}{\sin a \sin C} \end{aligned}\right\} \ldots (D').$$

## §. 48.

Die fünf Systeme der Gleichungen (A), (B), (B'), (D), (D'), geben unmittelbar die Auflösung aller Fälle, welche nur irgend ein sphärisches Dreyeck darbiethen kann. Das erste drückt das Verhältniß aus, welches zwischen den Winkeln und den ihnen gegenüberstehenden Seiten anzutreffen ist.

## §. 49.

Aus dem zweyten zieht man folgende sechs Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c\\ \cos b &= \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c\\ \cos c &= \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}\\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\end{aligned}\right\},$$

von denen die drey ersten zu erkennen geben, wie man eine Seite vermittelst der beyden andern und des von ihnen eingeschlossenen Winkels finden kann, und deren drey letztern die Winkel vermittelst der Seiten zu bestimmen lehren.

§. 50.

Das dritte System biethet, so wie das vorhergehende, ebenfalls sechs Formeln dar, welche sind:

$$\cos A = - \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$\cos B = - \cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$$
$$\cos C = - \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$
$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$
$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$
$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

Die drey ersten zeigen, wie man einen Winkel finden kann, wenn man die beyden andern und die zwischen ihnen liegende Seite kennt. Die drey letztern geben jede der Seiten, wenn alle Winkel bekannt sind.

§. 51.

Das vierte System giebt, wenn man darin alle mögliche Versetzungen macht, die sechs Formeln

$$\cot A = \frac{\cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b}{\sin C \sin a}$$

$$\cot B = \frac{\sin a \cos b - \cos C \cos a \sin b}{\sin C \sin b}$$

$$\cot A = \frac{\cos a \sin c - \cos B \sin a \cos c}{\sin B \sin a}$$

$$\cot C = \frac{\sin a \cos c - \cos B \cos a \sin c}{\sin B \sin c}$$

$$\cot B = \frac{\cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c}{\sin A \sin b}$$

$$\cot C = \frac{\sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c}{\sin A \sin c}$$

vermittelst welcher man zwey der Winkel eines sphärischen Dreyecks bestimmen kann, wenn der dritte Winkel und die ihn einschließenden Seiten bekannt sind.

§. 52.

Das fünfte System endlich führt auf folgende sechs Formeln

$$\cot a = \frac{\cos A \sin B + \cos c \sin A \cos B}{\sin c \sin A}$$

$$\cot b = \frac{\sin A \cos B + \cos c \cos A \sin B}{\sin c \sin B}$$

$$\cot a = \frac{\cos A \sin C + \cos b \sin A \cos C}{\sin b \sin A}$$

$$\cos c = \frac{\sin A \cos C + \cos b \cos A \sin C}{\sin b \sin C}$$

$$\cot b = \frac{\cos B \sin C + \cos a \sin B \cos C}{\sin a \sin B}$$

$$\cot c = \frac{\sin B \cos C + \cos a \cos B \sin C}{\sin a \sin C},$$

welche dienen, zwey Seiten eines Dreyecks zu bestimmen, wenn man die dritte und die sie einschließenden Winkel kennt.

§. 53.

Die eben beygebrachten vier Klassen von Formeln verdienen die größte Aufmerksamkeit, sowohl wegen ihrer Eleganz, als wegen der Eigenschaft, daß sie zu erkennen geben, ob die Bogen oder Winkel, welche sie ausdrücken, größer oder kleiner als ein Quadrant oder rechter Winkel ist, eine Eigenschaft, welche die Ausdrücke für die Sinus eben dieser Bogen nicht haben würden. Denn, da der Sinus eines Bogens mit dem des Supplements desselben sowohl in Ansehung der Größe als des Zeichens einerley ist, so wird man, so oft man nur den Sinus eines Bogens weiß, unmöglich erkennen können, ob dieser Bogen kleiner oder größer als ein Quadrant genommen werden soll; kennt man hingegen den Cosinus oder die Cotangente, und weiß man überdieß, daß dieser Bogen nicht dem halben Umkreise gleich ist, welches bey den Seiten der sphärischen Dreyecke und den ihre Winkel messenden Bogen der Fall ist, so erkennt man an dem Zeichen des Resultats, ob der gesuchte Bogen zwischen 90° und 180° enthalten ist, oder nicht. Im ersten Falle haben der Cosinus und die Cotangente das Zeichen —, und im zweyten Falle das Zeichen +. Wenn man demnach den bekannten Größen in den oben beygebrachten Formeln die Zeichen gegeben hat, welche sie nach dem Werth der Bogen, zu denen sie gehören, erhalten müssen, so wird das Zeichen des Resultats die Art der gesuchten Seite oder des gesuchten Winkels zu erkennen geben; das heißt, ob sie kleiner oder größer als ein Quadrant, und ob er spitz oder stumpf ist.

§. 54.

Eben diese Formeln lassen sich sehr vereinfachen, wenn das vorgelegte Dreyeck rechtwinklicht ist; das heißt, wenn einer seiner Winkel ein rechter ist. In der That hat man, wenn $C = 90°$ genommen wird

$\sin C = 1, \quad \cos C = 0;$

und es wird kommen

$$\cos c = \cos a \cos b \text{ (§. 49.)}$$

$$\cos c = \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \cot A \cot B \text{ (§. 50.)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = \sin B \cos a \\ \cos B = \sin A \cos b\end{array}\right\} \text{(§. 50.)}$$

$$\sin a = \sin c \sin A, \ \sin b = \sin c \sin B \text{ (§. 43.)}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\cot b = \dfrac{\cos B}{\sin a \sin B} \\ \cot a = \dfrac{\cos A}{\sin b \sin A} \\ \cot c = \dfrac{\cos b \cos A}{\sin b} \\ \cot c = \dfrac{\cos a \cos B}{\sin a}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{(§. 52.)} \\ \text{woraus} \\ \text{folgt}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\tan b = \sin a \tan B \\ \tan a = \sin b \tan A \\ \tan b = \cos A \tan c \\ \tan a = \cos B \tan c\end{array}\right.$$

und wenn man von diesen Formeln nur diejenigen nimmt, welche wesentlich unterschieden sind, so wird man diese sechs Formeln erhalten

$$\begin{array}{lcl}\cos c & = & \cos a \cos b \\ \cos c & = & \cot A \cot b \\ \sin a & = & \sin c \sin A \\ \tan a & = & \sin b \tan A \\ \tan a & = & \cos B \tan c \\ \cos A & = & \sin B \cos a\end{array}$$

welche zur Auflösung aller in C rechtwinklichten sphärischen Dreyecke hinreichend sind. Die diesem Winkel C gegenüberstehende Seite c wird eben so wie bey den geradlinigten rechtwinklichten Dreyecken, die Hypothenuse genannt. Man könnte auch ähnliche Formeln für den Fall erhalten, wo eine der Seiten des sphärischen Dreyecks dem Quadranten gleich ist; wir wollen uns indessen nicht dabey aufhalten.

§. 55.

Um die Logarithmen auf die Rechnungen der sphärischen Dreyecke bequem anwenden zu können, muß man die Formeln von §. 49 — 52. in andre umformen, deren Zähler und Nenner in Factoren zerlegbar werden; und dieses that man auf eine eben so einfache als elegante Art.

1) Aus dem in denen der ersten Klasse des §. 49. enthaltenen Ausdruck

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

zieht man

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c},$$

woraus folgt, weil

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A^2 \ (\S.\ 26.)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\cos a - \cos(b+c)};$$

da nun

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q) \ (\S.26.)$$

so hat man

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A^2 = \sqrt{\left\{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(b-c+a) \sin \tfrac{1}{2}(b-c-a)}{\sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin \tfrac{1}{2}(a-b-c)}\right\}}.$$

Verfährt man auf diese Art mit den übrigen Ausdrücken dieser Klasse, so wird man zu ähnlichen Resultaten gelangen.

2) Nimmt man in der zweyten Klasse den Ausdruck

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

so kann man daraus herleiten

$$1 - \cos a = -\frac{\cos(B+C) + \cos A}{\sin B \sin C}$$

$$1 + \cos a = \frac{\cos A + \cos(B+C)}{\sin B \sin C},$$

woraus folgt

$$\tang \tfrac{1}{2} a^2 = -\frac{\cos(B+C) + \cos A}{\cos(B-C) + \cos A};$$

da aber

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q) \text{ (§. 26.)},$$

so wird man haben

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left\{\frac{-\cos\frac{1}{2}(B+C+A) \cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(B-C+A) \cos\frac{1}{2}(B-C-A)}\right\}}.$$

3) Die Ausdrücke der ersten Klasse geben ferner

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B;$$

und wenn man jeden Theil der ersten dieser Gleichungen durch den correspondirenden zweyten dividirt, und in Erwägung zieht, daß nach der Gleichung (A)

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A},$$

so wird man finden

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin B \cos A}{\cos B \sin A},$$

Setzt man zu jedem Theil dieser letztern die Einheit hinzu, so wird sie

$$1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = 1 + \frac{\sin B \cos A}{\cos B \sin A},$$

und man verwandelt sie leicht in

$$\frac{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin(A+B)}{\cos B \sin A},$$

wenn man beyde Glieder eines jeden Theils auf einerley Benennung bringt

Wenn man anstatt die Einheit hinzu zu setzen, sie vielmehr abzieht, so erhält man

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} - 1 = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B} - 1,$$

woraus man erhält

$$\frac{(\cos a - \cos b)(1 + \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin (B - A)}{\sin A \cos B}.$$

Dividirt man nun diese Gleichung durch die vorher erhaltene, und erinnert man sich, daß nach der Tafel Seite 30.

$$\frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \cot \tfrac{1}{2} c^2, \quad \frac{\cos p - \cos q}{\cos p + \cos q}$$

$$= \tang \tfrac{1}{2}(q + p) \tang \tfrac{1}{2}(q - p)$$

$$\sin p = 2 \sin \tfrac{1}{2} p \cos \tfrac{1}{2} p,$$

so wird man finden

$$\tang \tfrac{1}{2}(b - a) \tang \tfrac{1}{2}(b + a) \cot \tfrac{1}{2} c^2$$

$$= \frac{\sin(B - A)}{\sin(B + A)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B - A) \cos \frac{1}{2}(B - A)}{\sin \frac{1}{2}(B + A) \cos \frac{1}{2}(B + A)};$$

wenn man nach einander die Einheit zu jedem Theil der Gleichung $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ hinzusetzt und abzieht, und hierauf das eine Resultat durch das andre dividirt, so gelangt man zur Gleichung

$$\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A},$$

welche vermittelst der Formelntafel Seite 30. in folgende verwandelt werden kann

$$\tang \tfrac{1}{2}(b - a) \cot \tfrac{1}{2}(b + a) = \frac{\sin \frac{1}{2}(B - A) \cos \frac{1}{2}(B + A)}{\sin \frac{1}{2}(B + A) \cos \frac{1}{2}(B - A)}.$$

Multiplicirt man nun jeden Theil dieser Gleichung mit dem correspondirenden vorigen, mit Zuziehung dessen, daß

$$\tang \tfrac{1}{2}(a + b) \cot \tfrac{1}{2}(a + b) = 1 \text{ (§. 39.)}$$

so wird man erhalten

$$[\tang \tfrac{1}{2}(b - a)]^2 \cot \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{[\sin \frac{1}{2}(B - A)]^2}{[\sin \frac{1}{2}(B + A)]^2},$$

und wenn man aus jedem Theile die Quadratwurzel zieht, erhält man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-a)\cot\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)},$$

dividirt man endlich die erste durch diese letztere, so findet man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\cot\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}.$$

Erinnert man sich nun, daß $\frac{1}{\cot p}=\operatorname{tang}p$ (§. 9.), so wird man aus den beyden obigen Gleichungen die Ausdrücke

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-a)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+a)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)},$$

vermittelst welcher man zwey Seiten eines sphärischen Dreyecks finden kann, wenn man die dritte Seite und die diese Seite einschließenden Winkel hat; denn wenn man die Werthe der Bogen $b+a$ und $b-a$ durch $b'$ und $a'$ bezeichnet, so erfolgt daraus

$$b=\tfrac{1}{2}(b'+a'),\quad a=\tfrac{1}{2}(b'-a').$$

4) Nimmt man in der zweyten Klasse der Formeln §. 50. die Gleichungen

$$\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C\cos a$$
$$\cos B+\cos A\cos C=\sin A\sin C\cos b$$

und dividirt die erste durch die zweyte, so wird man finden

$$\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\cos B+\cos A\cos C}=\frac{\sin B\cos a}{\sin A\cos b}=\frac{\sin b\cos a}{\sin a\cos b}.$$

Setzt man zu jedem Theile dieser Gleichung die Einheit hinzu und zieht sie davon ab, und dividirt das eine Resultat durch das andre, so kann man wie oben herleiten

$$\frac{\cos A-\cos B}{\cos A+\cos B}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C^2=\frac{\sin(b-a)}{\sin(b+a)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - A) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B + A) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C^2$$
$$= \frac{\sin(b - a)}{\sin(b + a)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(b - a) \cos \frac{1}{2}(b - a)}{\sin \frac{1}{2}(b + a) \cos \frac{1}{2}(b + a)};$$

und da die Gleichung

$$\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A},$$

von welcher wir bey der vorigen Umformung Gebrauch gemacht haben, auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(b - a) \cos \frac{1}{2}(b + a)}{\sin \frac{1}{2}(b + a) \cos \frac{1}{2}(b - a)}$$
$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - A) \cot \tfrac{1}{2}(B + A),$$

so werden wir endlich, wenn wir diese letztere durch die weiter oben erhaltene dividiren, folgende zwey Gleichungen finden

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - A) = \cot \tfrac{1}{2} C \, \frac{\sin \frac{1}{2}(b - a)}{\sin \frac{1}{2}(b + a)}$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B + A) = \cot \tfrac{1}{2} C \, \frac{\cos \frac{1}{2}(b - a)}{\cos \frac{1}{2}(b + a)},$$

welche, wenn man zwey Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt, die Stelle der vorhergehenden vertreten.

## §. 56.

Wenn man alle Variationen nimmt, deren die oben gefundenen Formeln fähig sind, so wird man haben

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin \frac{1}{2}(b + c - a) \sin \frac{1}{2}(a + b + c)}}$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b + c - a) \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin \frac{1}{2}(a + c - b) \sin \frac{1}{2}(a + b + c)}}$$
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + c - b) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a + b + c)}}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}} \; ^{*)}$$

$$\tan\frac{b-a}{2} = \tan\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\tan\frac{b+a}{2} = \tan\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\tan\frac{c-b}{2} = \tan\tfrac{1}{2}a\,\frac{\sin\frac{1}{2}(C-B)}{\sin\frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\tan\frac{c+b}{2} = \tan\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos\frac{1}{2}(C-B)}{\cos\frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\tan\frac{a-c}{2} = \tan\tfrac{1}{2}b\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)}$$

$$\tan\frac{a+c}{2} = \tan\tfrac{1}{2}b\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}$$

$$\tan\frac{B-A}{2} = \cot\tfrac{1}{1}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\tan\frac{B+A}{2} = \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\tan\frac{C-B}{2} = \cot\tfrac{1}{2}A\,\frac{\sin\frac{1}{2}(c-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b)}$$

$$\tan\frac{C+B}{2} = \cot\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)}{\cos\frac{1}{2}(c+b)}$$

$$\tan\frac{A-C}{2} = \cot\tfrac{1}{2}B\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c)}$$

$$\tan\frac{A+C}{2} = \cot\tfrac{1}{2}B\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}.$$

---

*) Um diese Formeln aus den ihnen analogen des vorhergehenden §. zu ziehen, muß man in Erwägung ziehen, daß $\alpha - \beta - \gamma = \alpha - (\beta + \gamma)$, und daß $\sin(p-q) = -\sin(q-p)$, $\cos(p-q) = \cos(q-p)$.

Aus den zwölf letzten Formeln kann man die folgenden herleiten, welche dazu dienen, die dritte Seite oder den dritten Winkel zu bestimmen, wenn man zwey Seiten und die ihnen gegenüber stehenden Winkel kennt.

$$\tang \tfrac{1}{2} c = \tang \tfrac{1}{2}(b - a) \frac{\sin \frac{1}{2}(B + A)}{\sin \frac{1}{2}(B - A)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} c = \tang \tfrac{1}{2}(b + a) \frac{\cos \frac{1}{2}(B + A)}{\cos \frac{1}{2}(B - A)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \tang \tfrac{1}{2}(c - b) \frac{\sin \frac{1}{2}(C + B)}{\sin \frac{1}{2}(C - B)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \tang \tfrac{1}{2}(c + b) \frac{\cos \frac{1}{2}(C + B)}{\cos \frac{1}{2}(C - B)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} b = \tang \tfrac{1}{2}(a - c) \frac{\sin \frac{1}{2}(A + C)}{\sin \frac{1}{2}(A - C)}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} b = \tang \tfrac{1}{2}(a + c) \frac{\cos \frac{1}{2}(A + C)}{\cos \frac{1}{2}(A - C)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \tang \tfrac{1}{2}(B - A) \frac{\sin \frac{1}{2}(b + a)}{\sin \frac{1}{2}(b - a)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \tang \tfrac{1}{2}(B + A) \frac{\cos \frac{1}{2}(b + a)}{\cos \frac{1}{2}(b - a)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} A = \tang \tfrac{1}{2}(C - B) \frac{\sin \frac{1}{2}(c + b)}{\sin \frac{1}{2}(c - b)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} A = \tang \tfrac{1}{2}(C + B) \frac{\cos \frac{1}{2}(c + b)}{\cos \frac{1}{2}(c - b)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} B = \tang \tfrac{1}{2}(A - C) \frac{\sin \frac{1}{2}(a + c)}{\sin \frac{1}{2}(a - c)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} B = \tang \tfrac{1}{2}(A + C) \frac{\cos \frac{1}{2}(a + c)}{\cos \frac{1}{2}(a - c)} \;{}^{*})$$

---

*) Diese Formeln, nebst den vorhergehenden, sind unter dem Nahmen der Nepperschen Analogie bekannt, weil sie sich aus den von diesem Geometer zur Auflösung der sphärischen Dreyecke gegebenen Regeln (logarithmorum canois descriptio) herleiten lassen.

Nimmt man hierzu noch die Gleichungen (A), welche in dem Fall brauchbar sind, wo man zwey Seiten und einen gegenüberstehenden Winkel, oder zwey Winkel und eine gegenüberstehende Seite kennt, so hat man alles, was zur Auflösung der sphärischen Dreyecke erfordert wird. Das Vorhergehende kann als ein vollständiger Lehrbegriff der sphärischen Trigonometrie angesehen werden. Verbindet man die oben erhaltenen verschiedenen Formeln mit einander, so werden sich noch andre daraus herleiten lassen, die in den astronomischen Rechnungen von mannigfaltigem Nutzen sind. Wir haben dem Bürger Delambre eine zahlreiche Anzahl sehr eleganter Resultate dieser Art zu verdanken, von denen man einige in der Trigonometrie von Cagnoli, und die übrigen in den Abhandlungen findet, welche er den gelehrten Gesellschaften geliefert hat.

## Kurze Wiederholung der zur Auflösung irgend eines sphärischen Dreyecks nöthigen Formeln.

### §. 57.

Wenn man die verschiedenen Abänderungen, welche ein jeder Fall darbiethen kann, außer Acht läßt, so wird man nur folgende sechs Formeln finden:

1) **Wenn die drey Seiten (a, b, c) bekannt sind, einen der Winkel (A) zu finden.**

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left\{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin \frac{1}{2}(b+c-a) \sin \frac{1}{2}(a+b+c)}\right\}}.$$

2) **Wenn man die drey Winkel (A, B, C) kennt, eine der Seiten (a) zu finden.**

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left\{\frac{-\cos \frac{1}{2}(B+C-A) \cos \frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cos \frac{1}{2}(A+C-B)}\right\}}.$$

3) **Wenn man zwey Seiten (b, c) nebst dem ein-**

geschlossenen Winkel (A) kennt, die übrigen Winkel (B und C) zu finden:

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (B + C) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\ (b - c)}{\cos\tfrac{1}{2}\ (b + c)}\ \cot\tfrac{1}{2} A$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (B - C) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\ (b - c)}{\sin\tfrac{1}{2}\ (b + c)}\ \cot\tfrac{1}{2} A.$$

4) Wenn man die beyden Winkel (B, C) und die eingeschlossene Seite (a) weiß, die andern Seiten (b, c) zu finden:

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (b + c) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\ (B - C)}{\cos\tfrac{1}{2}\ (B + C)}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ a$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ (b - c) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\ (B - C)}{\sin\tfrac{1}{2}\ (B + C)}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ a.$$

5) Aus zweyen Seiten (a, c) und einen gegenüberstehenden Winkel (C) den andern gegenüberstehenden Winkel (A) zu finden:

$$\sin A = \frac{\sin a\ \sin C}{\sin c}.$$

6) Wenn man zwey Winkel (A, C) und eine gegenüberstehende Seite (c) kennt, die andre gegenüberstehende Seite (a) zu bestimmen:

$$\sin a = \frac{\sin c\ \sin A}{\sin C}.$$

**Zusatz.** Statt der beyden ersten der hier beygebrachten Formeln, substituirt man öfters diese:

$$\sin\tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left\{\frac{\sin\tfrac{1}{2}\ (a + b - c)\ \sin\tfrac{1}{2}\ (a + c - b)}{\sin b\ \sin c}\right\}}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\ a = \sqrt{\left\{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A + B + C)\ \cos\tfrac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B\ \sin C}\right\}},$$

welche mit der Auflösung des ähnlichen Falles in der ebnen Trigonometrie (§. 37.) übereinkommen.

Man gelangt zu diesen Formeln, wenn man in Erwägung zieht, daß

$1 - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2} A^2$, $1 - \cos a = 2 \sin \frac{1}{2} a^2$;

und dann die Zähler der Werthe der obigen, im §. 55. erhaltenen Gleichungen, vermittelst der Ausdrücke für $\cos p - \cos q$ und $\cos p + \cos q$ reducirt.

Wenn bey den vier ersten Gleichungen die Umstände der Aufgabe den Zweifel übrig lassen sollten, ob die gesuchten Bogen oder Winkel mehr oder weniger als ein Quadrant, oder als ein rechter Winkel sind, so kann man dieser Schwierigkeit ausweichen, wenn man zu den Ausdrücken der Cosinus und der Cotangenten der unbekannten seine Zuflucht nimmt (§. 53.). Allein in den beyden letzten Fällen könnte es sich zutragen, daß die vorgelegte Aufgabe zweyer Auflösungen fähig ist, und man kann sich hiervon leicht überzeugen, wenn man die Art studirt, eine körperliche Ecke zu construiren, wenn man zwey Seiten derselben, und die Neigung einer derselben zur dritten kennt, oder, wenn man die Neigungen zweyer Flächen zur dritten und den Winkel kennt, welchen zwey Linien einschließen, die eine der ersten bestimmen. Wir können uns hier nicht ins Detail hierüber einlassen *), sondern wollen bloß die Resultate hersetzen.

1) Das sphärische Dreyeck kann aus den gegebenen Stücken $a$, $c$ und $C$ nur auf eine einzige Art existiren,

wenn $C = 90°$

$C < 90°$, $a < 90°$, $c > a$

$C < 90°$ $a > 90°$ $c > 180° - a$

$C > 90°$ $a < 90°$ $c < 180° - a$

$C > 90°$ $a > 90°$ $c < a$

und es ist zweyer Formen fähig,

*) Man kann das Werk Développement nouveau de la partie élémentaire de Mathematiques de Bertrand, Tom. II. Trigonométrie, sectio V. zu Rathe ziehen.

wenn $C < 90^\circ \quad a < 90^\circ \quad c < a$

$C < 90^\circ \quad a > 90^\circ \quad c < 180^\circ - a$

$C > 90^\circ \quad a < 90^\circ \quad c > 180^\circ - a$

$C > 90^\circ \quad a > 90^\circ \quad c > a$

$C <$ od. $> 90^\circ$, $a = 90^\circ$.

2) Mit den gegebenen A, C und c kann man nur eine einzige Form erhalten,

wenn $c = 90^\circ$

$c > 90^\circ \quad A > 90^\circ \quad C < A$

$c > 90^\circ \quad A < 90^\circ \quad C < 180^\circ - A$

$c < 90^\circ \quad A > 90^\circ \quad C > 180^\circ - A$

$c < 90^\circ \quad A < 90^\circ \quad C > A$,

und sie hat deren zwey, wenn

$c > 90^\circ \quad A > 90^\circ \quad C > A$

$c > 90^\circ \quad A < 90^\circ \quad C > 180^\circ - A$

$c < 90^\circ \quad A > 90^\circ \quad C < 180^\circ - A$

$c < 90^\circ \quad A < 90^\circ \quad C < A$

$c <$ od. $> 90^\circ \quad A = 90^\circ$.

## §. 58.

Um von der sphärischen Trigonometrie eine Anwendung zu geben, wollen wir folgende Aufgabe wählen: **Wenn man den in einer geneigten Ebne liegenden Winkel MSN kennt, und die Winkel, welche die Seiten MS und SN desselben mit einer Verticalen SS′ bilden, hieraus den auf der Horizontalebne MS′N′ von den Projectionen M′S′ und N′S′ der Linien MS und NS eingeschlossenen Winkel M′S′N′ zu finden.**

Die drey Linien SS′, SM und SN bilden um den Punct S, als einen Scheitelpunct, eine körperliche Ecke, in welcher man die drey ebnen Winkel MSN, MSS′, NSS′ kennt; und da die gerade Linie SS′ auf der Ebne N′S′M′ senkrecht ist,

ist, so ist sie es auf jeder der geraden Linien M'S' und N'S', welche, da sie respectiv in den Ebnen SS'M und SS'N liegen, einen Winkel einschließen, welcher dem Neigungswinkel dieser beyden Flächen gleich ist. Die vorgelegte Aufgabe kommt nun darauf zurück, diese Neigung zu bestimmen. Auf diese Art findet sie sich vermittelst geometrischer Operationen im Ergänzungsbande zu den Anfangsgründen der Geometrie aufgelöst.

Man kann aber auch den gesuchten Winkel erhalten, wenn man sich ihn als einen Theil des sphärischen Dreyecks BAC vorstellt, welches aus den Kreisen gebildet wird, welche die aus den Ebnen MSN, S'SM, S'SN in einer Kugel, deren Mittelpunct S, und deren Halbmesser dem der Tafeln gleich ist, entstehenden Schnitte, darbiethen würden. Man hat in diesem Dreyecke die Seiten AB, AC, BC, welche die respectiven Maaße der gegebenen Winkel NSS', MSS', MSN sind; und der gesuchte ist völlig dem Winkel A gleich, welcher daher nach der ersten Regel des verhergehenden §. gefunden werden kann.

## Dritter Abschnitt.

### Von der höhern Geometrie.

§. 59.

Die höhere Geometrie beschäftigt sich mit der Untersuchung der Eigenschaften mehrerer krummen Linien, und hat durch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie eine ganz neue Gestalt gewonnen. Der Zweck, den man überhaupt bey der Anwendung der Algebra auf die Geometrie beabsichtigt, ist dieser, die algebraischen Operationen zur Verbindung mehrerer Lehrsätze der Geometrie zu brauchen, um daraus Folgerungen zu ziehen. Auf diese Art sind wir in den beyden vorhergehenden Abschnitten zu den vorzüglichsten Formeln der ebnen und der sphärischen Trigonometrie gelangt. Ein jeder Satz, welcher eine gewisse Beziehung zwischen verschiedene gerade Linien von einer endlichen Größe einführt, kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden; und alle Umformungen, welche mit dieser Gleichung vorgenommen werden können, geben, in die gewöhnliche Sprache übersetzt, neue Sätze, welche Folgerungen aus dem sind, von welchem man ausgegangen ist. Allein dieser Gesichtspunct begreift nur einen sehr geringen Theil von dem, was die Anwendung der Algebra auf die Geometrie umfaßt. Dieser Zweig der mathematischen Wissenschaften im Allgemeinen betrachtet, begreift nicht nur die Untersuchung der Eigenschaften der Ausdehnung vermittelst der algebraischen Verfahrungsarten, sondern er muß auch zeigen, wie man vermittelst dieser Eigenschaften alles das darstellen soll, was nur irgend ein algebraischer Ausdruck bezeichnen kann: das heißt, man muß darin von den Constructionen der Figuren auf die Operationen des Calculs, und von diesen letztern auf die erste zurückkommen. Dieses sollen nacheinander die in diesem Abschnitte abgehandelten Aufgaben lehren.

Die algebraische Bezeichnungsart, welche die Bedingungen in Betreff der Zahlenaufgaben auszudrücken sehr nützlich ist, verschafft eine nicht geringere Bequemlichkeit bey denjenigen, welche die Geometrie betreffen. Diese letztern lassen sich eben so wie die erstern in Gleichungen bringen, sobald man aus dem Vortrage einer Aufgabe die Beziehung finden kann, welche zwischen den bekannten und unbekannten Größen statt findet; indessen muß man hierzu einige der Eigenschaften der Gattung von Größen, welche man betrachtet, zu Hülfe nehmen.

§. 60.

Da z. B. ein Dreyeck bestimmt wird, wenn seine drey Seiten bekannt sind, so muß sich auch durch dieses Mittel der Inhalt desselben bestimmen lassen, und man kann sich diese Aufgabe vorlegen:

**Wenn man die drey Seiten eines Dreyecks kennt, den Ausdruck für seinen Flächeninhalt zu finden.**

Da der Flächeninhalt eines Dreyecks der Hälfte des Products aus der Grundlinie in dessen Höhe gleich ist, so sieht man zuvörderst, daß sich die Aufgabe darauf bringen läßt, die Höhe zu finden, und wenn man im Dreyecke ABC Fig. 13., auf die Seite AC eine senkrechte Linie herab läßt, so bildet man zwey rechtwinklichte Dreyecke, welche die zwischen den Seiten AB, BC, der senkrechten BD und den durch diese senkrechte gebildeten Abschnitten AD und BD anzutreffenden Beziehungen angeben.

Denn wenn man die Seiten AB, BC, AC des Dreyecks durch c, $c'$, $c''$, den Abschnitt AD durch t und die senkrechte BD durch u bezeichnet, so werden die rechtwinklichten Dreyecke ABD, BDC geben

$$AB^2 = BD^2 + AD^2,\quad BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

Man hat überdies im ersten Dreyeck der Figur

$$DC = AC - AD,\ = c'' - t,$$

und im zweyten

$$DC = AD - AC,\ = t - c''.$$

Setzt man statt der Linien die Buchstaben, welche sie ausdrücken, und zieht man in Erwägung, daß $(c'' - t)^2 = (t - c'')^2$, so wird man sowohl in dem einen als im andern Dreyecke die Gleichungen

$$c^2 = u^2 + t^2,\quad c'^2 = u^2 + (c'' - t)^2$$

haben, welche nur die beyden unbekannten t und u enthalten, und folglich deren Werthe bestimmen werden.

Wenn man die zweyte Gleichung entwickelt, und sie von der ersten abzieht, so verschwinden die Glieder $u^2$ und $t^2$, und es wird dann kommen

$$c^2 - c'^2 = 2c''t - c''^2\ ^{*)},$$

woraus man zieht

$$t = \frac{c^2 - c'^2 + c''^2}{2c''};$$

da nun die Gleichung $c^2 = u^2 + t^2$,

$$u = \pm \sqrt{(c^2 - t^2)}$$

giebt, so kann man durch die Substitution des Werths von t diesen herleiten

$$u = \pm \sqrt{\left(c^2 - \frac{(c^2 - c'^2 + c''^2)^2}{4c''^2}\right)}$$

---

*) Ich will hierbey bemerken, daß diese Gleichung unter dieser Form angesetzt $c'^2 = c^2 + c''^2 - 2c''t$, in Rücksicht der Seite $c'$ oder BC den im §. 73. der Anfangsgründe der Geometrie vorgetragenen Satz ausdrückt.

oder

$$u = \frac{\pm \sqrt{[4c^2c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)^2]}}{2c''}.$$

Vermittelst dieser Formel kann man die Höhe eines Dreyecks finden, wenn dessen drey Seiten bekannt sind; und da der Ausdruck seines Flächeninhalts durch das Product aus der halben Grundlinie in die Höhe bestimmt wird, so kann man vermittelst des Vorhergehenden den Flächeninhalt finden, wenn die drey Seiten bekannt sind.

Da der Buchstabe $u$ die auf die Seite $c''$ des gegebenen Dreyecks herabgelassene senkrechte Linie bezeichnet, so wird der Flächeninhalt dieses Dreyecks seyn

$$\tfrac{1}{2} c''u = \tfrac{1}{4} \sqrt{[4c^2c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)^2]},$$

wenn man für $u$ den oben gefundenen Werth setzt.

Dieses ist der Ausdruck des Flächeninhalts eines Dreyecks durch seine Seiten. Wenn man ihn mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet, wird man gleich einsehen, daß er eben nicht unter der elegantesten Form dargestellt ist, denn er erscheint in Rücksicht auf jede der Seiten $c$, $c'$, $c''$ unter keiner symetrischen Gestalt, welches doch geschehen müßte, weil, wenn man darin von diesen Buchstaben den einen in den andern verwandelt, der Werth desselben unverändert bleiben muß. Er muß also offenbar eine solche Gestalt annehmen können, worin nur ähnliche Verbindungen der Buchstaben vorkommen, die er enthält; und diesen Zweck erreicht man, wenn man erwägt, daß die Größe $4c^2c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)$, als die Differenz zweyer Quadrate, sich in die Factoren

$$2cc'' + c^2 + c''^2 - c'^2, \quad 2cc'' - c^2 - c''^2 + c'^2$$

zerfällen läßt, welches auf

$$(c + c'')^2 - c'^2, \quad -(c - c'')^2 + c'^2$$

zurückkommt, die sich wiederum in folgende vier Factoren zerfällen lassen:

$$c + c' + c'', \quad c + c'' - c', \quad c + c' - c'', \quad c' + c'' - c;$$

man wird also haben

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(c + c' + c'')\,(c' + c'' - c)\,(c + c'' - c')\,(c + c' - c'')}.$$

Wenn man nun in Erwägung zieht, daß

$$c' + c'' - c = (c + c' + c'') - 2c$$
$$c + c'' - c' = (c + c' + c'') - 2c'$$
$$c + c' - c'' = (c + c' + c'') - 2c''$$

und setzt man $c + c' + c'' = 2s$, so wird man endlich finden, daß der Flächeninhalt des Dreyecks ABC durch

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{[2s \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - c') \cdot 2(s - c'')]}$$

ausgedrückt seyn wird, und sich auf

$$\sqrt{[s(s - c)\,(s - c')\,(s - c'')]}$$

reducirt, eine Formel, welche sowohl wegen des Nutzens, den sie zur Berechnung irgend einer ebnen Figur darbiethet, als wegen ihrer Eleganz sehr merkwürdig ist. Sie zeigt, **daß der Flächeninhalt eines Dreyecks der Quadratwurzel des Products aus der halben Summe der drey Seiten, multiplicirt mit den Differenzen zwischen dieser halben Summe und jeder der Seiten, gleich ist.**

## §. 61.

In der vorhergehenden Aufgabe suchte man bloß ein Resultat in Zahlen; es geschieht aber auch öfters, daß man Linien sucht.

Wenn z. B. verlangt würde, in dem Dreyecke ABC Fig. 19. ein Quadrat DEFG einzuschreiben, so müßte man die Aufgabe als aufgelöst betrachten, und dann zwischen den durch das Dreyeck uumittelbar gegebenen Linien und der Seite des Quadrats eine Beziehung aufsuchen, welche sich algebraisch darstellen läßt.

Man lasse in dieser Absicht die senkrechte BH herab, welche man als bekannt betrachten kann, weil man sie zu ziehen im Stande ist. Hiernächst geben die ähnlichen Dreyecke BAC, BDE folgende proportionen

$$AB : BD = AC : DE$$
$$AB : BD = BH : BI,$$

woraus folgt

$$AC : DE = BH : BI,$$

und diese letztere Proportion giebt eine Beziehung zwischen BI und DE; nun hängt BI auch von DE ab, denn BI = BH — IH, und nach der Erklärung vom Quadrat ist IH = DE. Bezeichnen wir nun die gegebenen AC und BH durch a und b, und durch x die unbekannte IH oder DE, so wird man haben

$$a : x = b : b - x,$$

woraus folgt

$$bx = ab - ax;$$

diese Gleichung vom ersten Grade aufgelöst, giebt

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

Wenn die geraden a und b nach einem gemeinschaftlichen Maaße bestimmt, oder in Zahlen ausgedrückt sind, so giebt die obige Formel, vermittelst arithmetischer Operationen, die Zahl, welche die Länge der geraden IH ausdrückt, und wenn man diese Zahl auf die gerade Linie BH trägt, so erhält man den Punct I, durch welchen die gerade DE geführt werden muß.

Es ist indessen nicht durchaus nothwendig zu den Zahlen seine Zuflucht zu nehmen, um den Punct I zu bestimmen, sondern die in dem Ausdruck für x angezeigten Operationen lassen sich auch an den Linien bewerkstelligen. Man sieht nehmlich, daß diese Unbekannte das vierte Glied dieser Proportion ist

$$a + b : a = b : x,$$

und daß folglich alles darauf zurückkommt, zu den drey Linien

$$a + b, \quad a \text{ und } b$$

eine vierte Proportionallinie zu finden.

Man hält es im Allgemeinen für zweckmäßiger, die Operationen, welche, um die Auflösung zu erhalten, verrichtet werden müssen, mit der Figur, welche die gegebenen Stücke der Aufgabe enthält, zu verbinden. Es kann demnach in der vorhergehenden Aufgabe der rechte Winkel CHB zur Bestimmung der gesuchten vierten Proportionallinie angewendet werden. Man trage nehmlich auf die verlängerte AC

$$1) \; HL = a = AC, \quad 2) \; LK = b = BH;$$

hierauf ziehe man BK und führe IL parallel zu BK, so wird der Punct I, durch welchen man erhalten wird

$$HK : HL = BH : IH,$$

zur Seite DE des Quadrats DEFG gehören.

## §. 62.

Auf eben die Art hat man mit Aufgaben von einem höhern Grade als vom ersten zu verfahren.

Man weiß, daß der Ausdruck: eine Linie nach dem mittlern und äußern Verhältniß theilen, nichts anders sagen will, als sie dergestalt zu theilen, daß der eine Abschnitt die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Linie und dem andern Abschnitt sey. Um diese Aufgabe algebraisch aufzulösen, bezeichne man die ganze Linie durch a und den unbekannten Abschnitt durch x; so wird der andre Abschnitt $a - x$ seyn, und man wird haben

$$a : x = x : a - x,$$

woraus man erhält

$$a^2 - ax = x^2;$$

und wenn man diese Gleichung auflöst, findet sich

$$x = - \tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}.$$

Die in dieser Auflösung angezeigten Operationen können an den Linien vermittelst eines rechtwinklichten Dreyecks verrichtet werden; denn da $a^2 + \frac{1}{4} a^2$ die Summe der Quadrate der Linien $a$ und $\frac{1}{2} a$ ist, so wird die Wurzelgröße $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} a^2)}$, die Hypothenuse AC des aus den beyden Catheten AB $= a$ und BC $= \frac{1}{2} a$ construirten rechtwinklichten Dreyecks ABC Fig. 20. seyn. Man hat also nur nöthig, um die Werthe von $x$ zu erhalten, die Linie AC mit der Linie BC $= \frac{1}{2} a$ durch die Addition oder durch die Subtraction zu verbinden, welches geschieht, wenn man BC von C in D auf AC, und von C in D' auf dessen Verlängerung trägt; denn man wird haben

$$AD = AC - DC = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4} a^2)} - \tfrac{1}{2} a,$$

woraus folgt $x = AD$

$$AD' = AC + DC = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4} a^2)} + \tfrac{1}{2} a,$$

woraus folgt $x = -AD'$.

Wenn nun die gerade Linie AD vermittelst eines Kreisbogens auf AB nach E getragen wird, so bildet man die im §. 130. der Anfangsgründe der Geometrie gegebene Auflösung; der andre Werth AD' löst die Aufgabe nicht ganz in dem Sinne auf, wie sie vorgetragen ist, sondern er thut der Gleichung ein Genüge, in welcher auch dieser Vortrag begriffen ist. In der That leitet man aus

$AD' : AB = AB : AD$, oder $x + a : a = a : x$,

eben so wie oben

$$x^2 + ax = a^2$$

her; allein die Linie AD' ist nun in dem Puncte D nach dem mittlern und äußern Verhältniß getheilt, und das größere Segment DD' ist der gegebenen Linie AB gleich. Was es mit dem Zeichen —, welches dem Werth von AD' vorgesetzt ist, für eine Bewandniß habe, soll weiter unten im §. 70. auseinandergesetzt werden.

§. 63.

Die vorhergehenden Beyspiele zeigen hinreichend, daß die algebraische Auflösung der bestimmten Aufgaben der Geometrie, mit der der Aufgaben in Rücksicht der Zahlen ähnliche Umstände darbiethen. Man muß zuvörderst die Aufgabe in eine Gleichung bringen, und dann den Ausdruck für die unbekannte daraus herleiten; anstatt aber den Werth des Ausdrucks vermittelst arithmetischer Operationen zu bestimmen, muß man vielmehr mit den bekannten Linien eine geometrische Construction vornehmen, welche mit den durch die algebraischen Bezeichnungen angezeigten correspondiren. So hat man in der Aufgabe des §. 61., deren Gleichung nur vom ersten Grade war, die unbekannte vermittelst der Proportionallinien bestimmt, und in der Aufgabe des vorhergehenden §., deren Gleichung vom zweyten Grade war, hat man zu den Eigenschaften des rechtwinklichten Dreyecks seine Zuflucht genommen. Diese Bestimmungen nennt man die Construction der Werthe der Unbekannten, und ich will nun die allen Aufgaben dieser beyden Grade gemeinschaftlichen Principien auseinandersetzen.

## §. 64.

Eine allgemeine Bemerkung, deren Richtigkeit zu bestätigen sich oft Gelegenheit finden wird, ist diese, daß, wenn im Vortrage der Aufgabe nur Linien vorkommen, und die gesuchte Größe ebenfalls eine Linie ist, der Ausdruck derselben immer im Zähler einen Factor mehr als im Nenner haben, und jede dieser Größen in homogene Glieder zu einander zerlegbar seyn wird. Der letzte der im vorhergehenden §. gefundenen Ausdrücke für x, erfüllt diese Bedingung; sein Zähler ist das Product aus zweyen Factoren, und der Nenner hat nur einen einzigen.

Hieraus folgt, daß man, wenn der Ausdruck irgend einer Linie keine Wurzelgrößen enthält, und alle darin vorkommenden Größen durch Linien ausgedrückt werden, die

Länge der ersten finden kann, wenn man zu den gegebenen Linien vermittelst des Zirkels vierte Proportionallinien sucht, ohne daß es erst nöthig sey zu den Zahlen seine Zuflucht zu nehmen. Folgendes Exempel wird dieses hinlänglich beweisen. Es sey

$$t = \frac{abc + d^3 - e^2 f}{gh + i^2};$$

da der Zähler dieses Ausdrucks aus Gliedern von dreyen Factoren zusammengesetzt ist, indeß die Glieder im Nenner nur zwey haben, so gehört er nach der vorhergehenden Bemerkung zu einer Linie. Setzt man nun

$$abc = kd^2, \quad e^2 f = k'd^2,$$
$$gh = k''d \quad i^2 = k'''d$$

so wird man haben

$$t = \frac{d^2 (k + d - k')}{d (k'' + k''')} = \frac{d (k + d - k')}{k'' + k'''};$$

man würde also $t$ erhalten, wenn man, nachdem die unbestimmten $k$, $k'$, $k''$, $k'''$ bestimmt seyn werden, zu den dreyen Linien $k'' + k'''$, $k + d - k'$, und $d$ eine vierte Proportionallinie sucht. Nun hat man vermittelst der oben angesetzten Gleichungen

$$k = \frac{abc}{d^2} = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{d}, \quad k' = \frac{e^2 f}{d^2} = \frac{ef}{d} \times \frac{e}{d},$$
$$k'' = \frac{gh}{d}, \quad k''' = \frac{i^2}{d};$$

man wird daher zu diesen Werthen vermittelst folgender Proportion gelangen

$$d : a = b : \frac{ab}{d}, \quad d : e = f ; \frac{ef}{d}$$
$$d : c = \frac{ab}{d} : \frac{abc}{d^2} = k, \quad d ; e = \frac{ef}{d} : \frac{e^2 f}{d^2} = k'$$
$$d : g = h : \frac{gh}{d} = k'', \quad d ; i = i : \frac{i^2}{d} = k''';$$

sucht man zu jeder derselben das vierte Glied vermittelst der Proportionallinien, so wird man nacheinander die Längen der durch

$$\frac{ab}{d},\quad \frac{abc}{d^2},\quad \frac{ef}{d},\quad \frac{e^2f}{d^2},\quad \frac{gh}{d},\quad \frac{i^2}{d}$$

ausgedrückten Linien erhalten, welche die Linien

$$k,\ k',\ k''\ \text{und}\ k'''$$

bestimmen werden, und vermittelst dieser kann man $t$ finden.

Es ist leicht einzusehen, daß der Geist der Methode, welche wir eben zur Construction eines algebraischen Ausdrucks gebraucht haben, darin besteht, den Zähler und Nenner des vorgelegten Ausdrucks in Producte von einer gewissen Anzahl einfacher Factoren, oder Factoren vom ersten Grade zu zerfällen, welches durch die gebrauchten Mittel immer geschehen kann.

Es giebt Fälle, wo sich diese Umformung unmittelbar bewerkstelligen läßt, ohne daß man erst nöthig hat, unbestimmte Größen einzuführen; der Ausdruck

$$t = \frac{c\,(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$$

ist von dieser Beschaffenheit; denn sein Zähler läßt sich verwandeln in

$$c\,(a + b)\,(a - b)$$

und sein Nenner kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{(a^2 + b^2)};$$

es kommt alsdann

$$t = \frac{(a+b)\,(a-b)\,c}{\sqrt{(a^2+b^2)}\,\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

welches durch die Proportionen

$$\sqrt{(a^2+b^2)} : a+b = c : \frac{(a+b)\,c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)} : a-b$$

$$= \frac{(a+b)\,c}{\sqrt{(a^2-b^2)}} : \frac{(a-b)\,(a+b)\,c}{\sqrt{(a^2+b^4)}\,\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

erhalten werden kann. Die in der Rechnung angewandte Wurzelgröße läßt sich leicht construiren, weil sie die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks ausdrückt, dessen beyde Catheten a und b sind.

## §. 65.

Das rechtwinklichte Dreyeck und der Kreis biethen uns die Hülfsmittel dar, die Quadratwurzel irgend einer in Linien ausgedrückten Größe zu construiren. Der Gebrauch des erstern ist offenbar, wenn die unter dem Wurzelzeichen enthaltene Größe die Summe oder die Differenz zweyer Quadrate ist. In der That hat man in diesem Falle $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ und $\sqrt{(a^2 - b^2)}$; der eine dieser Ausdrücke kann als die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks angesehen werden, dessen Catheten a und b sind, und der andre als eine Cathete eines eben dergleichen Dreyecks, in welchem die Hypothenuse a und die andre Cathete b ist.

Man kann auch durch eine Reihe dieser Dreyecke den Ausdruck

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$$

construiren; nachdem man zuvörderst $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ erhalten, bezeichne man diese Linie durch $\alpha$, welches geben wird

$$a^2 + b^2 = \alpha^2,$$

und die vorgelegte Größe wird alsdann seyn

$$\sqrt{(\alpha^2 + c^2 + d^2)};$$

man construire daher die Wurzelgröße $\sqrt{(\alpha^2 + c^2)}$ wie die vorhergehende; und bezeichnet man das Resultat dieser Operation durch $\beta$, so wird man haben

$$\alpha^2 + c^2 = \beta^2.$$

Es wird nun nur noch übrig bleiben $\sqrt{(\beta^2 + d^2)}$ zu finden, welches geschehen kann, wenn man die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks nimmt, dessen beyde Catheten $\beta$ und d sind. Es ist leicht, dieses Verfahren auf die

Fälle auszudehnen, wo die zu construirende Wurzelgröße eine größere Anzahl Quadrate enthält.

§. 66.

Wir wollen nun zur Anwendung des Kreises bey der Ausziehung der Quadratwurzelgrößen übergehen. Man weiß, daß die auf den Durchmesser errichtete senkrechte, die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten dieses Durchmessers ist (Geom. §. 128.); man wird daher $\sqrt{ab}$ erhalten, wenn man Fig. 21. $AP = a$, $BP = b$ nimmt, und auf die Summe AB dieser beyden, als einen Durchmesser, einen Kreis beschreibt; die aus dem Punct P errichtete senkrechte Linie PM, welche alsdann die mittlere Proportionallinie zwischen AP und BP ist, wird $\sqrt{ab}$ seyn.

Man kann auch zwischen irgend zweyen Linien a und b eine mittlere Proportionallinie finden, wenn man die größern derselben für den Durchmesser AB des Kreises nimmt, und die andre von A nach P trägt; errichtet man dann die Ordinate PM und zieht die Chorde AM, so wird man die verlangte mittlere Proportionallinie finden (Geom. §. 129.).

Vermittelst dieser Methoden kann man jede Wurzelgröße vom zweyten Grade construiren, von welcher Beschaffenheit auch die darin enthaltene Größe seyn mag. Es sey z. B.

$$\sqrt{\left(a^2 + bc - \frac{def}{g}\right)},$$

so setze man

$$bc = ak, \quad \frac{def}{g} = ak';$$

so wird der vorgelegte Ausdruck werden

$$\sqrt{(a^2 + ak - ak')} = \sqrt{(a + k - k')\,a},$$

und um ihn zu erhalten, ist es hinreichend zwischen zweyen

Linien, welche respectiv den Linien $a + k - k'$ und $a$ gleich sind, eine mittlere Proportionallinie zu nehmen. Es ist übrigens offenbar, daß die Linien $k$ und $k'$ nach §. 64. vermittelst Proportionallinien gefunden werden können, weil die Gleichungen, von denen sie abhängen,

$$k = \frac{bc}{a}, \quad k' = \frac{def}{ag}$$

geben, und auf diese Proportionen führen

$$a : b = c : k$$

$$a : d = e : \frac{de}{a}, \qquad g : f = \frac{de}{a} : \frac{def}{ag}.$$

§. 67.

Die Größen, welche man zu construiren sich vorsetzt, könnten auch nicht homogen seyn; allein dieses wird nur dann der Fall seyn, wenn man einige Linien der Einheit gleich gesetzt, oder wenn man eine Zahl durch einen Buchstaben, oder eine Linie durch eine Zahl dargestellt hat; und die angezeigten Methoden leiden durch diesen Umstand keine Abänderung, wofern man die als Einheit genommene Linie in allen Gliedern, worin sie sich befinden müßte, wieder erscheinen läßt, und ihr angemessene Exponenten giebt.

Wenn man z. B. $\sqrt{\left(a + \frac{bc}{d^3}\right)}$ hätte, und aus dem Vortrage der Aufgabe, die auf diesen Ausdruck geführt hat, wüßte, daß er zu einer Linie gehören muß, so wird man einsehen, daß jede der unter dem Wurzelzeichen enthaltenen Größen vom zweyten Grade seyn müßte, und daß man daher, wenn die Einheit durch $n$ bezeichnet wird, an statt $a$, und $\frac{bcn^3}{d^3}$ statt $\frac{bc}{d^3}$ schreiben müßte, welches im absoluten Werth dieser Größe nichts ändert, weil $n = 1 = n^3$, und im Allgemeinen $n^m = 1$, was auch $m$ seyn mag. Man wird auf diese Art erhalten

$$\sqrt{\left(an + \frac{bcn^3}{d^3}\right)} = \sqrt{\left[n\left(a + \frac{bcn^2}{d^3}\right)\right]},$$

welche sich leicht construiren läßt.

Wir wollen hierbey anmerken, daß man vermittelst des Vorhergehenden die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl durch eine geometrische Construction finden kann, wenn man eine mittlere Proportionallinie zwischen zweyen Linien nimmt, von denen eine für die Einheit genommen wird, und die andre zu dieser ein durch die vorgelegte Zahl ausgedrücktes Verhältniß hat. So würde man z. B. $\sqrt{\frac{7}{5}}$ erhalten, wenn man die mittlere Proportionale zwischen zweyen Linien sucht, von denen eine $\frac{7}{5}$ der andern ist, weil $\sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{1 \times \frac{7}{5}}$.

## §. 68.

Es ist nun nichts leichter, als den Ausdruck der Wurzeln der Gleichung vom zweyten Grade $x^2 - ax = b^2$ zu construiren, welche alle Gleichungen dieses Grades in sich begreift. In der That erhält man, wenn man den Werth von $x$ daraus bestimmt

$$x = \tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 + b^2)};$$

es kommt nun nur noch darauf an, die Wurzelgröße $\sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b^2)}$ zu construiren (§. 65.), und dann die Summe oder die Differenz dieses Resultats und der Linie $\frac{1}{2} a$ zu nehmen, um die Größe der Wurzeln der vorgelegten Gleichung zu finden.

Wenn diese Gleichung die Form $x^2 - ax = -b^2$ hätte, so würde man haben

$$x = \tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - b^2)}.$$

Die Construction ist in diesem Falle nur in sofern unterschieden, daß die Wurzelgröße durch eine Cathete eines rechtwinklichten Dreyecks ausgedrückt seyn wird, anstatt sie vorher durch die Hypothenuse ausgedrückt war, und daß die Existenz dieses Dreyecks aufhört, wenn man $\frac{1}{2}a < b$ hat: denn nimmt man alsdann auf einer der Seiten des rechten Winkels ABC Fig. 22. die Linie $AB = b$, so wird der aus dem Puncte A, als aus einem Mittelpunct, mit einem kleinern Halbmesser als AB beschriebene Kreis DE, die andre Seite BC nicht erreichen. Dieser Umstand stimmt auch mit der Theorie der Gleichungen vom zweyten Grade überein, welche für den gegenwärtigen Fall imaginäre Werthe giebt.

Man kann das Vorhergehende auf folgende Aufgabe anwenden: **Wenn die Summe oder die Differenz zweyer den rechten Winkel einschließenden Seiten eines Rechtecks, und der Flächeninhalt desselben gegeben ist, dieses Rechteck zu construiren.**

Es sey $b^2$ der Flächeninhalt des verlangten Rechtecks, $a$ die Summe oder die Differenz der den rechten Winkel einschließenden Seiten, und $x$ eine dieser Seiten; so wird die andre im ersten Falle durch $a - x$, und im andern durch $a + x$ vorgestellt werden können; der Flächeninhalt wird im ersten Falle $(a - x)\,x$, und im zweyten $(a + x)\,x$ seyn, so daß man diese beyden Gleichungen haben wird:

$$ax - x^2 = b^2, \qquad ax + x^2 = b^2,$$

welche, wenn sie aufgelöst werden, die Werthe von $x$ geben, die nach der vorhergehenden Methode construirt werden können.

## §. 69.

Man hat nicht erst nöthig, die Gleichungen vom zweyten Grade aufzulösen, um die Wurzeln vermittelst einer Construction zu finden, sondern sie lassen sich unmittelbar vermittelst der Eigenschaften der Proportionallinien im Kreise finden.

Die Gleichung $x^2 + ax = b^2$, welche unter dieser Form

$$x\,(x + a) = b^2$$

angesetzt werden kann, läßt sich auf die Eigenschaften der aus einem und demselben Puncte ausgehenden Secanten und Tangenten zurückführen (Geom. §. 126.); denn wenn man Fig. 23. mit dem Halbmesser $BC = \frac{1}{2} a$ einen Kreis beschreibt, diesem eine Tangente AB führt, deren Länge gleich b sey, und durch die Puncte A und C die Secante AC führt, so wird man, wenn die Linie AD durch x bezeichnet wird, offenbar haben

$$AD' = AD + DD' = AD + 2BC = x + a,$$

und da die oben citirte Eigenschaft $AD \times AD' = AB^2$ giebt, so folgt daraus

$$x(x + a) = b^2$$

welches die vorgelegte Gleichung ist.

Hätte man $x^2 - ax = b^2$, so müßte man setzen $x = AD'$

$$AD = x - a, \quad \text{und } x(x - a) = b^2.$$

Da die gegenwärtige Construction keiner Ausnahme unterworfen ist, so lehrt sie uns, daß die Wurzeln der vorgelegten Gleichungen reel gefunden werden, so lange $b^2$ im zweyten Theile, so wie $x^2$ im ersten Theile positiv ist.

Die Gleichung $x^2 - ax = -b^2$ verwandelt sich in $ax - x^2 = b^2$ und kann auch folgendermaaßen geschrieben werden

$$x(a - x) = b^2.$$

Unter dieser letztern Form bezieht sie sich auf die Eigenschaften der in einem Kreise sich schneidenden Sehnen; denn wenn man Fig. 24. auf einen Durchmesser $AB = a$ einen Kreis beschreibt, aus dem Puncte A die senkrechte $AC = b$ errichtet, dann zu AB die Paralelle CM zieht, und von den Puncten M und M', wo die Linie CM den Kreis schneidet, auf AB die senkrechten PM und P'M' herabläßt, so wird man haben

$$AP \times BP = AP(AB - AP) = PM^2,$$

oder

$$AP\,(a - AP) = b^2,$$

ferner

$$AP' \times BP' = AP'\,(AB - AP') = P'M'^2,$$

oder

$$AP'\,(a - AP') = b^2;$$

woraus man sieht, daß man, wenn für x successiv die geraden AP und AP' genommen werden, auf die vorgelegte Gleichung

$$ax - x^2 = b^2$$

zurückkommt, und daß folglich die durch das obige Verfahren erhaltenen geraden Linien AP und AP' die Werthe der unbekannten x seyn werden.

Wenn AC größer als der Halbmesser des Kreises, oder als $\frac{1}{2}a$ ist, so wird offenbar die gerade Linie CM den Kreis nicht mehr begegnen, und folglich keine Bestimmung der unbekannten darbiethen; allein die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind in diesem Falle imaginäre.

Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax = - b^2$ sind von denen der Gleichung $x^2 - ax = - b^2$ nur in sofern unterschieden, daß sie mit dem Zeichen — behaftet sind, allein ihre absolute Größe wird immer durch das eben gezeigte Verfahren erhalten.

## §. 70.

Bey der Anwendung der Algebra auf die Geometrie muß im Allgemeinen das Zeichen — eben so wie bey den Zahlen erklärt werden, indem man nehmlich den Vortrag der Aufgabe auf eine gewisse Art abändert, oder wenn man die damit behafteten Linien in einem demjenigen entgegengesetzten Sinne nimmt, in welchem man sie vorher angenommen hat.

Ehe wir weiter gehen, will ich die Leser erinnern, daß die negativen Größen ihren Ursprung in den Subtractionen haben, welche in der angezeigten Ordnung nicht verrichtet werden können, weil die abzuziehende Größe diejenige übertrift, von welcher dieser Abzug geschehen soll. Man sieht aus diesem Umstand, daß im Vortrage der Aufgabe oder wenigstens in der Anwendung desselben auf den besondern Fall, den man beabsichtigt, ein Fehler anzutreffen seyn muß; und berichtigt man diesen Fehler, das heißt, modificirt man den Vortrag um die vorher unmöglich zu vollziehende Subtraction möglich zu machen, so gelangt man zu einem positiven Resultat. Allein bey vielen Aufgaben, besonders bey allen denen, welche auf Gleichungen vom ersten Grade führen, ist man dieser Mühe überhoben; denn das Zeichen des Resultats zeigt selbst die Abänderung an, deren der Vortrag fähig ist; und wenn die negativen Werthe nach den Regeln zur Verrichtung der Operationen mit den mit dem Zeichen — behafteten Größen angebracht werden, so leisten sie eben so wie die positiven Größen den Aufgaben ein Genüge; dieses hat die neuern Geometer bewogen, die Benennung falsche Wurzeln, mit welcher man vormahls die negativen Wurzeln der Gleichungen belegte, zu ändern.

Man muß daher auch bey den geometrischen Constructionen die negativen Werthe, welche die Algebra gewissen Linien giebt, durch die Subtraction erklären; und um eine Linie von einer andern abzuziehen, ist es hinreichend, die erste von einem der äußern Puncte der zweyten aus auf diese zweyte zu tragen; allein bey diesen Operationen giebt es einige Betrachtungen, welche von der Art abhängen, nach welcher die Linien beschrieben werden.

Es sey zuvörderst CD Fig. 25. die von AB abzuziehende Linie; da die erste kleiner als die letztere ist, so wird, wenn man diese erste von B nach c trägt, ihre Differenz zur rechten Seite des Punctes A liegen; wenn man aber die größere Linie C′D′ von AB abzuziehen hätte, und man trüge von dem Punct B auf AB diese abzuziehende Linie, so wird die Differenz beyder vorgelegten Linien durch Ac′ auf der Verlängerung der Linie AB angegeben seyn, und folglich auf der linken Seite des Punctes A liegen, das heißt, von einer entgegengesetzten Seite vom Resultat Ac der ersten Operation. Mit dieser Aenderung der Lage stimmt auch das Zeichen — überein.

Es könnte beym ersten Anblick scheinen, daß man die an den Linien AB und C′D′ angezeigte Subtraction dadurch verrichten muß, daß man die kleinern auf die größern trägt, weil man eben so bey den Zahlen verfährt, wenn man die kleinere von der größern abzieht; man muß aber in Rücksicht der Linien in Erwägung ziehen, daß sie im Allgemeinen dazu gebraucht weeden, die Abstände mehrerer Puncte gegen einen andern, nach welchem man alle übrige bestimmt, und welchen man als fest betrachtet, anzugeben; sie erhalten alsdann ihre Zunahmen durch den diesem Puncte entgegenstehenden äußersten Punct, und die Subtraction, welche ihrer Natur nach das entgegengesetzte der Addition ist, aus welcher im Allgemeinen eine Zunahme erfolgt, muß sich auch in einem diesem Sinne entgegengesetzten verrichten lassen, und folglich auf die Seite übergehen, wo die Linien abnehmen. Daher rührt es auch, daß wenn der Punct A auf der geraden Linie AB der feste Punct ist, von welchem wir reden, die Subtraction von CD oder von C′D′ vom Puncte B aus verrichtet werden muß. Die Stetigkeit der Linien, und die Möglichkeit sie beyderseits unbegränzt verlängern zu können, giebt, wie wir eben gesehen haben, einerley Mittel, die Subtraction an denselben verrichten zu können, wenn gleich die abzuziehende Linie die größere von beyden ist. Folgende sehr einfache Aufgabe wird das eben gesagte mehr bestätigen.

§. 71.

In dem Dreyeck ABC Fig. 26. zur Seite AC eine Linie DE paralell zu führen, welche der gegebenen Linie MN gleich sey.

Da die Seiten des Dreyecks bekannt sind, so setze ich

$$AB = a, \quad AC = b, \quad MN = c;$$

und ich nehme den Abstand AD für die unbekannte, weil die Lage einer zu einer andern paralellen Linie durch einen einzigen ihrer Puncte bestimmt wird. Wird daher $AD = x$ gesetzt, so werde ich haben $BD = a - x$, und die ähnlichen Dreyecke BAC, BDE werden geben

$$AB : AC = BD : DE$$

oder

$$a : b = a - x : c,$$

folglich

$$ab - bx = ac,$$

$$x = \frac{ab - ac}{b} = \frac{a\,(b - c)}{b}.$$

Der Werth von x läßt sich nach §. 64. construiren, wenn man von $AC = b$ die gerade $CF = c$ abzieht, und FD paralell zu CB führt; denn die Aehnlichkeit der Dreyecke ABC, AFD biethet diese Proportion dar:

$$AC : AB = AF : AD$$

$$b : a = b - c : x = \frac{a\,(b - c)}{b}.$$

Wenn die Linie MN größer als AC wäre, so würde sie nicht ganz innerhalb des Dreyecks ABC liegen, man müßte dann die Seiten AB und AC verlängern; der Punct D würde alsdann auf die andre Seite des Punctes A in den Punct D′ übergehen, und dies zeigt auch genau der Calcul und die Construction an.

In der That hätte man, wenn $M'N' > AC$ wäre, $c > b$, und die Größe $b - c$ würde folglich negativ werden; wenn man indessen die Subtraction der Linien dergestallt verrichtet, wie sie im vorhergehenden §. gezeigt worden, so würde der Punct F in F′ übergehen, und die durch den Punct F′ zu BC paralell geführte Linie F′D′ wird nur die Verlängerung der Seite AB in D′ treffen können.

## §. 72.

Im Allgemeinen müssen, so oft es darauf ankommt, Distanzen nach einem festen Puncte, entweder auf einer und derselben Linie, oder auf paralelle Linien zu bestimmen, die mit dem Zeichen — behafteten, eine den mit dem Zeichen + behafteten entgegengesetzte Lage annehmen.

Denn wenn man die respective Lage zweyer Puncte zu einander betrachtet, deren Distanzen auf irgend einer geraden Linie durch $a + b$ und $a - c$ ausgedrückt sind, so wird offenbar der gegenseitige Abstand dieser beyden Puncte $b + c$ seyn, weil $(a+b) - (a-c) = b + c$; um sie nun solchergestalt gegen irgend eine gerade Linie A′B′ Fig. 27. zu legen, muß man zuvörderst, es sey auf der einen oder der andern Seite dieser Linie, in der Entfernung $AA' = a$ eine paralelle AB ziehen, und dann noch zwey andre Paralellen zu dieser Linie führen, die eine QM in der Entfernung $AQ = b$ außerhalb der erstern, und die andre Q′M′ zwischen beyden erstern in dem Abstande $AQ' = c$. Durch dieses Mittel werden alle, so wie M und M′ in den Durchschnitten der letzten Paralellen und einer auf A′B′ senkrechten Linie, liegende Puncte zu einander den erforderlichen Abstand haben, und werden sich in Rücksicht der mittlern Paralellen AB in einer entgegengesetzten Lage befinden, nach welcher ihre Entfernungen respectiv durch $+ b$ und $- c$ angezeigt werden. Es ist leicht einzusehen, daß beyde auf einerley Seite von AB liegen würden, wenn ihre Distanzen in Rücksicht auf $A'B'$ durch $a + b$ und $a + c$ ausgedrückt wären, weil ihr gegenseitiger Abstand alsdann $b - c$ ist.

Auf diese Art werden die Sinus, welche die Distanzen der äußern Puncte der Bogen vom Durchmesser $AA'$ Fig. 10., und die Cosinus, welche die Distanzen vom Durchmesser $BB'$ angeben, ihre Zeichen ändern, wenn sie von einer Seite dieser Durchmesser zur andern übergehen (§. 23.). Die Tangente beobachtet in Rücksicht des Durchmessers $AA'$ aus denselben Gründen dasselbe Gesetz.

## §. 73.

Diese Betrachtungen lassen sich nicht unmittelbar auf die Secante anwenden, weil ihre Richtung in jedem Augenblick geändert wird; indessen hat sie nichts desto weniger ein Kennzeichen ihrer verschiedenen Bogen, welches sich aus ihrem analytischen Ausdruck $\sec a = \frac{R^2}{\cos a}$ herleiten läßt; allein nur bey den Linien, welche immer dieselbe Richtung beybehalten, stimmt die Aenderung der Zeichen unmittelbar mit der Aenderung der Lage überein *).

Die geraden Linien $AD$ und $AD'$, welche die Wurzeln der Gleichung vom zweyten Grade $x^2 + ax = a^2$ (§. 63.) vorstellen, sind, ob sie gleich zu Werthen von verschiedenen Zeichen gehören, dennoch nicht einander entgegengesetzt;

---

*) Es scheint mir, daß sich von der Aenderung des Zeichens der Secante eine sehr natürliche Erklärung geben läßt, wenn man in Erwägung zieht, daß diese Linie eine wirklich entgegengesetzte Lage annimmt, wenn sie die Tangente auf einer entgegengesetzten Seite als vorher erreicht. In der That erreicht bey den Bogen $BA'$ und $A'B'$, für welche der analytische Ausdruck die Zeichen ändert, nicht der Halbmesser $CM$ die Tangente $MN'$, sondern der ihm entgegengesetzte.

wenn es indessen darauf ankäme, sie zur Auflösung einer Aufgabe anzuwenden, worin sie als Distanzen von einem festen Puncte betrachtet, und auf einer Linie von einer beständigen Richtung gemessen werden, so müßte man sie nach der Regel des §. 71. auf verschiedene Seiten dieses Punctes tragen.

In der That kann auch die Aufgabe des §. 62. folgendermaßen vorgetragen werden:

**Auf der geraden Linie AB = a Fig. 20. einen Punct E von der Beschaffenheit zu finden, daß der Abstand AE vom Puncte A, die mittlere Proportionallinie zwischen dem Abstand des andern äußersten Punctes B und der ganzen Linie AB sey.** Da alsdann die beyden Werthe der unbekannten AD und AD′ sind, so muß die letztere, welche sich mit dem Zeichen — behaftet findet, nach AE′ auf der andern Seite des Punctes A in Rücksicht auf den Punct B getragen werden. Dieser Schluß ist leicht zu probiren; denn man hat

$$AE' = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$
$$BE' = \tfrac{3}{2}a + \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)},$$

woraus folgt

$$AB \times BE' = a\left(\tfrac{3}{2}a + \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}\right)$$
$$= \left(-\tfrac{1}{2}a - \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}\right)^2 = AE'^2.$$

Folgende Aufgabe ist noch brauchbarer zu zeigen, wie man die verschiedenen Auflösungen, welche eine und dieselbe Gleichung darbiethet, zu verstehen hat.

**Aus einem Puncte E Fig. 28., welcher gegen die auf einander senkrechten AB und AC irgend eine bekannte Lage hat, eine gerade Linie dergestalt zu führen, daß der zwischen beyden gegebenen Linien enthaltene Theil D′F′ derselben von einer gegebenen Größe m sey.**

Um die Lage der Linie D′F′ zu bestimmen, von der man schon weiß, daß sie durch den Punct E gehen muß, braucht man offenbar nur noch einen derselben zu bestimmen, den man vorläufig nach Belieben annehmen kann; ich nehme deshalb AD′, und da der Punct E gegeben ist, so kann man die durch diesen Pnnct zu AB und AC paralell geführten Linien GE und EH als bekannt annehmen; und ich werde daher setzen

$$GE = a, \quad HE = b, \quad AD' = y'.$$

Dieses vorausgesetzt, geben die ähnlichen Dreyecke GED′ und F′AD′

$$GD' : GE = AD' : AF';$$

nun ist

$$GD' = AD' - AG = AD' - HE = y - b,$$

folglich wird man haben

$$y - b : a = y : AF' = \frac{ay}{y - b}.$$

Da nun das Dreyeck AD′F′ in A rechtwinklicht ist, so hat man die Gleichung

$$AD'^2 + AF'^2 = DF'^2,$$

welches nach den vorhergehenden Rechnungen und Constructionen sich in

$$y^2 + \frac{a^2y^2}{(y - b)^2} = m^2$$

verwandelt, oder in

$$y^4 - 2by^3 + (b^2 + a^2 - m^2)\, y^2$$
$$+ 2bm^2y - b^2m^2 = 0 \; . \; . \; (1)$$

wenn sie entwickelt und nach y geordnet wird.

Diese Gleichung ist vom vierten Grade, weil die vorgelegte Aufgabe im Allgemeinen vier Auflösungen hat. Es ergiebt sich auch aus dem bloßen Anblick der Figur, daß man den Bedingungen der vorgelegten Aufgabe auf vier verschiedene Arten ein Genüge thun kann, nehmlich:

Durch die in dem rechten Winkel BAC, worin sich der gegebene Punct E befindet, geführten Linien $D'F'$ und $D''F''$.

Ferner durch die Linien $D'''F'''$ und $D''''F''''$, welche in den Nebenwinkeln $CAB'$ und $BAC'$ des gegebenen Winkels BAC liegen.

Es ist leicht einzusehen, daß die Auflösungen des Winkels BAC unmöglich werden können, wenn die Größe m unter einer gewissen Gränze ist, welche von der Lage des Punctes E gegen die geraden Linien AB und AC abhängt; und daß aber die beyden andern Auflösungen immer reell sind.

Es ist nicht weniger einleuchtend. daß die Aufgabe sich vereinfachen läßt, ohne von ihren Auflösungen zu verlieren, wenn der Abstand des Punctes E von AB und AC gleich angenommen wird; denn es würde alsdann hinreichend seyn, eine von denen des Winkels ABC, und eine der beyden übrigen zu kennen, um alle vier Auflösungen zu haben.

Hätte man z. B. $D'F'$, so könnte man $D''F''$ daraus herleiten, wenn man $AF'' = AD'$ nimmt, weil der Punct E gegen die beyden geraden Linien AC und AB einerley Lage hat; man könnte aus eben der Ursache $D''''F''''$ aus $D'''F'''$ herleiten, wenn man $AF'''' = AD'''$ nimmt.

Nächst dieser Bemerkung setze ich $GE = HE$ oder $a = b$; und die vorgelegte Gleichnng wird sich dann in

$$y^4 - 2ay^3 + 2a^2y^2 - m^2(y^2 - 2ay + a^2) = 0 \ldots . (2)$$

verwandeln.

Aus dieser Gleichung läßt sich noch nicht abnehmen, in wie fern sie leichter als die vorhergehende auflösbar sey, allein die oben beygebrachte Beziehung zwischen den verschiedenen Auflösungen wird die Sache in Wirklichkeit setzen.

Da die Dreyecke $D'AF'$ und $D''AF''$, $D'''AF'''$ und $D''''AF''''$ gleich sind, so folgt, daß die Winkel $A'F'A$ und

$D''F''A$, $D'''F'''A$ und $D''''F''''A$ Ergänzungen zu einander sind, und daß man folglich, sobald man die Winkel $D'F'A$ und $D'''F'''A$ kennt, auch die beyden andern hat, und alle Auflösungen der Aufgabe werden bekannt seyn; da man aber auf diese Art nur zwey Auflösungen unmittelbar zu finden braucht, so ist es vortheilhaft, den Winkel zu bestimmen, welche die zwischen den beyden Linien AB und AC enthaltene Linie, mit einer dieser Seiten, z. B. mit AB machen muß.

Nimmt man die Tangente dieses Winkels für die unbekannte, so zeigt das Dreyeck $D'EG$, daß

$$\text{tang } D'F'A = \text{tang } D'EG = \frac{D'G}{G'E}$$

$$= \frac{y-b}{a} = \frac{y-a}{a}.$$

Setzt man nun $\frac{y-a}{a} = z$, so wird man haben

$$y = az + a,$$

und substituirt man diesen Werth in die Gleichung (2), so wird man nach den Reductionen

$$a^4z^4 + 2a^4z^3 + (2a^4 - a^2m^2)z^2 + 2a^4z + a^4 = 0,$$

oder

$$z^4 + 2z^3 + \frac{(2a^2 - m^2)}{a^2} z^2 + 2z + 1 = 0 . \quad (3)$$

erhalten.

Es ist nun leicht einzusehen, daß wenn die Größe $z'$ dieser Gleichung ein Genüge thut, es auch die Größe $\frac{1}{z'}$ thun wird *); und wenn man sie folgendermaßen schreibt

---

*) Diese Gleichung ist von derjenigen Gattung, welche man zurückkehrende nennt. Man findet im §. 41. des zweyten Theils der Algebra die Art, sie so viel als möglich auf einen niedrigern

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = \frac{m^2}{a^2} z^2,$$

man sieht leicht ein, daß, wenn zu jedem Theil $z^2$ hinzugesetzt wird, der erste Theil ein vollkommnes Quadrat wird,

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 + z^2 = (z^2 + z + 1)^2;$$

man hat also

$$(z^2 + z + 1)^2 = \frac{m^2}{a^2} z^2 + z^2,$$

woraus folgt

$$z^2 + z + 1 = \pm z \sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + 1\right)},$$

welches auf

$$z^2 + \frac{a \mp \sqrt{m^2 + a^2}}{a} z + 1 = 0$$

gebracht wird.

Diese Gleichung muß wegen der doppelten Form, deren der Coefficient des zweyten Gliedes fähig ist, als zwey Gleichungen vom zweyten Grade angesehen werden; und sie giebt nach einander

$$z^2 + \frac{a + \sqrt{m^2 + a^2}}{a} z + 1 = 0$$

$$z^2 + \frac{a - \sqrt{m^2 + a^2}}{a} z + 1 = 0.$$

Bezeichnet man nun die beyden Wurzeln der ersten durch $z'$, $z''$, und die der zweyten durch $z'''$, $z''''$, so hat man

$$z'z'' = 1, \quad z'''z'''' = 1;$$

und da $z$ die Tangente eines Winkels ausdrückt, bey welchem der Halbmesser $= 1$ genommen ist, so folgt, daß die

---

Grad zu bringen; und vermittelst der am angeführten Orte gezeigten Umformungen, reducirt sich die vorgelegte Gleichung auf den zweyten Grad.

Werthe $z'$, $z''$ zu zweyen einander ergänzenden Winkeln gehören, und daß eben dieß bey $z'''$ und $z''''$ der Fall ist (§. 9.), welches mit der letzten Bemerkung S. 108. übereinstimmt.

Löst man die obigen Gleichungen auf, so kommt

$$z' = \frac{a + \sqrt{m^2 + a^2} + \sqrt{(-2a^2 + m^2 + 2a\sqrt{m^2 + a^2})}}{2a}$$

$$z'' = \frac{a + \sqrt{m^2 + a^2} - \sqrt{(-2a^2 + m^2 + 2a\sqrt{m^2 + a^2})}}{2a}$$

$$z''' = \frac{a - \sqrt{m^2 + a^2} + \sqrt{(-2a^2 + m^2 - 2a\sqrt{m^2 + a^2})}}{2a}$$

$$z'''' = \frac{a - \sqrt{m^2 + a^2} - \sqrt{(-2a^2 + m^2 - 2a\sqrt{m^2 + a^2})}}{2a}.$$

Von diesen vier Werthen werden immer zwey, nehmlich die beyden ersten, reell seyn; die beyden andern werden imaginär, wenn $2a^2 + 2a\sqrt{m^2 + a^2} > m^2$ wird, weil in diesem Falle die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe negativ wird; bevor man aber zu diesem Gliede gelangt, werden dieselben Werthe einander gleich, wenn $2a^2 + 2a\sqrt{m^2 + a^2} = m^2$.

Um diesen Fall kennen zu lernen, muß man die vorige Gleichung unter der Form

$$2a^2 - m^2 = -2a\sqrt{m^2 + a^2}$$

ansetzen, und wenn man das Wurzelzeichen hinwegschaft, erhält man

$$-4a^2m^2 + m^4 = 4a^2m^2;$$

dividirt man durch $m^2$, so erhält man ein Resultat, welches

$$m^2 = 8a^2, \text{ oder } m = \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}$$

giebt, woraus zu ersehen ist, daß man in dem Winkel BAC durch den Punct E keine kleinere gerade Linie als $2a\sqrt{2}$ ziehen kann.

Die Werthe von $z'$, $z''$, $z'''$, $z''''$ verwandeln sich hiernach in

$$z' = 2 + \sqrt{3},\quad z'' = 2 - \sqrt{3},\quad z''' = z'''' = -1$$

Die Construction der Ausdrücke für $z'$, $z''$, $z'''$, $z''''$ hängt bloß von der der Ausdrücke

$$\sqrt{a^2+m^2},\quad \sqrt{(-2a^2+m^2+2a\sqrt{m^2+a^2})}$$
$$\sqrt{(-2a^2+m^2-2a\sqrt{m^2+a^2})}$$

ab. Der erste wird leicht erhalten, weil er die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks ausdrückt, dessen Seiten $a$ und $m$ sind; in Ansehung der letztern muß man in Erwägung ziehen, daß sie respektiv in

$$\sqrt{[(a+\sqrt{a^2+m^2})^2 - 4a^2]},$$
$$\sqrt{[(a-\sqrt{a^2+m^2})^2 - 4a^2]}$$

verwandelt werden können, und daß folglich der erste eine Seite eines rechtwinklichten Dreyecks ausdrückt, dessen Hypothenuse und dessen dritte Seite $a+\sqrt{a^2+m^2}$ und $2a$ sind, und der andre ist die eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen Hypothenuse und dritte Seite $a-\sqrt{a^2+m^2}$ und $2a$ sind. Setzt man nun

$$\sqrt{a^2+m^2} = n,\quad \sqrt{[(a+\sqrt{a^2+m^2}-4a^2]} = p$$
$$\sqrt{[(a-\sqrt{a^2+m^2}-4a^2]} = q,$$

so wird kommen

$$z' = \frac{a+n+p}{2a},\quad z'' = \frac{a+n-p}{2a}$$
$$z''' = \frac{a-n+q}{2a},\quad z'''' = \frac{a-n-q}{2a}.$$

Kennt man nun die Tangenten $z'$, $z''$, $z'''$, $z''''$, so kann man daraus herleiten

$$D'G = GE \tan D'EG = GE \tan D'F'A = az'$$
$$D''G = GE \tan D''EG = GE \tan D''F''A = az''$$
$$D'''G = GE \tan D'''EG = GE \tan D'''F'''A = az'''$$
$$D''''G = GE \tan D''''EG = GE \tan D''''F''''A = az'''',$$

woraus folgt

$$D'G = \frac{a+n+p}{2},\quad D''G = \frac{a+n-p}{2}$$

$$D'''G = \frac{a-n+q}{2},\quad D''''G = \frac{a-n-q}{2},$$

und sobald man die Länge dieser vier Linien hat, werden sich die Puncte $D'$, $D''$, $D'''$, $D''''$ sogleich finden lassen *).

## §. 75.

Wenn wir anstatt den Winkel, welchen die gegebene Linie mit der Achse AB der Abcissen macht, für die unbekannte anzunehmen, den Abstand des Punctes E von dem auf der Mitte dieser Linie genommenen Punct K gesucht hätten: so würden . r, wenn

$$EK = x,\ D'K = F'K = \frac{m}{2} = l$$

gesetzt wird, folgende Gleichungen erhalten

$$D'E = D'K + EK = l + x$$

$$F'E = F'K - EK = l - x$$

$$F'H = \sqrt{(EF'^2 - EH^2)} = \sqrt{[(l-x)^2 - a^2]};$$

und die ähnlichen Dreyecke $D'GE$, $EHF'$ würden geben

$$D'E : EG = EF' : F'H'$$

welches auf

$$l + x : a = l - x : \sqrt{[(l-x)^2 - a^2]},$$

woraus wir diese Gleichung herleiten

$$a(l-x) = (l+x)\sqrt{[(l-x)^2 - a^2]};$$

erhebt man zum Quadrat, so findet man

$x^4$ —

---

*) Wenn man die über die verschiedenen Umstände der obigen Aufgabe gemachten Analysis mit der in der Algebra von Bezout vergleicht, so wird man finden, wie unvollständig und fehlerhaft diese letztere ist. Sie zeigt bloß die beyden durch die Linien $D'F'$ und $D'''F'''$ vorgestellten Auflösungen.

$$x^4 - (2l^2 + 2a^2)x^2 + l^4 - 2a^2l^2 = 0;$$

da sie nach Art der Gleichungen vom zweyten Grade auflösbar ist, so findet man zuvörderst

$$x^2 = l^2 + a^2 \pm \sqrt{(a^4 + 4a^2l^2)}$$

und dann

$$x = \pm \sqrt{[l^2 + a^2 \pm \sqrt{(a^4 + 4a^2l^2)}]}$$

$$= \pm \sqrt{[l^2 + a^2 \pm a\sqrt{(a^2 + 4l^2)}]},$$

welche Ausdrücke sich nach dem §. 65 und 66. construiren lassen.

Diese wegen ihrer Eleganz merkwürdige Auflösung ist aus der Arithmetica universalis von Newton, welcher sie deshalb gegeben hat, um zu zeigen, wie sehr eine gute Auswahl der Unbekannten die Auflösung einer Aufgabe erleichtert. Diejenige, welche er bey der Aufgabe, mit welcher wir uns beschäftigen, getroffen, ist ihm vermuthlich durch die Betrachtung aufgestoßen, daß der Abstand EK nur zwey verschiedene Größen haben kann, die eine in Rücksicht der beyden Auflösungen D′F′ und D″F″, und die andern in Rücksicht auf D‴F‴ und D⁗F⁗, und daß folglich je zwey und zwey der vier Werthe desselben einander gleich, und nur in den Zeichen verschieden seyn können. Wir können hieraus schließen, daß man bey der Wahl der unbekannten diejenigen suchen muß, welche unter den verschiedenen Umständen, welche die Aufgabe darbiethet, den wenigsten Aenderungen unterworfen ist.

## §. 76.

Die geringe Anzahl der im Vorhergehenden aufgelösten Aufgaben ist hinreichend zu zeigen, wie die Algebra zur Auflösung der Aufgaben gebraucht werden kann. Man wird aus diesen Beyspielen gesehen haben, daß die in Ansehung der Lage der Linien einfallenden Umstände immer aus der Untersuchung der Dreyecke hergeleitet werden können, und sich, wenn man die Eigenschaften dieser Figuren ausmittelt, algebraisch ausdrücken lassen. Die Kunst, die Dreyecke, worauf es hier ankommt, und welche aus den Bedingungen der vorgelegten Aufgabe entweder deutlich oder undeutlich hervorgehen, zu bilden, kann eben so wie die Fertigkeit, die Zahlenaufgaben in Gleichungen zu bringen, nur durch Uebung erlangt werden *).

Die verschiedenen im Vorhergehenden construirten Ausdrücke waren bloß in Beziehung auf Linien, weil die Aufgaben, die darauf geführt haben, nur die Bestimmung der Linien beabsichtigten; und dies ist am häufigsten der Fall, weil die Bestimmung der Figuren sich immer auf die ihrer Dimensionen reducirt. Es könnten sich indessen Fälle darbiethen, wo man unmittelbar eine Fläche oder einen Körper sucht; der Ausdruck, zu welchem man in diesem Falle gelangt, muß im ersten Falle in jedem Gliede des Zählers zwey Factoren mehr als in jedem Gliede des Nenners enthalten, und im andern Falle drey mehr.

So kann z. B. der Ausdruck

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad}$$

eine Fläche bezeichnen, und der Ausdruck

$$\frac{a^7 + b^5c^2 - d^7}{a^4 + b^4}$$

einen Körper.

---

*) Die Arithmetica universalis von Newton enthält eine Sammlung von Aufgaben, welche sowohl wegen der Eleganz der Auflösungen als der Schönheit des Vortrags sehr schätzbar ist. Das Werk Traité de la Corrélation des figures de géometrie de Carnot enthält sehr interessante derselben, welche auf sehr merkwürdige Eigenschaften der Ausdehnung führen. Diejenigen, welche sich in der Auflösung der Aufgaben üben wollen, können dieses Werk und das von Thomas Simson mit Nutzen lesen.

Diese Ausdrücke construiren, heißt nichts anders, als ein Rechteck bilden, welches mit dem ersten einerley Werth habe, oder ein rechtwinklichtes Paralellepipedum, welches mit dem zweyten einerley Werth habe; man muß in dieser Absicht durch die analytischen Kunstgriffe §. 64. die erste Formel dergestalt vorbereiten, daß sie ein Product aus zweyen Factoren wird, und die zweyte in ein Product aus dreyen Factoren verwandeln.

Man setze daher

$$ab^2c = m^3k, \quad a^3d = m^3k', \quad d^4 = m^3k''$$
$$c^2 = mk''', \quad ad = mk'''',$$

und da die Größe $m$ noch immer abstract bleibt, so werden sich die Größen $k$, $k'$, $k''$, $k'''$, $k''''$ vermittelst Proportionallinien bestimmen lassen, und man wird haben

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad} = \frac{m^3k - m^3k' + m^3k''}{mk''' + mk''''}$$
$$= \frac{m^2(k - k' + k'')}{k''' + k''''} = m \times \frac{m(k - k' + k'')}{k''' + k''''},$$

ein Resultat, welches als der Flächenraum eines Rechtecks angesehen werden kann, dessen Grundlinie $m$, und dessen Höhe die durch die Formel

$$\frac{m(k - k' + k'')}{k''' + k''''}$$

ausgedrückte Linie seyn wird.

Da man die Linie $m$ nach Belieben wählen kann, so kann man sie einer der im zu construirenden Ausdruck vorkommenden Größen, oder besser, der Einheit gleich setzen, wenn man eine festgesetzt hat. Das obige Exempel wird sehr vereinfacht, wenn man $m = a$ setzt; es kommt alsdann

$$b^2c = a^2k, \quad d = k', \quad d^4 = a^3k''$$
$$c^2 = ak''', \quad d = k'''',$$

und

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad} = \frac{a^3(k - d + k'')}{a(k''' + d)}$$

$$= a \times \frac{a(k - d + k'')}{(k''' + d)}$$

Dieses Verfahren läßt sich leicht beym zweyten vorgelegten Ausdruck

$$\frac{a^7 + b^5c^2 - d^7}{a^4 + b^4}$$

anbringen.

Nimmt man überall a statt der willkührlichen Größe m, so wird man setzen

$$b^5c^2 = a^6k, \quad d^7 = a^6k', \quad b^4 = a^3k'',$$

und es wird kommen

$$\frac{a^7 + b^5c^2 - d^7}{a^4 + b^4} = \frac{a^7 + a^6k - a^6k'}{a^4 + a^3k''}$$

$$= \frac{a^6(a + k - k')}{a^3(a + k'')} = a^2 \times \frac{a(a + k - k')}{a + k''};$$

die letzte Formel kann offenbar für das Volumen eines rechtwinklichten Paralellepipedums genommen werden, dessen Grundfläche das auf der Linie a gesetzte Quadrat, und dessen Höhe die durch die Formel

$$\frac{a(a + k - k')}{a + k''}$$

ausgedrückte Linie ist.

## §. 77.

Die Algebra dient nicht allein die Größe der Linien und der Theile der Ausdehnung in Vergleichung zu einander zu bestimmen, sondern sie biethet auch ein Mittel dar, die Figuren, welche diese Linien einschließen, oder überhaupt die Formen der Ausdehnungen zu bestimmen. Nachdem Descartes zuerst bemerkt hat, daß diese Figuren und diese Formen, die zwischen geraden Linien anzutreffenden Beziehungen bestimmen, verfiel er darauf, die Algebra auf die Theorie der Linien im Allgemeinen anzuwenden, und durch diese Entdeckung haben die mathematischen Wissenschaften eine ganz neue Gestalt gewonnen.

Wenn man z. B. annimmt, daß man von allen Puncten der Linie DE Fig. 29. auf eine der Lage nach gegebene gerade Linie AB, die Perpendikel PM, P′M′, P″M″ 2c. herabgelassen, und von einem auf dieser Linie nach Belieben angenommenen Punct, die Distanzen AP, AP′, AP″ 2c. gemessen habe, so wird jede dieser Distanzen mit dem ihr correspondirenden Perpendikel in einer solchen Verbindung stehen, daß sich aus der einen nothwendigerweise die andre herleiten lassen wird. In der That wird, wenn die Größe der AP festgesetzt ist, der Durchschnitt der krummen Linie DE mit dem durch den Punct P der geraden AB aufgerichteten Perpendikel, die Größe von PM bestimmen; und wenn man diese Größe kennt, welche wir durch ab vorstellen wollen, so wird, wenn man von der auf AB senkrechten AC, einen Theil AQ = ab nimmt, und die gerade QM paralell zu AB führt, der Durchschnitt dieser paralellen und der Linie DE den Punct M bestimmen, für welchen man nothwendigerweise PM = ab haben wird.

Es hindert uns nichts anzunehmnn, daß die Linien AP, PM sich auf eine beyden gemeinschaftliche, als Einheit genommene, Linie beziehen, und sie unter diesen Gesichtspuncte durch Zahlen oder Buchstaben auszudrücken. Wenn die zwischen AP und PM, AP′ und PM′ 2c. anzutreffende Beziehung durch eine algebraische Gleichung ausgedrückt werden kann, so wird diese Gleichung die Linie DE characterisiren, und man wird vermittelst derselben successiv alle Puncte derselben finden können. Dieses soll an beyden folgenden sehr einfachen Beyspielen gezeigt werden.

§. 78.

Wir wollen fürs erste die durch den Punct A Fig. 30. geführte gerade Linie AE betrachten; die von jedem ihrer Puncte auf die Linie AB gefällten senkrechten PM, P′M′, P″M″ ꝛc. werden eine Reihe unter einander ähnlicher Dreyecke darbiethen, welche geben werden

$$AP : PM = AP' : P'M' = AP'' : P''M'' \text{ ꝛc.}$$

oder welches auf eins hinaus kommt,

$$\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'} = \frac{P''M''}{AP''} \text{ ꝛc.}$$

Die Beziehung eines jeden Abstandes AP zu seiner senkrechten PM ist hier leicht abzunehmen; sie besteht in dem Verhältniß, welches jede der ersten zu der ihr correspondirenden der zweyten hat; und wenn man dieses Verhältniß durch a bezeichnet, so wird man haben

$$PM = a \times AP, \quad P'M' = a \times AP',$$
$$P''M'' = a \times AP'' \text{ ꝛc.}$$

Alle diese Gleichungen, welche jedem Puncte der geraden AE besonders eigen zu seyn scheinen, können in einer einzigen ausgedrückt werden, wenn man den zwischen dem Punct A und irgend einer senkrechten enthaltenen Theil von AB durch x, und diese senkrechte selbst durch y bezeichnet; denn man wird alsdann haben $y = ax$. Diese Gleichung, welche zwey unbekannte Größen x und y enthält, kann nur einen einzigen Werth geben, und dieses auch nur dann, nachdem man den Werth der andern willkührlich festgesetzt hat. Wenn man x irgend einen besondern Werth AP giebt, so nimmt y den correspondirenden Werth von PM an. Setzt man z. B. $a = \frac{1}{2}$, so findet man $BM = \frac{1}{2} AP$, das heißt, wenn man PM der Hälfte von AP macht, so wird der Punct M in der geraden Linie AE liegen.

Da die Linie AE sich nicht durchaus im Puncte A endigen muß, so kann man sich dieselbe unterhalb der Linie

AB und zur linken Seite der Linie AC nach AE′ verlängert denken; dieser letztere Theil ist auch in der Gleichung $y = ax$ begriffen; denn $x$ kann in dieser Gleichung negative Werthe erhalten, und die Werthe, welche die Distanzen auf AC angeben, müssen auf einer entgegengesetzten Seite von der angenommen werden, auf welche man die positiven getragen hat (§. 72.). Sie werden also Puncte geben, welche so wie p auf der andern Seite des Punctes A liegen. Da nun die correspondirenden Werthe von $y$ ebenfalls negativ sind, so müssen sie auch auf einer entgegengesetzten als die positiven getragen werden, das heißt, unterhalb AB, wie pm; und da überdies, wenn man $Ap = AP$ nimmt, auch offenbar $pm = PM$ wird, so wird man auf diese Art auch die Puncte der Verlängerung AE′ der geraden AE finden.

## §. 79.

Wir wollen nun den aus dem Puncte A Fig. 31., als aus einem Mittelpuncte, mit einem Halbmesser, welcher der Linie AD gleich ist, beschriebenen Kreis betrachten. Was jeden Punct des Umkreises von jedem andern Punct der Ebne unterscheidet, ist, daß sie alle vom Mittelpuncte einerley, dem Halbmesser AD gleiche Entfernung haben; und daß folglich, was man auch für einen Punct M dieser krummen Linie nehmen mag, die geraden Linien AP und PM immer die Catheten eines rechtwinklichten Dreyecks seyn werden, dessen Hypothenuse AM dem Halbmesser AD gleich ist. Setzt man nun

$$AP = x, \quad PM = y, \quad AD = r,$$

so wird man haben

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

und man zieht hieraus

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

eine Gleichung, welche zeigt, daß man, wenn $x$ oder AP bekannt wäre, y oder PM vermittelst bloßer Rechnung und ohne Hülfe irgend einer Construction finden, oder wenigstens das Verhältniß dieser Linie zum Halbmesser bestimmen kann. Setzt man z. B. $x = \frac{1}{3}r$, so wird man finden

$$y = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{9}r^2)} = \sqrt{\tfrac{8}{9}r^2} = r \times \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Es ist leicht abzunehmen, daß man aus eben diesem Ausdrucke die Linien PM für alle zwischen A und D liegende Puncte der Linie AB bestimmen kann. Die Gleichung $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ zeigt ferner, daß die geometrische Beschreibung des Kreises, oder daß die Kreislinie sich nicht über den Punct D hinaus erstrecken kann; denn um den Punct P über diesen hinaus anzunehmen, müßte man $x > AD$, oder $> r$ annehmen, und in diesem Falle würde der Werth von y imaginär werden.

Ob wir gleich nur den Quadranten DE betrachtet haben, so sind dennoch die drey übrigen, welche den Umkreis ergänzen, in der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ begriffen; denn da die Ordinate y für einen und denselben Werth von x zwey Werthe hat, nehmlich

$$+\sqrt{(r^2 - x^2)} \text{ und } -\sqrt{(r^2 - x^2)},$$

so muß der zweyte auf eine der ersten entgegengesetzten Seite getragen werden (§. 72.), und bestimmt folglich alle Puncte des Quadranten DE′. Man kann aber auch x negative Werthe geben, welche, da die positiven von A nach D genommen sind, nunmehr von A nach D′ genommen werden müssen; und da zu jedem dieser Werthe zwey von y gehören, so werden die positiven Werthe desselben die Puncte des Quadranten D′E und die negativen die des Quadranten D′E′ bestimmen.

§. 80.

Ob man gleich aus den Gleichungen

$$y = ax, \quad y = \pm\sqrt{(r^2 - x^2)},$$

nur Werthe erhält, welche zu für sich bestehenden und von einander abgesonderten Puncten gehören, so ist dennoch die aus der Beschreibung der geraden Linie und des Kreises erfolgende Stetigkeit, welche respectiv durch die obigen Gleichungen vorgestellt sind, darin begriffen, weil man vermittelst derselben zwey so nah an einander liegende Puncte, als man nur immer will, bestimmen kann; denn man braucht in dieser Absicht nur für x nach einander zwey fast gleiche Werthe zu setzen, und es ist nichts vorhanden, welches der Geringheit der Differenz, die man zwischen beyden annimmt, Gränzen setzen könnte.

§. 81.

Diese Art, den Fortgang der Linien darzustellen, das heißt, die Umstände ihrer Form und Lage, indem man sie vermittelst senkrechter auf eine gerade Linie zurückführt, verdient die größte Aufmerksamkeit; man sieht, daß sie darauf zurückkommt, die Lage irgend eines Punctes vermittelst seines Abstandes von den beyden auf einander senkrechten geraden Linien AB und AC zu bestimmen. Der Punct M Fig. 29. ist wirklich bestimmt, sobald man die Entfernungen AP und AQ hat, weil er sich im Durchschnitt der durch die Puncte P und Q zu den Linien AC und AB paralell geführten Linien PM und QM befinden muß.

Die Linien AP und AQ, oder die ihnen gleichen QM und PM werden die **Coordinaten** genannt. Man bedient sich gewöhnlich des Worts Abcisse, um die zu bezeichnen, welche man als bekannt annimmt, und giebt der andern den Nahmen der **Ordinate** (Applicate). So war im vorhergehenden, wo wir immer die Linien PM durch die Linien AP ausdrückten, PM die Ordinate und AP die Abcisse. Die Linien AB und AC, welche die Richtung der Coordinaten angeben, werden die Axen der Coordinaten genannt.

Es ist wohl zu merken, daß bey den auf der Linie AB liegenden Puncten die Distanz AQ oder PM Null ist, und daß man folglich, wenn man sie durch y bezeichnet, bey diesen Puncten $y = 0$ hat. Aus eben der Ursache hat man bey allen Puncten, welche auf der Linie AC liegen, QM oder AP oder $x = 0$; und endlich hat man im Puncte A, welchen man den **Anfangspunct der Coordinaten** nennt, zu gleicher Zeit

$$x = 0, \quad y = 0.$$

So lange man nur den absoluten Werth der Abcisse AP und der Ordinate PM angiebt, bleibt immer noch der Punct M in einiger Rücksicht unbestimmt; denn man kennt alsdann nur die Entfernungen dieses Punctes von den unbegränzten geraden Linien BB′ und CC′ Fig. 32.; und mit Beybehaltung eben dieser Entfernungen kann er sich ohne Unterschied in irgend einem der vier rechten Winkel BAC, B′AC, B′AC′, BAC′ befinden; allein die Verbindung der Zeichen, welche den Coordinaten AP und PM vorgesetzt sind, zeigen, in welchem dieser vier Winkel sich der vorgelegte Punct befindet. In der That wird man, da man übereingekommen ist das Zeichen + den Theilen der Linie AB zu geben, welche von A nach B zu gehen, den von A nach B′ gehenden Theilen von AB′ das Zeichen — geben müssen. Desgleichen werden, wenn man den Theilen von AC, welche von A nach C zu gehen, das Zeichen + giebt, die von A nach C′ zu gehenden Theile von AC′ nothwendigerweise das Zeichen — bekommen müssen. Dieses vorausgesetzt, wird man haben

| | | | |
|---|---|---|---|
| für den Punct M des Winkels | BAC . . . . | + AP oder + x<br>+ PM + y | |
| | B'AC . . . . | — AP — x<br>+ PM + y | |
| | B'AC' . . . . | — AP — x<br>— PM — y | |
| | BAC' . . . . | + AP + x<br>— PM — y | |

Die Auswahl der auf einander senkrechten AB und AC ist es nicht allein, welche man treffen kann, um die Lage irgend eines Systems von Puncten in einer Ebne zu bestimmen; sondern jede Verbindung der Linien, welche geschickt ist, die Lage eines Punctes fest zu setzen, z. B. die Entfernungen von zweyen bekannten Puncten würde zu diesem Zwecke brauchbar seyn; allein in den meisten Fällen biethen die senkrechten Coordinaten den höchsten Grad von Leichtigkeit dar, und wir werden weiter unten Beyspiele von der Art geben, wie man von diesen Coordinaten zu verschiedenen andern Arten übergeht, die Lage der Puncte in einer Ebne anzugeben.

## §. 82.

Die Gleichung, welche die zwischen AP und PM bey einer gegebenen Linie anzutreffenden Beziehungen ausdrückt, wird die Gleichung dieser Linie genannt, und diese letztere wird bey ihrem Fortgange die dieser Gleichung zugehörige Linie genannt.

Jede geometrische unbestimmte Aufgabe, welche zwey unbekannte Größen enthält, wird offenbar auf eine geometrische Linie führen. Wenn z. B. verlangt würde, alle rechte Winkel zu bilden, welche auf einer gegebenen Hypothenuse a construirt werden können, so würde, wenn man die Catheten dieser Dreyecke durch x und y bezeichnet,

$x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung der Aufgabe seyn; und man würde dieser Aufgabe ein Genüge thun, wenn man auf einen Halbmesser gleich $a$ den vierten Theil eines Kreises beschreibt, und von jedem Puncte dieses vierten Theils des Umkreises auf seinen Halbmesser senkrechte Linien fällt, der vierte Theil des Umkreises würde der Lauf aller Scheitel eines der spitzen Winkel dieser rechtwinklichten Dreyecke seyn.

Die Gleichung einer krummen Linie (Curve) wird erhalten, wenn man, wie wir bey der geraden Linie gethan haben, irgend eine ihrer Eigenschaften, oder, wie wir beym Kreise gethan haben, die Umstände ihrer Beschreibung analytisch ausdrückt. Umgekehrt biethet eine jede Gleichung, an und für sich betrachtet, die Entstehung einer krummen Linie dar, deren Eigenschaften sie zu erkennen giebt. Da dieser letztere Gesichtspunct der allgemeinste und furchtbarste ist, so werden wir von nun an immer aus der Betrachtung der Gleichungen die Linien herleiten.

§. 83.

Von allen Gleichungen mit zweyen unbestimmten Größen ist die vom ersten Grade die einfachste, und sie gehört zur geraden Linie, der einfachsten aller Linien. Diese Gleichung kann durch $Cy = Ax + B$ ausgedrückt werden; wenn man aber auch mit $C$ dividirt, so wird sie nichts von ihrer Allgemeinheit verlieren, und man wird erhalten $y = \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}$, oder $y = ax + b$, wenn man $\frac{A}{C} = a$, $\frac{B}{C} = b$ setzt. Wir werden sie von nun an immer unter dieser Form anwenden.

Setzen wir zuvörderst, daß $b$ Null sey, so wird man haben

$$y = ax, \text{ oder } \frac{y}{x} = a;$$

das heißt, in der ganzen Ausdehnung der geraden Linie wird das Verhältniß von PM zu AP Fig. 30. beständig seyn. Diese Eigenschaft, welche nichts anders, als ein Ausdruck für die Aehnlichkeit der Dreyecke APM, AP′M′ ꝛc. ist, aus welcher $\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'}$ ꝛc. erfolgt, wo man auch die Puncte P, P′ ꝛc. auf der geraden Linie AB annehmen mag, kann nur zu der durch A, als den Anfangspunct der Coordinaten, geführten geraden Linie AE gehören.

Das Verhältniß $\frac{y}{x}$ oder der Coefficient a hängt von dem Winkel ab, welchen die gerade AE mit der Axe der Abcissen einschließt; da nun im Dreyecke APM, welches wir in P rechtwinklicht annehmen, das Verhältniß von PM zu AP der Tangente des Winkels PAM gleich ist (§. 29.), so wird a die Tangente dieses Winkels ausdrücken.

Betrachtet man nun die Gleichung $y = ax + b$, so sieht man, daß die neue Ordinate y von der ersten $y = ax$, nur darin unterschieden ist, daß sie dieselbe um die Größe b übertrift; woraus folgt, daß wenn man AD $= b$ nimmt, und die Linie DF paralell zu AE führt, diese die Linie der Gleichung $y = ax + b$ seyn wird, weil man alsdann haben wird

$$PN = PM + MN = PM + AD$$
$$P'N' = P'M' + M'N' = P'M' + AD \text{ ꝛc.}$$

und es ist wohl zu merken, daß der Coefficient a für alle zu paralell AE geführte Linien einerley Werth behalten wird.

Es ist leicht einzusehen, daß nichts vorhanden ist, welches den Werthen, die man der Größe x in der Gleichung $y = ax + b$ geben kann, Gränzen setzen könnte, und daß folglich die von y so groß, als man nur immer will, werden können; da aber auch zu gleicher Zeit nichts den Fortgang der Linie DF in dem unbegränzten Raum BAC begränzt, so wird man immer so große Abcissen und Ordinaten finden können, um die Werthe von y und x, welche der vorgelegten Gleichung ein Genüge thun, darstellen zu können.

Setzt man $x = o$, so wird man $y = b$ finden, und dieser Werth gehört zum Puncte D, wo die gerade DF die Axe AC der Ordinaten begegnet. Wenn x negativ wäre, so würde man finden

$$y = - ax + b;$$

und wenn ax kleiner als b ist, so wird y positiv, aber kleiner als b oder AD seyn. Der Fortgang der Linie DF zeigt uns, daß dieser Umstand nur in dem Theil DF′ statt finden kann, welcher zu den Abcissen Ap stimmt, die auf einer entgegengesetzten Seite von den Abcissen AP liegen, die wir die positiven Werthe von x zu bezeichnen gewählt haben; man muß daher auf dieser Seite die negativen Werthe von x nehmen.

Um den Werth von x zu finden, welcher mit dem Punct f, in welchem die Linie DF die Axe AB der Abcissen schneidet, übereinstimmt, muß man $y = o$ setzen, welches giebt

$$ax + b = o, \text{ und } x = - \frac{b}{a} = Af.$$

Wenn x immer noch negativ bleibt, und größer als die Größe $\frac{b}{a}$ wird, so wird auch y negativ werden. Allein über den Punct f hinaus befindet sich die Linie D′F unterhalb der Linie AB; die Ordinate p′n′ wird daher auf einer entgegengesetzten Seite fallen, als sie vorher gelegen hat, und die negativen Werthe von y müssen folglich auf eine Seite von AB getragen werden, welche der auf welcher man die positiven Werthe getragen hat, entgegengesetzt ist.

Diese Bemerkungen, welche das im §. 72. gesagte bestätigen, sind nicht der geraden Linie allein eigen. Man kann sie nicht aufmerksam genug betrachten; denn von dem Gebrauch der negativen Größen in den Figuren hängen meistentheils die verschiedenen Formen ab, welche die krummen Linien annehmen können.

Da die Gleichung $y = ax + b$ nur zwey beständige Größen enthält, deren Werth die gerade Linie, welche man betrachtet, besonders bestimmt, indem er dieselbe von allen andern unterscheidet: so folgt, daß zwey Bedingungen hinreichen, um eine gerade Linie zu bestimmen. Diejenigen, welche sich zuerst darbiethen, sind: sie durch zwey gegebene Puncte gehen zu lassen; auf einer andern gegebenen senkrecht, oder ihr paralell zu seyn, und überdieß durch einen gegebenen Punct zu gehen. Es wird in der Folge nöthig seyn, die Form zu kennen, welche die Gleichung $y = ax + b$ annehmen muß, um diesen verschiedenen Bedingungen ein Genüge zu thun. Wir wollen daher jede ins Besondre untersuchen.

## §. 84.

Wenn man die Gleichung für die gerade Linie sucht, welche durch zwey Puncte gehen soll, deren Abcissen $\alpha$ und $\alpha'$ und deren Ordinaten $\beta$ und $\beta'$ sind, so braucht man bloß nach einander $\alpha$ und $\alpha'$ statt x, $\beta$ und $\beta'$ statt y zu setzen, und man wird haben

$$\left.\begin{array}{l} \beta = a\alpha + b \\ \beta' = a\alpha' + b \end{array}\right\} \text{woraus man zieht} \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} \\ b = \dfrac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha} \end{array}\right.$$

und es würde

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

für die Gleichung der gesuchten geraden Linien erfolgen.

Man kann diesem Resultat eine einfachere Form geben; denn wenn man eine der obigen Gleichungen, z. B. die erste, von der Gleichung $y = ax + b$ abzieht, so wird b verschwinden, und es wird kommen

$$y - \beta = a(x - \alpha);$$

diese letztere Gleichung würde die einer geraden Linie seyn, welche durch den Punct gehen muß, dessen Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind, und welche überdies mit der Axe AB irgend einen Winkel macht; setzt man darin statt a den im Vorhergehenden gefundenen Werth, so wird man haben

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

Der Abstand beyder gegebenen Puncte, oder der Theil, welchen sie von der gesuchten geraden zwischen sich fassen, wird zum Ausdruck haben

$$\sqrt{[(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2]}.$$

Dieses ist leicht einzusehen, wenn man annimmt, N und N' seyen diese Puncte; denn da ihr Abstand NN' die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks NRN' ist, so folgt

$$NN'^2 = NR^2 + N'R^2$$
$$= (AP' - AP)^2 + (PN' - PN)^2$$

## §. 85.

Um die Gleichung der geraden Linie zu erhalten, welche durch den Punct gehen würde, dessen Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind, und welche der durch die Gleichung $y = a'x + b'$ vorgestellten paralell seyn würde, ist es hinreichend in der Gleichung $y - \beta = a(x - \alpha)$ . . a' statt a zu substituiren, welches schon der ersten Bedingung ein Genüge thut, weil nach §. 83. der Coefficient von x in den Gleichungen der geraden zu einander paralellen Linien, einerley bleibt; man wird also für die gesuchte erhalten

$$y - \beta = a'(x - \alpha).$$

§. 86.

Wenn endlich AE und AI Fig. 33. zwey gerade auf einander senkrechte sind, und durch den Anfangspunct A gehen, so werden ihre Gleichungen von der Form

$$y = ax, \quad y = a'x$$

seyn; da aber die Dreyecke Amp und Apn einander ähnlich sind, so wird man, wenn man die Seiten Ap und pm mit den ihnen homologen pn und Ap vergleicht,

$$\frac{pm}{Ap} = \frac{Ap}{pn} \text{ oder } pm \times pn = Ap^2$$

finden.

Bezeichnet man die den beyden geraden gemeinschaftliche Abcisse Ap durch x, so werden ihre Ordinaten respectiv seyn

$$pm = ax, \quad pn = a'x,$$

und man wird haben

$$aa'x^2 = x^2$$

woraus folgt

$$aa' = 1, \quad a' = \frac{1}{a}.$$

Hiermit wäre also die Größe von $a'$ bestimmt; man muß aber in Erwägung ziehen, daß der Punct n der Linie AI unterhalb der Axe AB der Abcissen liegt, und daß daher die Ordinate pn negativ genommen werden muß; die Gleichungen der geraden AE und AI werden demnach seyn

$$y = ax \text{ und } y = -\frac{1}{a}x.$$

Betrachtet man endlich die geraden DF und GH, welche respectiv zu AE und AI paralell, und folglich senkrecht auf einander sind, so wird man für ihre Gleichungen finden

$$y = ax + b, \text{ und } y = -\frac{1}{a}x + b' \text{ (vorherg. §.)}.$$

Wenn die zweyte durch einen Punct gehen muß, deren Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind, so wird ihre Gleichung seyn,

$$y - \beta = - \frac{1}{a} (x - \alpha).$$

## §. 87.

Zwey sich schneidende Linien haben in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct dieselben Coordinaten; man braucht daher nur, um die Coordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnitts zweyer durch die Gleichungen

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

ausgedrückten Linien zu finden, die Werthe der unbekannten, $x$ und $y$, in beyden Gleichungen gleich zu setzen; man wird auf diese Art haben

$$ax + b = a'x + b',$$

welches giebt

$$x = \frac{b - b'}{a' - a} \text{ und } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Man sieht hieraus, daß der Durchschnittspunct desto weiter von den Axen AB und AC entfernt ist, je kleiner die Größe $a' - a$ wird, und daß $x$ und $y$ unendlich werden, wenn $a' = a$ wird; das heißt, wenn die vorgelegten geraden Linien aufhören sich zu schneiden, oder paralell sind.

## §. 88.

Es kann zuweilen nützlich seyn, die Länge der von einem gegebenen Punct auf eine gegebene gerade Linie herabgelassenen senkrechten zu finden; und man gelangt hierzu, wenn man die Differenzen der Coordinaten dieses Punctes und die desjenigen Punctes sucht, worin die gegebene gerade Linie die auf ihr senkrechte begegnet.

Da die Gleichung der ersten

$$y = ax + b$$

ist, so wird die der zweyten

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$$

seyn, wenn man die Coordinaten des gegebenen Punctes durch $\alpha$ und $\beta$ bezeichnet; allein man kann die Gleichung $y = ax + b$ unter der Form

$$y - \beta = ax + b - \beta - a\alpha + a\alpha$$

ansetzen, welche sich auf

$$y - \beta = a(x - \alpha) + b - \beta + a\alpha$$

bringen läßt, die gegen die Gleichung

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$$

gehalten

$$x - \alpha = \frac{a(\beta - a\alpha - b)}{1 + a^2},\ y - \beta = -\frac{\beta - a\alpha - b}{1 + a^2}$$

giebt. Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck

$$\sqrt{[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]},$$

so wird man für die Länge der gesuchten senkrechten

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

erhalten.

## §. 89.

Das Vorhergehende führt uns auf den Ausdruck des Sinus, des Cosinus und der Tangente des Winkels, welchen die beyden gegebenen geraden Linien mit einander einschließen. Es seyen

$$y = ax + b,\quad y = a'x + b'$$

die Gleichungen der beyden vorgelegten geraden Linien; es ist offenbar, daß der Winkel, den sie mit einander einschließen, unverändert bleibt, wenn man beyde so lange zu sich selbst paralell bewegen läßt, bis sie durch den Anfangspunct der Ordinaten gehen, und alsdann werden sich ihre Gleichungen auf

$$y = ax, \quad y = a'x$$

reduciren (§. 83.).

In diesem Zustande wollen wir sie betrachten, und sie durch die Linien AM und AM′ Fig. 34. vorstellen. Nachdem man einen Punct M′ auf einer derselben genommen hat, dessen Coordinaten AP′ und P′M′ durch $\alpha$ und $\beta$ bezeichnet werden sollen, wird die von diesem Puncte auf die andre Linie AM herabgelassene senkrechte M′M durch $\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{(1 + a^2)}}$ ausgedrückt seyn, weil $b = o$ (§. 88.); setzt man aber $AM' = r$, so wird man haben

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

und da der Punct M′ in der Linie AM′ liegt, die zur Gleichung hat $y = a'x$, so folgt $\beta = a'\alpha$. Diese Gleichung mit der vorhergehenden verbunden, wird geben

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{(1 + a'^2)}}, \quad \beta = \frac{a'r}{\sqrt{(1 + a'^2)}};$$

substituirt man diese Werthe in den der senkrechten, so wird man finden

$$\frac{r\,(a' - a)}{\sqrt{(1 + a^2)}\,\sqrt{(1 + a'^2)}};$$

und wenn man der senkrechten MM′ den Nahmen des Sinus giebt, den man ihr in der Trigonometrie beygelegt hat, so wird man haben

$$\sin MAM' = \frac{r\,(a' - a)}{\sqrt{(1 + a^2)}\,\sqrt{(1 + a'^2)}},$$

wenn man r für den Halbmesser nimmt.

Wenn man das Quadrat dieses Ausdrucks von $r^2$ abzieht, so wird man den von $AM^2$, oder den des Quadrats des Cosinus des Winkels MAM′ haben; man wird erhalten

$$(\cos MAM')^2 = \frac{r^2(1+a^2)(1+a'^2) - r^2(a'-a)^2}{(1+a^2)(1+a'^2)}$$

$$= \frac{r^2(1+2aa'+a^2a'^2)}{(1+a^2)(1+a'^2)},$$

und wenn man die Quadratwurzel nimmt, so kommt

$$\cos MAM' = \frac{r(1+aa')}{\sqrt{[(1+a^2)(1+a'^2)]}};$$

setzt man endlich $r = 1$, so zieht man aus diesen beyden Ausdrücken

$$\text{tang } MAM' = \frac{\sin MAM'}{\cos MAM'} = \frac{(a'-a)}{1+aa'}.$$

Wir hätten diesen Werth unmittelbar aus der in der Tafel Seite 30. beygebrachten Formel

$$\text{tang}(p \pm q) = \frac{\text{tang } p \pm \text{tang } q}{1 \mp \text{tang } p \text{ tang } q}$$

herleiten können, weil der Winkel MAM′ die Differenz zwischen dem Winkel BAM′ und BAM ist, und man daher, wenn diese letztern durch p und q bezeichnet werden

$$\text{tang } p = a', \quad \text{tang } q = a, \quad \text{und tang}(p-q) = \frac{a'-a}{1+aa'}$$

haben wird; allein diese Formel beruht auf die des §. 11., welche wir vermittelst einer Construction erhalten haben, und wir haben uns vorgesetzt, bloß aus den Gleichungen der Linien alles zu ziehen, was zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie erforderlich ist.

§. 90.

Die im §. 79. erhaltene Gleichung für den Kreis ist nur für einen besondern Fall, weil man den Mittelpunct als den Anfangspunct der Coordinaten angenommen, und ihm dadurch eine bestimmte Lage gegeben hat. Um die Gleichung dieser krummen Linie allgemeiner zu machen, muß man die Gleichung für den Kreis DED′E′ suchen, indem man den Punct A‴, welcher gegen den Mittelpunct A irgend eine Lage hat, als Anfangspunct der Coordinaten annimmt; und hierzu würde hinreichend seyn analytisch anzuzeigen, daß die Abstände eines jeden Punktes des Umkreises von diesem Mittelpuncte gleich r sind. Wenn man nun die Linien $A'''A'$ und $A'A$, welche dann die Coordinaten des Mittelpuncts A in Rücksicht der Axen $A'''B'$ und $A'''C'$ sind, durch p, q bezeichnet, und $A'''Q = x$, $QM = y$ setzt, so wird man (§. 84.) haben

$$AM = r = \sqrt{[(x-p)^2 + (y-q)^2]},$$

woraus man, wenn man beyde Theile quadrirt und sie entwickelt,

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2$$

erhält.

Diese letztere Gleichung ist die allgemeinste, welche man für den Kreis erhalten kann, indem man ihn auf senkrechte Coordinaten zurückbringt; sie kann nur durch die Bestimmung der drey beständigen Größen p, q und r, von denen die beyden ersten die Lage des Mittelpunctes bestimmen, und die letzte den Halbmesser angiebt, für einen besondern Fall brauchbar gemacht werden. Hieraus folgt, daß drey Bedingungen erforderlich sind, um die Lage und Größe eines Kreises angeben zu können; und dieses haben wir auch in den Anfangsgründen der Geometrie gesehen.

Wollte man einen Kreis bestimmen, welcher durch drey Puncte geht, deren Coordinaten

$\alpha$ und $\beta$, $\alpha'$ und $\beta'$, $\alpha''$ und $\beta''$

seyen, so würde man $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ statt x, und $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ statt y setzen, und auf diese Art diese drey Gleichungen bilden,

$$\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + \beta^2 - 2q\beta + q^2 = r^2$$
$$\alpha'^2 - 2p\alpha' + p^2 + \beta'^2 - 2q\beta' + q^2 = r^2$$
$$\alpha''^2 - 2p\alpha'' + p^2 + \beta''^2 - 2q\beta'' + q^2 = r^2,$$

welche nur drey unbekannte Größen, nehmlich: p, q und r enthalten.

Zieht man nacheinander die erste von der zweyten und der dritten ab, und läßt die sich aufhebenden Glieder weg, so wird man haben

$$2[(\alpha-\alpha')p+(\beta-\beta')q]+\alpha'^2-\alpha^2+\beta'^2-\beta^2=0$$
$$2[(\alpha-\alpha'')p+(\beta-\beta'')q]+\alpha''^2-\alpha^2+\beta''^2-\beta^2=0;$$

diese Gleichungen zeigen, indem sie nur noch p und q vom ersten Grade enthalten, daß der Mittelpunct des verlangten Kreises nur eine einzige Lage haben kann; und was den Halbmesser anbelangt, so ist er, da man unmittelbar

$$r=\sqrt{(\alpha^2-2p\alpha+p^2+\beta^2-2q\beta+q^2)}$$

erhält, nur einer einzigen Größe fähig; mithin kann man zwischen drey gegebene Puncte nur einen einzigen Zirkel legen.

Ich werde die Auflösung der obigen Gleichungen, welche sich durch die Symetrie der darin vorkommenden Größen abkürzen läßt, nicht weiter ausführen, weil die Resultate dieser Auflösungen für das Folgende von keinem Nutzen sind.

## §. 91.

Die allgemeine Gleichung des Kreises

$$x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2=r^2,$$

kann auf verschiedene Arten vereinfacht werden, welche angemerkt zu werden verdienen, weil die Formen, die sie dann annehmen, von einer häufigen Anwendung in der Analysis sind.

Setzt man $p=0$, $q=0$, so kommt man auf $x^2+y^2=r^2$ zurück.

Um den Anfangspunct der Coordinaten auf den Umkreis des Zirkels zu bringen, braucht man bloß $p^2+q^2=r^2$

zu setzen; denn da alsdann $\sqrt{(p^2 + q^2)}$ den Abstand des Mittelpunctes vom Anfangspunkt ausdrückt, so folgt, daß dieser Abstand dem Halbmesser des Kreises gleich ist. Die Gleichung des Kreises läßt sich alsdann vermittelst der eben gefundenen auf

$$x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0$$

bringen.

Nimmt man endlich, mehrerer Einfachheit wegen, den Anfangspunct auf dem äußersten Punct D' des Durchmessers, so wird, da sich dann der Mittelpunct auf der Axe der Abcissen befindet, die Ordinate desselben Null werden, seine Abcisse $\alpha$ wird dem Halbmesser r gleich werden; und die obige Gleichung verwandelt sich dann in

$$x^2 - 2px + y^2 = 0.$$

Diese letztere, und die erste Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, sind diejenigen von den Gleichungen des Kreises, deren man sich am häufigsten bedient.

## §. 92.

Nachdem das Vorhergehende wohl begriffen ist, werden sich alle Aufgaben, die in Rücksicht der geraden Linien und des Kreises vorgelegt werden können, leicht auf die Algebra zurückführen lassen, ohne daß man zu andern Eigenschaften, als zu den zwischen den drey Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks anzutreffenden Beziehungen seine Zuflucht zu nehmen braucht *). Wir wollen uns zuvörderst diese Aufgabe vorlegen.

*) Legengendre leitet diese Eigenschaften in dem zu Ende seiner Anfangsgründe der Geometrie beygefügten Anmerkungen, aus den ersten Folgerungen der Congruenz der gleichen Dreyecke, vermittelst eines sehr eleganten Verfahrens her; allein die Betrachtungen, die er dabey anwendet, sind unglücklicherweise zu abstract,

Es sind zwey gerade Linien AE und DE Fig. 35. durch die Winkel, welche sie mit einer dritten bilden, und ferner durch den Theil dieser dritten gegeben, welchen sie zwischen sich fassen; man soll nun auf der auf AB senkrechten AC einen Punct von der Beschaffenheit finden, daß der Theil HK, welcher von der durch diesen Punct zu AB paralell geführten geraden GK, zwischen AE und DE enthalten ist, von einer gegebenen Größe sey.

Wir wollen zuvörderst die Gleichungen der geraden AE und DE bilden. Es seyen $a$ und $a'$ die Tangenten der Winkel EAD, EDA, welche sie respectiv mit der geraden AB bilden, die wir als Axe der Abcissen annehmen wollen, und den Anfangspunct in A legen; ferner wollen wir uns die der Ordinaten $y$ mit AC paralell denken, und AD $= \alpha$ setzen. Die erste gerade Linie wird zur Gleichung haben $y = ax$, weil sie durch den Punct A geht; die zweyte, welche durch den Punct D gehen muß, für welchen man hat

$$y = 0, \text{ und } x = \alpha \text{ (§. 81.)},$$

wird seyn

$$y = -a' (x - \alpha),$$

wenn man in Erwägung zieht, daß $y$ immer abnimmt, je mehr $x$ wächst, und daß folglich $a'$ negativ genommen werden muß; man wird also diese zwey Gleichungen haben:

$$y = ax, \quad y = -a' (x - \alpha),$$

Um die Puncte H und K zu erhalten, wo die geraden Linien, welche sie ausdrücken, von der zu AB paralellen GK geschnitten werden, braucht man bloß $y = AG$ zu setzen; setzt man nun AG $= t$, so wird man haben

als daß sie zur Basis eines Elementarbuchs dienen, und in den Geist, jene aus den, durch unmittelbare Anschauung erhaltenen Begriffen, folgende Ueberzeugung tragen könnten.

$$t = ax, \quad t = -a'(x - \alpha;$$

nimmt man aus jeder dieser Gleichungen den Werth von x, so findet man für die eine

$$x = \frac{t}{a'},$$

und für die andre

$$x = \frac{a'\alpha - t}{a'}.$$

Diese Ausdrücke sind die der Abcissen Ah und Ak, deren Differenz, wegen der Paralellen, hk = HK giebt; und bezeichnet man durch m die Größe, welche HK haben muß, so wird man finden

$$m = \frac{\alpha a' - t}{a'} - \frac{t}{a}$$

woraus man zieht

$$aa'm = \alpha aa' - ta - ta',$$

und folglich

$$t = \frac{(\alpha - m)\,aa'}{a + a'}.$$

Dieses ist der Werth von AG, welcher der vorgelegten Aufgabe ein Genüge thut.

## §. 93.

Anstatt die Linie HK von einer bekannten Größe anzunehmen, wollen wir setzen, sie sey der Linie AG gleich, welches darauf zurückkommt, in ein Dreyeck ein Quadrat einzuschreiben (§. 61.). In diesem Falle muß man, anstatt den Ausdruck für HK der Größe m gleich zu setzen, ihn vielmehr mit t vergleichen, welches geben wird

$$t = \frac{\alpha a' - t}{a'} - \frac{t}{a'},$$

woraus man zieht

$$t = \frac{\alpha aa'}{aa' + a + a'}.$$

§. 94.

Es sey ferner folgende im §. 74. schon aufgelöste Aufgabe vorgelegt: **durch einen nach Belieben festgesetzten Punct E Fig. 28., eine gerade Linie dergestalt zu führen, daß der Theil D′F′ dieser geraden, welcher zwischen zweyen, einen rechten Winkel BAC einschließenden Linien liegt, von einer gegebenen Größe sey.**

Wir wollen die Coordinaten des Punctes E durch $\alpha$ und $\beta$ bezeichnen, und die Gleichung der durch diesen Punct geführten geraden ED′ durch $y - \beta = - a\,(x - \alpha)$. Um die Länge D′F′ zu erhalten, braucht man bloß AD′ und AF′ zu bestimmen, das heißt, den Werth von y, wenn $x = 0$, und den von x, wenn $y = 0$ ist, welche Annahmen folgende Gleichungen darbiethen

$$y - \beta = a\alpha, \quad - \beta = - a\,(x - \alpha),$$

woraus man zieht

$$y = \beta + a\alpha = AD', \quad x = \frac{\beta + a\alpha}{a} = AF';$$

und da

$$F'D' = \sqrt{(AD'^2 + AF'^2)},$$

so folgt daraus

$$F'D' = \sqrt{\left[(\beta + \alpha a)^2 + \frac{1}{a^2}(\beta + a\alpha)^2\right]}$$

$$= \frac{\beta + a\alpha}{a}\sqrt{(1 + a^2)};$$

setzt man nun $F'D' = m$, und erhebt zum Quadrat, um die Wurzelgröße hinwegzuschaffen, so kommt

$$m^2 = \left(\frac{\beta + \alpha a}{a}\right)^2 (1 + a^2).$$

Wenn diese Gleichung entwickelt, und nach dem Buchstaben a geordnet wird, so wird sie sich in

$$a^4 + \frac{2\beta}{\alpha} a^3 + \frac{\beta^2 + \alpha^2 - m^2}{\alpha^2} a^2 + \frac{2\beta}{\alpha} a + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0$$

verwandeln, und, wie man sieht, vom vierten Grade seyn; wenn man aber $\beta = \alpha$ setzt, das heißt, wenn man den Punct E in gleichem Abstande von den Axen AB und AC annimmt, so wird sie

$$a^4 + 2a^3 + \frac{2\alpha^2 - m^2}{\alpha^2} a^2 + 2a + 1 = 0,$$

und kommt auf die Gleichung (3) des §. 74. zurück, wenn man a in z verwandelt.

## §. 95.

Wir wollen nun die eben für die gerade Linie gefundenen Formeln auf die Untersuchung der vorzüglichsten Eigenschaften des Dreyecks anwenden. Lasset uns in dieser Hinsicht zwey Puncte M und M′ Fig. 36. annehmen, welche mit dem Anfangspunct A irgend ein Dreyeck bilden; bezeichnen wir nun die Coordinaten des ersten durch $\alpha$, $\beta$,
und die des zweyten durch . . . . $\alpha'$, $\beta'$,
so werden die Distanzen AM, AM′, MM′, welche die Seiten des Dreyecks ausmachen, sich nach §. 84. respectiv durch

$$\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)},\ \sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2)},\ \sqrt{[(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2]}$$

ausdrücken lassen. Setzt man nun AM $= c$, AM′ $= c'$, MM′ $= c''$, so wird man diese Gleichungen erhalten

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\ c'^2 &= \alpha'^2 + \beta'^2 \\ c''^2 &= \alpha'^2 - 2\alpha'\alpha + \alpha^2 + \beta'^2 - 2\beta'\beta + \beta^2 \end{aligned}\right\} (A);$$

und wenn man die letzte von der Summe der beyden ersten abzieht, so kommt

$$c^2 + c'^2 - c''^2 = 2(\alpha\alpha' + \beta\beta'),$$

woraus folgt

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}.$$

Die Gleichungen der Linien AM und AM′ werden seyn

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x, \quad y = \frac{\beta'}{\alpha'} x \text{ (§. 83.)};$$

und der Cosinus des Winkels, welchen sie mit einander einschließen, wird (§. 89.) zum Ausdruck haben,

$$\frac{r\left(1 + \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}\sqrt{\left(1 + \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right)}} = \frac{r(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\sqrt{[(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)]}}.$$

Setzt man, wie bey den Tafeln der Sinus, $r = 1$, und substituirt man statt $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, $\alpha\alpha' + \beta\beta'$, deren Werthe $c$, $c'$, $\frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}$, so wird man finden

$$\cos MAM' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2cc'},$$

eine Gleichung, welche den Zusammenhang der drey Seiten und eines Winkels des Dreyecks MAM′ angiebt. Zieht man nun in Erwägung, daß der Winkel MAM′ der Seite $MM' = c''$ gegenüber liegt, so wird man sich leicht überzeugen, daß man für die Winkel AMM′, AM′M, welche respectiv den Seiten $AM' = c'$, $AM = c$ gegenüber liegen, folgende Gleichungen erhalten muß:

$$\cos AMM' = \frac{c^2 + c''^2 - c'^2}{2cc''}$$

$$\cos AM'M = \frac{c'^2 + c''^2 - c^2}{2c'c''}.$$

Bezeichnet man nun die Winkel MAM′, AMM′, AM′M durch $\gamma''$, $\gamma'$, $\gamma$, so wird man folgende drey Gleichungen erhalten

$$\left.\begin{array}{l} c^2 + c'^2 - 2cc' \cos\gamma'' = c''^2 \\ c^2 + c''^2 - 2cc'' \cos\gamma' = c'^2 \\ c'^2 + c''^2 - 2c'c'' \cos\gamma = c^2 \end{array}\right\} (A).$$

Nimmt man zuvörderst die erste und zweyte, dann die erste und dritte, und hierauf die zweyte und dritte dieser

Gleichungen zusammen, so wird man drey Resultate erhalten, welche respectiv durch $2c$, $2c'$, $2c''$ theilbar werden, nachdem man die beyden Theilen einer jeden Gleichung gemeinschaftlichen Glieder ausgelassen hat, welche hiernächst geben werden

$$\left.\begin{array}{l} c - c' \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma' = 0 \\ c' - c \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma = 0 \\ c'' - c \cos\gamma' - c' \cos\gamma = 0 \end{array}\right\} (B).$$

Es ist wohl zu merken, daß diese Gleichungen unmittelbar erhalten werden, wenn man nacheinander von jedem Winkel des Dreyecks auf die gegenüber stehende Seite einen Perpendikel fällt, und die Abschnitte dieser Seite berechnet.

Man hat in Fig. 14.

$$BD = AB \cos B, \quad CD = AC \cos C$$
$$BC = BD + CD = AB \cos B + AC \cos C.$$

Nennen wir nun $BC = c$, $AB = c'$, $AC = c''$, und behalten die Benennungen der Winkel bey, so wird kommen

$$c = c' \cos\gamma'' + c'' \cos\gamma'$$

oder

$$c - c' \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma' = 0.$$

Man kann auf eben die Art zu den andern beyden Gleichungen gelangen.

## §. 96.

Obgleich die Anzahl dieser Gleichungen drey ist, so kann man dennoch nicht die Seiten daraus finden, wenn die drey Winkel bekannt sind; denn wenn man die Werthe von $c$, $c'$, $c''$, vermittelst der allgemeinen für drey Gleichungen mit dreyen unbekannten berechneten Ausdrücke sucht, so wird man $0$ finden, weil das bekannte Glied fehlt. Allein eben diese Gleichungen verwandeln sich in

$$1 - p \cos\gamma'' - q \cos\gamma' = 0$$
$$p - \cos\gamma'' - q \cos\gamma = 0$$
$$q - \cos\gamma' - p \cos\gamma = 0,$$

wenn man $\frac{c'}{c} = p$, $\frac{c''}{c} = q$ setzt; sie geben alsdann das Verhältniß der Seiten des vorgelegten Dreyecks zu einander, und es bleibt noch eine Gleichung unter einer Bedingung, die man erhält, wenn p und q eliminirt werden. Diese Gleichung ist

$$1 - \cos\gamma''^2 - \cos\gamma'^2 - \cos\gamma^2 - 2\cos\gamma''\cos\gamma'\cos\gamma = 0,$$

und der erste Theil derselben ist völlig genau der gemeinschaftlichen Nenner der aus den eben citirten Ausdrücken hergeleiteten Werthe der unbekannten $c$, $c'$, $c''$. Setzt man diese Größe gleich Null, so werden die Werthe der Seiten $c$, $c'$, $c''$, $\frac{0}{0}$, und die Seiten bleiben folglich unbestimmt, wie es die mit den Gleichungen B vorgenommenen Umformungen zeigen.

Die Gleichung der Bedingung, welche wir eben angezeigt haben, enthält die Beziehung, welche die drey Winkel $\gamma$, $\gamma'$ und $\gamma''$ zu einander haben müssen, damit ihre Summe, der Natur eines Dreyecks gemäß, zwey Rechte betrage. Um sich hiervon zu überzeugen, muß man vermittelst der Werthe von $\sin(p \pm q)$, $\cos(p \pm q)$ (§. 11.) die Gleichung $\cos(180^\circ - \gamma'' - \gamma') = \cos\gamma$ entwickeln; man wird zuvörderst finden

$$-\cos(\gamma'' + \gamma') = \cos\gamma,$$

wenn man in Erwägung zieht, daß $\sin 180^\circ = 0$, und daß $\cos 180^\circ = -1$; hiernächst erhält man

$$-\cos\gamma''\cos\gamma' + \sin\gamma''\sin\gamma' = \cos\gamma$$

woraus folgt

$$\cos\gamma + \cos\gamma''\cos\gamma' = \sin\gamma''\sin\gamma',$$
$$(\cos\gamma + \cos\gamma''\cos\gamma')^2 = \sin\gamma''^2\sin\gamma'^2$$
$$= (1 - \cos\gamma''^2)(1 - \cos\gamma'^2),$$

und nach den Reductionen wird man auf die obige Gleichung zurückkommen.

Es ist beyläufig zu merken, daß die Gleichungen (A) in Rücksicht der geradlinichten Dreyecke eben das sind, was die Gleichungen (B) (§. 44.) in Rücksicht der sphärischen Dreyecke sind, und sie führen, vermittelst einiger einfachen Umformungen auf die Auflösung der ersten Dreyecke.

## §. 97.

Um die Fläche des Dreyecks MAM′ zu erhalten, muß man vom Puncte A eine senkrechte AD auf die Seite MM′ fällen, welche, indem sie durch die Puncte M und M′ geht, deren Coordinaten respectiv $\alpha$ und $\beta$, $\alpha'$ und $\beta'$ sind, zur Gleichung haben wird (§. 84.)

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha),$$

oder

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha' - \alpha}.$$

Vergleicht man diese letztere Gleichung mit der Formel $y = ax + b$, so wird man finden

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}, \quad b = \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha' - \alpha};$$

erwägt man nun, daß im §. 84. die Buchstaben $\alpha$ und $\beta$ die Coordinaten des Punctes bezeichnen, aus welchem die senkrechte gezogen wird, welche Coordinaten im gegenwärtigen Falle Null sind, weil dieser Punct der Anfangspunct ist, so wird sich der Ausdruck der senkrechten auf

$$\frac{-b}{\sqrt{(1 + a^2)}} = -\frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\sqrt{[(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2]}}$$

reduciren; und setzt man $c''$ statt $\sqrt{[(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2]}$, so wird kommen

$$AD = \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{c''}.$$

Ver=

Vermittelst dieses Werthes erhält man für den Flächeninhalt des Dreyecks MAM′

$$\frac{MM' \times AD}{2} = S = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{2},$$

ein Ausdruck, welcher darin bemerkenswerth ist, daß er den Flächeninhalt eines jeden Dreyes, dessen Scheitel in A liegt, vermittelst der Coordinaten der Scheitel, der an der Grundlinie liegenden Winkel, berechnen lehrt.

Man kann diesen in einen andern verwandeln, welcher bloß von den Seiten abhängt. Man muß in dieser Hinsicht die beyden Gleichungen

$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = c'^2,$$

in einander multipliciren, und vom Producte das Quadrat von

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}$$

abziehen; man wird dann erhalten

$$\alpha^2\beta'^2 + \alpha'^2\beta^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' = c^2c'^2 - \frac{(c^2 + c'^2 - c''^2)^2}{4};$$

nimmt man nun die Quadratwurzeln, und bringt alle Glieder des zweyten Theils auf einerley Nenner, so wird man finden

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{[4c^2c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2]},$$

und der Flächeninhalt des Dreyecks MAM′ wird zum Ausdruck haben

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{[4c^2c' - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2]},$$

deren Entwickelung mit dem Resultat des §. 60. übereinstimmt.

## §. 98.

Lasset uns nun einen vierten Punct M″ annehmen, dessen Coordinaten $\alpha''$, $\beta''$ seyen, und wir wollen die Distanzen AM″, MM″, M′M″ durch d, d′, d″ bezeichnen, so werden wir haben

$$\alpha''^2 + \beta''^2 = d^2$$
$$(\alpha'' - \alpha)^2 + (\beta'' - \beta)^2 = d'^2$$
$$(\alpha'' - \alpha')^2 + (\beta'' - \beta')^2 = d''^2$$

Entwickelt man diese Gleichungen, und substituirt in die beyden letztern statt der Größen $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, $\alpha''^2 + \beta''^2$, ihre Werthe $c^2$, $c'^2$ und $d^2$, so wird man erhalten

$$c^2 + d^2 - 2(\alpha\alpha'' + \beta\beta'') = d'^2$$
$$c'^2 + d^2 - 2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'') = d''^2;$$

setzt man nun zur Abkürzung

$$\frac{c^2 + d^2 - d'^2}{2} = d_,, \quad \frac{c'^2 + d^2 - d''^2}{2} = d_{,,},$$

so wird man haben

$$d_, = \alpha\alpha'' + \beta\beta'', \quad d_{,,} = \alpha'\alpha'' + \beta'\beta''.$$

Nimmt man in diesen Gleichungen den Werth von $\alpha''$ und den von $\beta''$, welche sind

$$\alpha'' = \frac{\beta' d_, - \beta d_{,,}}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad \beta'' = \frac{\alpha d_{,,} - \alpha' d_,}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

um sie in die Gleichung $\alpha''^2 + \beta''^2 = d^2$ zu substituiren, und nimmt man dabey auch auf die Gleichungen

$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = c'^2$$

Rücksicht, so wird man finden

$$c^2 d_{,,}^2 + c'^2 d_,^2 - 2 d_, d_{,,} (\alpha\alpha' + \beta\beta') = d^2(\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2 \; (C).$$

Setzt man dann statt der Größen $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ und $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ ihre oben erhaltenen Werthe

$$\frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}, \; \tfrac{1}{2} \sqrt{[c^2 c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2]},$$

und setzt man statt $d_,$ und $d_{,,}$ diese Größen

$$\frac{c^2 + d^2 - d'^2}{2}, \quad \frac{c'^2 + d^2 - d''^2}{2},$$

so wird diese Gleichung nur die sechs Distanzen

AM, AM′, MM′, AM″, MM″, M′M″

enthalten, welche die vier Seiten, und die zwey Diagonallinien des Vierecks AMM′M″ bilden. Wenn die vier Seiten und eine dieser Diagenalen bekannt ist, so kann man die andre Diagonale daraus bestimmen.

§. 99.

Wollte man den Punct M″ durch die Bedingung bestimmen, daß die drey Distanzen AM″, MM″, M′M″ einander gleich sind, so würde dieser Punct alsdann der Mittelpunct des um das vorgelegte Dreyeck beschriebenen Kreises seyn, und man würde haben

$$d = d' = d'',$$

welches geben würde

$$d_{,} = \frac{c^2}{2}, \quad d_{,,} = \frac{c'^2}{2}.$$

Die Gleichung (C) wird alsdann

$$c^2 c'^4 + c'^2 c^4 - 2 c^2 c'^2 (\alpha\alpha' + \beta\beta') = 4 d^2 (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2,$$

seyn, und wenn man für $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ dessen Werth setzt, und dabey in Erwägung zieht, daß man, wenn der Flächeninhalt des Dreyecks AMM′, welcher nach §. 97. $\frac{\alpha'\beta - \alpha'\beta}{2}$ gleich ist, durch S bezeichnet wird, alsdann

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 = 4 S^2$$

erhalten muß: so wird sie sich auf

$$c^2 c'^2 c''^2 = 16 d^2 S^2$$

reduciren. Wir ziehen hieraus

$$d = \frac{cc'c''}{4S},$$

ein sehr einfacher Ausdruck für den Halbmesser des um den gegebenen Triangel beschriebenen Kreises; und wenn man in die Werthe von $\alpha''$ und $\beta''$ statt $d_{,}$ und $d_{,,}$, $\frac{c^2}{2}$ und $\frac{c'^2}{2}$ setzt, so werden wir die Coordinaten des Mittelpunctes des Kreises erhalten.

§. 100.

Es wird nun nicht schwer fallen, die Coordinaten des Mittelpunctes des eingeschriebenen Kreises, und den Halbmesser dieses Kreises zu finden. In diesem Falle befindet sich der Punct M'' Fig. 37. innerhalb des Dreyecks, und hat eine solche Lage, daß alle aus demselben auf die Seiten AM, AM', MM' gefällten Perpendikel einander gleich sind. Um diesen Umstand analytisch darzustellen, genügt es die Gleichungen der genannten drey Linien zu bilden, und daraus vermittelst der Formeln §. 88., die Längen der von dem Puncte M'', dessen Coordinaten $\alpha''$ und $\beta''$ sind, auf die Seiten gefällten senkrechten zu finden. Nun sind diese Gleichungen respectiv

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x, \quad y = \frac{\beta'}{\alpha'}x \ (\text{§. 83.})$$

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha} \ (\text{§. 84.});$$

die auf jede derselben herabgelassene senkrechte, wird demnach zum Ausdruck haben,

$$\frac{\alpha\beta'' - \alpha''\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}, \quad \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\sqrt{(\alpha'^2 + \beta'^2)}}$$

$$\frac{(\alpha' - \alpha)\beta'' - (\beta' - \beta)\alpha'' + \alpha\beta' - \alpha'\beta}{\sqrt{[(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2]}},$$

und folgendermaßen geschrieben werden können

$$\frac{\alpha\beta'' - \alpha''\beta}{c}, \quad \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{c'}$$

$$\frac{-(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) - (\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)}{c''}$$

wenn man statt der Wurzelgrößen ihre Werthe c, c', c'' setzt.

Erinnert man sich, daß die Formel, welche die von einem Punct auf eine Linie herabgelassene senkrechte ausdrückt, durch eine Ausziehung der Quadratwurzel erhalten worden ist, und daß sie folglich sowohl positiv als negativ genommen werden können, so kann man daraus schließen, daß jeder der obigen Ausdrücke zwey Werthe hat. Um bloß die positiven anzubringen, muß man in Erwägung ziehen, daß nach der Figur die Linie AM′ von der Axe der Abcissen mehr als die Linien AM abweicht, und daß man, weil überdieß der Punct M″ zwischen der ersten und letzten liegt, nothwendigerweise haben muß

$$\frac{\beta'}{\alpha'} > \frac{\beta''}{\alpha''}, \quad \frac{\beta'}{\alpha'} > \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\beta''}{\alpha''} > \frac{\beta}{\alpha},$$

oder, welches dasselbe ist

$$\alpha''\beta' > \alpha'\beta'', \quad \alpha\beta' > \alpha'\beta, \quad \alpha\beta'' > \alpha''\beta,$$

woraus folgt, daß man, um einen positiven Werth zu geben, dem Ausdruck der zweyten senkrechten ein dem obigen entgegengesetztes Zeichen geben muß.

Da ferner der Punct M″ unter der geraden MM′ liegt, deren Gleichung

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

ist, so folgt, daß

$$\beta'' < \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} \alpha'' + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha},$$

oder daß

$$\beta'' < \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} \alpha'' + \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'},$$

welches giebt

$$\alpha\beta'' - \alpha'\beta'' < \alpha''\beta - \alpha''\beta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

oder

$$\alpha\beta'' - \alpha''\beta + \alpha''\beta' - \alpha'\beta'' < \alpha\beta' - \alpha'\beta;$$

eine Bedingung, nach welcher der Ausdruck für die dritte Linie positiv ist.

Wenn man nach diesen Betrachtungen

$$\frac{\alpha\beta'' - \alpha''\beta}{c} = e, \quad \frac{\alpha''\beta' - \alpha'\beta''}{c''} = e'$$

$$\frac{-(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) - (\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)}{c''} = e''$$

setzt, und die Producte $ec$, $e'c'$, $e''c''$ zusammennimmt, so erhält man nach den Reductionen

$$ec + e'c' + e''c'' = \alpha\beta' - \alpha'\beta.$$

Diese Gleichung ist leicht zu probiren, denn die Producte $ec$, $e'c'$, $e''c''$ drücken den Flächeninhalt der Dreyecke $AM''M'$, $AM''M$, $MM''M'$ durch 2 multiplicirt aus; die Summe dieser Flächen ist der des ganzen Dreyecks $AMM'$ gleich, welche man durch $S$ bezeichnet hat, und man wird haben

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 2S \text{ (§. 97.)}.$$

Wenn man $e = e' = e''$ hat, so findet man unmittelbar

$$e = \frac{2S}{c + c' + c''},$$

und wenn $c = c' = c''$, so kommt

$$e + e' + e'' = \frac{2S}{c}.$$

Der erste dieser Ausdrücke ist der des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises; und der zweyte zeigt uns, daß wenn man von irgend einem innerhalb eines gleichseitigen Dreyecks genommenen Punct auf jede Seite dieses Dreyecks eine senkrechte fällt, die Summe dieser senkrechten der Höhe dieses Dreyecks gleich seyn wird, weil man, wenn die Seite $c$ zur Basis genommen, und die Höhe durch $h$ bezeichnet wird

$$S = \frac{ch}{2}$$

erhält, welches giebt

$$e + e' + e'' = h.$$

Man könnte aus der eben auseinandergesetzten Theorie noch eine Menge Folgerungen ziehen; allein das Vorhergehende ist für dieses Werk hinreichend, und ich will nur noch anmerken, daß bey den geradlinigten Vielecken, von welcher Art sie auch seyn mögen, den Gleichungen (A) und (B) (§. 95.) ähnliche Gleichungen existiren, welche auf eben die Art erhalten werden, und welche auf die Eigenschaften dieser Vielecke führen, so wie diese auf die Eigenschaften des Dreyecks führen. Lagrange hat eine Abhandlung über die Pyramiden geliefert, welcher diese als Einleitung dienen kann, und welche man leicht auf die vieleckigten Körper ausdehnen kann, wenn man von den im fünften Kapitel des ersten Bandes meines Lehrbegriffs der Differential- und Integralrechnung beygebrachten Formeln, Gebrauch macht.

## §. 101.

Die Verbindung der Gleichung für den Umkreis des Zirkels mit der der geraden Linie, führt auf verschiedene Eigenschaften, welche aus dem Zusammentreffen dieser Linien erfolgen, und giebt die Auflösung aller Aufgaben, in welchen die unbekannte nicht den zweyten Grad übersteigt.

Es seyen $x^2 + y^2 = r^2$, $y - \beta = a(x - \alpha)$ diese beyden Gleichungen. Sie zur Bestimmung von $x$ und $y$ anzuwenden, oder sie so anzusehen, als enthielten sie dieselben unbekannten Größen, heißt nichts anders, als daß die Puncte, zu welchen die Coordinaten $x$ und $y$ gehören, zu gleicher Zeit im Umkreise des Zirkels und in der geraden Linie, das heißt, daß sie im Durchschnitte dieser beyden Linien anzutreffen seyn sollen; und es ist offenbar, daß man im Allgemeinen, um die Durchschnittspuncte irgend zweyer Linien zu finden, nur anzunehmen braucht, daß ihre Gleichungen, dieselben unbekannten Größen enthielten.

Schafft man nun $y$ dadurch heraus, daß man dessen Werth aus der zweyten Gleichung nimmt, so wird man finden

$$x^2 + (ax + \beta - a\alpha)^2 = r^2.$$

Wenn nun diese Gleichung vom zweyten Grade entwickelt wird, so giebt sie zwey Werthe für $x$, weil die gerade Linie überhaupt den Kreis in zwey Puncte schneiden muß; man kann aber zu einfachern Resultaten gelangen, wenn man den Abstand des Punctes dessen Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind, von einem Durchschnittspunct der geraden Linie mit dem Kreise für die unbekannte nimmt. Bezeichnet man nun diesen Abstand durch $z$, so wird man haben (§. 84.)

$$z = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2},$$

woraus man zieht

$$z^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

und setzt man für $y - \beta$ den Werth $a(x - \alpha)$, so wird kommen

$$z^2 = (x - \alpha)^2 \, (1 + a^2),$$

woraus man zieht

$$x - \alpha = \frac{z}{\sqrt{(1 + a^2)}}, \; y - \beta = \frac{az}{\sqrt{(1 + a^2)}},$$

welches geben wird

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{(1 + a^2)}}, \; y = \beta + \frac{az}{\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

Substituirt man diese letztern Werthe in die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, so wird man sie in diese andre verwandeln:

$$\alpha^2 + \frac{2\alpha z}{\sqrt{(1+a^2)}} + \frac{z^2}{1 + a^2} + \beta^2 + \frac{2\beta az}{\sqrt{(1 + a^2)}} + \frac{a^2 z^2}{1 + a^2} = r^2,$$

welche sich auf

$$z^2 + \frac{2(\alpha + \beta\alpha)}{\sqrt{(1 + a^2)}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

reducirt, und zuvörderst $z$, und dann $x$ und $y$ vermittelst der vorhergehenden Ausdrücke bestimmt.

Es ist offenbar, daß wenn E Fig. 38. derjenige Punct ist, dessen Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind, und wenn MNM′ und EM der Kreis und die gerade Linie sind, a alsdann die Tangente de Winkels EeB ausdrücken wird, und die beyden Werthe von z werden zu den geraden EM′ und EM gehören.

§. 102.

Aus der Theorie der Gleichungen ist bekannt, daß das letzte Glied das Product aller Wurzeln ist; bezeichnet man nun die der obigen Gleichung durch z′ und z″, so wird man haben

$$z'z'' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

ein Ausdruck, welcher, indem er nicht von a abhängt, für jeden Werth dieser Größe richtig bleibt, das heißt, für jede Größe des Winkels EeB, dessen Tangente sie ist; und da z′ und z″ die beyden Linien ME und M′E vorstellen, so folgt hieraus, daß das Product ME × M′E für alle durch den Punct E geführten Linien einerley bleibt, oder daß man, wenn eine zweyte Secante Em′ geführt wird,

$$EM \times EM' = Em \times Em'$$

haben wird: woraus folgt, daß die Secanten EM′ und Em′ ihren außerhalb liegenden Theilen EM und Em, umgekehrt proportionirt sind, wie es in den Anfangsgründen der Geometrie bewiesen wird.

Wenn der Punct E außerhalb des Kreises liegt, hat man

$$\alpha^2 + \beta^2 > r^2,$$

weil $\alpha^2 + \beta^2$ das Quadrat des Abstandes des Punctes E vom Mittelpuncte A ausdrückt; wenn dieser Punct aber innerhalb des Kreises liegt, wie Fig. 39. zeigt, so haben die Größen z′ und z″ verschiedene Zeichen, weil das letzte Glied $\alpha^2 + \beta^2 - r^2$ negativ wird, indem $\alpha^2 + \beta^2 < r^2$. Ferner bleibt das Product EM × EM′ unabhängig von der Neigung der Linie MM′ gegen AB unverändert; und wenn man durch den Punct E eine zweyte Sehne mm′ führt, so wird man noch immer haben

$$EM \times EM' = Em \times Em',$$

woraus folgt, wie in den Anfangsgründen bewiesen wird, daß die Sehnen in einem und demselben Kreise sich nach einem umgekehrten Verhältniß schneiden; und man sieht, daß dieser Satz und der vorhergehende, eigentlich zu reden, nur einen einzigen Satz ausmachen, indem beyde aus einer und derselben Gleichung hergeleitet werden.

Zieht man aus der Gleichung

$$z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{(1 + a^2)}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

den Werth von z, so wird man finden

$$z' = \frac{-(\alpha + \beta a) + \sqrt{[r^2(1+a^2) - (\beta - a\alpha)^2]}}{\sqrt{(1+a^2}}$$

$$z'' = \frac{-(\alpha + \beta a) - \sqrt{[r^2(1+a^2) - (\beta - a\alpha)^2]}}{\sqrt{(1+a^2)}};$$

von dieser Art sind die Ausdrücke für EM und EM′. Sie können vereinfacht werden, wenn man die Coordinaten dergestalt verwechselt, daß die Abcissen x und $\alpha$ von dem Mittelpuncte A aus auf der geraden Linie genommen werden, welche den Punct E mit dem Mittelpuncte A des vorgelegten Kreises verbindet, und wenn man die Ordinaten y auf eben dieser Linie senkrecht annimmt; man wird alsdann haben

$$\beta = 0, \quad \alpha = AE$$

$$z' = \frac{-\alpha + \sqrt{[r^2(1 + a^2) - a^2\alpha^2]}}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

$$z'' = \frac{-\alpha - \sqrt{[r^2(1 + a^2) - a^2\alpha^2]}}{\sqrt{(1 + a^2)}};$$

die Gleichung des Kreises wird unverändert bleiben, allein die der geraden EM wird alsdann

$$y = a\,(x - \alpha).$$

§. 103.

Nimmt man an, der Punct E sey außerhalb des Kreises, so wird man haben

$$MM' = EM' - EM = \frac{2\sqrt{[r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2]}}{\sqrt{(1+a^2)}};$$

allein es ist offenbar, daß diese Linie desto mehr abnimmt, je mehr die Linie EM, indem sie sich um den Punct E dreht, außerhalb des Kreises zu kommen strebt, und daß die Puncte M′ und M in N zusammenfallen, wenn diese Linie mit dem Kreise nur einen einzigen Berührungspunct gemein hat. Bey diesem Puncte wird man also haben $MM' = 0$, und folglich

$$r^2\,(1 + a^2) - a^2\alpha^2 = 0$$

$$a = \frac{r}{\sqrt{(\alpha^2 - r^2)}},$$

dies ist der Ausdruck für die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen eine durch den Punct E geführte Berührungslinie des Kreises EN, mit der Linie AE einschließen muß.

Wir leiten also hieraus algebraisch folgende Aufgabe her: Von einem außerhalb des Kreises gegebenen Puncte eine Tangente zu diesem Kreise zu führen.

§. 104.

Dieselben Betrachtungen werden uns auch dienen, die von einem im Umkreise genommenen Punct geführte Tangente zu bestimmen; und zu mehrerer Allgemeinheit wollen wir diesen Punct nach Belieben annehmen. Bezeichnet man nun immer seine Coordinaten durch $\alpha$ und $\beta$, so werden wir für die Gleichung des Kreises, welcher diese Größen ein Genüge thun müssen,

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2$$

erhalten, wodurch die Gleichung

$$z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{(1 + a^2)}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

auf

$$z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{(1 + a^2)}} z = 0$$

reducirt wird, und in diesem Zustande läßt sie sich in

$$z = 0, \quad z + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{(1 + a^2)}} = 0$$

zerfällen; der Unterschied dieser Werthe, oder die Länge des im Kreise liegenden Theils der Secante, wird seyn

$$\frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{(1 + a^2)}}.$$

Damit diese Größe verschwinde, muß man haben

$$\alpha + \beta a = 0 \quad \text{oder } a = -\frac{\alpha}{\beta},$$

ein Resultat, welches mit dem, was in den Anfangsgründen bewiesen wird, übereinstimmt; denn die durch den Mittelpunct des Kreises und durch den Punct, dessen Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind, geführte gerade, oder der Halbmesser AN, wird zur Gleichung haben $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ (§. 83.); da sich nun die Gleichung $y - \beta = a(x - \alpha)$ vermittelst des oben für a gefundenen Werths in $y - \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha)$ verwandelt, so wird sie die gerade Linie ausdrücken, welche auf diesem Halbmesser senkrecht ist, und durch den Punct geht, dessen Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind, das ist, durch dessen äußersten Punct N.

Wollte man den Abstand des Anfangspunct A der Coordinaten von dem Puncte finden, wo die Tangente NT die

Axe der Abcissen begegnet, so müßte man in der Gleichung für diese Tangente $y = 0$ setzen, welches geben würde

$$-\beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) \text{ und } x = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} = \frac{r^2}{\alpha},$$

weil $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$.

## §. 105.

Vermittelst des Vorhergehenden kann man folgende Aufgabe aufzulösen: **Die Lage zu finden, welche eine durch den Punkt E geführte Linie EM haben muß, damit der im Kreise liegende Theil MM′ dieser Linie von einer gegebenen, durch m ausgedrückten Größe sey.** Um zu den einfachsten Auflösungen zu gelangen, wollen wir, wie zu Ende des §. 102., die Linie AE für die Abcissenlinie annehmen, und wenn wir die im §. 103. zwischen den Werthen von z erhaltene Differenz gleich m setzen, so werden wir haben

$$m = \frac{2\sqrt{[r^2(1 + a^2) - a^2\alpha^2]}}{\sqrt{(1 + a^2)}};$$

schafft man die Wurzelzeichen weg, so wird kommen

$$m^2(1 + a^2) = 4r^2(1 + a^2) - 4a^2\alpha^2,$$

woraus wir ziehen werden

$$a = \frac{\sqrt{(4r^2 - m^2)}}{\sqrt{(4\alpha^2 - 4r^2 + m^2)}};$$

substituirt man diesen Werth in $y = a(x - \alpha)$, so werden wir die Gleichung der gesuchten geraden Linie erhalten.

Wir haben nun bloß die analytische Auflösung der uns beschäftigenden Aufgabe; und wir wollen ihn auch zu construiren suchen. Um hierzu zu gelangen, erwäge man, daß der Zähler $\sqrt{(4r^2 - m^2)}$ die Cathete eines rechtwinklichten Dreyecks ausdrückt, dessen Hypothenuse $2r$, und dessen andre Cathete $m$ ist. Hierauf kann man dem Nenner $\sqrt{(4\alpha^2 - 4r^2 + m^2)}$ die Form $\sqrt{[4\alpha^2 - (4r^2 - m^2)]}$

geben, welches mit $\sqrt{[4\alpha^2 - (\sqrt{4r^2 - m^2})^2]}$ einerley ist, und welches zeigt, daß dieser Nenner ebenfalls die Seite eines rechtwinklichten Dreyecks ist, welches zur Hypothenuse $2\alpha$, und zur dritten Seite $\sqrt{(4r^2 - m^2)}$, oder den Zähler hat, dessen Construction wir eben angezeigt haben.

Bezeichnen wir nun die beyden Linien, welche man durch diese Operationen erhält, durch q und p, so werden wir haben

$$a = \frac{q}{p},$$

und die Gleichung $y = a(x - \alpha)$ wird alsdann werden

$$y = \frac{q}{p}(x - \alpha).$$

Wenn wir demnach von dem Puncte E aus auf der Linie AE eine Entfernung $EF = p$ nehmen, und von dem andern äußersten Punct dieser Entfernung auf diese Linie den Perpendikel $FG = q$ errichten, so wird die gerade Linie, welche den Endpunct dieses senkrechten mit dem Punct E verbindet, von der im Vortrage der Aufgabe verlangten Eigenschaft seyn, weil der Winkel FEG alsdann zur trigonometrischen Tangente haben wird $a = \frac{q}{p} = \frac{FG}{EF}$.

## §. 106.

Aus dem Vorhergehenden fließt offenbar, daß die Aufgaben der Geometrie nach zweyen sehr verschiedenen Methoden behandelt werden können. Die eine besteht darin, die Gleichungen der Linie zu bestimmen, welche die gesuchten Puncte enthalten, indem man von den Eigenschaften dieser Linien ausgeht; und die andre darin, aus den Betrachtungen der ähnlichen und rechtwinklichten Dreyecke, welche die aus der als aufgelöst betrachteten Aufgabe entspringende Figur, vermittelst einiger vorläufigen Hülfsconstructionen darbiethet, die Beziehungen der geraden zu bestimmen, welche diese Puncte verbinden.

Die erste dieser Methoden, welche öfters weit eleganter als die zweyte ist, ist auch die allgemeinste; allein die zweyte ist oft sehr einfach; und dies muß natürlich der Fall seyn, weil man vermittelst dieser, weniger entfernte Sachen nimmt, und von Eigenschaften ausgeht, welche mit den zu entdeckenden noch verwandt sind *).

## §. 107.

Die Gleichung vom ersten Grade hat uns nur eine einzige Linie, nehmlich die gerade Linie gegeben; wir haben ferner gefunden, daß die Gleichung des Kreises vom zweyten Grade war; allein seine Gleichung, welche wir im §. 90. unter der allgemeinsten Form erhalten haben, ist nur ein besondrer Fall von denen vom zweyten Grade, deren Form diese ist

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F.$$

Es bleibt uns also noch übrig, die krummen Linien zu entdecken, welche mit den übrigen Fällen dieser Formel übereinstimmen. Wir wollen zuvörderst bemerken, daß man sie, ohne daß sie von ihrer Allgemeinheit verlieren, folgendermaßen schreiben kann:

$$y^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x = \frac{F}{A};$$

und setzt man zur Abkürzung

*) Ich habe den gründlichen und einförmigen Gang der ersten dieser Methoden in der Vorrede zu meinem Lehrbegriff der Differential- und Integralrechnung vorgetragen; und die Leser, welche die besondere Anwendung davon kennen lernen wollen, werden durch das Werk von Puissant Recueil de diverses propositions de géométrie befriedigt werden.

$$\frac{B}{A} = a, \frac{C}{A} = b, \frac{D}{A} = c, \frac{E}{A} = d, \frac{F}{A} = e,$$

so wird daraus erfolgen

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e.$$

Das erste Mittel, welches sich zur Bestimmung der Umstände des Laufs der gesuchten Curven darbiethet, besteht darin, den Fortgang der Werthe der Ordinaten in Rücksicht auf diejenigen zu untersuchen, welche man für die Abcissen setzen will, das heißt, die obige Gleichung in Rücksicht auf y aufzulösen.

Wenn man auf diese Art verfährt, wird man finden

$$y = -\tfrac{1}{2}(ax+c) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[4(e-dx-bx^2)+(ax+c)^2]}.$$

Entwickelt man die Größe unter dem Wurzelzeichen, und ordnet sie nach x, so wird kommen

$$y = \frac{-(ax+c) \pm \sqrt{[(4e+c^2)-2(2d-ac)x-(4b-a^2)x^2]}}{2}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$4e + c^2 = p, \ 2d - ac = n, \ 4b - a^2 = m,$$

so wird man haben

$$y = -\frac{ax+c}{2} \pm \frac{\sqrt{(p-2nx-mx^2)}}{2}.$$

Man sieht zuvörderst, daß der Werth von y aus zweyen Theilen zusammengesetzt ist, von denen der eine durch $-\frac{ax+c}{2}$ ausgedrückte, die Ordinate einer geraden Linie ist, welche zur Gleichung hat $y = -\tfrac{1}{2}ax - \tfrac{1}{2}c$, und welche construirt wird, wenn man auf der Axe AC unterhalb AB Fig. 40. einen Theil AD $= \tfrac{1}{2}c$ nimmt, und durch den Punct D eine gerade DE dergestalt führt, daß sie mit der Seite, auf welcher die negativen Werthe von x genommen werden, einen Winkel DEA bildet, dessen Tangente $\tfrac{1}{2}a$ gleich ist (§. 83.); so daß, wenn AP = x gesetzt wird, PN seyn wird $-\frac{ax+c}{2}$. Es ist nun offenbar, daß man, um die zur gesuchten Curve gehörigen Puncte zu finden, in der Richtung von PN, sowohl ober- als unterhalb der Linie ED, die Theile NM und NM′ tragen muß, welche der Größe

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(p - 2nx - mx^2)}$$

gleich sind, weil man durch dieses Mittel haben wird

$$PM = -\tfrac{1}{2}(ax + c) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(p - 2nx - mx^2)}$$
$$PM' = -\tfrac{1}{2}(ax + c) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(p - 2nx - mx^2)}.$$

Die Linie DE besitzt also die merkwürdige Eigenschaft, alle zwischen zweyen Puncten der Curve liegende Theile der zu AC paralell geführten Linien, in zwey gleiche Theile zu theilen, und aus dieser Ursache hat man ihr den Nahmen des Durchmessers gegeben; indessen findet zwischen der Linie DE und den Durchmessern des Kreises der Unterschied statt, daß diese letztern alle Linien, welche sie in zwey gleiche Theile theilen, unter rechten Winkeln schneiden, indessen die erstere sie unter schiefe Winkel schneidet; wir werden aber gleich zeigen, daß diese beyden Umstände aus einem und demselbem Gesetze hergeleitet werden.

## §. 108.

Die obige Gleichung kann sehr vereinfacht werden, wenn man die geraden NM und NM′ zu Ordinaten nimmt, das heißt, wenn man

$$y + \frac{ax + c}{2} = u$$

setzt; es wird alsdann kommen

$$u = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(p - 2nx - mx^2)};$$

allein die Abcissen sind dann nicht mehr auf der Linie genommen, von welcher die Ordinaten ausgehen. Um sie von dieser Beschaffenheit zu haben, muß man sie auf dem Durchmesser DE nehmen; dieses verrichtet man, wenn man DN = t setzt, und wenn man in Erwägung zieht, daß, wenn man DG zu AB paralell zieht, alsdann kommen wird

$$DG = DN \cos D = t \cos D.$$

Der Winkel D ist mit dem Winkel E einerley, dessen Tangente $\frac{1}{2}$ a ist; sein Cosinus wird demnach seyn $\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{4}a^2)}}$ $= \frac{2}{\sqrt{(4+a^2)}}$ (§. 28.); und weil AP = DG, so wird daraus erfolgen

$$x = \frac{2t}{\sqrt{(4+a^2)}} = \gamma t,$$

wenn man zur Abkürzung

$$\frac{2}{\sqrt{(4+a^2)}} = \gamma$$

setzt.

Wenn nun der Werth von x in den von u gesetzt wird, so findet man die Gleichung

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(p - 2n\gamma t - m^2\gamma^2 t^2)},$$

welche für jeden Punct der Curve zwischen t und u, oder zwischen den geraden DN und NM existiren muß, und welche folglich deren Gleichung nach den Coordinaten DN und NM ist. Diese letztere viel einfachere Gleichung als

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e$$

ist gleichwohl eben so allgemein, weil die bisher vorgenommenen Umformungen keine besondere Bedingung eingeführt haben.

Da der Ausdruck von u mit dem Wurzelzeichen vom zweyten Grade behaftet ist, so kann er nur in sofern reelle Werthe geben, als die Größe $p - 2n\gamma t - m\gamma^2 t^2$ positiv bleibt. Die Untersuchung dieses Umstandes biethet verschiedene Fälle dar, welche wir nacheinander abhandeln wollen.

§. 109.

Wenn die Größe, welche wir (§. 107.) durch m bezeichnet haben, positiv ist, kann man den Ausdruck $p - 2n\gamma t - m\gamma^2 t^2$ unter der Form

$$m\gamma^2 \left(\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma} t - t^2\right)$$

ansetzen, und man wird alsdann nur noch diesen

$$\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma} t - t^2$$

zu betrachten haben.

Die Werthe von t, welche ihn positiv machen, oder welche

$$\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma} t > t^2$$

geben, müssen nothwendigerweise kleiner als die seyn, welche der Gleichung

$$\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma} t = t^2$$

oder

$$t^2 + \frac{2n}{m\gamma} t - \frac{p}{m\gamma} = 0$$

ein Gegnüge thun.

Löst man diese Gleichung auf, so erhält man

$$t = -\frac{n}{m\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{m\gamma^2} + \frac{n^2}{m^2\gamma^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{m\gamma} [-n \pm \sqrt{(pm + n^2)}].$$

Wenn diese Werthe statt haben, sind die von u Null; sie werden folglich die Puncte angeben, wo die Curve den Durchmesser DE schneidet. Um diese Puncte zu finden, muß man auf der negativen Seite von DE einen Theil derselben DO gleich $\frac{n}{m\gamma}$ nehmen, und dann auf jeder Seite des Punctes O die Distanzen OI und OI′ tragen, welche der

Größe $\frac{1}{m\gamma} \sqrt{(pm + n^2)}$ gleich sind; denn man wird alsdann haben

$$DI = -\frac{n}{m\gamma} + \frac{1}{m\gamma} \sqrt{(pm + n^2)}$$

$$DI' = -\frac{n}{m\gamma} - \frac{1}{m\gamma} \sqrt{(pm + n^2)}.$$

Ueber die Puncte I und I′ hinaus werden, da die Größe

$$\frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma} t - t^2$$

negativ wird, die Ordinaten u imaginär seyn, und die Curve wird keinen Punct haben, welcher mit größern Abcissen als DI und DI′ correspondirte; sie wird also in dem, von den beyden durch die Puncte I und I′ zu den Ordinaten paralell geführten Linien IH und I′H′ begränzten Raum, eingeschlössen seyn.

Der zur Abcisse DO gehörige Punct O, welcher den Abstand II′, oder den Durchmesser in zwey gleiche Theile theilt, hat, wegen dieser Eigenschaft, den Nahmen des **Mittelpunctes** erhalten.

Wenn man den Anfangspunct der Abcissen dahin trägt, so verschwindet dadurch im Ausdurck von u das mit der ersten Potenz von t behaftete Glied, wodurch dieser Ausdruck noch mehr vereinfacht wird. In der That hat man alsdann

$$DN = ON - DO = ON - \frac{n}{m\gamma},$$

und wenn man ON durch s ausdrückt, so erfolgt daraus

$$t = s - \frac{n}{m\gamma}$$

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\left\{ m\gamma^2 \left[ \frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma}\left(s - \frac{n}{m\gamma}\right) - \left(s - \frac{n}{m\gamma}\right)^2 \right] \right\}}.$$

Dieser letztere Ausdruck entwickelt und reducirt, verwandelt sich in

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\left[ m\gamma^2 \left( \frac{pm + n^2}{m^2\gamma^2} - s^2 \right) \right]}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{pm + n^2}{m^2\gamma^2} = A^2,$$

so werden wir endlich finden

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{[m\gamma^2 (A^2 - s^2)]} = \tfrac{1}{2} \sqrt{m\gamma^2} . \sqrt{(A^2 - s^2)}.$$

Der Grad der Einfachheit dieser Gleichung ist so groß, daß sie sich leicht construiren, und die Gestalt der Curve, welche sie ausdrückt, sich daraus herleiten läßt. Denn, wenn man A für den Halbmesser eines Kreises, dessen Mittelpunct O ist, und s für die Abcisse nimmt, so wird der Factor $\sqrt{(A^2 - s^2)}$ die auf OI senkrecht geführte Ordinate des Kreises ausdrücken. Was den Factor $\frac{1}{2} \sqrt{m\gamma^2}$ betrift, so braucht er bloß ein Verhältniß auszudrücken, wenn man auf die Homogenität der Ausdrücke (§. 67.) Rücksicht nimmt; wir wollen ihn durch $\frac{B}{A}$ vorstellen, und wir werden folglich haben

$$\frac{B^2}{A^2} = \tfrac{1}{4} m\gamma^2, \quad B^2 = \frac{mp + n}{4m},$$

woraus wir ziehen

$$u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{(A^2 - s^2)}.$$

Wir sehen also, daß die Ordinate NM erhalten wird, wenn man das vierte Glied der Proportion

$$A : B = \sqrt{(A^2 - s^2)} : u.$$

Nachdem die Größe u bestimmt seyn wird, muß man sie wegen des Zeichens $\pm$, sowohl oberhalb als unterhalb der Linien DE, auf MM′ tragen.

Es ist offenbar, daß die aus dieser Construction entstehende Curve, so wie der Kreis eingeschlossen, und nur in dem von $s = A$ bis $s = -A$ sich erstreckenden Raum enthalten seyn wird, weil außerhalb dieser Gränzen die Wurzelgröße oder die Ordinate imaginär wird.

Der größte Werth, welchen u annehmen kann, ist offenbar der zum Punct O, oder zu $s = 0$ gehörige; man hat in diesem Falle

$$u = \pm B;$$

nimmt man daher die geraden Linien OL und OL′ gleich B, so werden die Puncte L und L′ die Gränzen der Curve nach den Ordinaten seyn, so wie es I und I′ nach den Abcissen sind.

## §. 110.

Es ist nöthig hierbey anzumerken, daß wenn die durch $A^2$ ausgedrückte Größe negativ ist, die Wurzelgröße $\sqrt{A^2 - s^2}$ immer imaginär bleibt, und die vorgelegte Gleichung kann in diesem Falle gar keine Linie ausdrücken. Geht man nun auf den Werth von $A^2$ zurück, welcher $\frac{pm + n^2}{m^2\gamma^2}$ ist, so wird man sehen, daß er negativ seyn würde, wenn p mit dem Zeichen — behaftet wäre, und man überdies $pm > n^2$ hätte.

Wenn man $pm = n^2$ hätte, so würde man, da sich die Gleichung $u = \frac{B}{A}\sqrt{(A^2 - s^2)}$ auf

$$u = \tfrac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2} \cdot \sqrt{-s^2} = \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{-m}$$

reducirt, weil $\frac{B}{A} = \frac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2}$, derselben ein Genüge thut, wenn man $u = 0$, $s = 0$ setzt; mithin kann man sagen, daß sich die Curve in diesem Falle auf den einzigen Punct O reducirt, wo $u = 0$, $s = 0$, und daß dieser Punct die Gränze ist, welcher sich die durch die obigen Gleichungen gegebenen Curven desto mehr nähern, je mehr die Durchmesser II′ und LL′ abnehmen.

Erhebt man beyde Theile der Gleichung

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\left[ m\gamma^2 \left( \frac{pm + n^2}{m^2\gamma^2} - s^2 \right) \right]}$$

zum Quadrat, so verwandelt sie sich in

$$u^2 = \tfrac{1}{4} m\gamma^2 \left( \frac{pm + n^2}{m^2\gamma^2} - s^2 \right),$$

oder in

$$4mu^2 + m^2\gamma^2 s^2 - pm - n^2 = 0.$$

Wenn p negativ ist, wird sie

$$4mu^2 + m^2\gamma^2 s^2 + pm - n^2 = 0;$$

und wenn $pm > n^2$, so wird der erste Theil, indem er die Summe von dreyen wirklich positiven Größen ist, weil man auch m positiv annimmt, nur dann Null werden, wenn man diese drey Gleichungen haben würde

$$4mu^2 = 0, \quad m^2\gamma^2 s^2 = 0, \quad pm - n^2 = 0.$$

Den beyden ersten Gleichungen kann man ein Genüge thun, wenn man $u = 0$, $s = 0$ setzt; allein die dritte drückt eine Bedingung aus, ohne welche die vorgelegte gänzlich ungereimt seyn würde.

## §. 111.

Wir wollen für jetzt annehmen m sey negativ: so wird sich die Größe $p - 2n\gamma t - m\gamma^2 t^2$ in

$$p - 2n\gamma t + m\gamma^2 t^2 = m\gamma^2 \left( \frac{p}{m\gamma^2} - \frac{2n}{m\gamma} t + t^2 \right)$$

verwandeln. Man kann das Glied $-\frac{2n}{m\gamma} t$ hinwegschaffen, wenn man $t = s + \frac{n}{m\gamma}$ nimmt; und da die Größe $\frac{n}{m\gamma}$, welche die Linie DO Fig. 41. vorstellt, hier das Zeichen + hat, so muß man sie auf den Theil DF der positiven Abcissen tragen. Man wird also den Mittelpunct O haben, und die vorgelegte Gleichung wird sich verwandeln in

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\left[ m\gamma^2 \left( \frac{pm - n^2}{m^2\gamma^2} + s^2 \right) \right]}.$$

Setzt man nun $\frac{pm - n^2}{m^2\gamma^2} = \pm A^2$, je nachdem die Größe $pm - n^2$ positiv oder negativ ist, und setzt man immer $\frac{1}{4} m\gamma^2 = \frac{B^2}{A^2}$, so wird man erhalten

$$u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{(s^2 \pm A^2)}.$$

Diese Gleichung scheint zwey verschiedene Fälle zu enthalten; sie enthält indessen nur einen einzigen. Denn wenn man beyde Theile zum Quadrat erhebt, so erhält man daraus

$$u^2 = \frac{B^2}{A^2} (s^2 \pm A^2),$$

woraus folgt

$$A^2u^2 - B^2s^2 = A^2B^2,$$
$$B^2s^2 - A^2u^2 = A^2B^2.$$

Diese beyden letztern sind nur in sofern von einander unterschieden, daß in der zweyten $A$ und $u$ die Stellen einnehmen, welche $B$ und $s$ in der ersten haben, und umgekehrt; man braucht daher bloß zu untersuchen, was eine von ihnen bezeichnet.

Wir wollen die zweyte ins Besondre betrachten; man zieht daraus

$$u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{(s^2 - A^2)};$$

die Ordinate $u$ wird construirt, wenn man zu den drey Linien

$A$, $B$ und $\sqrt{(s^2 - A^2)}$

eine vierte Proportionallinie sucht. Die letztere ist die mittlere Proportionallinie zwischen $s - A$ und $s + A$, und findet sich nur dann reell, so lange $s > A$ ist. Die gesuchte

Curve hat also von $s = 0$ bis $s = + A$, und von $s = 0$ bis $s = - A$, keine reelle Ordinate; und da $s = A$ und $s = - A$ zugleich $u = 0$ geben, so folgt, daß diese Curve den Diameter DE in zweyen Puncten I und I′ begegnet, in welchen die der Größe A gleichen Abcissen OI und OI′ sich endigen, und daß sie sich nicht zwischen den geraden Linien IH und I′H′ erstreckt.

Ueber den Puncten I und I′ hinaus hat man $s > A$, sie sey positiv oder negativ, und die Ordinate u nimmt unaufhörlich zu; und es begränzt nichts die Größe, welche sie erreichen kann. Nach diesen Betrachtungen sieht man leicht ein, daß der Lauf der Curve dem der Linien KIk, K′I′k′ ähnlich ist, welche durch den Zwischenraum II′ von einander abgesondert sind, und deren Zweige IK und Ik, I′K′ und I′k′ sich ins Unendliche erstrecken.

Betrachten wir diese Curve in Rücksicht auf die gerade Linie LL′, das heißt, nimmt man u für die Abcissen, und s für die Ordinaten, so wird die Gleichung derselben geben

$$s = \pm \frac{A}{B} \sqrt{(u^2 + B^2)}.$$

Unter dieser Form kann s nicht kleiner als OI und O′I′ werden, und die Curve trift den Durchmesser LL′ nicht. Es ist hieraus offenbar, daß die Gleichung

$$A^2u^2 - B^2s^2 = A^2B^2,$$

indem sie auf

$$u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{(s^2 + A^2)}$$

führt, zu einer Curve QLq, Q′L′q′ von derselben Art wie KLk, K′L′k′ gehört, welche aber gegen den Durchmesser LL′ der Werthe von u gekehrt ist, so wie es diese gegen den Durchmesser II′ der Werthe von s ist.

§. 112.

Wenn man $A = 0$ oder $pm - n^2 = 0$ hätte (§. 111.), so würde sich der Ausdruck von $u$ auf $u = \frac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2 s^2}$ reduciren, und diese verschiedene Gleichungen geben

$$u = \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m}, \quad u = -\tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m},$$

welche nur die beyden durch den Punct O geführten Linien geben würden. Um sie zu construiren, nehme man eine Abcisse OR nach Belieben an; es wird alsdann kommen

$$u = \pm \tfrac{1}{2}\,OR\,.\,\gamma\sqrt{m},$$

und trägt man diese Werthe von R nach S und S′, so wird man OS und OS′ erhalten, welche die verlangten geraden seyn werden.

Vergleichen wir nun mit diesen Geraden die Curve KIk, indem man eine Abcisse $ON = s$ nimmt, so wird MV die Differenz der correspondirenden Ordinaten NM und NV seyn. Da nun die erste durch

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{m\gamma^2}\,.\,\sqrt{(s^2 - A^2)} \text{ oder } \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m}\,.\,\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{s^2}\right)}$$

und die zweyte durch

$$\tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m}$$

ausgedrückt ist, so werden wir haben

$$MV = \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m} - \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m}\,.\,\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{s^2}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\gamma s\sqrt{m}\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{s^2}\right)}\right].$$

Die Differenz $1 - \sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{s^2}\right)}$ wird leichter zu bestimmen, wenn man den Ausdruck $\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{s^2}\right)}$ entwickelt; da nun die Quadratwurzel des Gliedes 1, 1 ist, so setze man

$$\sqrt{\left(1 - \frac{A^2}{s^2}\right)} = 1 + z,$$

und man wird haben

$$1 - \frac{A^2}{s^2} = 1 + 2z + z^2;$$

je größer man s annimmt, desto kleiner wird der Bruch $\frac{A^2}{s^2}$ werden, und desto weniger wird $1 + z$ von der Einheit unterschieden seyn. Läßt man in der obigen Gleichung nach der im §. 215. der Algebra gegebenen Methode $z^2$ weg, so wird man haben

$$z = -\frac{A^2}{2s^2}.$$

Um sich hierauf diesem Werthe mehr zu nähern, wird man $z = -\frac{A^2}{2s^2} + z'$ setzen, und man kann auf eine ähnliche Art $z'$ berechnen, welches man finden wird $-\frac{A^4}{8s^4}$, und und so fort *). Man wird also finden

$$MV = \tfrac{1}{2}\gamma s \sqrt{m}\left\{1 - 1 + \frac{A^2}{2s^2} + \frac{A^4}{8s^4} + \text{rc.}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\gamma \sqrt{m}\left\{\frac{A^2}{2s^2} + \frac{A^4}{8s^3} + \text{rc.}\right\};$$

woraus man sieht, daß MV desto mehr abnimmt, je kleiner s genommen wird, ohne jemahls Null zu werden.

Hieraus folgt, daß sich die Curve desto mehr den geraden OS und OS′ nährt, je mehr sie sich vom Puncte O entfernt, ohne sie jedoch je erreichen zu können: so daß diese geraden die Gränzen der Theile KIk, K′I′k′ der vorgelegten Curve sind, welche niemahls außerhalb des Winkels SOS′ und seines Scheitelwinkels kommen kann.

## §. 113.

Es bleibt uns nun nur noch übrig den Fall zu untersuchen, wo $m = 0$, in welchem man bloß hat

---

*) Man kann auch diese Entwickelung vermittelst der Binomialformel erhalten.

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(p - 2n\gamma t)}.$$

Man bringt die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe auf ein einziges Glied, wenn man

$$\frac{p}{2n\gamma} - t = s \text{ oder } t = \frac{p}{2n\gamma} - s$$

setzt; man hat durch dieses Mittel

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{2n\gamma s} \text{ oder } u = \pm \sqrt{Cs},$$

wenn man $\frac{1}{2} n\gamma$ durch C ausdrückt. Man sieht leicht, daß diese Gleichung für $s = 0$ auch zugleich $u = 0$ geben, und daß folglich der Punct des Durchmessers DE Fig. 42., auf welchem man den Anfangspunct der Werthe von s genommen hat, in der gesuchten Curve selbst liegt. Um diesen Punct zu finden, muß man in der obigen Gleichung

$$t = \frac{p}{2n\gamma} - s,$$

$s = 0$ setzen; man findet dann $t = \frac{p}{2n\gamma}$, und wenn man diese Größe auf der Seite DE der positiven Abcissen trägt, so wird man den Punct I haben, in welchem die vorgelegte Curve die Linie DE schneidet.

Wenn die Größe C positiv ist, so kann man s nur positiv nehmen; allein es begränzt nichts ihre Größe, eben so wenig, wie die von u, so daß die Curve sich bloß auf einer Seite ins Unendliche ausdehnen muß, wie die Linie RIr angiebt. Sie würde umgekehrt auf der entgegengesetzten Seite erscheinen, wenn C negativ wäre, weil man alsdann s negativ nehmen müßte.

Die Gleichung $u = \pm \sqrt{Cs}$ wird construirt, wenn man eine mittlere Proportionallinie zwischen der Abcisse $IN = s$ und einer geraden der C gleichen Linie sucht; das Resultat ist die Ordinate NM, welche man hier, so wie in den vorhergehenden Fällen, sowohl über als unter DE tragen muß.

§. 114.

Die allgemeine Gleichung vom zweyten Grade mit zweyen unbestimmten Größen, biethet uns also nur folgende drey Formen dar:

$$\left.\begin{array}{l} u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{(A^2 - s^2)} \\ u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{(s^2 - A^2)} \\ u = \pm \sqrt{Cs} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{oder, wenn} \\ \text{man die} \\ \text{Wurzelzei-} \\ \text{chen hin-} \\ \text{wegschaft} \end{array} \left\{\begin{array}{l} A^2u^2 + B^2s^2 = A^2B^2 \\ B^2s^2 - A^2u^2 = A^2B^2 \\ u^2 = Cs \end{array}\right.$$

je nachdem m positiv oder negativ oder Null ist; sie stimmen also in der Gleichung

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e,$$

mit den Fällen überein, wo m positiv oder negativ oder Null ist. Sie sind auch in dieser andern Gleichung

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(p - 2n\gamma t - m\gamma^2 t^2)}$$

begriffen.

Die unter der ersten vorgestellten Curven, welche in sich selbst zurückkehren, und welche einen von allen Seiten eingeschlossenen Raum begreifen (§. 109.), werden Ellipsen genannt. Die, welche die zweyte darbiethet, sind aus vier unendlichen Zweigen zusammengesetzt, welche zwey abgesonderte Theile bilden, und werden Hyperbel genannt; die geraden Linien, zwischen welchen sie eingeschlossen sind (§. 112.), werden die Asympteten genannt. Endlich giebt die dritte Gleichung die Curven, welche man mit dem Nahmen der **Parabeln** belegt (§. 113.).

§. 115.

Jede dieser Gleichungen scheint auf der einfachsten Form gebracht zu seyn; allein die Coordinaten sind nicht auf einander senkrecht, wie bey den Gleichungen der geraden Linie und des Kreises, von welchen wir bisher Gebrauch gemacht haben. Indessen ist die Lage der Ordinaken mit der der Abcissen dergestalt verbunden, daß sie mit der geraden, welche die Curve im äußersten Punct des Durchmessers berührt, paralell sind. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man bloß in Erwägung zu ziehen, daß die Puncte M und M′ Fig. 40. 41 und 42. sich in einen einzigen Punct zusammen ziehen, ein Umstand, welcher den wesentlichen Character des Berührungspunctes bildet (§. 103.). In der That wird die Summe beyder Ordinaten, oder der Abstand der Puncte M und M′, welcher bey der Ellipse durch $\frac{2B}{A} \sqrt{(A^2 - s^2)}$, für die Hyperbel durch $\frac{2B}{A} \sqrt{(s^2 - A^2)}$, und für die Parabel durch $2\sqrt{Cs}$ ausgedrückt ist, im Puncte I gleich Null, für welchen die beyden ersten Curven $s = A$, und die dritte $s = 0$ geben.

Da die Gleichungen der Ellipsen in Rücksicht auf die beyden unbestimmten s in u symetrisch sind, so daß der Ausdruck von s in u dieselbe Form hat, als der von u in s, so kann man auch die u für die Abcissen und die s für die Ordinaten nehmen, und man wird finden, daß der Durchmesser II′ Fig. 40. ebenfalls der durch den Punct L geführten Tangente paralell ist. Da nun die Durchmesser II′ und LL′ einerley Eigenschaften zeigen, so werden sie aus dieser Ursache **conjugirte (zugeordnete) Durchmesser** genannt. Es ist offenbar, daß die conjugirten Durchmesser der Kreise auf einander senkrecht seyn müssen, weil die durch den äußersten Punct irgend eines Durchmessers geführte Tangente auf demselben senkrecht ist; die Anzahl der mit dieser Eigenschaft behafteten Durchmesser ist im Kreise unendlich. Ganz anders verhält es sich bey der Ellipse; indessen hat diese Curve, von welcher uns die vorhergehende Analysis nur zwey sich schief schneidende Durchmesser entdecken gelehrt hat, dessen ungeachtet immer zwey, welche sich unter einem rechten Winkel schneiden, wie wir weiter unten zeigen werden.

Vergleicht man das, was wir von der allgemeinen Gleichung der zweyten Ordnung abgehandelt haben, mit dem, was wir im §. 83. und 90. von der geraden und der Kreislinie gesagt haben, so wird man leicht sehen, daß die Gleichung einer und derselben Linie verschiedene Formen annimmt, je nachdem die Coordinaten, auf welche man sie bezieht, verschieden sind. Es kann daher nützlich seyn, diese Coordinaten verwandeln zu lehren, damit man zu denen gelangen kann, welche für die vorgelegte Linie die einfachste Form geben. Wir wollen daher die allgemeinen Formeln suchen, um die Coordinaten einer Curve in andre zu verwandeln, welche sowohl unter einander als zu den erstern, irgend eine beliebige Lage haben.

## §. 116.

Die größte Abänderung, welche man in das System der Coordinaten hinein bringen kann, ohne aufzuhören, sie gerade, und zu zweyen bestimmten Linien paralell zu nehmen, besteht darin, ihnen einen neuen Anfangspunct, und andre Richtungen zu geben. Wir wollen gleich den allgemeinsten Fall betrachten, und annehmen, es werde verlangt, die Coordinaten $AP = x$, $PM = y$ Fig. 43. in Rücksicht auf die Axen AB und AC, durch zwey andre Coordinaten $A'''P'' = t$, $P''M = u$, welche auf den Axen $A'''B''$ und $A'''C''$ genommen sind, auszudrücken, deren Lage gegen die erste bekannt ist.

Nachdem man durch den neuen Anfangspunct $A'''$ die geraden $A'''B'$ und $A'''C'$ respectiv zu AB und AC paralell geführt hat, werden die Distanzen $AA'$ und $AA''$ nach der Annahme gegeben seyn, und wenn man sie durch a und b bezeichnet, wird man haben

$$AP = A'P + AA' = A'''P' + a$$
$$PM = P'M + AA''' = P'M + b.$$

Zieht man endlich durch den Punct $P''$ der neuen Ordinate $P''Q$ und $P''R$ respectiv zu $AB$ und $AC$ paralell, so wird sich leicht ergeben, daß man, da die Lage der Axen $A'''B''$ und $A'''C''$ in Rücksicht auf $AB$ und $AC$ gegeben ist, nothwendigerweise alle Winkel der Dreyecke $A'''P''R$, $MP''Q$ kennen muß, oder, welches einerley ist, die Verhältnisse ihrer homologen Seiten; setzt man daher

$$\frac{A'''R}{A'''P''} = m, \quad \frac{P''R}{A'''P''} = n, \quad \frac{P''Q}{P''M} = p, \quad \frac{QM}{P''M} = m,$$

so wird man haben

$$A'''R = m \,.\, A'''P'' = mt, \quad P''R = n \,.\, A'''P'' = nt,$$
$$P''Q = p \,.\, P''M = pu, \quad QM = q \,.\, P''M = qu,$$

woraus man zieht

$$A'''P' = A'''R + P''Q = mt + pu$$
$$P'M = P''R + QM = nt + qu,$$

und endlich

$$x = AP = A'''P' + a = mt + pu + a$$
$$y = PM = P'M + b = nt + qu + b.$$

Dieses sind nun die allgemeinsten Werthe, welche die Coordinaten $x$ und $y$, die unter einander irgend einen Winkel einschließen, annehmen können, wenn man sie durch andre Coordinaten von eben der Art ausdrückt, welche aber irgend eine beliebige Lage haben. Wir wollen nun sehen, wie man diejenigen daraus herleiten kann, welche mit den verschiedenen besondern Fällen übereinkommen, die sich darbiethen können.

1) Wenn man die neuen Coordinaten zu den ersten paralell annimmt, und bloß die Lage des Anfangspunctes verändern läßt, so werden die Linien $A'''C''$ und $A'''C'$,

so

so wie $A'''B''$ und $A'''B'$ auf einander fallen; man wird alsdann haben

$$m = 1, \quad n = 0, \quad p = 0 \text{ und } q = 1,$$

und es würde daraus erfolgen

$$x = t + a, \quad y = u + b,$$

welches leicht à priori einzusehen ist, weil alsdann $A'''P''$ und $A'''P'$, so wie $P'''M$ und $P''M$ auf einander fallen.

Setzt man a oder b gleich Null, so wird entweder die Axe AC oder die Axe AB in ihrer Stelle bleiben.

2) Wollte man bloß die Richtung der Axen AB und AC ändern, und man ließe noch immer den Anfangspunct im Puncte A, so würde man, da die Linien $A'''B'$ und $A'''C'$ in diesem Falle auf AB und AC fallen, zu gleicher Zeit haben

$$a = 0 \text{ und } b = 0,$$

welches geben würde

$$x = mt + pu, \quad y = nt + qu.$$

Man sieht, daß, wenn man $m = 1$ und $n = 0$ setzt, woraus $x = t + pu$, $y = qu$ erfolgen würde, die Linie $A'''B''$ auf $A'''B'$ fällt, und daß folglich bloß die Richtung der Ordinate geändert ist; man könnte eben so beweisen, daß $x = mt$ und $y = nt + u$ die Werthe von x und y in Beziehung auf die Aenderung der Richtung der Abcissen sind.

## §. 117.

Man muß in Erwägung ziehen, daß zwischen den Größen m, n, p und q, welche von der Richtung der neuen Coordinaten abhängen, eine nothwendige Beziehung anzutreffen ist, so daß man nicht alle vier nach Belieben wählen kann. Denn, wenn man den Winkel der ersten Axen $A'''B'$ und $A'''C'$ kennt, so würde man sich die Winkel $B''A'''B'$, $C''A'''B''$ geben, und die Lage der neuen Axen $A'''B''$ und $A'''C''$ würde durch diese drey Dinge völlig bekannt seyn.

Wenn man von einem bekannten System der Coordinaten zu einem andern ebenfalls bekannten übergeht, so werden die Größen m, n, p und q, nach ihren Bezeichnungen berechnet, zu einander die Beziehung haben, von welcher eben geredet wird; allein es folgt aus dem Vorhergehenden, daß man, wenn die Lage des Anfangspunctes gegeben ist, die Richtungen der neuen Axen nicht dergestallt bestimmen kann, daß sie mehr als zweyen der verschiedenen Bedingungen eine Genüge leiste, und daß in den Ausdrücken $x = mt + pu + a$, $y = nt + qu + b$, die Größen x und y, t und u, nicht die Coordinaten eines und desselben Anfangspunctes, in Rücksicht auf zwey verschiedene Systeme, von geraden und zu einander paralellen Coordinaten seyn können, so lange m, n, p und q nach Belieben gewählt werden können. Hier ist nun ein Mittel, die Beziehung, welche zwischen diesen Größen existiren muß, zu finden.

Wenn man durch den Punct M die geraden MG und MH respectiv auf $A'''B'$ und $A'''B''$ senkrecht zieht, und die Winkel $MP'B' = C'A''B'$ und $MP''B'' = C''A''B''$, für bekannt annimmt, so wird man das Verhältniß von $P'M$ zu $P'G$ und das von $P''M$ zu $P''H$ haben. Bezeichnet man nun das erste durch g und das zweyte durch h, so wird daraus erfolgen

$$P'G = P'M \times g \text{ und } P''H = P''M \times h;$$

zieht man endlich $A'''M$ und bezeichnet man $A'''P'$ und $P'M$ durch $x'$ und $y'$, so werden die schiefwinklichten Dreyecke $A'''P'M$ und $A'''P''M$ geben

$$\begin{aligned} A'''M^2 &= A'''P'^2 + P'M^2 + 2A'''P' \times P'G \\ &= x'^2 + y'^2 + 2gx'y' \\ A'''M^2 &= A'''P''^2 + P''M^2 + 2A'''P'' \times P''G \\ &= t^2 + u^2 + 2htu. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke von $A'''M^2$ einander gleich, so wird kommen

$$x'^2 + y'^2 + 2gx'y' = t^2 + u^2 + 2htu;$$

setzt man nun für $x'$ und $y'$ ihre Werthe $mt + pu$ und $nt + qu$, so wird man haben

$$(m^2 + n^2 + 2mng)\,t^2 + (p^2 + q^2 + 2pqg)\,u^2$$
$$+ 2[(mp + nq) + g\,(np + mq)]\,tu$$
$$= t^2 + u^2 + 2htu.$$

Da diese Gleichung immer Statt haben muß, welches auch die Lage des Punctes M sey, so muß sie sich auch immer unabhängig von $t$ und $u$ bestätigen, eine Bedingung, welche folgende drey Gleichungen giebt

$$m^2 + n^2 + 2mng = 1, \quad p^2 + q^2 + 2pqg = 1,$$
$$mp + nq + (np + mq)\,g = h.$$

Schafft man aus den beyden ersten $g$ heraus, so wird das Resultat

$$(m^2 + n^2)\,pq - (p^2 + q^2)\,mn = pq - mn$$

die Bedingungen ausdrücken, welchen die Größen $m$, $n$, $p$ und $q$ ein Genüge thun müssen.

Gewöhnlich nimmt man an, daß sich die neuen Coordinaten $u$ und $t$, eben so wie die ersten unter einem rechten Winkel schneiden; in diesem Falle werden sich die obigen Gleichungen sehr vereinfachen. Da die Winkel $MP'B'$ und $MP''B''$ rechte werden, so wird $P'G$ oder $gy'$ und $P''H$ oder $hu$ verschwinden; man wird also bloß haben

$$m^2 + n^2 = 1$$
$$p^2 + q^2 = 1$$
$$mp + nq = 0,$$

woraus man zieht

$$m^2 = 1 - n^2, \quad p^2 = 1 - q^2,$$
$$m^2p^2 = 1 - n^2 - q^2 + n^2q^2;$$

und da $mp = -nq$, so kommt

$$n^2 + q^2 = 1.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der Gleichung

$m^2 + n^2 = 1$, so findet man $q = m$, welches $p = -n$ giebt; man hat also endlich

$$x' = mt - nu, \quad y = nt + mu,$$

wenn man in Erwägung zieht, daß die Größen $m$ und $n$ vermöge der Gleichung $m^2 + n^2 = 1$ von einander abhängen.

Die Figur 44., welche für diesen Fall construirt ist, zeigt, daß $m$ der Cosinus des Winkels $B''A'''B'$, das $n$ der Sinus dieses Winkels sey, und daß man hat

$$A'''P' = A'''R - P''Q = mt - nu$$
$$P'M = P''R + QM = nt + mu,$$

wie wir eben gefunden haben *).

Um in diesem Falle zu gleicher Zeit den Anfangspunct der Coordinaten, und die Richtung ihrer Axen zu verändern, muß man

$$x = mt - nu + a, \quad y = nt + mu + b$$

nehmen (§. 116.), indem man dabey die Gleichung

$$m^2 + n^2 = 1$$

in Erwägung zieht, und man nur drey Größen, nehmlich

---

*) Es ist nichts leichter, als die Benennungen der Buchstaben $m$, $n$, $p$ und $q$, nicht allein in diesem Falle, sondern auch in allen vorhergehenden, in die Sinus und Cosinus der zwischen den Axen der Coordinaten enthaltenen Winkel zu verwandeln; und man würde alsdann die in den nach der Bekanntmachung dieses Werks erschienenen Werken anzutreffenden Formeln haben; allein die von mir angenommene Bezeichnung kürzt die Ausdrücke ab, und behält mehr die analytische Eleganz bey. Dieses ist auch vermuthlich die Ursache, daß Lagrange und Monge, bey allen Umformungen der Coordinaten, welche ihre Schriften enthalten, den Bezeichnungen durch Buchstaben vor den durch trigonometrische Linien den Vorzug gegeben haben, welche auch Euler schon 1748 in seinen Berechnungen eingeführt hat.

a und b und eine der Größen m und n nach Belieben wählen kann.

§. 118.

Wir wollen nun untersuchen, was für Vereinfachungen man vermittelst der Umformungen der Coordinaten bey der allgemeinen Gleichung

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F, \quad (1)$$

vornehmen kann, wenn sie immer auf einander senkrecht genommen werden.

Wenn man statt x und y ihre allgemeine Ausdrücke des vorhergehenden §. substituirt, so kann man vermittelst der drey unbekannten Größen, welche sie enthalten, dreyen Bedingungen ein Genüge thun; und wenn man die drey Glieder, in welchen jede der neuen Coordinaten vom ersten Grade ist, nehmlich: die mit ut, mit t und mit u behafteten, dadurch hinwegschaft, daß man sie gleich Null setzt, so wird man eine Gleichung von der Form

$$\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma$$

erhalten, welche den beyden ersten des §. 114. ähnlich ist. Diese Form ist 1) darin merkwürdig, daß, indem die beyden Werthe von u einander gleich, und bloß in den Zeichen verschieden sind, hieraus sich ergiebt, daß die Axe der neuen Abcissen t ein Durchmesser ist (§. 107.); 2) da jeder Werth von t, sowohl positiv als negativ genommen, dieselben Werthe für u giebt, so folgt, daß der Anfangspunct der t, welcher in der Mitte des Durchmessers liegt, der Mittelpunct der Curve ist (§. 109.).

Der Calcul wird außerordentlich erleichtert, wenn man, anstatt vermittelst der allgemeinen Formeln zu gleicher Zeit den Anfangspunct und die Richtung der Coordinaten zu verwechseln, zuvörderst die Axen paralell zu einander annimmt; wir wollen in dieser Absicht in die obige Gleichung

$x' + a$ statt $x$, und $y' + b$ statt $y$ setzen; sie wird alsdann

$$\left.\begin{array}{l} Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 \\ + (2Ab + Ba + D)y' + (2Ca + Bb + E)x' \\ + Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea = F \end{array}\right\} (2).$$

Da die Größen a und b willkührlich sind, so können sie dergestalt gewählt werden, daß aus diesem Resultate alle Glieder, welche $x'$ und $y'$ nur auf der ersten Potenz enthalten, verschwinden; setzt man ihren Coefficienten gleich Null, so wird man haben

$$2Ab + Ba + D = 0, \quad 2Ca + Bb + E = 0 \quad (3);$$

es werden nun in der Gleichung (2) nur noch die mit $x'^2$, $x'y'$, $y'^2$ und die von $x'$ und $y'$ entblößten Glieder übrig bleiben. Diese letztern lassen sich vermittelst der Gleichungen (3) reduciren. Denn multiplicirt man die erste mit a, die zweyte mit b, und zieht ihre Summe von der Gleichung (2), nachdem man daraus die verschwindenden Glieder hinweggelassen hat, ab, so wird kommen

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 - Ab^2 - Bab - Ca^2 = F. \quad (4).$$

Wir wollen nun die Axen der Coordinaten nach einer neuen Richtung setzen, aber immer unter rechte Winkel, indem man nach dem vorhergehenden §.

$$x' = mt - nu$$
$$y' = nt + mu$$

setzt. Wir können auch aus der Gleichung (4) ein Glied hinwegschaffen, weil man zwischen den Größen m und n nur die einzige Gleichung $m^2 + n^2 = 1$ hat, und daher noch eine zu bestimmende bleiben wird. Nachdem die Substitution der obigen Werthe vollzogen ist, findet man

$$\left.\begin{array}{l} [Am^2 - Bmn + Cn^2]\,u^2 \\ + [2(A - C)mn + B(m^2 - n^2)]\,ut \\ + [An^2 + Bmn + Cm^2]\,t^2 \\ - Ab^2 - Bab - Ca^2 = F \end{array}\right\} (5);$$

setzt man die Gleichung

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0$$

an, so wird das durch tu multiplicirte Glied verschwinden; und setzt man zur Abkürzung

$$Am^2 - Bmn + Cn^2 = \alpha$$

$$An^2 + Bmn + Cm^2 = \beta$$

$$F + Ab^2 + Bab + Ca^2 = \gamma,$$

so wird kommen

$$\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma,$$

woraus man zieht

$$u = \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} t^2\right)} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{\gamma}{\beta} - t^2\right).$$

Nimmt man 1) alle drey Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ positiv an, so wird diese Gleichung auf die im §. 114. für die Ellipse gefundene Gleichung

$$u = \pm \frac{B}{A} \sqrt{(A^2 - s^2)}$$

zurückkommen; da aber die Coordinaten u und t hier auf einander senkrecht sind, so folgt, daß die gesuchte Curve eine auf die einander senkrecht schneidenden Durchmesser II′ und LL′ Fig 45. zurückgeführte Curve seyn wird, welche man auch deshalb Axen nennt.

Wenn die Größe $\gamma$ eine von dem der beyden übrigen verschiedenes Zeichen hat, so wird die Gleichung, wie im §. 110. bemerkt worden ist, ungereimt.

2) Wenn $\alpha$ und $\beta$ verschiedene Zeichen haben, so kann die Gleichung nur diese zwey Formen annehmen

$$\alpha u^2 - \beta t^2 = - \gamma$$

$$\alpha u^2 - \beta t^2 = \gamma;$$

die erste gehört zu einer, ebenfalls auf einen Durchmesser geführte Hyperbel, welcher seine Ordinaten senkrecht schneidet, das heißt auf eine Axe Fig. 47., weil man in diesem Falle hat

$$u = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(t^2 - \frac{\gamma}{\beta}\right)},$$

welches mit der Gleichung des §. 114.

$$u = \pm \frac{B}{A}\sqrt{(s^2 - A^2)}$$

übereinstimmt.

Auch die Gleichung

$$\alpha u^2 - \beta t^2 = \gamma$$

gehört zur Hyperbel, allein die Axe der Abcissen ist alsdann LL′ und nicht II′; denn es kommt in diesem Falle

$$u = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(t^2 + \frac{\gamma}{\beta}\right)},$$

ein Resultat, welches von der Form $u = \pm \frac{B}{A}\sqrt{(s^2 + A^2)}$ ist.

Wir wollen bemerken, daß die Linie LL′ in Rücksicht der Hyperbel KIk, K′I′k′ ebenfalls ein Durchmesser ist. Ob sie gleich nicht so wie bey der Ellipse eine doppelte Ordinate ist, so legt man ihr doch eine Größe bey, nehmlich die, welche erfolgen würde, wenn man $t = 0$ setzte, und das Zeichen der negativen Größe $\frac{\gamma}{\beta}$ änderte; und es kommt

$$OL = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Man behält auf diese Art die Aehnlichkeit zwischen der Gleichung der Ellipse und der der Hyperbel bey.

Der Durchmesser LL′ der Hyperbel, wird der zweyte Durchmesser genannt, zum Unterschiede vom Durchmesser II′, welcher die Curve schneidet, und aus dieser Ursache auch die Zwergaxe heißt.

Wenn $\gamma = 0$ wäre, so würde man nur, wie im §. 112. zwey gerade Linien haben.

§. 119.

Um die Fälle zu bestimmen, in welchen die Größen $\alpha$

und $\beta$ Null werden, muß man m und n bestimmen, und deren Werthe in die dieser Größen substituiren.

Die Gleichung

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0$$

giebt

$$mn = \frac{B(m^2 - n^2)}{2(C - A)};$$

setzt man nun $\frac{B}{2(C - A)} = \delta$, welche man zum Quadrat erhebt, und aus dieser Gleichung vermittelst der Gleichung $m^2 + n^2 = 1$, n eliminirt, so wird kommen

$$m^4 - m^2 = - \frac{\delta^2}{1 + 4\delta^2},$$

woraus man zieht

$$m^2 = \tfrac{1}{2} \pm \surd\left(\tfrac{1}{4} - \frac{\delta^2}{1 + 4\delta^2}\right) = \tfrac{1}{2} \pm \frac{1}{2\surd(1 + 4\delta^2)},$$

und hiernächst

$$n^2 = \tfrac{1}{2} \mp \frac{1}{2\surd(1 + 4\delta^2)},$$

$$m^2n^2 = \tfrac{1}{4} - \frac{1}{4(1 + 4\delta^2)} = \frac{\delta^2}{1 + 4\delta^2};$$

setzt man nun wiederum statt $\delta$ die Größe, welche sie ausdrückt, und nimmt man bloß das obere Zeichen der Wurzelgröße, so wird erfolgen

$$m^2 = \tfrac{1}{2} + \frac{C - A}{2\surd[(C - A)^2 + B^2]},$$

$$n^2 = \tfrac{1}{2} - \frac{C - A}{2\surd[(C - A)^2 + B^2]},$$

$$mn = \frac{B}{2\surd[(C - A)^2 + B^2]}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke von $\alpha$ und $\beta$, und bringt sie dann auf einerley Benennung, so wird man mit wenig Aufmerksamkeit sehen, daß ihre Nenner durch $\surd[(C - A)^2 + B^2]$ theilbar seyn werden, und daß

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(C+A) - \tfrac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]},$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(C+A) + \tfrac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}.$$

Wenn die Größe $C + A$ positiv ist, so ist $\beta$ immer positiv, und $\alpha$ wird es ebenfalls, wenn

$$C + A > \sqrt{[(C-A)^2+B^2]},$$

welches auf

$$(C + A)^2 > (C - A)^2 + B^2,$$

oder auf

$$2AC > -2AC + B^2,$$

oder auf

$$4AC > B^2$$

zurückkommt.

Wenn die Größe $C + A$ negativ ist, so muß $\alpha$ nothwendigerweise negativ seyn, und $\beta$ wird es ebenfalls, wenn man, wie oben, $4AC > B^2$ hat. Man sieht also, daß, wenn die letztere Bedingung erfüllt wird, $\alpha$ und $\beta$ einerley, und daß sie im entgegengesetzten Falle verschiedene Zeichen haben.

Wir wollen noch anmerken, daß $4AC - B^2 = A^2\left(4\frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right)$, und daß man, wenn man in diesem Ausdruck, wie im §. 107. $\frac{B}{A}$ in a und $\frac{C}{A}$ in b verwandelt, hierdurch $A^2(4b - a^2)$ erhalten wird, deren Zeichen von dem der Größe $4b - a^2$, welche wir in diesem §. durch m bezeichnet haben, abhängen wird, und nach welcher wir die verschiedenen Formen bestimmt haben, welche die in der allgemeinen Gleichung vom zweyten Grade (§. 114.) begriffenen drey Arten von Curven characterisiren.

### §. 120.

Wenn man $4AC = B^2$ hätte, so würde $\alpha$ verschwinden, und hierdurch würde die Gleichung

$$u = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\beta} - t^2\right)}$$

für die Ordinate u nur einen unendlichen Werth geben; allein da die aus den Gleichungen (3) gezogenen Werthe der Größen a und b, welche allgemein folgende sind

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$$

unendlich werden müssen, wenn $B^2 = 4AC$, so läßt sich daraus nichts bestimmen; man kann also in diesem Falle die Glieder Dy und Ex aus der Gleichung (1) zugleich hinweg lassen. Um dieser Inconvenienz auszuweichen, wollen wir in dieser Gleichung unmittelbar $x = mt - nu$, $y = nt + mu$ setzen, welches geben wird

$$\left.\begin{aligned}&(Am^2 - Bmn + Cn^2)\,u^2\\ &+ [2(A - C)\,mn + B\,(m^2 - n^2)]\,ut\\ &+ (An^2 + Bmn + Cm^2)\,t^2\\ &+ (Dm - En)\,u + (Dn + Em)\,t = F\end{aligned}\right\}\ (6),$$

und wir wollen noch die Gleichung

$$2\,(A - C)\,mn + B\,(m^2 - n^2) = 0$$

ansetzen, um das durch ut multiplicirte Glied hinaus zu schaffen. Die Coefficienten von $u^2$ und $t^2$ werden hier dieselben Werthe, wie im vorhergehenden §. haben, weil m und n noch von denselben Gleichungen, wie oben, abhängen; bezeichnet man nun diese Coefficienten durch $\alpha$ und $\beta$, so werden wir erhalten

$$\alpha u^2 + \beta t^2 + (Dm - En)u + (Dn + Em)t = F \quad (7).$$

Wenn $\alpha$ oder $\beta = 0$, so wird diese Gleichung, indem sie sich dann auf eine von diesen Formen reducirt

$$\beta t^2 + (Dm - En)\,u + (Dn + Em)\,t = F.$$
$$\alpha u^2 + (Dm - En)\,u + (Dn + Em)\,t = F,$$

nur noch ein einziges Glied vom zweyten Grade enthalten. Um sie zu vereinfachen, bleibt nur noch übrig den Anfangspunct der Coordinaten zu verändern, indem man $t' + a'$ statt $t$, $u' + b'$ statt $u$ substituirt, welches zwey unbestimmte Größen einführt, die dergestalt gewählt werden können, daß das von den neuen Coordinaten $u'$ und $t'$ unabhängige Glied, so wie ferner das durch $t'$ multiplicirte Glied im ersten Falle oder das durch $u'$ multiplicirte im zweyten Falle verschwinde; die Resultate der einen oder der andern dieser Formen werden seyn.

$$\beta t'^2 - \iota u' = 0, \quad \alpha u'^2 - \iota t = 0.$$

Es ist wohl zu merken, daß die eine in die andre übergeht, wenn man darin $u'$ in $t'$, und $t'$ in $u'$ verwandelt, und daß der Anfangspunct der Abcissen alsdann auf einem Puncte der Curve liegt, weil man zu gleicher Zeit

$$t' = 0, \quad u' = 0$$

hat (§. 81.),

Um den Resultaten der oben angezeigten Substitution mehr Allgemeinheit zu geben, so wollen wir sie an der Gleichung (7) verrichten, und es wird kommen

$$\left.\begin{aligned} \alpha u'^2 + \beta t'^2 + (2\alpha b' + Dm - En)\,u' & \\ + (2\beta a' + Dn + Em)\,t' & \\ + \alpha b'^2 + \beta a'^2 + (Dm - En)\,b' + (Dn + Em)\,a' & \end{aligned}\right\} = F.$$

Wir wollen nun annehmen, man wollte die durch $u'$ multiplicirten Glieder, und die, welche von den Coordinaten $u'$ und $t'$ nicht abhängen, hinwegschaffen; so müßte man in dieser Absicht diese Gleichungen ansetzen:

$$2\alpha b' + Dm - En = 0$$

$$\alpha b'^2 + \beta a'^2 + (Dm - En)\,b' + (Dn + Em)\,a' - F = 0,$$

und setzt man zur Abkürzung

$$2\beta a' + Dn + Em = -\iota,$$

so wird man die Gleichung

$$\alpha u'^2 + \beta t'^2 - \iota t' = 0$$

haben, welche sich, wenn $\beta = 0$ auf

$$\alpha u'^2 - \iota t' = 0$$

reducirt, und

$$u = \mp \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\alpha} t'\right)}$$

giebt; sie gehört also zur Parabel (§. 114.).

Die Gleichungen, welche $a'$ und $b'$ bestimmen, werden alsdann

$$2\alpha b' + Dm - En = 0$$

$$\alpha b'^2 + (Dm - En) b' + (Dn + Em) a' - F = 0,$$

und, wenn man von der zweyten die erste, nachdem sie durch $b'$ multiplicirt werden, abzieht, so wird man haben

$$- \alpha b'^2 + (Dn + Em) a' - F = 0,$$

eine Gleichung, welche auf einer sehr einfachen Art den Werth von $a'$ giebt.

## §. 121.

Wir müssen uns nun überzeugen, daß die Gleichung (1) nur drey Arten von Curven begreift, welche wir schon auf einer andern Art kennen gelernt, und mit den Nahmen der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel belegt haben (§. 114.).

Der Kreis ist unausschließlich in der Art der Ellipsen begriffen; er stimmt mit dem Falle überein, wo man $\alpha = \beta$ hat, wodurch die Gleichung

$$\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma \text{ (§. 118.)},$$

in diese andre

$$u^2 + t^2 = \frac{\gamma}{\beta}$$

verwandelt wird, welche offenbar zu einem Kreise gehört, dessen Mittelpunct der Anfangspunct der Coordinaten $u$ und $t$, und dessen Halbmesser $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$ ist, wofern, wie hier immer angenommen wird, die Coordinaten senkrecht sind.

Wir wollen nun zeigen, daß die oben erhaltene Gleichung

$$\alpha u'^2 + \beta t'^2 - \varepsilon t' = 0,$$

der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel gemein ist. Die erste Curve erhält man daraus, wenn $\alpha$ und $\beta$ einerley, die zweyte, wenn sie verschiedene Zeichen haben, und die dritte, wenn man $\beta = 0$ hat.

Der Punct der Curve, in welchem sich der Anfangspunct der Coordinaten befindet, und welcher auf dem äussersten Punct der Axe liegt, wird der Scheitel genannt. In der Ellipse und der Hyperbel giebt es zwey Scheitel, welche in Fig. 45. und 47. durch I und I′ angezeigt sind: die Parabel aber, Fig. 48., welche nur einen einzigen hat, hat keinen Mittelpunct, und aus dieser Ursache kann auch ihre Gleichung nicht die Form

$$\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma$$

annehmen.

Die Construction der Ausdrücke von $\alpha$, $\beta$ und $\varepsilon$ biethet ein Mittel dar, die Axen der Curven vom zweyten Grade zu finden, wenn man irgend eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten hat.

Es ereignet sich öfters, daß man die Curve sucht, zu der eine Eigenschaft gehört, von welcher man nicht weiß, ob sie zu einer schon bekannten Curve gehören kann; allein in diesem Falle kommt die mit dieser Eigenschaft zusammen gehörige Gleichung, auf einige der schon untersuchten Gleichungen zurück. Dieses soll folgende Aufgabe zeigen.

## §. 122.

**Die Gleichung einer Curve zu finden, die die Eigenschaft habe, daß die Summe der Entfernungen MF und MF′ eines jeden ihrer Puncte M Fig. 45. von zweyen festen Puncten F und F′, einer gegebenen Linie gleich sey.**

Bezeichnet man die gegebene Linie durch 2a, den Abstand FF′ der festen Puncte durch 2c, nimmt man ferner den auf der Mitte von FF′ liegenden Punct O für den Anfangspunct der Coordinaten, so daß $OF = OF' = c$, und setzt man $OP = x$, $PM = y$, so wird man finden

$$FP = c - x, \quad F'P = c + x.$$

Da die in P rechtwinklichten Dreyecke PMF, PMF′

$$MF = \sqrt{(FP^2 + PM^2)}, \quad MF' = \sqrt{(F'P^2 + PM^2)}$$

geben, so wird man finden

$$MF = \sqrt{[(c - x)^2 + y^2]}, \quad MF' = \sqrt{[(c+x)^2 + y^2]}.$$

Setzt man aber $MF = z$, so wird kommen $MF' = 2a - z$, weil man nach dem Vortrage der Aufgabe in der ganzen Curve

$$MF + MF' = 2a$$

hat; man wird demnach haben

$$z = \sqrt{[(c-x)^2 + y^2]}, \quad 2a - z = \sqrt{[(c+x)^2 + y^2]}.$$

Erhebt man nun zum Quadrat, um die Wurzelgrößen hinweg zu schaffen, so wird erfolgen

$$z^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$$

$$4a^2 - 4az + z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2;$$

zieht man nun die zweyte dieser Gleichungen von der ersten ab, so wird bleiben

$$-4a^2 + 4az = -4cx,$$

woraus folgt

$$z = \frac{a^2 - cx}{a};$$

substituirt man endlich diesen Werth in den ersten Ausdruck von $z^2$, so gelangt man zur gesuchten Gleichung, welche nach den Reductionen

$$a^4 + c^2x^2 = a^2c^2 + a^2(x^2 + y^2)$$

seyn wird.

Diese Gleichung zeigt uns, indem sie vom zweyten Grade ist, daß die gesuchte Curve nur zu einer von denen gehören kann, welche wir im Vorhergehenden untersucht haben; und um zu finden, zu welcher Art sie gehört, wollen wir ihrer Gleichung diese Form geben

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Vergleicht man sie nun mit der Formel $\alpha u^2 + \beta t^2 = \gamma$, so werden wir, nachdem wir in diese letztern u und t statt y und x gesetzt haben werden, erhalten

$$\alpha = a^2,\ \beta = a^2 - c^2,\ \gamma = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

woraus wir schließen, daß sie die Gleichung einer Ellipse ist, indem die Größen $\beta$, $\gamma$ und $\alpha$ wesentlich positiv sind. Setzt man zur Abkürzung $a^2 - c^2 = b^2$, so werden wir haben

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

woraus wir ziehen

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Die halben Axen OI und OL dieser Ellipse sind respectiv a und b; und da $b^2 = a^2 - c^2$, so zieht man hieraus

$$c^2 = a^2 - b^2,\quad c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

welches uns lehrt, daß, wenn man nur die Axen II′ und LL′ einer Ellipse kennt, die Puncte F und F′ auf der größern Axe, für welche man MF + MF′ = II′ hat, gefunden werden können, wenn man aus dem Puncte L, als aus einem Mittelpuncte, mit einem Halbmesser, welcher der Hälfte der größern Axe II′ gleich ist, einen Kreisbogen beschreibt; denn in den Durchschnittspuncten F und F′ dieses Bogens mit der Axe II′ hat man

$$OF = OF' = \sqrt{(FL^2 - OL^2)} = \sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

## §. 123.

Der Vortrag der eben aufgelösten Aufgabe biethet uns eine neue, allen Ellipsen gemeinschaftliche Eigenschaft dar, und giebt zugleich ein Mittel, so viele Puncte der Ellipse,

als

man will, zu finden, oder besser, sie durch eine stetige Bewegung zu beschreiben. Denn wenn man eine beliebige Oeffnung des Zirkels FM nimmt, welche kleiner als OI ist, mit dieser Oeffnung aus dem Puncte F, als aus einem Mittelpuncte, einen Kreisbogen beschreibt, und hierauf aus dem Puncte F′, als aus einem Mittelpunct', mit einem Halbmesser F′M, welcher der Differenz zwischen der Axe II′ und dem ersten Halbmesser FM gleich ist, einen neuen Kreisbogen beschreibt, so wird er den ersten in zweyen Puncten M und M′ schneiden, welche zur Ellipse gehören. Nimmt man dieses Verfahren mit verschiedenen Oeffnungen des Zirkels vor, so wird man neue Puncte der gesuchten Ellipse erhalten; und wenn nun viele dieser Puncte gefunden sind, so kann man sie durch einen freyen Zug mit der Hand mit einander verbinden, und man wird die Curve desto richtiger haben, je größer die Anzahl dieser Puncte ist.

Wenn die Ellipse sehr groß werden soll, so beschreibt man sie durch eine stetige Bewegung, indem man nehmlich in den Puncten F und F′ die beyden Enden eines Fadens befestigt, dessen Länge der der Axe II′ gleich ist; man spannt alsdann diesen Faden vermittelst eines Stifts aus, welchen man nach der Länge dieses Fadens herumführt, bis er wieder an den Punct kommt, von welchem man ausgegangen ist; hierauf wird nun die Ellipse beschrieben seyn.

Jede dieser Methoden ist auf dem Satze gegründet, **daß in allen Ellipsen die Summe der aus den Puncten F, F′ der großen Axe, welche Brennpuncte heißen, gezogenen Linien MF und MF′, welche man Leitstrahlen nennt, immer der großen Axe gleich ist,** wie wir im vorhergehenden §. gefunden haben.

Die Gleichung $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$, biethet auch eine Construction durch Puncte dar, welche in der Ausübung sehr brauchbar ist. Nachdem man nehmlich aus dem Mittelpunct O der gesuchten Ellipse Fig. 46. zwey Halbkreise, den einen auf die große, und den andern auf die kleine Axe, als auf zweyen Durchmessern, beschrieben, und eine große Anzahl Halbmesser, ON, ON′, ON″ ꝛc. gezogen hat, lasse man auf die Axe II′ die senkrechten PN, P′N′ ꝛc. herab, und führe durch die Puncte R, R′ ꝛc., in welchen die Halbmesser ON, ON′ ꝛc. den kleinern der beyden Kreise schneiden, die geraden RM, RM′ ꝛc. paralell zu II′; die Puncte M, M′ ꝛc., welche diese paralelle auf den senkrechten PN, PN′ ꝛc. bestimmen, werden zur gesuchten Ellipse gehören. Durch die eben gezeigte Operation erhält man nur die Hälfte dieser Ellipse; wenn man indessen diese Operation unterhalb der Axe II′ wiederholt, so wird man sie ganz haben.

Um die Richtigkeit dieser Construction einzusehen, erwäge man, daß man vermöge der Paralellen RM und II′ haben muß

$$ON : OR = PN : PM,$$

und da

$$ON = a, \quad OR = b, \quad OP = x,$$

so folgt

$$PN = \sqrt{(ON - OP^2)} = \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

und

$$a : b = \sqrt{(a^2 - x^2)} : PM,$$

mithin ist

$$PM = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} = y$$

## §. 124.

Die Gleichung $z = \frac{a^2 - cx}{a} = a - \frac{cx}{a}$ kann als eine die Ellipse characterisirende Gleichung angesehen werden; sie biethet eine sehr einfache Construction dar; denn, wenn die Abcisse $OP = x$ Fig. 45. gegeben ist, so erhält man die

Größe $\frac{cx}{a}$ vermittelst Proportionallinien; und zieht man diese Größe von a ab, so hat man z oder FM; wenn man endlich aus F als aus einem Mittelpuncte mit einem der FM gleichen Halbmesser, einen Kreisbogen beschreibt, so schneidet dieser die senkrechte PM, in einem zur Ellipse gehörigen Punct M. Wenn die Abcisse in den Theil OI′ der Axe fiele, so würde man, da x alsdann negativ wird, diesen Werth erhalten $z = a + \frac{cx}{a}$.

Das System der Coordinaten in z und x ist von den bisher beygebrachten nur darin unterschieden, daß die Ordinate z, anstatt daß sie immer einer gegebenen geraden paralell war, vielmehr unaufhörlich ihre Richtung ändert, und bloß unterworfen ist, durch einen gegebenen Punct zu gehen; auch gehört die Gleichung $z = a - \frac{cx}{a}$, ob sie gleich vom ersten Grade ist, dennoch nicht zur geraden Linie, wie in dem Falle, wo die Coordinaten respectiv gegebenen Axen paralell sind.

Man könnte statt der Abcisse OP eine neue Abcisse FP setzen, welche immer noch auf der Axe II′, aber vom Puncte F aus gerechnet wird. Bezeichnet man diese letztere durch x′, so wird man haben

$$x = c - x',$$

weil OP = OF — FP, und es wird kommen

$$x = a - \frac{c(c - x')}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{cx'}{a}:$$

setzt man nun $b^2$ statt $a^2 - c^2$, so wird man haben

$$z = \frac{b^2 + cx'}{a}.$$

Am häufigsten führt man den Winkel I′FM statt der Abcisse x ein, welches geschieht, wenn man in Erwägung zieht, daß man in dem rechtwinklichten Dreyeck FMP, $FP = FM \cos I'FM$ oder $x' = z \cos I'FM$ hat; bezeichnet man nun den Winkel I'FM durch $\varphi$, so wird man haben

$$z = \frac{b^2 + cz \cos\varphi}{a} \text{ oder } z = \frac{b^2}{a - c \cos\varphi}.$$

Diese letztere Gleichung ist von einem häufigen Gebrauch bey der Anwendung der Analysis auf die Astronomie; man nennt sie die **Polargleichung**, so wie alle diejenigen, deren Coordinaten von einem und demselben Punct ausgehen, welchen man den **Pol der Curve** nennt.

§. 125.

Wir wollen nun die im §. 122. aufgelöste Aufgabe modificiren, und wollen setzen, man habe Fig. 47. $MF' - MF = 2a$, anstatt wir oben $MF' + MF = 2a$ gehabt haben; das heißt, daß die **Differenz der Leitstrahlen** von einer gegebenen Größe sey. Behalten wir nun die im citirten §. gebrauchten Benennungen bey, so werden wir haben

$$MF = \sqrt{(PF^2 + PM^2)}, \qquad z = \sqrt{[(c-x)^2 + y^2]}$$
$$MF' = \sqrt{(F'P^2 + PM^2)}, \; 2a + z = \sqrt{[(c+x)^2 + y^2]},$$

woraus wir ziehen

$$z^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$$
$$4a^2 + 4az + z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2;$$

zieht man die erste dieser Gleichungen von der zweyten ab, so werden wir erhalten

$$4a^2 + 4az = 4cx \text{ oder } z = \frac{cx - a^2}{a};$$

und durch diesen Werth von z werden wir zur Gleichung

$$\left(\frac{cx - a^2}{a}\right)^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$$

gelangen, welche sich nach der Entwickelung auf

$$(c^2 - a^2)\, x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2).$$

Im gegenwärtigen Falle, wo $c > a$, muß man $b^2 = c^2 - a^2$ nehmen, welches geben wird

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

ein Resultat, welches sich auf die Formel $\beta t^2 - \alpha u^2 = \gamma$ bringen läßt; mithin führt die Aufgabe auf eine Hyperbel, welche demnach mit dieser Eigenschaft behaftet ist, **daß die Differenz ihrer Leitstrahlen MF und MF′, der Axe II′ gleich ist, auf welcher sich die Brennpunc F und F′ befinden.**

Wir haben schon oben (§. 118.) bemerkt, daß diese Curve eigentlich keine zweyte Axe hat, und daß man bloß, um die Analogie beyzubehalten, eine zweyte durch den Punct O auf die erste senkrecht geführte Axe annimmt; es wird demnach b die Länge OL der Hälfte dieser Axe ausdrücken, und die Gleichung $b^2 = c^2 - a^2$, welche $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ giebt, zeigt, daß man, um die Puncte F und F′ zu finden, die Distanzen OF und OF′, der Hypothenuse des mit den beyden Halbaxen OI′ und OL′ construirten rechtwinklichten Dreyecks gleich, nehmen muß.

Unter der Reihe der verschiedenen Hyperbel, welche erhalten werden, wenn man den Größen a und b alle mögliche Werthe beylegt, giebt es eine, welche dem Kreise ähnlich ist; es ist die, welche aus der Annahme $a = b$ erfolgt, oder deren Axen gleich sind, welche auch deshalb **die gleichseitige Hyperbel** heißt. Ihre Gleichung $y = \pm \sqrt{(x^2 - a^2)}$ ist von der Gleichung des Kreises $y = \pm \sqrt{(a^2 - x^2)}$ nur in den Zeichen der Glieder des zweyten Theils unterschieden, welche denen der ersten entgegengesetzt sind. Die Ordinaten aller auf einer und derselben Axe 2a beschriebenen Hyperbel, haben zu denen des Kreises dasselbe Verhältniß, welches die Ordinaten der Ellipse zu denen des Kreises haben, weil die allgemeine Gleichung der

Hyperbel $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$ ist, so wie es die der Ellipsen $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ist.

## §. 126.

Die Eigenschaft, mit welcher die Puncte F und F′ behaftet sind, kann zur Construction der Hyperbel durch Puncte dienen. Man würde in dieser Hinsicht aus dem Puncte F, als aus einem Mittelpuncte, mit einem Halbmesser FM, welcher zwar nach Belieben, aber doch nicht kleiner als FI genommen werden darf, einen Kreisbogen beschreiben; hierauf würde man einen Halbmesser F′M nehmen, welcher um eine der II′ gleiche Größe entweder größer oder kleiner als der vorige ist; und der mit diesem Halbmesser aus dem Puncte F′ als aus einem Mittelpuncte beschriebene Kreisbogen, wird den vorhergehenden in zweyen, zur Hyperbel gehörigen Puncten schneiden.

Um eine Menge Puncte durch eine stetige Bewegung zu beschreiben, lasse man ein Linial um den Punct F′ herum bewegen, befestige dann an dem äußersten Punct R dieses Linials und an den Punct F einen Faden, dessen Länge um die Größe II′ kleiner sey, als FR′; man lasse hierauf das Linial herum bewegen, indem man mit einem Stift M dergestalt an dasselbe weggleitet, daß der Faden RMF während der Bewegung immer ausgespannt bleibe; der Faden wird auf diese Art den Bogen einer Curve beschreiben, welcher zur Hyperbel gehört, deren Axe II′ und deren Brennpuncte F und F′ sind.

## §. 127.

Die Hyperbel hat auch eine Polargleichung, welche sich aus der Gleichung $z = \frac{cx - a^2}{a}$ herleiten läßt. Nimmt man zuvörderst die Abcissen vom Puncte F aus, so wird man haben

$$OP = x = OF - FP = c - x',$$

welches geben wird

$$z = \frac{c^2 - a^2 - cx'}{a},$$

und

$$z = \frac{b^2 - cx'}{a},$$

wenn man $b^2$ statt $c^2 - a^2$ setzt.

Um den Winkel $\varphi$ einzuführen, erwäge man, daß man in dem rechtwinklichten Dreyeck PMF

$$PF = MF \cos I'FM \text{ oder } x' = z \cos \varphi,$$

eben so wie bey der Ellipse hat; und es wird kommen

$$z = \frac{b^2 - cz\cos\varphi}{a} \text{ oder } z = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi}.$$

## §. 128.

Wir wollen uns nun diese Frage vorlegen: **Eine Curve zu finden, die so beschaffen sey, daß jeder ihrer Puncte von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie AC Fig. 48. eben so weit entfernt sey, als von einen ebenfalls der Lage nach gegebenen Punct F.**

Nimmt man auf der durch den Punct F senkrecht auf AC geführten Linie AB, einen in der Mitte des Abstandes AF liegenden Punct I an, so muß dieser Punct nothwendigerweise zur gesuchten Curve gehören, indem er von der geraden AC eben so weit, als vom Puncte F entfernt ist. Setzt man nun

$$IF = AI = c', \; IP = x, \; PM = y,$$

so werden wir für irgend einen Punct M haben,

$$QM = AP = AI + IP = c' + x;$$

und das rechtwinklichte Dreyeck FPM wird geben

$$MF = \sqrt{(PF^2 + PM^2)} = \sqrt{[(c' - x)^2 + y^2]},$$

weil PF = IF — IP ist. Entwickelt man nun, so werden wir finden

$$MF = \sqrt{(c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2)};$$

und da man nach der Natur der gesuchten Curve QM = MF haben muß, so wird daraus erfolgen

$$c' + x = \sqrt{(c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2)},$$

woraus man zieht

$$(c' + x)^2 = c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2;$$

und nach den Reductionen wird kommen

$$2c'x = - 2c'x + y^2 \text{ oder } y^2 = 4cx,$$

eine Gleichung der Parabel.

§. 129.

Um die Curve nach der Eigenschaft, welche wir eben zur Aufsuchung ihrer Gleichung angewendet haben, zu construiren, muß man mit einem nach Belieben genommenen Halbmesser FM einen Kreisbogen beschreiben, hierauf AP = FM nehmen, und durch den Punct P, zur Linie AC eine gerade PM paralell führen; der Punct M, in welchem diese gerade den Kreis schneidet, wird zur gesuchten Parabel gehören; denn es ist offenbar die Linie QM, welche der AP gleich und paralell ist, auch der FM gleich.

Dieselbe Eigenschaft giebt auch ein Mittel zu einer stetigen Bewegung, durch welche man die Curve beschreibt; man lege in dieser Absicht längs der Linie AC ein Linial, an welchem man einen Winkelhaken fortschiebt, dessen eine Seite die gerade Linie QE vorstellt; man befestige hierauf im Puncte F das Ende eines Fadens, dessen Länge der QE gleich ist, und dessen zweytes Ende im Puncte E befestigt sey; man drücke hierauf während des Fortrückens des Dreckecks an der Linie AC, diesen Faden dergestalt an die Seite QE des Dreyecks, daß er immer ausgespannt bleibe: so wird dieser Stift einen Theil der Parabel beschreiben.

## §. 130.

Wenn man, um zur Polargleichung zu gelangen, FM $= z$ setzt, so wird man haben

$$z = c' + x,$$

und verändert man den Anfangspunct dergestalt, daß man statt IP nun FP für die Abcisse nimmt, d. h. daß man $x = c' - x'$ setzt, weil $IP = IF - FP$, so wird kommen

$$z = 2c' - x';$$

setzt man endlich FM $\cos$ MFP, oder $z \cos \varphi$ statt FP oder $x'$, so wird man haben

$$z = 2c' - z \cos \varphi \text{ oder } z = \frac{2c'}{1 + \cos \varphi}.$$

## §. 131.

Die Aufgabe, welche uns oben zur Gleichung der Parabel geführt hat, kann dergestalt modificirt werden, daß sie alle drey Curven vom zweyten Grade in sich begreift. Sie braucht in dieser Hinsicht nur folgendermaßen vorgetragen zu werden: **Die Gleichung einer Curve zu finden, in welcher der Abstand irgend eines Punctes M von einem festen Puncte F Fig. 49. zu dem Abstande eben dieses Punctes M von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, ein beständiges Verhältniß habe.**

Es sey $1 : n$ dieses Verhältniß, und wir wollen vom Puncte F auf AC die senkrechte AB ziehen; die gesuchte Curve muß offenbar diese gerade im Puncte I dergestalt schneiden, daß man habe

$$IF : AI = 1 : n;$$

so daß, wenn IF durch $c'$ bezeichnet wird, alsdann

$$AI = nc'$$

seyn würde. Setzt man nun $IP = x$, $PM = y$, so erhält man vermittelst des rechtwinklichten Dreyecks PMF, eben so wie oben

$$MF = \sqrt{[(c' - x)^2 + y^2]};$$

und da

$$QM = AP = AI + IP = nc' + x,$$

so wird man haben

$$\sqrt{[(c' - x)^2 + y^2]} : nc' + x = 1 : n,$$

woraus man zieht

$$nc' + x = n\sqrt{[(c' - x)^2 + y^2]};$$

erhebt man zum Quadrat, so erhält man endlich

$$n^2y^2 + (n^2 - 1)x^2 - 2(n + 1)nc'x = 0.$$

Diese Gleichung, welche mit der Gleichung $\alpha u'^2 + \beta t^2 - \varepsilon t = 0$ (§. 121.) eine durchaus ähnliche Form hat, wird zur Ellipse, zur Hyperbel und zur Parabel gehören, je nachdem man $n > 1$, $n < 1$ oder $n = 1$ haben wird, und sie zeigt folglich, daß die Eigenschaft, welche den Gegenstand der vorgelegten Aufgabe ausmacht, allen dreyen Curven vom zweyten Grade gemein ist, in Rücksicht welcher die gerade Linie AC die **Leitlinie** (Linea Dinectrix) genannt wird.

Giebt man der obigen Gleichung diese Form:

$$y^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)x^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)c'x = 0,$$

und erwägt man, daß die Brüche $\frac{1}{n^2}$ und $\frac{1}{n}$ desto mehr abnehmen, je größer n wird, so wird man sehen, daß sie sich, wenn n unendlich genommen wird, auf

$$y^2 + x^2 - 2c'x = 0$$

reduciren muß, eine Gleichung, welche die eines Kreises ist, dessen Halbmesser c' ist, und bey welchem der Anfangspunct der Abcissen auf einem der äußersten Puncte des Durchmessers angenommen wird (§. 90.).

§. 132.

Man kann aus irgend einer der in den §. 122. und 125. enthaltenen Gleichungen

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

unmittelbar eine neue bilden, die sowohl diese beyden, als auch die Gleichung $y^2 = 4c'x$ enthält, welche von den beyden übrigen eine wesentlich verschiedene Form zu haben scheint. Man braucht in dieser Hinsicht nur in diesen Gleichungen den Anfangspunct der Coordinaten auf einen der Scheitel der durch sie vorgestellten Curven zu verlegen. In der That wird man, wenn in Fig. 45. $IP = x'$ und Fig. 47. $IP = x'$ gesetzt wird, durch die erste

$$x \text{ oder } OP = OI - IP = a - x',$$

und aus der zweyten

$$x \text{ oder } OP = I'P - OI' = x' - a$$

erhalten. Diese Substitutionen werden die oben beygebrachten Gleichungen in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' - x'^2), \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - 2ax')$$

verwandeln; setzt man $\frac{2b^2}{a} = p$, so werden sie dann die Form

$$y^2 = \frac{p^2}{2a}(2ax' - x'^2), \quad y^2 = -\frac{p}{2a}(2ax' - x'^2)$$

annehmen, und die eine wird von der andern nur in Ansehung des Zeichens von $p$ unterschieden seyn.

Setzt man anstatt $b^2$ dessen Werth bey der Ellipse (§. 122.) $a^2 - c^2$, so wird man für diese Curve erhalten

$$p = \frac{2(a^2 - c^2)}{a};$$

da aber $c$ im gegenwärtigen Fall den Abstand des Brennpunctes F vom Mittelpunct O ausdrückt, so muß man an deren Stelle den Abstand IF, vom neuen Anfangspunct der Coordinaten gerechnet, einführen; setzt man nun $IF = c'$, so wird man haben Fig. 45.

$$c \text{ oder } OF = OI - IF = a - c',$$

und die Größe p wird alsdann

$$p = \frac{4ac' - 2c'^2}{a}.$$

Für die Hyperbel Fig. 47. wird man finden,

$$c \text{ oder } OF = I'F - OI' = c' - a,$$

wenn man $I'F = c'$ setzt; und da man für diese Curve

$$b^2 = c^2 - a^2$$

hat (§. 125.), so wird erfolgen

$$p = \frac{2(c^2 - a^2)}{a} = \frac{2c'^2 - 4ac'}{a},$$

eine Größe, welche die vorhergehende negativ genommen ist.

Setzt man den Ausdruck $\frac{4ac' - 2c'^2}{a}$ unter dieser Form $4c' - \frac{2c'^2}{a}$ an, so sieht man leicht ein, daß der Bruch $\frac{2c'^2}{a}$ für einerley Werth von $c'$ desto kleiner wird, je mehr die Größe a zunimmt, und daß sich folglich dieser Ausdruck, wenn man a unendlich nimmt, auf $4c'$ reducirt; man wird also für diesen Fall

$$p = 4c'$$

haben; andrerseits wird sich die Gleichung

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ax' - x'^2),$$

welche mit

$$y^2 = p\left(x' - \frac{x'^2}{2a}\right),$$

einerley ist, aus eben der Ursache auf

$$y^2 = px', \text{ oder } y^2 = 4c'x'$$

reduciren, welches die Gleichung für die Parabel ist.

Die Gleichung $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax' - x'^2)$, ist also brauchbar, jede Curve vom zweyten Grade vorzustellen; sie gehört zur Ellipse, wenn p positiv ist, zur Hyperbel, wenn p negativ ist, und zur Parabel, wenn a unendlich ist.

## §. 133.

Die Größe p wird der Parameter genannt; er ist in der Ellipse und der Hyperbel die dritte Proportionallinie zu beyden Axen, weil man vermittelst der Gleichung

$$p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a},$$

folgende Proportion erhält

$$2a : 2b = 2b : p;$$

und in der dritten Curve vom zweyten Grade drückt er den Werth der doppelten durch den Brennpunct gehenden Ordinate aus. In der That hat man für diesen Punct

$$x' = c'$$

und man findet für die Ellipse

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ac' - c'^2)$$

$$= \frac{(4ac' - 2c'^2)(2ac' - c'^2)}{2a^2} = \frac{(2ac' - c'^2)^2}{a^2},$$

woraus

$$y = \frac{2ac' - c'^2}{a},$$

und folglich

$$2y = \frac{4ac' - 2c'^2}{a} = p$$

erfolgt. Man wird eben so in der Hyperbel haben

$$2y = \frac{2c'^2 - 4ac'}{a} = p,$$

und in der Parabel

$$2y = 4c' = p.$$

§. 134.

Die Gleichungen

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ax' - x'^2)$$

$$y^2 = -\frac{p}{2a}(2ax' - x'^2)$$

drücken eine der Ellipse und der Hyperbel gemeinschaftliche Eigenschaft aus, welche evident wird, wenn man sie unter der Form

$$\frac{y^2}{x'(2a - x')} = \frac{p}{2a}, \qquad \frac{y^2}{x'(x' - 2a)} = \frac{p}{2a}$$

ansetzt, aus welcher sich ergiebt, daß in der einen sowohl als in der andern dieser Curven das Quadrat der Ordinate PM, zum Producte der Linien lP und l'P, welche respectiv $x'$ und $2a - x'$ bey der Ellipse Fig. 45. und bey der Hyperbel Fig. 47. $x'$ und $x' - 2a$ sind, ein beständiges Verhältniß habe. Da diese Abstände des Fußes der Ordinate von jedem der Scheitel der Curve Abcissen genannt werden, so kann man sagen, daß in der Ellipse und der Hyperbel die Quadrate der Ordinaten sich zu einander verhalten, wie die Producte aus den correspondirenren Abcissen.

In der That wird man, wenn man eine von $x'$ verschiedene Abcisse, welche aber immer noch von einem und demselben Punct gerechnet wird, durch $X'$ bezeichnet, und die correspondirende Ordinate durch $Y$, folgende Gleichungen erhalten

$$Y^2 = \frac{p}{2a}(2aX' - X'^2), \quad Y^2 = \frac{p}{2a}(X'^2 - 2aX),$$

woraus man für die Ellipse

$$y^2 : Y^2 = x'(2a - x') : X'(2a - X'),$$

und für die Hyperbel

$$y^2 : Y^2 = x'(x' - 2a) : X'(X' - 2a)$$

erhält, wenn man im letzten Verhältniß einer jeden dieser Proportionen den gemeinschaftlichen Factor $\frac{p}{2a}$ ausläßt.

Die Gleichung für die Parabel giebt, wenn sie auf eben die Art behandelt wird, bloß

$$y^2 : Y^2 = x' : X',$$

woraus sich ergiebt, **daß in der Parabel die Quadrate der Ordinaten sich zu einander, wie die dazu gehörigen Abcissen, verhalten.**

## §. 135.

Aus den in dem §. 114, 118 — 120. beygebrachten Formeln ergiebt sich, daß bey jeder Curve vom zweyten Grade wenigstens zwey Systeme von Coordinaten vorhanden sind, in welchen sich die Gleichung dieser Curve unter der einfachsten Form darstellt; das eine dieser Systeme ist das der Axen, und das andre das der conjugirten Durchmesser. Wir wollen nun zeigen, daß es eine unendliche Anzahl von Systemen der Coordinaten giebt, die mit dieser Eigenschaft behaftet sind. Wir wollen in dieser Absicht die Umformungen der Coordinaten auf die Gleichungen in Beziehung der Axen anwenden.

Es sey zuvörderst die der Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, welche auf

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

zurückkommt; wir bemerken zuvörderst, daß es unnütz wäre, den Anfangspunct zu verändern, den wir daher im Mittelpunct lassen, und da man nur noch die Richtung der Axen verändern kann, so wollen wir bloß setzen

$$x = mt + pu, \quad y = nt + qu \text{ (§. 116.)}.$$

Wir wollen den Winkel, welchen die neuen Coordinaten mit einander einschließen müssen, und dessen Cosinus (§. 117.)

durch h ausgedrückt ist, unbestimmt lassen, und wir werden folglich die Gleichung

$$mp + nq + (np + mq)\,g = h$$

gar nicht in Rechnung zu bringen brauchen; ganz anders verhält es sich bey den Gleichungen

$$m^2 + n^2 + 2mng = 1, \quad p^2 + q^2 + 2pqg = 1$$

denn da die Coordinaten x und y auf einander senkrecht sind, so erfolgt $g = 0$, woraus sich ergiebt

$$m^2 + n^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1.$$

Von den vier Größen m, n, p und q werden demnach nur noch zwey übrig bleiben, welche wir nach Belieben annehmen können. Verrichtet man die Substitution der Werthe von x und y in der Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

so werden wir erhalten

$$(a^2q^2+b^2p^2)u^2 + 2(a^2nq+b^2mp)tu + (a^2n^2+b^2m^2)t^2 = a^2b^2;$$

um diese letztere zu vereinfachen, wollen wir

$$a^2nq + b^2mp = 0$$

setzen, welches sie auf

$$(a^2q^2 + b^2p^2)\,u^2 + (a^2n^2 + b^2m^2)\,t^2 = a^2b^2$$

reducirt. Um diese Gleichung und

$$a'^2u^2 + b'^2t^2 = a'^2b'^2$$

mit einander zu vergleichen, wollen wir sie unter folgender Form

$$u^2 + \frac{a^2n^2 + b^2m^2}{a^2q^2 + b^2p^2}\,t^2 = \frac{a^2b^2}{a^2q^2 + b^2p^2}$$

$$u^2 + \frac{b'^2}{a'^2}\,t^2 = b'^2$$

ansetzen; sie können dann nur durch die Annahme

$$\frac{b'^2}{a'^2} = \frac{a^2n^2 + b^2m^2}{a^2q^2 + b^2p^2}, \quad b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2q^2 + b^2p^2}$$

unab-

unabhängig von t und u identisch werden, welches geben wird

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 n^2 + b^2 m^2}, \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 q^2 + b^2 p^2}.$$

Um sich von der Möglichkeit dieser Umformung zu überzeugen, muß man sehen, ob die Bestimmung der Größen m, n, p und q keiner Ausnahme unterworfen ist. Die Gleichung

$$a^2 nq + b^2 mp = 0,$$

unter der Form

$$a^2 + b^2 \frac{mp}{nq} = 0$$

angesetzt, wird immer das Verhältniß von p zu q, oder das von m zu n zu erkennen geben. Wenn man daraus

$$\frac{p}{q} = -\frac{a^2 n}{b^2 m}$$

zieht, und wenn man zur Abkürzung

$$\frac{a^2 n}{b^2 m} = -r$$

setzt, so wird kommen

$$p = qr;$$

substituirt man diesen Werth in $p^2 + q^2 = 1$, so kann man daraus herleiten

$$q^2 (1 + r^2) = 1,$$

woraus sich ergiebt

$$q = \frac{1}{\sqrt{(1 + r^2)}}, \quad p = \frac{r}{\sqrt{(1 + r^2)}};$$

welche Ausdrücke immer reell bleiben, wie auch r beschaffen seyn mag. Da die Gleichung $m^2 + n^2 = 1$ nur eine der beyden Größen m und n bestimmen kann, so bleibt das Verhältniß $\frac{n}{m}$, welches in den Ausdrücken von p und von q vorkommt, unbestimmt, welche aus dieser Ursache einer un=

endlichen Anzahl verschiedener Werthe fähig sind. Es giebt also in der That eine unendliche Anzahl von Systemen der Coordinaten, in welchen die Gleichung der Ellipse die Form

$$a'^2u^2 + b'^2t^2 = a'^2b'^2$$

hat, welche der der Gleichung für die Axen

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

durchaus ähnlich ist.

## §. 136.

Wenn wir die Gleichung für die Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \text{ oder } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

auf eben die Art behandeln, wie wir eben die der Ellipse behandelt haben, so wird man nach einander haben

$$(b^2m^2 - a^2n^2)t^2 + 2(b^2mp - a^2nq)tu + (b^2p^2 - a^2q^2)u^2$$
$$= a^2b^2,\ b^2mp - a^2nq = 0$$
$$t^2 + \frac{b^2p^2 - a^2q^2}{b^2m^2 - a^2n^2}u^2 = \frac{a^2b^2}{b^2m^2 - a^2n^2};$$

vergleicht man dieses letztere Resultat mit

$$t^2 - \frac{a'^2}{b'^2}u^2 = a'^2,$$

so werden wir finden

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2m^2 - a^2n^2},\quad b'^2 = \frac{-a^2b^2}{b^2p^2 - a^2q^2}.$$

Die Ausdrücke von $p$ und $q$ werden in diesem Falle von derselben Form, wie im Vorhergehenden seyn, und werden folglich eine unendliche Menge von Werthen geben, je nachdem man $\frac{n}{m}$ annimmt. Wir sind also berechtigt, bey der Hyperbel einen ähnlichen Schluß zu machen, wie der, welchen wir bey der Ellipse vorgetragen haben.

## §. 137.

Wir wollen nun zur Parabel übergehen; ihre Gleichung $y^2 = 4c'x$ kann nicht durch die Formeln

$$x = mt + pu, \quad y = nt + qu,$$

in eine andre, ihr ähnliche umformt werden.

In der That erhält man durch diese Substitution

$$n^2t^2 + 2nqtu + q^2u^2 = 4c'(mt + pu),$$

aus welcher man drey Glieder, nehmlich die mit $t^2$, mit $tu$ und mit $u$ behafteten verschwinden lassen müßte, welches nicht geschehen kann, weil von den Größen $m$, $n$, $p$ und $q$ nur zwey bestimmt werden können. Wir wollen daher zur Versetzung des Anfangspunctes unsre Zuflucht nehmen, und statt $x$ und $y$ ihre allgemeinsten Werthe

$$mt + pu + a, \quad nt + qu + b \ (\S.\ 116.)$$

substituiren; wir werden auf diese Art haben:

$$\left.\begin{array}{l} n^2t^2 + 2nqtu + q^2u^2 \\ + 2b(nt + qu) - 4c'(mt + pu) \\ + b^2 - 4ac' \end{array}\right\} = 0.$$

Da wir nun wegen der beyden neuen unbestimmten $a$ und $b$, vier Größen beliebig festsetzen können, so wollen wir die mit $tu$, mit $u$ behafteten, und die von $t$ und $u$ unabhängigen Glieder verschwinden lassen, indem wir

$$2nq = 0, \quad 2bq - 4c'p = 0, \quad b^2 - 4ac' = 0$$

setzen. Der ersten dieser Gleichungen kann auf zwey verschiedene Arten ein Genüge geschehen; nehmlich entweder durch $n = 0$ oder durch $q = 0$; allein diese giebt dann in der zweyten Gleichung $p = 0$, welches mit der Gleichung $p^2 + q^2 = 1$ nicht bestehen kann. Nimmt man den Werth $n = 0$ an, so verschwindet das Glied $n^2t^2$, und es bleibt nur noch

$$q^2u^2 = 4c'mt \text{ oder } u^2 = \frac{4c'mt}{q^2},$$

eine Gleichung, welche der, die sich auf die Axe der Curve bezieht, ähnlich ist. Die Annahme von $n = 0$, in der Gleichung $m^2 + n^2 = 1$ eingeführt, giebt

$$m = \pm 1;$$

aus $2bq - 4c'p = 0$ zieht man

$$\frac{q}{p} = \frac{2c'}{b},$$

und diese Gleichung gegen $p^2 + q^2 = 1$ gehalten, bestimmt $p$ und $q$. Die Gleichung $b^2 - 4ac' = 0$ bestimmt auch $a$, wenn $b$ bekannt ist; allein diese letztre Größe bleibt eines jeden beliebigen Werths fähig.

## §. 138.

Die vorhergehenden Betrachtungen führen auf diese Aufgabe: **Es ist irgend ein Durchmesser gegeben, man soll die Lage seines zugeordneten finden.** Man wird sie auflösen, wenn man in Erwägung zieht, daß von den Dreyecken $P''A'''R$, $P''MQ$, das eine in $R$, und das andre in $Q$ rechtwinklicht wird, wenn in Fig. 43. des §. 116. der Winkel $CAB$, oder der, welchen die Axen der ersten Coordinaten $x$, $y$ einschließen, ein rechter ist: daß $m = \frac{A'''R}{A'''P''}$ der Cosinus des Winkels $P''A'''R$ oder $B''A'''B'$, und daß $n = \frac{P''R}{A'''P''}$ der Sinus desselben ist; daß $p = \frac{P''Q}{P''M}$ den Cosinus des Winkels $MP''Q$ oder $C''A'''B'$, und daß $q = \frac{QM}{P''M}$ den Sinus desselben ausdrückt. Wenn man eben diese Benennungen bey der Axe $II'$ einführt, auf welcher die Abcissen $x$ Fig. 50 und 51. genommen worden, und überdieß den Winkel kennt, welcher irgend ein Durchmesser $FO$, der als Axe der $t$ genommen ist, mit dieser Axe einschließt, so werden die Größen $m$ und $n$ gegeben seyn, und zur Bestimmung von $p$ und $q$ vermittelst der Gleichung $p^2 + q^2 = 1$, verbunden mit der, aus welcher man die Eigenschaften der conjugirten Durchmesser hergeleitet hat, hinreichen. Wenn man $q$ hat, so hat man auch den Winkel, welchen der zu FO conjugirte Durchmesser OH mit der Axe II′ einschließt.

## §. 139.

Für die Ellipse Fig. 50. hat man die Gleichung

$$a^2nq + b^2mp = 0 \text{ (§. 135.)},$$

aus welcher man zieht

$$\frac{q}{p} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n},$$

und da

$$\frac{m}{n} = \frac{\cos FOI}{\sin FOI} = \frac{1}{\operatorname{tang} FOI},$$

$$\frac{q}{p} = \frac{\sin HOI}{\cos HOI} = \operatorname{tang} HOI,$$

so kommt

$$\operatorname{tang} HOI = -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{\operatorname{tang} FOI}.$$

Wenn man nun die Coordinaten des Punctes F für bekannt annimmt, und OE durch $\alpha$, EF durch $\beta$ bezeichnet, so wird man haben

$$\operatorname{tang} FOI = \frac{EF}{OE} = \frac{\beta}{\alpha},$$

und folglich

$$\operatorname{tang} HOI = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}.$$

Bezeichnet man die Linien OG und GH durch $\alpha'$ und $\beta'$, so wird man haben

$$\operatorname{tang} HOI = \frac{GH}{OG} = \frac{\beta'}{\alpha'} = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta},$$

woraus folgt

$$a^2\beta\beta' + b^2\alpha\alpha' = 0.$$

Aus dieser Gleichung mit der der Ellipse verbunden, welche

$$\beta'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2)$$

giebt, wird man $\alpha'$ und $\beta'$, oder die Coordinaten des Punctes H, vermittelst der des Punctes F finden können.

Wir wollen im Vorbeygehen anmerken, daß diese Art, die Lage eines conjugirten Durchmessers zu einem andern zu finden, zu gleicher Zeit die der Tangente irgend eines Punctes der Curve giebt, weil der Durchmesser OH nothwendigerweise zur geraden FT, welche die Ellipse im Puncte F berührt peralell seyn muß (§ 115.), die sich daher leicht führen läßt, sobald OH gezogen ist.

Man kann sich auch umgekehrt, wenn die Tangente geführt ist, derselben bedienen, um OH zu ziehen.

Die obigen Rechnungen lassen sich auf eine ähnliche Art an der Hyperbel Fig. 51. bewerkstelligen, für welche man ie Gleichung

$$b^2mp - a^2nq = 0$$

hat (§. 136.), aus welcher man nacheinander zieht

$$\frac{q}{p} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{m}{n},\ \text{tang HOI} = \frac{b^2}{a^2}\ \frac{1}{\text{tang FOI}}$$

$$\text{tang HOI} = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta}.$$

Da in diesem Falle der zweyte Durchmesser OH die Curve nicht trift, so kann man OI und IR anstatt OG und GH der Fig. 50. nehmen, oder $\alpha' = a$ setzen; und da

$$\text{tang HOI} = \frac{\text{IR}}{\text{OI}} = \frac{\beta'}{a},$$

so wird man haben

$$\frac{\beta'}{a} = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta},$$

welches den Punct R geben wird.

In der Parabel hat man $n = 0$; hieraus folgt, daß die Axe der t, FO Fig. 52. der der x paralell ist, und daß ihre Lage nur vom Punct O abhängt, in welchem sie die Curve begegnet. Dieser Punct wird durch die Größe a bestimmt, welche offenbar die Abcisse IE vorstellt, die auf der Axe IB mit dem Punct der Curve übereinstimmt, für welchen man zu gleicher Zeit $t = 0$, $u = 0$ hat. Die Gleichung $\frac{q}{p} = \frac{2c}{b}$ giebt die trigonometrische Tangente des zwischen der Axe der $t$ und der der $u$ eingeschlossenen Winkels; und wenn man diese letztere HT durch den Punct O führt, so wird sie, nach weiter oben bey der Ellipse angestellten Betrachtungen, zugleich eine Tangente der Parabel seyn.

## §. 140.

In den Gleichungen

$$a'^2u^2 + b'^2t^2 = a'^2b'^2,\quad b'^2t^2 - a'^2u^2 = a'^2b'^2,$$

von denen die erste zur Ellipse, und die zweyte zur Hyperbel gehört, stellen die Buchstaben $a'$ und $b'$ die beyden halben conjugirten Durchmesser vor. In der That kommt, wenn $u = 0$

$$t = a' \text{ oder } FO = a'$$

und wenn $t = 0$, so kommt

$$u^2 = b'^2 \text{ oder } u^2 = - b'^2,$$

welches für die Hyperbel, so wie für die Ellipse

$$OH = b'$$

giebt (§. 118.).

Es ist leicht einzusehen, daß die Größen $m$, $n$, $p$, $q$, vermittelst der Gleichungen $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$, und vermittelst der Ausdrücke von $a'^2$ und von $b'^2$, aus der Gleichung der Bedingung, welche die conjugirten Durchmesser bestimmt, eliminirt werden können, und daß man zu einer Beziehung zwischen diesen Linien und den Halbaxen gelangen muß.

Was die Ellipse anbelangt, so hat man (§. 135.)

$$a^2nq + b^2mp = 0$$

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2n^2 + b^2m^2}$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2q^2 + b^2p^2};$$

hält man diese Gleichungen gegen

$$m^2 + n^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1,$$

um daraus die vier Größen $m$, $n$, $p$, $q$ zu eliminiren, so wird die Endgleichung, welche nur noch die vier Buchstaben $a$, $b$, $a'$ und $b'$ enthält, die verlangte Beziehung ausdrücken. Aus der Gleichung

$$a^2nq + b^2mp = 0,$$

zieht man

$$a^2nq = - b^2mp;$$

erhebt man nun zum Quadrat, und substituirt man statt $n^2$ und $q^2$ ihre Werthe $1 - m^2$, $1 - p^2$, so wird kommen

$$a^4 (1 - m^2)(1 - p^2) = b^4m^2p^2,$$

woraus man zieht

$$m^2 = \frac{a^4 (1 - p^2)}{b^4p^2 + a^4 (1 - p^2)}$$

$$1 - m^2 = \frac{b^4p^2}{b^4p^2 + a^4 (1 - p^2)}.$$

Setzt man ferner statt $n^2$ und $q^2$ ihre Werthe in die Ausdrücke für $a'^2$ und $b'^2$, so wird man diese Gleichungen bilden

$$a'^2 [a^2 (1 - m^2) + b^2m^2] = a^2b^2,$$
$$b'^2 [a^2 (1 - p^2) + b^2p^2] = a^2b^2;$$

und schafft man $m^2$ und $1 - m^2$ aus der ersten hinweg, so wird man haben

$$a'^2 \left\{ \frac{a^2b^4p^2 + a^4b^2 (1 - p^2)}{b^4p^2 + a^4 (1 - p^2)} \right\} = a^2b^2,$$

ein Resultat, dessen beyde Glieder durch $a^2b^2$ theilbar sind, und welches endlich giebt

$$a'^2 [b^2p^2 + a^2(1-p^2)] = b^4p^2 + a^4(1-p^2).$$

Aus dieser letztern Gleichung kann man $p^2$ eliminiren, indem man in

$$b'^2 [a^2(1-p^2) + b^2p^2] = a^2b^2,$$

deren Werth setzt, und man findet nach dieser Substitution, und den dadurch entstehenden Reductionen

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \text{ oder } FO^2 + OH^2 = OI^2 + OL^2.$$

Behandelt man auf eben diese Art die Gleichungen (§. 136.)

$$b^2mp - a^2nq = 0$$

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2m^2 - a^2n^2}$$

$$b'^2 = -\frac{a^2b^2}{b^2p^2 - a^2q^2},$$

die sich auf die Hyperbel beziehen, so wird man erhalten

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \text{ oder } FO^2 - OH^2 = OI^2 - OL^2.$$

Es ist daher bey der Ellipse die Summe der Quadrate der halben conjugirten Durchmesser, und die Differenz derselben bey der Hyperbel der Summe der Quadrate der Halbaxen, oder ihrer Differenz gleich.

## §. 141.

Wenn man die Ausdrücke für $a'^2$ und für $b'^2$ bey der Ellipse, in einander multiplicirt, so wird man erhalten

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^4n^2q^2 + a^2b^2n^2p^2 + a^2b^2m^2q^2 + b^4m^2p^2};$$

wenn man aber die Gleichung $a^2nq + b^2mp = 0$ quadrirt, so kommt

$$a^4n^2q^2 + 2a^2b^2mnpq + b^4m^2p^2 = 0,$$

oder

$$a^4n^2q^2 + b^4m^2p^2 = -2a^2b^2mnpq;$$

vermittelst dieses Werths kann man das erste und letzte Glied des Nenners im Ausdrucke für $a'^2b'^2$ hinwegschaffen, welcher werden wird

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^2b^2n^2p^2 - 2a^2b^2mnpq + a^2b^2m^2q^2}$$
$$= \frac{a^2b^2}{(np - mq)^2};$$

nimmt man von jedem Theile die Quadratwurzel, so wird man haben

$$a'b' = \frac{ab}{np - mq} \text{ oder } a'b'(np - mq) = ab.$$

Es ist zu merken, daß die Größe $np - mq$ nichts anders ist, als der Sinus des Winkels, welchen die conjugirten Durchmesser FO und OH Fig. 50. mit einander einschließen; denn da $n$ und $m$ der Sinus und Cosinus des Winkels FOI, $q$ und $p$ der Sinus und Cosinus des Winkels HOI sind, so muß die Formel

$$\sin FOH = \sin(FOI + HOI)$$
$$= \sin FOI \cos HOI + \cos FOI \sin HOI \ (\S.\ 11.)$$

folgende Gleichung geben

$$\sin FOH = np - mq,$$

wenn man in Erwägung zieht, daß der Winkel HOI, indem er unterhalb der Axe II′ fällt, einen negativen Sinus, $q = -\frac{b^2mp}{a^2n}$, haben muß, den man daher in dieser Formel positiv machen, und $-q$ statt $+q$ nehmen muß; man wird also haben

$$a'b' \sin FOH = ab.$$

Es ist leicht einzusehen, daß man, wenn vom Puncte F auf OH die senkrechte FQ herabgelassen wird, alsdann haben muß

$$FQ = FO \sin FOH = a' \sin FOH,$$

und daß folglich die Fläche des Paralellograms

$$FH = OH \times FQ = a'b' \sin FOH;$$

man kann also aus dem Vorhergehenden schließen, daß das auf den Halbaxen $a$ und $b$ oder OI und OL gebildete Rechteck, dem auf den beyden Hälften OF und OH der conjugirten Durchmesser gebildeten Paralellogramme gleich ist.

Man sieht leicht ein, daß eben diese Eigenschaft bey der Hyperbel statt findet, indem man auf eben die Art das Product $a'b'$ bildet; allein man muß in Erwägung ziehen, daß in Fig. 51. der Winkel

$$FOH = HOI - FOI.$$

Man leitet daher hieraus diese merkwürdige Eigenschaft her, daß die um die Ellipse beschriebenen Paralellogramme, oder die zwischen den beyden entgegengesetzten Theilen der Hyperbel eingeschriebenen, alle dem Rechtecke aus den beyden Axen gleich sind, weil diese Paralellogramme, wie aus den Figuren zu ersehen ist, aus vier andern Paralellogrammen zusammengesetzt sind, deren jedes dem vierten Theil des durch $4a^2b^2$ ausgedrückten Paralellogramms der Axen gleich ist.

## §. 142.

Wenn man den Sinus des Winkels FOH durch s bezeichnet, so erhält man die Gleichung

$$a'b's = ab,$$

welche man mit

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

in der Ellipse, und mit

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$$

in der Hyperbel vergleichen kann, um die Axen a und b zu finden, wenn man nur zwey halbe conjugirte Durchmesser, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt. Nachdem man die Axen hat, ist es sehr leicht zu den Winkeln zu gelangen, welche sie mit den conjugirten Durchmessern einschließen, indem man sich der im §. 135 und 136. für $a'^2$ und $b'^2$ beygebrachten Formeln bedient. Wir wollen die Ausführung der Rechnungen, und die davon herzuleitenden

Constructionen dem Leser überlassen; das was wir davon gesagt haben, erfüllt den Zweck, den wir uns vorgesetzt haben, nehmlich den, zu zeigen, wie man die vorzüglichsten Eigenschaften der Curven vom zweyten Grade, durch eine völlig analytische Methode, und unabhängig von allen geometrischen Constructionen, herleiten könne.

§. 143.

Die Fundamental-Eigenschaften der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel, welche wir im §. 134. gezeigt haben, und welche immer statt haben, sowohl in Rücksicht der Axen als der Durchmesser, finden sich wieder in den verschiedenen Curven, welche aus dem Durchschnitt einer conischen Fläche mit irgend einer Ebne entstehen. Hier sind die synthetischen Beweise.

Es sey ASB Fig. 53. irgend ein Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist, das heißt, ein Körper, der durch die Fläche begränzt wird, welche entsteht, wenn man um den Umkreis ABCD eine gerade Linie dergestalt herumbewegen läßt, daß sie in jeder Lage, welche sie annimmt, durch den Punct S gehen muß. Es ist offenbar, 1) daß wenn man diesen Körper durch irgend eine, durch den Scheitel S des Kegels geführte Ebne CSD schneidet, zwey gerade Linien erhalten werden, welche mit den beyden Lagen der als beschreibende Linie genommenen geraden übereinstimmen, nachdem sie successiv in den Puncten C und D angelangt ist, in welchen die Ebne CSD den Kreis ABCD trift. 2) Wenn die schneidende Ebne A′B′C′D′, und zur Basis ABCD paralell ist, so wird der Durchschnitt ein Kreis seyn, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man sich vorstellt, man habe durch den Punct S und dem Mittelpunct der Grundfläche die Axe des vorgelegten Kegels geführt, und daß durch diese Axe irgend zwey Ebnen ASB, CSD gelegt worden, deren respective Durchschnitte mit ABCD und A′C′B′D′, AB und A′B′, CD und C′D′ seyen; denn man hat alsdann die ähnlichen Dreyecke

$$COS, \quad C'O'S,$$

welche geben

$$CO : C'O' = SO : SO',$$

und die ähnlichen Dreyecke

$$AOS, \quad A'O'S,$$

welche geben würden

$$AO : A'O' = SO : SO',$$

woraus man schließen kann

$$AO : A'O' = CO : C'O';$$

und da man aus der Construction $AO = CO$ hat, so wird man auch haben

$$A'O' = C'O',$$

woraus zu ersehen ist, daß alle Linien, welche vom Puncte O′ nach der krummen Linie des Schnitts A′B′C′D′ gezogen werden, einander gleich sind, und daß er folglich ein Kreis ist.

Es ist beyläufig zu merken, daß sich die Fläche des Kegels, sowohl unterhalb der Basis ABCD, als oberhalb des Scheitels S ins Unendliche ausdehnt, weil nichts vorhanden ist, welches die Länge der beschriebenen Linie begränzt; man sieht ferner, daß der Theil Sb der Verlängerung der geraden SB einen zweyten Kegel beschreibt, welcher gegen den vorigen eine umgekehrte Lage hat.

## §. 144.

Diese Betrachtungen vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, 1) daß der Kegel ASB Fig. 54. durch eine Ebne geschnitten sey, welche zu gleicher Zeit die beyden Seiten AS und SB trift, und welche folglich nicht in den obern Kegel aSb kommt; es wird offenbar in diesem Falle der

Schnitt IMI'm eine eingeschlossene, oder eine in sich selbst zurückkehrende Curve seyn. Es sey GH der gemeinschaftliche Durchschnitt der schneidenden Ebne mit der Ebne der Basis ABCD; wir wollen ferner annehmen, die Linie AOB, welche die Lage der Ebne des Dreyecks ASB bestimmt, sey senkrecht auf GH, und wir wollen uns zu ACBD zwey Ebnen EMFm, E'M'F'm' paralell geführt denken, welche beyde die schneidende Ebne IMI'm begegnen; die gemeinschaftlichen Durchschnitte der beyden ersten mit der dritten, welche durch Mm und M'm' ausgedrückt sind, werden zu GH paralell, und folglich auf den Linien EF und E'F', welche zu einander paralell sind, senkrecht seyn, indem sie als die gemeinschaftlichen Durchschnitte der Ebnen EMFm, E'M'F'm' durch die Ebne ASB betrachtet werden können. Da nun die Curven EMFm, E'M'F'm nach dem vorhergehenden §. Umkreise des Zirkels sind, so wird man haben

$$PM^2 = EP \times FP, \quad P'M'^2 = E'P' \times F'P'.$$

Allein die Linie II', welche ein gemeinschaftlicher Durchschnitt der Ebnen ASB und IMI'm ist, bildet mit den Linien EF, E'F' und den Seiten des Kegels, die einander ähnlichen Dreyecke EIP, E'IP', und die ebenfalls einander ähnlichen Dreyecke FI'P, F'I'P'; die beyden ersten werden geben

$$EF : E'P' = IP : IP',$$

und die beyden andern

$$FP : F'P' = I'P : I'P';$$

multiplicirt man diese Proportionen ordnungsweise, so wird man haben

$$EP \times FP : E'P' \times F'P' = IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

und substituirt man statt $EP \times FP$ und $E'P' \times F'P'$ ihre Werthe $PM^2$ und $P'M'^2$, so wird man erhalten

$$PM^2 : P'M'^2 = IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

eine Proportion, welche die im §. 134. vorgetragene characteristische Eigenschaft der Ellipse ausdrückt.

§. 145.

Es ist beyläufig zu merken, daß wenn das Dreyeck SII′ dem Dreyeck SAB ähnlich wäre, ohne daß die Linie II′ paralell zu AB sey, welches statt haben könnte, wenn der Winkel SII′ den Winkel SAB, und SI′I dem SBA gleich wäre, so würden die Dreyecke EPI und FI′P, welche so wie die vorhergehenden einander ähnlich sind, folgende Proportionen geben:

$$EP : I'P = IP : FP, \text{ oder } EP \times FP = I'P \times IP;$$

und da man im Kreise EMF hat

$$PM^2 = EP \times FP,$$

so wird man auch haben

$$PM^2 = I'P \times IP.$$

Der Schnitt IMI′m würde also in diesem Falle selbst ein Kreis seyn, wenn die Ordinaten PM auf dem Durchmesser II′ senkrecht sind; damit aber diese letztere Bedingung erfüllt werde, muß der gemeinschaftliche Durchschnitt GH der schneidenden Ebne mit der Basis des Kegels, zu gleicher Zeit auf der geraden GA und auf der geraden GI senkrecht seyn, das heißt, er muß auf dem durch die Axe geführten Dreyecke SAB senkrecht seyn, und folglich muß dieses letztere selbst auf der Ebne der Basis des Kegels, und zu gleicher Zeit auf der schneidenden Ebne senkrecht seyn. Wenn alle diese Umstände zusammentreffen, so wird die schneidende Ebne eine zu der der Basis antiparalelle genannt, und es folgt hieraus, daß in einem Kegel, welcher einen Kreis zur Basis hat, der dieser Basis antiparalelle Schnitt, so wie der paralelle Schnitt ein Kreis ist.

§. 146.

Wenn die schneidende Ebne in Rücksicht der Seiten eine Lage hätte, welche Fig. 55. darstellt, das heißt, daß sie zu gleicher Zeit beyde entgegengesetzte Kegel treffen könnte, so würde man in jedem Kegel eine unbegränzte Curve bilden, weil die Fläche, indem sie einmahl im Kegel ist, nicht mehr hinaus kommen kann. Da die beyden entgegengesetzten Kegel, eigentlich zu reden, nur eine einzige Fläche bilden, so können auch die beyden Curven KIk und K′I′k′ so betrachtet werden, als setzten sie nur eine einzige zusammen. Es ist schon leicht eine Aehnlichkeit zwischen dieser Curve und der Hyperbel einzusehen; um aber ihre Identität zu finden, muß man in der ersten eine der characteristischen Eigenschaften der zweyten zu finden suchen. Nimmt man nun an, die Ebne ASB sey wie im §. 144. bestimmt, daß man die Ebne EMFm zu ACBD paralell geführt, und die geraden II′, Mm und M′m′ gezogen habe, welche die gemeinschaftlichen Durchschnitte der schneidenden Ebne mit den drey Ebnen ASB, EMFm, ACBD sind, so wird man die einander ähnlichen Dreyecke EPI, AIP mit einander vergleichen können, welche geben werden

$$EP : AP' = IP : IP',$$

und die ähnlichen Dreyecke FI′P, BI′P′, welche geben werden

$$FP : BP' = I'P : I'P';$$

multiplicirt man diese beyden Proportionen nach der Ordnung, so wird kommen

$$EP \times FP : AP' \times BP' = IP \times I'P : IP' \times I'P'.$$

Da aber die Schnitte EMFm und ACBD Kreise sind, deren Durchmesser EF und AB nach der Construction auf Mm und M′m′ senkrecht sind, so wird man haben

$$EP \times FP = PM^2, \quad AP' \times BP' = P'M^2,$$

und folglich

$$PM^2 : P'M'^2 = IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

eine Proportion, in welcher die im §. 134. vorgetragene characteristische Eigenschaft der Hyperbel begriffen ist.

§. 147.

§. 147.

Es bleibt uns nun noch übrig den Fall zu untersuchen, wo die schneidenne Ebne einer der Seiten des Kegels paralell ist, wie die Figur 56 zeigt. Sie kann in diesem Falle nur einen einzigen von beyden entgegengesetzten Kegeln schneiden; allein, sie muß auch beständig darauf bleiben, so daß der Schnitt M'Im' eine offene und unbegränzte Curve, so wie die Parabel seyn wird, mit welcher sie völlig identisch ist, wie wir gleich beweisen werden. Da die Ebnen ASB, EMFm, ACBD unter eben den Bedingungen, wie oben geführt sind, so giebt der Paralellismus der Linien IP' und SB

$$FP = BP';$$

andrerseits führt die Aehnlichkeit der Dreyecke EIP, AIP' auf

$$EP : AP' = IP : IP';$$

multiplicirt man das eine Glied des ersten Verhältnisses durch FP, und das andre durch BP', so wird kommen

$$EP \times FP : AP' \times BP' = IP : IP'.$$

Da man aber in den Kreisen EMFm, ACBD immer hat

$$PM^2 = EP \times FP, \quad P'M'^2 = AP' \times BP',$$

so wird man haben

$$PM^2 : P'M'^2 = IP : IP',$$

eine Proportion, welche nichts anders als die im §. 134. vorgetragene characteristische Eigenschaft der Hyperbel ausdrückt.

§. 148.

Wir wollen nun die Eigenschaften der die Curven vom zweyten Grade schneidenden oder berührenden Linien untersuchen. Um die Methode zu verfolgen, welche wir in Rücksicht des Kreises ins Besondre angewendet haben (§. 101.), wollen wir die Gleichung

$$y - \beta = A(x - \alpha)$$

nehmen, welche zur geraden durch den Punct gehenden Linie gehört, dessen Coordinaten $\alpha$ und $\beta$ sind, und welche überdies mit der Axe der Abcissen einen Winkel macht, dessen trigonometrische Tangente A ist; wir wollen sie gegen die Gleichung $y^2 = mx + nx^2$ halten, welche der im §. 121. ähnlich ist, und folglich die drey Curven vom zweyten Grade begreift. Setzt man wie im §. 101.

$$\sqrt{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]} = z,$$

so werden wir haben

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{(1+A^2)}}, \quad y = \beta + \frac{Az}{\sqrt{(1+A^2)}};$$

und setzt man zur Abkürzung $\frac{1}{\sqrt{(1+A^2)}} = A'$, so wird kommen

$$x = \alpha + A'z, \quad y = \beta + A'Az;$$

substituirt man diese Werthe in die Gleichung

$$y^2 = mx + nx^2,$$

so wird man diese erhalten

$$\beta^2 + 2\beta AA'z + A^2A'^2z^2$$
$$= m\alpha + mA'z + n\alpha^2 + 2nA'\alpha z + nA'^2z^2.$$

Bringt man alle Glieder in einen einzigen Theil, und ordnet sie nach z, so wird man erhalten

$$(A^2 - n)\,A'^2z^2 + (\beta A - \tfrac{1}{2}m - n\alpha)\,2A'z$$
$$+ \beta^2 - m\alpha - n\alpha^2 = 0,$$

welche auf

$$z^2 + \frac{2(\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha)}{(A^2 - n)\,A'}\,z + \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)\,A'^2} = 0$$

zurückkommt. In dieser Gleichung stellt die unbekannte z den Abstand EM Fig. 58. zwischen dem gegebenen Punct E, und einem der Durchschnittspuncte M und M′ der geraden EM mit der Curve AC vor; von dem Werthe desselben kann man leicht zu denen der Coordinaten dieses Durchschnitts gelangen.

§. 149.

Schließt man hier eben so, wie bey dem Falle des Kreises (§. 103.), so wird man leicht sehen, daß die beyden Werthe von z einander gleich werden müssen, wenn die vorgelegte gerade die Curve nur berührt, wie im Puncte N, weil sich die Puncte M und M′ desto mehr nähern, je mehr sich die Linie EM der EN nähert. Da die Differenz der beyden Werthe von z, welche in der Formel

$$z = -\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}$$

$$\pm \sqrt{\left\{\left(\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}\right)^2 - \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'^2}\right\}}$$

begriffen sind, durch

$$2\sqrt{\left\{\left(\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}\right)^2 - \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'^2}\right\}}$$

ausgedrückt ist, und immer die Länge der Chorde MM′ giebt, so wird sie Null, wenn die Puncte M und M′ aufeinander fallen, und biethet folglich für den Berührungspunct N diese Gleichung dar

$$\left(\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}\right)^2 - \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'^2} = 0 \ (1).$$

Wenn man sie entwickelt, so wird $A'^2$, als ein allen Gliedern gemeinschaftlicher Theiler, verschwinden, und die hieraus entspringende Gleichung wird A geben, und folglich die Lage der geraden EN bestimmen, welche durch den Punct E dergestalt gelegt ist, daß sie die Curve AC berührt.

Wir wollen nur den einfachsten Fall betrachten, und annehmen, der Punct E liege auf der Axe der Abcissen AP Fig. 59., so wird daraus erfolgen $\beta = 0$, und

$$\frac{(\frac{1}{2}m + n\alpha)^2}{(A^2 - n)^2} + \frac{m\alpha + n\alpha^2}{A^2 - n} = 0;$$

diese letztere reducirt sich nach der Entwickelung auf

$$\tfrac{1}{4}m^2 + m\alpha A^2 + n\alpha^2 A^2 = 0,$$

und giebt

$$A = \frac{\frac{1}{2}m}{\sqrt{(-m\alpha - n\alpha^2)}};$$

dieser Ausdruck stellt sich unter einer imaginären Form dar, allein er kann vermittelst der besondern Werthe, welche die Größen m, n und $\alpha$ erhalten, reel werden, und dieses stellt sich in allen den Fällen dar, in welchen die Lage des Punctes E, und die Natur der Curve, ihr eine Tangente durch diesen Punct zu führen, gestatten.

§. 150.

Es giebt noch einen Fall, in welchem die Bedingung des Zusammenfalles sehr vereinfacht wird, es ist dieser, wo der gegebene Punct, indem er auf der Curve selbst liegt, mit dem Berührungspunct einerley ist. Wir wollen wirklich annehmen, daß der Punct E Fig. 58. in M übergeht; es ist alsdann zwischen $\alpha$ und $\beta$ dieselbe Beziehung anzutreffen, als zwischen x und y auf der Curve AC, das heißt, man wird haben

$$\beta^2 = m\alpha + n\alpha^2 \text{ oder } \beta^2 - m\alpha - n\alpha^2 = 0,$$

wodurch die Gleichung (1) auf folgende gebracht wird

$$\beta A - \tfrac{1}{2}m - n\alpha = 0,$$

woraus man zieht

$$A = \frac{\frac{1}{2}m + n\alpha}{\beta}.$$

Dieses ist der Ausdruck für die Tangente des Winckels, welchen die gerade TM mit der Axe der Abcissen machen muß, um die Curve AC zu berühren.

Die Lage dieser geraden würde auf einer bequemern Art gegeben seyn, wenn man noch einen zweyten Punct derselben kennte; und der, welcher sich am natürlichsten darbiethet, ist der Punct T, in welchem sie die Axe der Abcissen trift, und für welchen man in der Gleichung

$y - \beta = A(x - \alpha)$ (§. 81.) $y = 0$ hat. Es wird hieraus folgen

$$-\beta = A(x - \alpha), \text{ und } x - \alpha = -\frac{\beta}{A};$$

da die Größe $x - \alpha$ die Differenz der Abcissen der Puncte M und T ist, so bezeichnet sie den Theil PT der Axe AB; setzt man nun für A dessen Werth, so wird man haben

$$PT = -\frac{\beta}{\frac{1}{2}m + n\alpha} \text{ *)}.$$

Die Linie PT wird die Subtangente genannt, und wenn sie construirt ist, findet man die Tangente, indem man den Punct T mit dem Punct M durch eine gerade Linie verbindet.

## §. 151.

Um den Ausdruck der Subtangente in jeder der Curven vom zweyten Grade ins Besondre zu erhalten, braucht man bloß die Gleichungen $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$, $y^2 = \frac{p}{2a}(x^2 - 2ax)$, $y^2 = px$, successiv mit der Gleichung $y^2 = mx + nx^2$ zu vergleichen. Erwägt man, so wie oben, daß $\alpha$ und $\beta$, indem sie die Coordinaten des auf der Curve liegenden Berührungspunctes ausdrücken, zu einander dieselbe Beziehung haben müssen, wie x und y, und substituirt man daher für $\beta^2$ deren Werth, so findet man aus der ersten, zur Ellipse gehörigen Gleichung

$$m = p, \quad n = -\frac{p}{2a},$$

woraus folgt

---

*) In der Figur ist PT die Summe der Linien AT und AP, weil die Abcisse AT des Punctes T, in Rücksicht der Abcisse AP des Punctes P negativ ist (§. 72.).

$$PT = -\frac{2\alpha\beta^2}{p(a-\alpha)} = -\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a-\alpha};$$

aus der zweyten zur Hyperbel gehörigen Gleichung,

$$m = -p, \quad n = \frac{p}{2a},$$

woraus folgt

$$PT = -\frac{2a\beta^2}{p(\alpha - a)} = -\frac{\alpha^2 - 2a\alpha}{\alpha - a};$$

aus der dritten endlich, welche zur Parabel gehört, findet man

$$m = p, \quad n = o,$$

woraus folgt

$$PT = -\frac{2\beta^2}{p} = -2\alpha.$$

Dieser letzte Ausdruck, der einfachste von allen dreyen, lehrt uns, daß die Subtangente in der Parabel der doppelten Abcisse gleich ist. Das Zeichen —, mit welchem er so wie die übrigen behaftet ist, zeigt, daß sie auf der Axe AB vom Puncte P aus, gegen die Seite, wo die negativen x getragen werden, genommen werden muß; da nun die Gestalt der Curve hinreichend zeigt, von welcher Seite die Subtangente fallen muß, so werden wir von nun an das Zeichen ihres Ausdrucks ganz außer Acht lassen.

Die Construction der ersten Ausdrücke biethet nicht viel mehr Schwierigkeit dar; man hat für die Ellipse

$$a - \alpha : 2a - \alpha = \alpha : \frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha} = PT,$$

für die Hyperbel

$$\alpha - a : \alpha - 2a = \alpha : \frac{\alpha^2 - 2a\alpha}{\alpha - a} = PT;$$

es reducirt sich also alles darauf, vierte Proportionallinien zu finden.

Es ist wohl zu merken, daß die zweyte Axe b nicht in diesen Ausdrücken vorkommt; hieraus folgt, daß für dieselden Abcissen die Subtangente in allen Ellipsen, welche einerley große Axe haben, dieselbe bleibt, und daß eben dasselbe bey den Hyperbeln statt findet. Da sich nun die Ellipse in einen Kreis verwandelt, wenn $b = a$ ist, so kann man die Tangente der ersten dieser Curven vermittelst der der zweyten führen; denn wenn man die Ordinate pm Fig. 46. verlängert, bis sie den auf der großen Axe beschriebenen Kreis trift, und die gerade nT als Tangente zu diesem letztern vom Punct n führt, so wird, nach dem Vorhergehenden, die Subtangente pT auch zum Punct m der Ellipse gehören, dessen Tangente folglich gefunden wird, wenn man die Puncte m und T verbindet. Man würde eine ähnliche Construction für jede beliebige Hyperbel erhalten, wenn man von den Subtangenten der gleichseitigen Hyperbeln ausginge (§. 125.).

## §. 152.

Wenn man die Subtangente hat, ist es leicht die Ausdrücke für die Tangente, die Subnormale und die Normale zu finden; dies sind die Nahmen, welche man den Linien MT, MR und PR Fig. 58. giebt. Die erste ist der Theil der Tangente, welcher zwischen dem Berührungspunct und der Axe der Abcissen enthalten ist; die zweyte ist der Theil der Axe der Abcissen, welcher zwischen dem Fuß der Ordinate und dem Puncte R liegt, in welchem eine aus dem Puncte M auf die Tangente geführte senkrechte, die Axe der Abcissen trift; endlich ist die dritte, diese senkrechte selbst, welche vom Puncte M bis zur Axe der Abcissen gerechnet wird.

1) Aus dem in P rechtwinklichten Dreyeck TMP hat man

$$MT = \sqrt{(PM^2 + PT^2)}.$$

2) Die Dreyecke PMT, PMR, welche einander ähn-

lich sind, weil sie durch die von der Spitze M des rechten Winkels im Dreyeck TMR gezogene senkrechte PM gebildet werden, geben

$$PT : PM = PM : PR,$$

woraus folgt

$$PR = \frac{PM^2}{PT},$$

3) Es folgt aus dem in P rechtwinklichten Dreyeck MPR,

$$MR = \sqrt{(PM^2 + PR^2)}.$$

Es ist offenbar, daß diese Formeln allen Curven zukommen, und um sie z. B. auf die Ellipse anzuwenden, muß man in den ersten und zweyten statt PM und PT ihre relativen Werthe für diese Curve setzen, und hiernächst vermittelst des Werths, welchen man für PR und PM erhält, den von MR bilden; man muß auf eben die Art in Rücksicht der Hyperbel und der Parabel verfahren. Wir wollen uns hier darauf einschränken, die Resultate dieser Substitutionen herzusetzen, welche auch an und für sich keiner Schwierigkeit unterworfen sind. Für die Ellipse sind sie

$$PT = \frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha},\ MT = \sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \left(\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}\right)^2\right]}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}(a - \alpha),\ MR = \sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \frac{b^4}{a^4}(a - \alpha)^2\right]},$$

für die Hyperbel

$$PT = \frac{\alpha^2 - 2a\alpha}{\alpha - a},\ MT = \sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - 2a\alpha) + \left(\frac{\alpha^2 - 2a\alpha}{\alpha - a}\right)^2\right]}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}(\alpha - a),\ MR = \sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - 2a\alpha) + \frac{b^4}{a^4}(\alpha - a)^2\right]},$$

für die Parabel

$$PT = 2\alpha,\quad MT = \sqrt{(p\alpha + 4\alpha^2)}$$

$$PR = \tfrac{1}{2}p,\quad MR = \sqrt{(p\alpha + \tfrac{1}{4}p^2)}.$$

Man erhält in Rücksicht der beyden ersten Curven etwas einfachere Resultate, wenn man die Abcissen vom Mittelpuncte aus rechnet, welches bey der dritten nicht angehet, weil sie keinen hat (§. 121.). Um zu diesen Resultaten zu gelangen, braucht man bloß $\alpha = a - \alpha'$ in der Ellipse, und $\alpha = \alpha' + a$ in der Hyperbel zu setzen; $\alpha'$ wird die neue Abcisse vom Mittelpuncte aus genommen seyn. Nachdem diese Substitutionen, und die daraus entspringenden Reductionen verrichtet seyn werden, wird man finden, für die Ellipse

$$PT = \frac{a^2 - \alpha'^2}{\alpha'}, \quad MT = \sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2) + \left(\frac{a^2 - \alpha'^2}{\alpha'}\right)^2\right]}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}\alpha', \quad MR = \sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2) + \frac{b^4}{a^4}\alpha'^2\right]},$$

und für die Hyperbel

$$PT = \frac{\alpha'^2 - a^2}{a'}, \quad MT = \sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2 - a^2) + \left(\frac{\alpha'^2 - a^2}{\alpha'}\right)^2\right]}$$

$$PR = \frac{a^2}{b^2}\alpha', \quad MR = \sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2 - a^2) + \frac{b^4}{a^4}\alpha'^2\right]}.$$

## §. 153.

So elegant auch die Methoden seyn mögen, welche wir zur Führung der Tangenten bey den Curven vom zweyten Grade gezeigt haben, so glauben wir doch die synthetischen Auflösungen, welche die Alten von diesem Satze gegeben haben, nicht mit Stillschweigen übergehen zu dürfen, und wollen sie daher sogleich auseinandersetzen.

1) Nach dem Punct M in der Ellipse Fig. 45. führe man die beyden Leitstrahlen FM und F'M; man verlängere einen derselben, F'M z. B., um eine Größe MG, welche der FM gleich ist; man zieht dann FG, so wird die gerade MH, welche in der Mitte von FG auf derselben senkrecht ist, die Tangente des Punctes M seyn, weil sie nur diesen Punct mit der Curve gemein hat. In der That wird

man, wenn man auf dieser geraden irgend einen andern Punct N nimmt, und die geraden FN, F'N zieht

$$FN + NG > F'G$$

haben, welches darauf zurückkommt

$$F'N + FN > F'M + FM > II';$$

denn nach der Construction ist $MG = FM$, $NG = FN$; und da es leicht zu ersehen ist, daß bey allen innerhalb der Ellipse liegenden Puncten die Summe ihrer Entfernungen von jedem Brennpunct kleiner als die große Axe ist, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß der Punct N außerhalb der Ellipse liegt, weil die Summe der Leitstrahlen größer als die große Axe II' ist.

2) Wenn der gegebene Punct auf der Hyperbel Fig. 47. ist, so muß man den kleinern Leitstrahl PM auf den größern F'M, und nicht auf dessen Verlängerung tragen; führt man die Construction wie oben aus, so wird man für diesen Fall haben

$$F'N < F'G + NG < F'G + FN,$$

woraus folgt

$$F'N - FN < F'G < F'M - FM,$$

woraus zu ersehen ist, daß der Punct N nicht auf der Hyperbel ist. Er kann auch nicht innerhalb dieser Curve liegen; denn damit dieses geschehe, muß die Differenz der Leitstrahlen die große Axe übertreffen. In der That hat man, wenn F'm gezogen wird,

$$F'm - Fm = F'm + Mm - FM,$$

und da $F'm + Mm$ größer als F'M ist, so folgt

$$F'm - Fm > F'M - FM.$$

3) Wenn der Punct M auf einer Parabel Fig. 48. ist, so giebt es nur einen Leitstrahl; allein der andre wird durch die zur Axe IP paralelle QM ersetzt. Der Punct Q vertritt die Stelle des Punctes G, weil man $QM = FM$ hat. Betrachtet man endlich einen Punct N, welcher vor oder

nach dem Berührungspuncte liegt, so hat man zu gleicher Zeit QM und FN > ON; der Punct N ist also außerhalb der Curve.

Wenn man auf diese Constructionen den Calcul anwendet, so würde man die im vorhergehenden §. enthaltenen Resultate finden.

§. 154.

Die Betrachtung der Tangenten der Hyperbel führt auf eine sehr merkwürdige Eigenschaft, aus welcher erfolgt, daß, ob sich gleich ihr Lauf ins Unendliche ausdehnt, dennoch ein jeder ihrer Aeste immer zwischen den Seiten eines gewissen Winkels eingeschlossen bleiben, ohne sie jemahls erreichen zu können, wie man in Fig. 57. sieht, und sie führt folglich auf den Umstand, auf welchen wir im §. 112. aufmerksam gemacht haben. Diesen Umstand erkennt man, wenn man auf den Fortgang der Subtangente aufmerksam ist, indem der Berührungspunct M auf der Curve fortrückt, und sich vom Punct I entfernt, oder, welches einerley ist, je mehr die Abcisse OP zunimmt. Bezeichnet man OP durch x, so hat man (§. 152.) $PT = \frac{x^2 - a^2}{x}$, und da $OT = OP - PT$, so kommt

$$OT = x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2}{x}.$$

Man sieht aus diesem Resultat offenbar, daß OT desto mehr abnimmt, und der Punct T sich dem Punct O desto mehr nähert, je größer x wird, daß er ihm indessen niemahls erreichen kann, weil ein Bruch so lange nicht absolut Null werden kann, so lange sein Zähler es nicht ist; der Punct O muß also als eine Gränze betrachtet werden, gegen welche immer der Punct T durch den Fortgang der Abcissen zu gelangen strebt. Wir wollen nun die Aenderungen untersuchen, welche der Winkel MTP, der die Lage der Tangente in Rücksicht der Linie der Abcissen bestimmt, erleidet. Die trigonometrische Tangente dieses Winkels hat zum Ausdruck

$$\frac{MP}{PT} = \frac{bx}{a\sqrt{(x^2 - a^2)}} \text{ (§. 29.)},$$

und da sie, wenn man ihre Glieder durch x dividirt, diese Form annimmt $\frac{b}{a\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)}}$, so strebt sie offenbar desto mehr die Größe $\frac{b}{a}$ zu erreichen, je kleiner $\frac{a^2}{x^2}$ wird, das heißt, je mehr x zunimmt. Der Winkel MTP kann also nicht ins Unendliche zunehmen, und die Gränze, die er nicht erreichen kann, der er sich aber unaufhörlich nähert, ist der Winkel EOI, dessen trigonometrische Tangente $\frac{b}{a}$ ist; niemahls aber kann die Hyperbel dahin gelangen, die gerade Linie EO zu berühren, so weit man auch die eine und die andre verlängern mag.

Um den Winkel EOI zu construiren, muß man auf der Axe II′ eine Abcisse nach Belieben nehmen, etwa die Halbaxe, und da das rechtwinklichte Dreyeck EOI, EI = OI tang EOI giebt, so wird man haben

$$EI = OI \times \frac{b}{a} = b,$$

weil OI = a. Errichtet man nun aus den Punct I den Perpendikel EI = b, so wird die gerade OE, welche die Puncte O und E verbindet, die Gränze aller Tangenten des Theils IK der Hyprrbel seyn. Diese Gränze wird die Asymptote genannt. Es ist offenbar, daß noch eine zweyte Oe, unterhalb der Axe II′ liegende existirt, welche mit dieser Axe denselben Winkel wie die erste macht, und als Gränze der Tangenten des Zweiges Ik dient.

## §. 155.

Die Gleichung der Hyperbel wird vereinfacht, wenn man die Asymptoten für die Axen der Coordinaten nimmt. In der That wollen wir durch den Punct M zur Asympt... Oe eine neue Ordinate paralell führen, und $QO = t$, $QM = u$ setzen; der von der Axe der t, QO, und von der Axe der x, II', ein geschlossene Winkel EOI, wird offenbar zum Cosinus $\frac{OI}{OE}$, und zum Sinus $\frac{IE}{OE}$ haben; und da man

$$OI = a,\ IE = b,\ OE = \sqrt{(OI^2 + IB^2)}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

hat (§. 116.), so wird daraus erfolgen

$$m = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},\ n = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

Betrachten wir endlich die Axe der u, Oe, so werden wir finden

$$\cos eOI = \frac{OI}{Oe},\ \sin eOI = \frac{Ie}{Oe};$$

und da $Oe = OE$, $Ie = -IE$, so wird kommen

$$p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},\ q = \frac{-b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

und vermittelst der allgemeinen Formeln

$$x = mt + pu,\quad y = nt + qu$$

werden wir haben

$$x = \frac{a(t+u)}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},\ y = \frac{b(t-u)}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

so wird sie sich nach den Reductionen in

$$\frac{4tu}{a^2+b^2} = 1 \text{ oder } tu = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2)$$

verwandeln *).

Diese letztere Gleichung setzt die Eigenschaft, mit welcher die Asymptoten behaftet sind, in Evidenz; denn man zieht daraus

$$u = \frac{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}{t}, \text{ oder } QM = \frac{\frac{1}{4}OE^2}{QO},$$

woraus zu ersehen ist, daß die Ordinate QM desto mehr abnimmt, je mehr sich der Punct Q vom Puncte O entfernt, ohne jedoch jemahls Null zu werden.

Wenn die Hyperbel gleichseitig ist, so wird sich, da $a = b$, die durch $\frac{b}{a}$ ausgedrückte Tangente des Winkels EOI auf 1 reduciren; jede Asymptote macht alsdann mit der Axe II′ einen Winkel von 45°, und beyde Asymptote schließen folglich einen rechten ein. Die Gleichung $tu = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$, welche in diesen Falle $tu = \frac{1}{2}a^2$ wird, lehrt uns, daß das Product der Coordinaten t und u, der Hälfte des Quadrats der halben Axe OI gleich ist

Es ist beyläufig zu merken, daß wenn man durch den Punct I die geraden ID und Id respectiv zu Oe und OE paralell führt, hierdurch ein Rhombus gebildet wird, dessen Seiten ID und Id, in Rücksicht der Asymptoten, die Coor-

*) Man könnte die Gleichung der Hyperbel in Rücksicht der Asymptoten unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung der Linien vom zweyten Grade herleiten, wenn man in Erwägung zieht, daß man, wenn der Winkel der neuen Coordinaten unbestimmt gelassen wird, nach §. 117. vier willkührliche Größen hat, die man dergestalt wählen kann, daß die mit $t^2$, $u^2$, t und u behafteten Glieder verschwinden; dieses reducirt die Gleichung auf die Form $\alpha ut = \gamma$, allein man findet nur dann für m und n reelle Werthe, wenn $4AC < B^2$, d. h. bloß bey der Hyperbel.

dinaten des auf der Axe liegenden Punctes I seyn werden; man hat folglich

$$ID \times Id = ID^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

woraus man zieht

$$ID = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)},$$

und im Allgemeinen

$$QO \times QM = ID^2.$$

Im Falle die Hyperbel gleichseitig ist, wird der Rhombus Dd ein Quadrat, weil der Winkel DOd ein rechter ist.

Das Quadrat $ID^2$, welches dem vierten Theil der Summe der Quadrate der Halbaxen der Hyperbel gleich ist, haben die alten Meßkünstler mit dem Nahmen der Potenz der Hyperbel belegt.

## §. 156.

Es ist offenbar, daß, wenn man die Ordinaten PM und P′M′, in Rücksicht der Axe II′, so weit verlängert, bis sie die Asymptoten OE und Oe erreichen, die zwischen jedem Zweige und der dazu gehörigen Asymptote enthaltenen Theile MR und M′R′ einander gleich seyn werden. Dieselbe Eigenschaft findet auch bey einer jeden durch irgend einen Punct der Hyperbel geführten geraden Linie statt. Wenn man z. B. MN′ zieht, so wird man haben GM = G′N′, was für eine Lage auch MN′ haben mag. Um dieses zu beweisen, wollen wir zuvörderst in Erwägung ziehen, daß, weil

$$PR = \frac{bx}{a},$$

$$MR = PR - PM = \frac{b}{a}\left[x - \sqrt{(x^2 - a^2)}\right],$$

$$MR' = PR + PM' = \frac{b}{a}\left[x + \sqrt{(x^2 - a^2)}\right],$$

$$MR \times MR' = b^2.$$

Wir wollen endlich durch den Punct N′ die gerade SS′ parallell zu MM′ führen; die ähnlichen Dreyecke RMG, SN′G werden geben

$$GM : GN' = MR : N'S;$$

die ähnlichen Dreyecke G′N′S und R′MG′ geben

$$G'M : G'N' = MR' : N'S';$$

multiplicirt man diese beyden Proportionen nach der Ordnung, so kommt

$$GM \times G'M : GN' \times G'N' = MR \times MR' : N'S \times N'S';$$

und da man nach dem Vorhergehenden

$$MR \times MR' = b^2, \quad N'S \times N'S' = b^2$$

hat, so kann man daraus schließen,

$$GM \times G'M = GN' \times G'N'.$$

Setzt man statt G′M und G′N′ ihre Werthe G′N′ + MN′, GM + MN′, und macht man die Reductionen, welche sich in den angezeigten Multiplicationen darbiethen, so findet man endlich

$$GM \times MN' = G'N' \times MN', \text{ oder } GM = G'N'.$$

## §. 157.

Mit Hülfe der eben bewiesenen Eigenschaft der Hyperbel, kann man auf einer sehr einfachen Art die Hyperbel durch Puncte beschreiben, wenn man die Asymptoten und einen einzigen Punct M hat. Man ziehe durch diesen Punct eine große Anzahl gerader Linien, wie MN′, man nehme den zwischen dem Punct M und der nächsten Asymptote enthaltenen Theil GM, um ihn von G′ in N′ zu tragen, welches einen neuen Punct N′ der gesuchten Curve geben wird.

Wenn man die Asymptoten hat, so findet man die Richtung der Axe II′, wenn man den von ihnen eingeschlossenen Winkel in zwey gleiche Theile theilt, und da die Tangente des Winkels EOI das Verhältniß der Halbaxen a

und

und b giebt (§. 154.), so ist es leicht diese Größen zu bestimmen, sobald man einen Punct der Hyperbel kennt. Die Gleichung $PM^2 = \frac{b}{a}(OP^2 - a^2)$, giebt unmittelbar

$$a^2 = \frac{A^2 \times OP^2 - PM^2}{A^2},$$

wenn man die Größe $\frac{b}{a}$ durch A bezeichnet

§. 158.

Außer der Hyperbel, deren Aeste KIk, K′I′k′ sind, enthalten die Linien OS und OS′ noch eine andre Hyperbel HLh, H′L′h′, welche in den Winkeln, die diese geraden bilden, dergestalt beschrieben ist, daß die Zwergaxe II′ der ersten, die zweyte Axe der zweyten ist, welche letztere LL′, die zweyte Axe der ersten, zur Zwergaxe hat. Die Beziehung, welche diese beyden Curven zu einander haben, hat veranlaßt, daß man sie zugeordnete, **conjugirte Hyperbel** nennt; sie haben einerley Potenz, und folglich einerley Gleichung in Rücksicht der Asymptoten; bloß die Winkel dieser Linien, oder der Coordinaten, sind von einander verschieden.

§. 159.

Wir haben (§. 190.) gezeigt, wie man aus der Form der Gleichung des Kreises die Anzahl Puncte finden kann, welche ihn zu bestimmen erforderlich sind. Dieselben Betrachtungen lassen sich bey einer jeden Curve anbringen; und es ist offenbar, daß im Allgemeinen so viele Puncte erfordert werden, als die Gleichung zu bestimmende Coefficienten enthält. Die allgemeine Gleichung der Curven vom zweyten Grade

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F,$$

enthält, unter dieser Form angesetzt,

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e,$$

nur die fünf Coefficienten a, b, c, d und e; es werden daher fünf Puncte hinreichen, um die Curve vom zweyten Grade, welche sie vorstellt, besonders zu bestimmen. In der That wird man, wenn die Coordinaten dieser Puncte respectiv

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\ \beta''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha'''\\ \beta'''\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha''''\\ \beta''''\end{matrix}\right\}$$

sind, folgende fünf Gleichungen bilden

$$\begin{array}{llllll}
\beta^2 & + a\alpha\beta & + b\alpha^2 & + c\beta & + d\alpha & = e \\
\beta'^2 & + a\alpha'\beta' & + b\alpha'^2 & + c\beta' & + d\alpha' & = e \\
\beta''^2 & + a\alpha''\beta'' & + b\alpha''^2 & + c\beta'' & + d\alpha'' & = e \\
\beta'''^2 & + a\alpha'''\beta''' & + b\alpha'''^2 & + c\beta''' & + d\alpha''' & = e \\
\beta''''^2 & + a\alpha''''\beta'''' & + b\alpha''''^2 & + c\beta'''' & + d\alpha'''' & = e.
\end{array}$$

Da wir nur zum Zwecke haben, die Möglichkeit der Bestimmung der Buchstaben a, b, c, d, e, und die Anzahl der dazu erforderlichen Bedingungen zu zeigen, so wollen wir uns nicht dabey aufhalten, die Rechnungen, welche diese Operationen nach sich ziehen, zu zeigen, zu welchem Ende man das im §. 144. citirte Werk von Puissant zu Rathe ziehen kann, worin man von diesem Gegenstande, und dessen Anwendungen, die wichtigsten Auseinandersetzungen findet; wir wollen uns darauf einschränken, hier anzumerken, daß diese Gleichungen unter gewissen besondern Umständen widersprechend werden können. Wenn es sich z. B. ereignete, daß drey gegebene Puncte in einer geraden Linie wären, so würde es unmöglich seyn, eine Curve vom zweyten Grade durch diese Puncte zu legen, weil keine Curve dieses Grades mehr als zwey Puncte mit einer geraden Linie gemein haben kann.

Man sieht leicht ein, daß wenn die Curve der Art und Lage nach gegeben ist, weniger Bedingungen zu ihrer Bestimmung erfordert werden. Wenn man z. B. eine Ellipse bestimmen wollte, deren Mittelpunct und deren große Axe der Lage nach gegeben sind, so würde man nur zwey Puncte nöthig haben, weil die Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, die sich auf den gegenwärtigen Fall bezieht, nur zwey Coefficienten a, b enthält, welche von den Gleichungen

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2$$
$$a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2 = a^2b^2$$

abhängen würden.

## §. 160.

Wir haben im §. 96. gezeigt, wie die Gleichung vom zweyten Grade vermittelst eines Zirkelumkreises, und einer geraden Linie construirt werden kann; wir haben ferner §. 101. gezeigt, daß die beyden Wurzeln durch die beyden Durchschnitte, welche diese Linien mit einander gemein haben können, gegeben wären, und daß man auf diese Art die vorgelegte Gleichung als das Resultat der Elimination einer unbekannten aus zweyen Gleichungen mit zweyen unbestimmten betrachten muß, von denen die eine zur geraden Linie und die andre zum Kreis gehört. Wenn man diesen Gesichtspunct erweitert, so wird man ein Mittel haben, die Gleichungen von irgend einem beliebigen Grade zu construiren. In der That kann man, wenn man z. B. die Gleichung

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0$$

hat, sie so betrachten, als wäre sie das Resultat der Elimination einer unbekannten y, aus zweyen Gleichungen vom zweyten Grade, welche zu gleicher Zeit x und y enthalten, und folglich zu zweyen Curven gehören. Diese Gleichungen zu finden, ist eine unbestimmte Aufgabe, weil eine unendliche Menge Systeme von Gleichungen vorhanden seyn kann, welche die vorgelegte hervorbringen können; wir wollen daher eine willkührliche wählen. Es sey $x^2 = py$, so wird man haben

$$x^4 = p^2y^2,$$

und substituirt man in der vorgelegten Gleichung, so wird kommen

$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0$$

oder

$$y^2 - \frac{b^2}{p}y + \frac{c^3}{p^2}x - \frac{d^4}{p^2} = 0.$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese Gleichung zu einer Parabel gehört (§. 120.); und, um sie unter der einfachsten Form darzustellen, genügt es, das mit y behaftete Glied hinweg zu schaffen, welches geschieht wenn man $y = y' + \frac{b^2}{2p}$ setzt. Man hat nach dieser Substitution

$$y'^2 + \frac{c^3}{p^2}x - \frac{4d^4 + b^4}{4p^2} = 0,$$

ein Resultat, welches folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$y'^2 = \frac{c^3}{p^2}\left(\frac{b^4 + 4d^4}{4c^3} - x\right),$$

und welches zu erkennen giebt, daß die Parabel, zu welcher es gehört, die Größe $\frac{c^3}{p^2}$ zum Parameter hat, und daß die Abcissen, welche vom Scheitel an gerechnet werden, der Differenz zwischen der Größe $\frac{b^4 + 4d^4}{c^3}$ und den Ordinaten der ersten Parabel $x^2 = py$ gleich sind. In der That wird, wenn man auf die Axe AB der Abcissen Fig. 60., von der Seite der positiven Ordinaten, eine Distanz $A\alpha = \frac{b^2}{p^2}$ trägt, die zu AB paralell geführte $\alpha\beta$, die Axe seyn, von welcher aus die $y'$ getragen werden müssen. Der Scheitel der Parabel, von welcher $y'$ die Ordinate bezeichnet, correspondirt mit dem Puncte, in welchem man $y' = 0$ hat, welches geschieht, wenn $x = \frac{b^4 + 4d^4}{c^3}$; man wird daher $AD = \frac{b^4 + 4d^4}{c^3}$ setzen, und nachdem man aus dem Puncte D auf AB eine senkrechte D$\delta$ errichtet haben wird, wird der Punct $\delta$ der Scheitel der zweyten Parabel G$\delta$H seyn, von welcher dann $\delta\alpha$ die Axe ist; und da wir den Parameter kennen, so ist nichts leichter, als sie nach dem Verfahren des §. 129. durch Puncte zu construiren. Was die erste durch die Gleichung $x^2 = py$ gegebene Parabel EAF anbelangt, so hat sie offenbar ihren Scheitel im Anfangspunct der Coordinaten A, und zur Axe, die der y, AC. Nachdem sie construirt seyn wird, werden die Puncte M, M′, M″, M‴, in welchen sie die Parabel G$\delta$H begegnet, den Wurzeln der vorgelegten Gleichung gleiche Abcissen haben, weil die Werthe von x in diesen Puncten zugleich den beyden Gleichungen

$$x^2 = py$$
$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0,$$

aus welchen die vorgelegte erfolgt, ein Genüge leisten.

Um den allgemeinsten Fall anzuführen, haben wir die vorgelegte Gleichung und die Figur dergestalt gewählt, daß die beyden Curven sich in vier Puncten schneiden; indessen kann dieser Umstand nur so lange statt haben, als alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung reell sind. Wenn z. B. die Axe $\alpha\beta$ der Parabel G$\delta$H unterhalb AB fiele, welches sich zuträgt, wenn das Glied $b^2py$ das Zeichen + hätte, weil man alsdann $y = y' - \frac{b^2}{2p}$ setzen müßte, so würde es nur zwey Durchschnittspuncte geben, denn es kann offenbar der Zweig $\delta$H nicht mehr die Parabel EAF treffen; die Curve G$\delta$H würde sich sogar unter gewissen Umständen gänzlich unterhalb EAF befinden, und alsdann werden die Wurzeln der vorgelegten Gleichung imaginär seyn.

Man sieht ferner aus dieser Construction, so wie aus der Theorie der Gleichungen, daß die Gleichung vom vierten Grade nur eine gerade Anzahl reeller Wurzeln haben kann, weil sich die beyden Parabeln EAF und G$\delta$H nur entweder in zweyen, oder in vier Puncten schneiden können.

## §. 161.

Hieraus folgt auch, daß der Kreis und die gerade Linie, indem sie sich nur in zweyen Puncten schneiden können, auch nur solche Aufgaben auflösen können, welche sich auf Gleichungen vom zweyten Grade bringen lassen, und daß sie folglich nicht zur Auflösung derjenigen gebraucht werden können, welche diesen Grad übersteigen, so wie die im Alterthume sehr berühmten Aufgaben von der Verdopplung des Cubus und der Dreytheilung des Winkels.

Bey der ersten kommt es darauf an, die Seite eines Cubus zu finden, dessen Volumen doppelt so groß sey, als das eines andern gegebenen Cubus. Wenn a die Seite dieses ist, und x die des andern, so hat man diese Gleichung

$$x^3 = 2a^3 \text{ oder } x^3 - 2a^3 = 0.$$

Um sie mit der vorgelegten zu vergleichen, muß man sie auf den vierten Grad zu bringen suchen, indem man sie durch x multiplicirt, und man wird haben

$$x^4 - 2a^3x = 0;$$

vergleicht man sie mit $x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0$, so wird kommen

$$b = 0, \quad c^3 = -2a^3, \quad d = 0.$$

Die Gleichungen der Parabeln EAF, G$\delta$H, werden demnach seyn

$$x^2 = py, \quad y'^2 = \frac{2a^3}{p^2} x.$$

Diese Curven werden beyde durch den Anfangspunct A gehen, weil man sowohl bey der einen als bey der andern zu gleicher Zeit $x = o$, $y = o$, $y' = o$ hat; sie werden sich also darin schneiden, und dieser Durchschnitt wird $x = o$ geben, eine Wurzel, welche von dem Factor herrührt, welchen man eingeführt hat, um die zu construirende Gleichung auf den vierten Grad zu bringen. Die Figur 61, welche zu diesem Falle gehört, zeigt, daß man nur noch eine einzige reelle Wurzel AP erhalten kann; wir haben auch wirklich in den Anfangsgründen der Algebra gesehen, daß die Gleichung $x^3 - 2a^3 = o$, nicht mehr als eine einzige haben kann.

## §. 162.

Die Aufgabe von der Dreytheilung des Winkels hat zum Gegenstande, einen Winkel oder einen Bogen in drey gleiche Theile zu theilen, welches sich leicht verrichten ließe, wenn man aus der Chorde oder aus dem Sinus eines Bogens, die Chorde oder den Sinus seines Drittheils erhalten könnte. Diese Aufgabe ist nur ein besondrer Fall von der Vieltheilung der Winkel, die wir hier nicht auseinander setzen können, deren Basis man aber in der Einleitung zu meinem Lehrbegriff der Differential- und Integralrechnung findet; sie kann vermittelst der Formeln des §. 11. in eine Gleichung gebracht werden, welche geben

$$\cos 3A = \frac{4 \cos A^3 - 3R^2 \cos A}{R^2}.$$

Betrachtet man $\cos 3A$ als gegeben, und nimmt $\cos A$ für die unbekannte, so wird man, wenn $\cos 3A = a$, und $\cos A = x$ gesetzt wird, diese Gleichung erhalten:

$$x^3 - \tfrac{3}{4}R^2x - \tfrac{1}{4}R^2a = o,$$

welche, wenn sie mit $x$ multiplicirt, und mit der Gleichung

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = o$$

verglichen wird, alsdann giebt

$$b^2 = \tfrac{3}{4}R^2,\ c^3 = -\tfrac{1}{4}R^2 a,\ d^4 = 0.$$

Man wird auch hier einen Durchschnitt im Puncte A erhalten, welcher mit der Wurzel $x = 0$ correspondirt, und die drey andern Durchschnittspuncte werden die drey Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - \tfrac{3}{4}R^2 x - \tfrac{1}{4}R^2 a = 0$$

geben.

Es scheint beym ersten Anblick, daß man nur eine reelle Wurzel erhalten könnte, und daß man folglich nur auf eine einzige Art einen Bogen in drey gleiche Theile theilen kann; allein man sieht gleich, daß die obige Gleichung auf den irreductiblen Fall zurückkommt, und daß folglich alle ihre Wurzeln reell sind; betrachtet man sie endlich ein wenig aufmerksam, so wird man gleich sehen, daß drey Bogen vorhanden sind, welche der vorgelegten Gleichung ein Genüge thun, denn wenn die Bogen $3A$, $\pi + 3A$, $2\pi + 3A$, welche (§. 23) einerley Cosinus haben, durch 3 dividirt werden, so geben sie die Werthe

$$x = \cos A,\quad x = \cos(\tfrac{1}{3}\pi + A),\quad x = \cos(\tfrac{2}{3}\pi + A),$$

welche wesentlich unterschieden sind. Man kann auch keine andre haben, weil die Bogen $3\pi + 3A$, $4\pi + 3A$ ꝛc., welche noch mit A einerley Cosinus haben, durch 3 dividirt, auf die Bogen $\pi + A$, $\pi + \frac{1}{3}\pi + A$ ꝛc. führen, und weil überdies

$$\cos(\pi + A) = \cos A,$$

$$\cos(\pi + \tfrac{1}{3}\pi + A) = \cos(\tfrac{1}{3}\pi + A) \text{ ꝛc.}$$

## §. 163.

Ehe die Approximationsmethoden den Grad von Vollkommenheit erreicht hatten, auf welchem sie anjetzt gebracht sind, hielten sich die Geometer mehr an der Construction der Gleichungen, und bothen alle ihre Kräfte auf, diese Construction durch die einfachsten, oder durch die am leichtesten zu beschreibenden Curven zu bewerkstelligen. Auf diese Art gab Halley eine Methode, die Gleichungen vom dritten und vierten Grade vermittelst des Kreises und der Parabel zu construiren, und diese Methode hat vor der im §. 160. gegebenen darin einigen Vorzug, daß der Kreis, welcher die Stelle einer der Parabeln vertritt, sich durch eine stetige Bewegung construiren läßt; allein der seltne Gebrauch, den man jetzt von den Constructionen macht, überhebt uns einer genauen Auseinandersetzung derselben, und wir werden daher diese Anfangsgründe mit der Auseinandersetzung einer Methode schließen, welche mit dem Vortheil, sich an den Gleichungen von irgend einem beliebigen Grade zu halten zugleich den verbindet, die vermittelst der Theorie der Zusammensetzung der Gleichungen, auf einer analytischen Weise, erhaltenen Resultate darzustellen.

Um diese Begriffe festzusetzen, wollen wir annehmen, die zu construirende Gleichung sey bloß

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = 0,$$

wir werden

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

setzen. Da man in den Puncten, wo die durch die letzte Gleichung ausgedrückte Curve die Axe der Abcissen schneidet, $y = 0$ hat, so folgt, daß die Abcissen dieser Puncte die Wurzeln der vorgelegten Gleichung seyn werden. Die Aufgabe ist also darauf zurückgebracht, die Curve, worauf es hier ankommt, zu construiren, und dieses kann leicht geschehen, nachdem man die Gleichung derselben homogen gemacht hat, indem man darin die Potenzen der Einheit einführt (§. 67.). Man wird in der That erhalten

$$y = a + \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3},$$

ein Resultat, in welchem sich jedes Glied besonders durch

Proportionallinien construiren läßt (§. 64.). Wir wollen indessen hier ein Mittel geben, diese verschiedenen Operationen unter einander zu verbinden.

Man führe Fig. 63. die Axe AB der Abcissen; aus dem Anfangspunct A errichte man auf diese Axe die gerade AC senkrecht, welche die Axe der y seyn wird; und nachdem man auf der ersten den Theil AD = n genommen, und DE paralell zu AC geführt hat, trage man auf diese letztere die Theile

$$AF = a, \quad FG = b, \quad GH = c, \quad HI = d;$$

man ziehe dann IK paralell zu AB, verbinde die Punkte H und K durch eine gerade Linie, welche die auf AB zur Abcisse AP = x errichtete senkrechte PR in L schneiden wird; man führe dann ML paralell zu AB, um auf DE den Punct M zu bestimmen, den man mit G verbinden muß. Durch den Punct N, in welchen MG die PR schneidet, führe man ON paralell zu AB, und wenn man den Punct O mit dem Puncte F verbindet, so wird die gerade OF auf PR einen Punct Q von der Beschaffenheit geben, daß PQ = y.

In der That hat man durch die ähnlichen Dreyecke HKI und H′LH folgende Proportion

$$IK\,(n) : H'L\,(x) = IH\,(d) : HH' = \frac{dx}{n};$$

woraus folgt

$$GH' = GH + HH = c + \frac{dx}{n};$$

aus den Dreyecken H′MG und G′NG, folgt

$$MH'(n) : NG'(x) = GH'\left(c + \frac{dx}{n}\right) : GG' = \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2}$$

und folglich

$$FG' = FG + GG' = b + \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2};$$

endlich leitet man aus den Dreyecken G'OF, F'QF her

$$OG' \,(n) : QF' \,(x)$$

$$= FG' \left(b + \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2}\right) : FF' = \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3},$$

welches zum Endresultat giebt

$$PQ = AF' = AF + FF' = a + \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3}.$$

Man kann leicht das Vorhergehende auf den Fall ausdehnen, wo die vorgelegte Gleichung eine beliebige Anzahl Glieder hat; und wenn man eine hinreichende Anzahl Puncte gefunden haben wird, um den Lauf der Curve zu characterisiren, so wird man leicht die Anzahl der reellen Wurzeln erkennen, deren diese Gleichung fähig ist.

## §. 164.

Wenn der Lauf der Curve von der Art ist, wie ihm die Linie XEGILY Fig. 62. ausdrückt, so wird sie die Axe der Abcissen fünf Mahl schneiden, und folglich anzeigen, daß die Gleichung, von welcher sie hergeleitet ist, eine ähnliche Anzahl reeller Wurzeln hat; diese Gleichung kann von keinem niedrigern Grade als vom fünften seyn. Die zu construirende Gleichung wird also seyn

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.} = 0 \;(1),$$

und die der Curve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.}$$

Es ist offenbar, daß die Zahlenwerthe der Ordinate y nichts anders als die Resultate sind, welche man aus der vorgelegten Gleichung (1) erhält, wenn man der x, die mit den verschiedenen willkührlich gewählten Abrissen correspondirenden Werthe giebt. Die Curve XEGILY biethet also gleichsam die gleichgültigen in der Tabelle dar, in welcher diese Resultate eingeschrieben sind, nur hat sie den Vorzug, daß vermöge des Gesetzes der Stetigkeit, welches man bey den Linien besser als bey den Zahlen bemerkt, die Intervallen zwischen zweyen successiven Substitutionen sich mit mehrerer Leichtigkeit wahrnehmen lassen. Nachdem man z. B. die sehr nahe aneinander liegenden Ordinaten PP′, QQ′, RR′ berechnet, und ihre äußersten Puncte durch einen zusammenhängenden glatten Strich verbunden hat, so hat man ziemlich genau die dazwischen liegenden Ordinaten.

Wir bemerken 1) daß, indem die Gleichung der Curve nur lauter ganze und positive Potenzen von x enthält, jeder Werth dieser unbestimmten nur einen einzigen für y geben, welcher endlich und begränzt seyn wird, so lange es der von x ist, daß aber y unendliche oder unbegränzte Zunahmen erhalten kann, so lange x derselben fähig ist, und daß sich folglich die Curve von jeder Seite der Axe AC der y ins Unendliche erstrecken muß.

2) Der bloße Anblick der Figur zeigt, daß die Curve XEGILY nicht von einer Seite der Axe AB zur andern übergehen kann, ohne diese Axe zu schneiden, oder, analytisch zu reden, daß die Ordinate y nicht das Zeichen ändern kann, ohne vorher Null zu werden *); woraus folgt, daß **wenn zwey in der Gleichung (1) gemachte Substitutionen, zwey Resultate mit entgegengesetzten Zeichen geben, zwischen den beyden, in diesen Substitutionen eingeführten Werthen von x, nothwendigerweise eine reelle Wurzel enthalten seyn muß.**

---

*) Dies ist im gegenwärtigen Falle richtig, weil der Ausdruck für y ohne Nenner ist; denn wenn man $y = \frac{a}{x}$ hatte, so würde der Fortgang der Werthe $x = +1$, $x = 0$, $x = -1$, $y = +a$, $y = \frac{a}{0}$ oder unendlich, und $y = -a$ geben. Auf diese Art hängen die Aeste der Hyperbel zusammen.

3) Wenn man auf derselben Curve zwey auf einerley Seite der Axe AB liegende Puncte nimmt, so wird immer zwischen ihnen eine gerade Anzahl Durchschnittspuncte der Curve mit der Axe liegen. Man sieht auch wirklich zwey zwischen E und I, vier zwischen E und Y oder X und L; oder es wird gar keinen geben, so wie dieses zwischen P und I der Fall ist. Im Gegentheile wird man immer eine ungerade Anzahl Durchschnittspuncte haben, wenn die Puncte, welche man betrachtet, so wie X und E, X und I, X und Y ꝛc. auf verschiedenen Seiten liegen. Hieraus folgt dieser analytische Satz: **daß zwischen zweyen Werthen von x, welche durch ihre Substitution in der vorgelegten Gleichung zwey Resultate von einerley Zeichen geben, nur eine gerade Anzahl reeller Wurzeln enthalten seyn kann, und es würde eine ungerade Anzahl geben, wenn diese Resultate entgegengesetzte Zeichen haben.**

4) Endlich kann es sich zutragen, daß vermöge der Beziehung, welche die Coefficienten a, b, c, d, e, f ꝛc. zu einander haben, zwey auf einander folgende Durchschnittspuncte, indem sie sich unaufhörlich einander nähern, endlich zusammenfallen, und daß der Theil IKLMY, welcher dann die Form des punctirten Zuges ILY annimmt, nur die Axe AB berührt; in diesem Falle werden die beyden durch AK und AM ausgedrückten Wurzeln unter einander und der Abcisse AL′ gleich. Man sieht leicht, daß wenn die vorgelegte Gleichung keine reelle Wurzeln mehr hätte, die daraus hergeleitete Curve ihre Axe gar nicht mehr schneiden, und daß man folglich durch keine Substitution das Zeichen des ersten Theils dieser Gleichung ändern können würde. Anders würde es in dem Falle seyn, wo drey Durchschnitte zusamuen fielen. Die Curve würde wenigstens ein Mahl, es sey vor oder nachher, die Axe schnei-

den; und um sich hiervon zu überzeugen, braucht man bloß zu sehen, was von dieser Curve übrig bleiben würde, wenn die drey Puncte H, K und M, oder F, H und K zusammen fielen. Wenn man diese Betrachtungen fortsetzt, wird man finden, daß durch das Zusammenfallen einer geraden Anzahl Durchschnittspunkte, die aus der Gleichung (1) hergeleitete Curve, sich gänzlich auf einer Seite der Axe befinden kann, daß aber dieser Umstand niemahls statt haben kann, wenn die Anzahl der in einen einzigen Punkt zusammenfallenden Durchschnittspuncte ungerade ist; und man kann hieraus schließen, daß wenn eine Gleichung nur eine gerade Anzahl gleicher und reeller Wurzeln hat, es unmöglich ist, ihre Existenz durch irgend eine Substitution zu erkennen.

Um das Vorhergehende besser zu fassen, braucht man bloß die Figuren zu bilden, welche zu den verschiedenen untersuchten Fällen gehören; dieses biethet keine Schwierigkeit dar, und man wird, so zu sagen, den Ausdruck der in den Anfangsgründen der Algebra auseinandergesetzten Theorie der Gleichungen haben.

# Anhang,

welcher die ersten Gründe der Anwendung der Algebra auf die krummen Flächen, und auf die Curven mit gedoppelter Krümmung enthält.

**Bemerkung.** Ich glaube dem in dieser Art von Betrachtungen wenig geübten Leser hier anzeigen zu müssen, daß er in dem Ergänzungsbande der Geometrie die, zur Vollständigkeit des Folgenden, unentbehrlichen vorläufigen Begriffe finden wird.

## Gleichungen der Ebne und der geraden Linie.

### §. 165.

Die bequemste Art, die Lage irgend eines Punctes M im Raume Fig. 64. fest zu setzen, ist diese, ihn zuvörderst auf eine der Lage nach gegebene Ebne BAC zu projectiren, indem man auf diese Ebne die senkrechte MM′ herabläßt, und dann die Projection M′ auf zwey auf einander senkrechte Axen AB und AC, vermittelst der Coordinaten AP und PM′ zurück zu führen. Dieses kommt darauf hinaus, den Punct selbst auf drey auf einander senkrechte Ebnen BAC, BAD und DAC zurück zu führen; denn die Coordinaten AP und PM′, welche in der Ebne BAC liegen, stellen die Entfernungen MM‴ und MM″ des vorgelegten Punctes M von den beyden andern Ebnen DAC und BAD vor. Die geraden AB, AC, AD, in welcher sich je zwey der coordinirten Ebnen BAC, BAD, DAC schneiden, sind die Axen der Coordinaten; und man unterscheidet sie durch den

Buchstaben, welcher die ihnen paralelle Ordinate angiebt. Setzt man also $AP = x$, $PM' = y$, $MM' = z$, so wird die Linie AB die Axe der x, die Linie AC die der y, und die Linie AD die der z seyn.

Die coordinirten Ebnen selbst erhalten ähnliche Benennungen. Die Ebne BAC wird die der x und y genannt, weil sie die Coordinaten x und y enthält. Da die Projection $M''$ des Punctes M, auf der Ebne BAD, auf den beyden Axen AB und AD, vermittelst der Coordinaten $AP = x$ und $PM'' = mM' = z$ zurückgeführt wird, so kann man diese Ebne mit dem Nahmen der Ebne der x und z belegen. Da endlich die Projection $M'''$ des Punctes M, auf der Ebne DAC, vermittelst der Coordinaten $AR = PM' = y$ und $RM''' = M'M = z$, auf die Axen AC und AD zurückgeführt wird, so wird diese Ebne mit dem Nahmen der Ebne der y und z belegt werden.

Es ist hier zu bemerken 1) daß die Coordinaten y und z für alle Puncte der Axe der x, AB, zu gleicher Zeit Null sind; daß dieses ebenfalls bey x und z in Rücksicht der Axe der y, AC, und bey x und y in Rücksicht der Axe der z, BD der Fall ist.

2) Daß bey allen Puncten der Ebne BAC die Ordinate z Null ist, und daß sie in allen in irgend einer zu dieser ersten paralellen Ebne liegenden Puncten einen beständigen Werth hat; so daß die Gleichung $z = c$, wenn sie allein existirt, und man in Beziehung der beyden übrigen Coordinaten x und y keine andre Bestimmung hat, dergestalt betrachtet werden muß, als gäbe sie alle Puncte einer Ebne an, welche der BAC in einer der c gleichen Entfernung paralell ist. Man wird eben so sehen, daß y für alle Puncte der Ebne BAD Null ist, und daß die Gleichung der Ebne, welche man dieser ersten in einer Entfernung b paralell führt, $y = b$ seyn würde.

Wenn

Wenn man die beyden Gleichungen $z = c$ und $y = b$ zusammen nimmt, das heißt, nimmt man an, sie finden zu gleicher Zeit statt, so werden sie eine gerade zur Axe der $x$ paralelle, und durch den Punct der Ebne der $y$ und $z$ geführte Linie bezeichnen, dessen Coordinaten $c$ und $b$ sind; denn es ist leicht einzusehen, daß diese gerade als der Durchschnitt zweyer Ebnen betrachtet werden kann, welche respectiv den Ebnen BAC, BAD paralell sind.

Endlich wird in der Ebne DAC die Coordinate $x$ immer Null seyn, und $x = a$ wird die Gleichung der, in einem der $a$ gleichen Abstande, zur ersten paralell geführten Ebne seyn. Die drey Gleichungen $z = c$, $y = b$, $x = a$, werden zusammengenommen nur zu dem Puncte gehören können, welcher sich im Durchschnitt der drey Ebnen befindet, welche respectiv den Ebnen der Coordinaten paralell sind.

## §. 166.

Wir wollen nun untersuchen, was eine einzige Gleichung zwischen zweyen der drey unbestimmten Größen $x$, $y$ und $z$ bezeichnet, und wollen z. B. $z = Ax$ setzen. Wir werden zuvörderst sehen, daß diese Gleichung (§. 83.) zur geraden in der Ebne der $x$ und $z$, BAD Fig. 65. geführten Linie AN″ gehört, allein sie hat noch einen ausgedehntern Sinn; denn wenn man sich vorstellt, daß die Linie AN″ sich längs der Axe der $y$, AC zu sich selbst paralell bewegt, in welcher Lage sie auch die Bewegung unterbrechen mag, so wird die zu irgend einem auf der zu AC paralellen geraden PM genommenen Puncte M′ gehörige Ordinate $z$ oder M′m, der mit der Abcisse AP = RM′ in der Ebne BAD correspondirenden Ordinate Pm″ gleich seyn. Die gerade AN″ beschreibt durch die Bewegung, welche wir ihr beylegen, die durch die geraden AN″ und AC gehende Ebne N″AC; man wird also für alle Puncte dieser Ebne $z = Ax$ haben. Man zieht ähnliche Folgerungen für die andern coordinirten Ebnen, wenn man zwischen den unbestimmten, welche sie enthalten, Gleichungen bildet; allein es ist vortheilhafter, gleich zu einem allgemeinern Fall über zu gehen, und die Gleichung $z = Ax + By$ zu betrachten.

Setzt man darin $y = 0$, so kommt $z = Ax$, und wir können daraus herleiten, daß die in dieser letztern begriffene gerade $AN''$ alle Puncte enthält, welche die durch die Gleichung $z = Ax + By$ ausgedrückte Fläche, mit der Ebne der Coordinaten $BAD$, auf welcher $y$ immer Null ist, gemein hat, oder, welches auf eins hinaus kommt, daß sie der Durchschnitt dieser letztern mit der vorgelegten ist.

Setzt man $x = 0$, so erhält man $z = By$, eine Gleichung, welche zur geraden, durch den Anfangspunct $A$, in der Ebne $DAC$ geführten Linie $AN'''$ gehört, und welche der Durchschnitt dieser letztern mit der durch die Gleichung $z = Ax + By$ ausgedrückten Fläche ist.

Wenn man nun annimmt, daß sich die Linie $AN'''$ längs der Linie $AN''$ zu sich selbst paralell bewegt, so wird sie die Ebne $N'''AN''$ beschreiben, und wenn sie zu irgend einer Lage $m''M$ gelangt seyn wird, so wird der Theil $Mm$ der Ordinate $M'M$ gleich und paralell zu $Rm'''$ seyn, und man wird folglich haben

$$M'M = Pm'' + Rm''' = Ax + By = z;$$

woraus folgt, daß die Ebne $N'''AN''$, welche durch die Linien $AN''$ und $AN'''$ geht, deren Gleichungen

$$z = Ax, \quad z = By$$

sind, selbst zur Gleichung hat

$$z = Ax + By.$$

Wenn die vorgelegte Ebne, anstatt durch den Anfangspunct A zu gehen, sich in einer Lage G''EG''' befände, welche durch die den geraden AN'' und AN''' respectiv paralellen EG'' und EG''' bestimmt ist, so würde sie der N'''AN'' paralell seyn; und wenn man die Ordinate dieser so weit verlängert, bis sie die erstere erreicht, so würde man haben

$$M'L = M'M + ML = M'M + AE;$$

benennt man den Abstand AE mit D, und die Ordinate M'L mit z, so wird nach dem Vorhergehenden kommen

$$z = Ax + By + D.$$

Dieses ist die Gleichung einer in irgend einer Lage geführten Ebne; es ist leicht einzusehen, daß sie die allgemeine Gleichung vom ersten Grade mit dreyen unbestimmten Größen ausdrückt, denn diese letztere kann nur von dieser Form seyn $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = o$; und wenn man sie durch $\gamma$ dividirt, so kommt sie auf die erste zurück, wenn man

$$-\frac{\alpha}{\gamma} = A, \quad -\frac{\beta}{\gamma} = B, \quad -\frac{\delta}{\gamma} = D$$

setzt.

Man sieht also, daß der Coefficient $\gamma$ zur Allgemeinheit der Gleichung nichts beyträgt; ich werde ihn dessen ungeachtet beybehalten, um die Formeln mehr symetrisch zu erhalten, und werde daher die Gleichung irgend einer Ebne durch

$$Ax + By + Cz + D = o$$

ausdrücken; allein man muß sich erinnern, daß man in allen Resultaten eine der beständigen Größen der Einheit gleich setzen, oder aus besondern Bedingungen bestimmen können wird.

§. 167.

Setzt man in der Gleichung dieser Ebne successiv x, y und z gleich Null, so wird man finden, daß sie die der y und z in einer Linie schneiden wird, deren Gleichung $Ay + Cz + D = 0$ ist, daß sie die der x und z in einer Linie schneiden wird, deren Gleichung $Bx + Cz + D = 0$, und endlich die der x und y in einer Linie, deren Gleichung $Ax + Cy + D = 0$ ist.

Da die Ausdehnung der Ebnen unbegränzt ist, so muß man sich denken, daß die Ebne G'''EG'' rückwärts der coordinirten Ebnen BAD, DAC verlängert sey; sie wird alsdann die Ebne BAC treffen und unterwärts gehen. Alle diese Umstände lassen sich aus ihrer Gleichung abnehmen, wenn man in Erwägung zieht, daß jede der unbestimmten x, y und z sowohl positiv als negativ genommen werden muß, und daß, wenn die Theile AB, AC und AD Fig. 64. der Axen der Coordinaten mit den positiven Werthen dieser Größen übereinstimmen, die entgegengesetzten Theile Ab, Ac und Ad mit den negativen übereinstimmen werden. Dieses läßt sich unmittelbar aus dem Lauf der in den Ebnen BAC, BAD und CAD liegenden Linien beweisen; man würde ferner hierzu gelangen, wenn man jede dieser Ebnen dergestalt zu sich selbst paralell trüge, daß die darauf senkrechten negativen Ordinaten positiv würden, und man könnte alsdann auf diese Art weiter schließen, wie wir bey den Linien (§. 72.) gethan haben.

Hieraus folgt, daß man vermittelst der Zeichen, mit welchen die Coordinaten behaftet sind, genau unterscheiden kann, in welchem der acht körperlichen Winkel, welche die coordinirten Ebnen um den Punct A bilden, ein gegebener Punct zu finden ist; man braucht bloß in Erwägung zu ziehen, daß man, wenn

$+x, +y, +z$ im Winkel ABCD gesetzt wird, alsdann hat
$+x, +y, -z$ im Winkel ABCd
$+x, -y, +z$ im Winkel ABDc
$-x, +y, +z$ im Winkel ACDb
$+x, -y, -z$ im Winkel ABcd
$-x, -y, +z$ im Winkel ADbc
$-x, +y, -z$ im Winkel ACbd
$-x, -y, -z$ im Winkel Abcd

## §. 168.

Eine gerade Linie ist gegeben, so oft man zwey Ebnen kennt, welche sie enthalten, und deren Durchschnitt sie ist, weil die Coordinaten ihrer Puncte den Gleichungen dieser Ebnen gemein sind. Es seyen also

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \quad , \quad . \quad , \quad (2)$$

die Gleichungen dieser Ebnen; betrachtet man nun die unbestimmten x, y und z, als hätten sie in beyden Gleichungen einerley Werth, so würde daraus nur eine erfolgen, welche man willkührlich wählen kann, und die beyden andern, welche folglich nach der ersten berechnet sind, werden die Lage der verschiedenen Puncte der vorgelegten geraden Linie zu erkennen geben.

Die Gleichungen (1) und (2) sind nicht die einzigen, welche die vorgelegte gerade Linie darstellen können; denn sie befindet sich in einer Unendlichkeit verschiedener Ebnen; indessen wählt man gewöhnlich unter allen Gleichungen, welche sie haben kann, diejenigen, welche nur zwey der Coordinaten x, y und z enthalten.

Eliminirt man successiv x, y und z aus den Gleichungen (1) und (2), so wird man folgende drey Gleichungen erhalten:

$$(AB' - A'B)\,y - (CA' - C'A)\,z + AD' - A'D = 0$$
$$(BC' - B'C)\,z - (AB' - A'B)\,x + BD' - B'D = 0$$
$$(CA' - C'A)\,x - (BC' - B'C)\,y + CD' - C'D = 0,$$

welche sich in

$$\gamma y - \beta z + \delta = 0 \quad . \; . \; . \quad (3)$$
$$\alpha z - \gamma x + \varepsilon = 0 \quad . \; . \; . \quad (4)$$
$$\beta x - \alpha y + \zeta = 0 \quad . \; . \; . \quad (5)$$

verwandeln, wenn man zur Abkürzung

$$AB' - A'B = \gamma, \quad CA' - C'A = \beta, \quad BC' - B'C = \alpha$$
$$AD' - A'D = \delta, \quad BD' - B'D = \varepsilon, \quad CD' - C'D = \zeta$$

setzt. Zwey beliebige dieser Gleichungen sind hinreichend, die Stelle der Gleichungen (1) und (2) zu vertreten, und enthalten unausschließlich die dritte. In der That wird man, wenn man die Gleichung (3) durch $\alpha$, die Gleichung (4) durch $\beta$, die Gleichung (5) durch $\gamma$ multiplicirt, und die Producte zusammennimmt

$$\alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\zeta = 0$$

finden; ein Resultat, welches die Substitution der Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ und $\zeta$ identisch macht, oder welches die Bedingung ausdrücken wird, welche diese Größen erfüllen müssen, damit die Gleichungen (3), (4) und (5), welche à priori gegeben sind, zu gleicher Zeit zur geraden Linie gehören können.

Die Gleichung (3), welche die Beziehung enthält, die die Coordinaten y und z für alle Puncte der vorgelegten geraden zu einander haben müssen, gehört zum ganzen der Projectionen dieser Puncte auf der Ebne der y und z, und ist folglich die Gleichung der Projection der vorgelegten geraden Linie auf dieser Ebne. Man sieht eben so, daß die Gleichung (4) zur Projection dieser geraden auf der Ebne der x und z gehört; und endlich, daß die Gleichung (5) die ihrer Projection auf der Ebne der x und y ist. Wenn irgend zwey dieser Projectionen gegeben sind, so ist die gerade gänzlich bestimmt; dieses ist aus der vorhergehenden Analysis offenbar, und weil die vorgelegte gerade nichts anders, als der Durchschnitt irgend zweyer der projectirten Ebnen ist (Ergänz. Band §. 5.), deren Gleichung mit der der Projection, über welcher sie erhaben sind, einerley ist (§. 166.).

## §. 169.

Da die allgemeine Gleichung der Ebne nur drey beständige Größen enthalten muß, so ist auch eine gleiche Anzahl Bedingungen hinreichend, sie besonders zu bestimmen. Wir wollen nach einander diejenigen Bedingungen aufsuchen, welche sich am häufigsten darbiethen, und wir werden zugleich die den in Rücksicht der geraden Linien ähnlichen Aufgaben abhandeln.

Wir wollen uns zuvörderst vorlegen, eine Ebne durch drey Puncte gehen zu lassen, deren Coordinaten

$$x', y', z', \quad x'', y'', z'', \quad x''', y''', z'''$$

sind; wir werden dann in der allgemeinen Gleichung der Ebne

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

successiv setzen

$$x', x'', x''' \text{ anstatt } x$$
$$y', y'', y''' \text{ anstatt } y$$
$$z', z'', z''' \text{ anstatt } z$$

und es werden folgende drey Gleichungen kommen

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0,$$

vermittelst welcher man die Größen $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ bestimmen kann, und man wird haben

$$\frac{A}{D}=\frac{z'(y''-y''')-z''(y'-y''')+z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{B}{D}=\frac{x'(z''-z''')-x''(z'-z''')+x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{C}{D}=\frac{y'(x''-x''')-y''(x'-x''')+y'''(x'-x'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß man, wenn man die Gleichungen der Projectionen einer geraden bestimmen wollte, welche durch zwey gegebene Puncte geht, auf eine analoge Art dazu gelangen würde, indem man in die allgemeinen Gleichungen

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

die Coordinaten dieser Puncte substituirt, und man wird auf diese Art finden

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'),$$

$$y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z') \text{ (§. 84.)}.$$

## §. 170.

Um zu erkennen, ob zwey gegebene Linien in einerley Ebne liegen, oder, welches auf eins hinaus kommt, ob sie einander schneiden, muß man untersuchen, ob die unbestimmten x, y und z den vier Gleichungen der Projectionen dieser geraden gemein seyn können (Erg Band §. 19.). Es ist offenbar, daß, wenn man x, y und z eliminirt, eine Gleichung bleibt, die die Bedingung ausdrücken wird, ohne welche die Gleichungen der vorgelegten geraden Linien nicht für denselben Punct statt haben könnten. Wir wollen die Gleichungen dieser geraden durch

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\}$$

ausdrücken; wir ziehen daraus

$$az + \alpha = a'z + \alpha', \quad bz + \beta = b'z + \beta',$$

und wenn man z eliminirt, so kommt

$$(\alpha' - \alpha)(b' - b) - (\beta' - \beta)(a' - a) = 0.$$

## §. 171.

Zwey zu einander paralelle Ebnen haben ihre Durchschnitte mit jeder der coordinirten Ebnen respectiv paralell zu einander (Erg. Band §. 15.); wenn aber die Gleichungen dieser beyden Ebnen durch

$$Ax + By + Cz + D = 0, \; A'x + B'y + C'z + D = 0$$

vorgestellt sind, so werden ihre respective gemeinschaftliche Durchschnitte mit der Ebne der x und z, und der y und z zu Gleichungen haben

$$Ax + Cz + D = 0, \quad A'x + C'z + D' = 0$$

$$By + Cz + D = 0, \quad B'y + C'z + D' = 0,$$

und es werden je zwey und zwey derselben nur dann paralell seyn, wenn man haben wird

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}, \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'} \text{ (§. 85.)}$$

Zieht man aus diesen letztern die Werthe von $A'$ und $B'$, so wird man zur Gleichung der zur ersten paralellen Ebne haben

$$\frac{C'}{C}(Ax + By + Cz) + D' = 0.$$

In diesem Resultat bleibt noch $D'$ zu bestimmen; nimmt man nun an, daß die gesuchte Ebne durch einen Punct gehen muß, dessen Coordinaten $x'$, $y'$ und $z'$ sind, so wird man haben

$$\frac{C'}{C}(Ax' + By' + Cz') + D' = 0;$$

zieht man diese Gleichung von der ersten ab, so wird $D'$ veschwinden, und wenn man dann durch $\frac{C'}{C}$ dividirt, wird kommen

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

Es ist hier zu merken, daß, wenn man A, B, C als beliebige Größen betrachtet, die obige Gleichung allen Ebnen, welche durch einen gegebenen Punct gehen, gemein seyn wird.

Da zwey gerade Linien zu einander paralell sind, wenn ihre Projectionen auf jeder der coordinirten Ebnen respectiv paralell sind (Erg. Band §. 20.), so werden ihre Gleichungen in diesem Falle von der Form

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = az + \alpha' \\ y = bz + \beta' \end{array}\right\}$$

seyn.

Wenn die zweyte durch einen Punct gehen muß, dessen Coordinaten $x'$, $y'$ und $z'$ sind, so wird man zur Bestimmung von $\alpha'$ und $\beta'$ diese Gleichungen haben

$$x' = az' + \alpha' \text{ und } y' = bz' + \beta',$$

woraus man zieht, wenn man wie bisher verfährt

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

§. 172.

Um die Gleichung der Ebne zu finden, welche auf einer gegebenen geraden senkrecht ist, muß man sich erinnern, daß die gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser Ebne mit jeder der coordinirten Ebnen, auf den Projectionen der gegebenen geraden senkrecht sind (Erg. Band §. 32.). Es seyen $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ die Gleichungen dieser geraden, und $Ax + By + Cz + D = 0$ die der gesuchten Ebne; die gemeinschaftlichen Durchschnitte auf der Ebne der x und z, und der y und z werden durch

$$Ax + Cz + D = 0 \text{ oder } x = -\frac{Cz}{A} - \frac{D}{A}$$

$$By + Cz + D = 0 \text{ oder } y = -\frac{Cz}{B} - \frac{D}{B}$$

ausgedrückt seyn, und damit diese geraden auf den Projectionen der gegebenen geraden senkrecht seyen, muß man haben

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C} \text{ (§. 86.)}.$$

Substituirt man die aus diesen Gleichungen gezogenen Werthe von A und B in die der gesuchten Ebne, so wird man haben

$$C(ax + by + z) + D = 0;$$

und wenn diese Ebne durch den Punct gehen muß, dessen Coordinaten $x'$, $y'$ und $z'$ sind, so wird ihre Gleichung werden

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0.$$

Wenn die Gleichung der Ebne gegeben wäre, und man suchte die der auf ihr senkrechten geraden, so müßte man statt a und b ihre obigen Werthe setzen, und es würde kommen

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z')$$

für die Gleichung der geraden, welche auf der durch $Ax + By + Cz + D$ ausgedrückten Ebne senkrecht ist, und überdies durch den Punct geht, dessen Coordinaten $x'$, $y'$ und $z'$ sind.

## §. 173.

Der Abstand des Punctes M Fig. 64., dessen Coordinaten x, y und z sind, vom Anfangspunct A, hat zum Ausdruck $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ (Erg. Band §. 24.). Dieses führt uns natürlich auf die Gleichung der Kugelfläche; denn da alle ihre Puncte vom Mittelpuncte gleich weit entfernt seyn müssen, so wird, wenn man den Mittelpunct selbst für den Anfangspunct der Coordinaten nimmt, und den Halbmesser durch r ausdrückt, die Gleichung

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ für jeden beliebigen Punct der vorgelegten Fläche statt haben.

Wenn die Coordinaten des Mittelpunctes $x'$, $y'$ und $z'$ wären, so wird man haben

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2;$$

denn wenn m diesen Punct bezeichnet, und man $PO = pm'$, $M'N = m'm$ nimmt, so werden die rechtwinklichten Dreyecke $m'OM'$ und $mNM$ geben

$$m'M'^2 = m'O^2 + M'O^2, \quad mM^2 = mN^2 + MN^2;$$

da aber $m'O = x - x'$, $M'O = y - y'$, $MN = z - z'$, $mN = m'M'$, so wird der Abstand der beyden Puncte m und M zum Ausdruck haben

$$\sqrt{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]},$$

§. 174.

Das Vorhergehende führt uns auf eine einfache Art zum Ausdruck des Cosinus des Winkels, welchen die beyden gegebenen geraden mit einander einschließen. Es seyen

$$\left.\begin{array}{l} x - x' = a(z - z') \\ y - y' = b(z - z') \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - x' = a'(z - z') \\ y - y' = b'(z - z') \end{array}\right\}$$

die Gleichungen der Projectionen dieser geraden, welche sich in einem Puncte schneiden, dessen Coordinaten $x'$, $y'$ und $z'$ sind; stellt man sich nun vor, daß sie sich paralell zu sich selbst bewegen, bis ihr Durchschnittspunct in den Anfangspunct fällt, so wird sich ihr Winkel nicht ändern, und die obigen Gleichungen werden sich auf

$$\left.\begin{array}{l} x = az \\ y = bz \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = a'z \\ y = b'z \end{array}\right\}$$

reduciren.

Wir wollen uns nun eine Kugel vorstellen, welche ihren Mittelpunct im Anfangspunct hat, und deren Halbmesser durch r ausgedrückt sey; der Abstand der Puncte, in welchen ihre Fläche jede der Seiten des gesuchten Winkels schneiden wird, wird offenbar die Chorde dieses Winkels seyn. Man wird die Coordinaten des Durchschnittspunctes der ersten geraden mit der Kugelfläche finden, wenn man vermittelst der Gleichung dieser geraden, und der der Kugel, x, y und z bestimmt; man wird auf diese Art haben

$$x = \frac{ar}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}, \quad y = \frac{br}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}},$$

$$z = \frac{r}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}};$$

benennen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunctes der zweyten geraden mit der Kugelfläche, mit $x'$, $y'$, $z'$, so wird man eben so haben

$$x = \frac{a'r}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}, \quad y = \frac{b'r}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}},$$

$$z = \frac{r}{\sqrt{(1 + a'^2 + b'^2)}}.$$

Der Ausdruck für das Quadrat des Abstandes dieses Punctes vom Vorhergehenden wird seyn

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

setzt man darin statt

$$x - x', \quad y - y', \quad z - z',$$

ihre Werthe, so wird man nach den Reductionen finden

$$r\left[2 - \frac{2(1 + aa' + bb')}{\sqrt{[(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)]}}\right];$$

da aber bekanntlich die Chorde irgend eines Winkels V, dem Producte aus dem Sinus Versus in den Durchmesser gleich ist, so wird man für den Werth dieses Quadrats $2(1 - \cos V) = 2 - 2\cos V$ erhalten, und wenn man diesen mit dem oben gefundenen Ausdruck vergleicht, in welchem man $r = 1$ setzt, so wird kommen

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{[(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)]}}.$$

Es ist leicht daraus herzuleiten

$$\sin V = \frac{\sqrt{[(a'b - ab')^2 + (a' - a)^2 + (b - b')^2]}}{\sqrt{[(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)]}}.$$

Damit die beyden vorgelegten geraden senkrecht seyen, muß man $\cos V = 0$ haben, und folglich $1 + aa' + bb' = 0$.

## §. 175.

Der Cosinus des Winkels, welchen irgend zwey Ebnen mit einander einschließen, läßt sich unmittelbar aus dem eben gefundenen Ausdruck herleiten; denn dieser Winkel ist demjenigen gleich, welchen zwey aus irgend einem Punct des gemeinschaftlichen Durchschnitts der vorgelegten Ebnen, in jeder dieser Ebnen auf diesen Durchschnitt, gezogene senkrechte mit einander einschließen (Erg. Band §. 46.). Wir wollen die Gleichungen dieser Ebnen durch

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad Ax' + By' + Cz' + D' = 0$$

bezeichnen; denkt man sich nun, daß sie sich paralell zu sich selbst bewegen, bis sie in den Anfangspunct der Coordinaten anlangen, so wird ihr Winkel unverändert bleiben, und ihre Gleichungen werden sich auf

$$Ax + By + Cz = 0, \quad Ax' + By' + Cz = 0$$

reduciren; die der geraden, welche man auf jede derselben durch diesen Punct senkrecht führt, werden seyn (§. 172.)

$$x = \frac{A}{C}z, \quad x = \frac{A'}{C'}z,$$

$$y = \frac{B}{C}z, \quad y = \frac{B'}{C'}z;$$

substituirt man in den Ausdruck für $\cos V$, statt $a$ und $b$, $a'$ und $b'$, die Werthe, welche diese Gleichungen geben, so wird kommen

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Wenn eine der vorgelegten Ebnen, die zweyte z. B., die der $x$ und $y$ wäre, für welche man immer $x = 0$ hat, so würden offenbar bey dieser Annahme $A'$ und $B'$ Null werden, und $\cos V$ wird sich

$$\frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$$

reduciren. Man findet eben so, daß der Cosinus des von der ersten vorgelegten Ebne und der der $x$ und $z$ eingeschlossenen Winkels, für welche man $y = 0$, $A' = 0$, $C' = 0$ hat, alsdann seyn wird

$$\frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}};$$

und daß der Cosinus des Winkels derselben Ebne mit der der $y$ und $z$, für welche man $x = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$ hat

$$\frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$$

seyn wird.

In dem Falle, wo beyde vorgelegte Ebnen auf einander senkrecht sind, wüde man $\cos V = 0$, und folglich $AA' + BB' + CC' = 0$ haben.

## §. 176.

Die Flächen lassen sich eben so wie die Linien nach dem Grade ihrer Gleichungen in Ordnungen abtheilen; die Ebne ist von der ersten Ordnung, weil ihre Gleichung nur vom ersten Grade ist. Die Flächen vom zweyten Grade sind alle in folgender Gleichung begriffene

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ + 2Gx + 2Hy + 2Kz \end{array}\right\} = L^2,$$

welche die allgemeinste ist, die man im zweyten Grade mit dreyen unbestimmten Größen $x$, $y$ und $z$ bilden kann.

Wenn man diese Gleichung nach einem Buchstaben, z. B. nach $z$, auflöst, so wird man finden

$$z = -\frac{Ex + Fy + K}{C} \pm$$

$$\frac{1}{C} \sqrt{[(K^2+CL) + 2(FK-CH)y + 2(EK-CG)^2 x + 2(F^2-BC)y^2 + 2(EF-CD)xy + (E^2-AC)x^2]}.$$

Dieses Resultat zeigt, daß zu einem und demselben Punct der Ebne der x und y zwey Puncte der vorgelegten Fläche übereinstimmen, und daß folglich jeder der durch die Substitution aller möglichen Werthe von x und y entspringende Werth von z einen Theil der Fläche bildet, welcher in Rücksicht der ganzen Fläche eben das ist, was die Theile einer Curve in Rücksicht der Curve sind; man giebt diesen Theilen den Nahmen der Streifen.

Es ist leicht einzusehen, daß der zu dem Werthe von z gehörige Theil die Ordinate einer Ebne ausdrückt, welche die Fläche in zwey symetrische Theile theilt; denn wenn man die Ordinaten außerhalb dieser Ebne annähme, indem man

$$z + \frac{Ex + Fy + K}{C} = u$$

setzte, so würde die neue Ordinate u zwey gleiche Werthe, einen positiven und einen negativen haben Die Ebne, wowovon hier geredet wird, ist also in Betreff der Flächen vom zweyten Grade eben das, was der Durchmesser bey den Curven vom zweyten Grade ist.

Man könnte sich wohl schwerlich einen Begriff von der Form machen, die eine Fläche, von der man die Gleichung hat, annehmen muß, wenn man nur abgesonderte Puncte betrachtet; allein man kann sich statt dessen eine Menge Abschnitte dieser Fläche durch Ebnen vorstellen, welche man mehrerer Leichtigkeit wegen zu den coordinirten Ebnen paralell annehmen kann; wenn der Lauf dieser verschiedenen Curven bekannt ist, so giebt ihre Stetigkeit die Form der vorgelegten Fläche an.

Da alle Puncte einer zur Ebne der x und y in einer

durch

durch a bezeichneten Entfernung paralell geführten Ebne in der Gleichung $z = a$ begriffen sind, so verwandelt sich die allgemeine Gleichung der Flächen vom zweyten Grade, wenn man darin diesen Werth substituirt, in

$$\left.\begin{matrix} Ax^2 + By^2 + 2Dxy \\ + 2(Ea + G)x + 2(Fa + H)y \end{matrix}\right\} = L^2 - 2Ka - Ca^2.$$

Diese wird die Beziehung ausdrücken, welche die Coordinaten der Ebne der x und y in allen in einer Entfernung a von dieser Ebne abstehenden Puncten zu einander haben und wird folglich auf der Ebne der x und y zur Projection der Curve gehören, in welcher die Ebne, deren Gleichung $z = a$ ist, die Fläche vom zweyten Grade begegnet; und da diese Ebne der der x und y paralell ist, so wird offenbar der auf der Fläche selbst gemachte Schnitt von seiner Projection auf der Ebne der x und y nicht unterschieden seyn.

Nimmt man für a verschiedene Werthe, so erhält man die verschiedenen zur Ebne der x und y paralellen Schnitte; setzt man $a = 0$, so wird die hieraus entspringende Gleichung

$$\left.\begin{matrix} Ax^2 + By^2 + 2Dxy \\ + 2Gx + 2Fy \end{matrix}\right\} = L^2$$

die Curve vom zweyten Grade geben, in welcher die Fläche die Ebne der x und y begegnet. Man würde auf eben die Art die Gleichungen der zur Ebne der x und z, und zu der der y und z paralellen Schnitte finden.

Man sieht leicht ein, und man hat überdies schon bey dem Beyspiel auf der Kugel (§. 173.) gesehen, daß die Flächen, je nachdem sie auf eine mehr oder weniger symetrische Art gegen die Axen der Coordinaten gelegt sind, auch mehr oder weniger verwickeltere Gleichungen haben, und daß man folglich, um die Analysis der verschiedenen Arten von Flächen zu machen, welche die allgemeine Gleichung der Flächen vom zweyten Grade darbiethen kann, sie zuvörderst in Glieder zerlegen muß, welche nur von der besondern Lage der Axen der Coordinaten abhängen, welches immer geschehen kann, es sey daß man die Wurzelgröße auf eine ähnliche Art untersucht, wie wir im §. 107 — 114. bey den Linien vom zweyten Grade gethan haben, oder indem man die allgemeinen Formeln zur Umformung der Coordinaten im Raume construirt, und wie §. 118 — 120. die Größen in Beziehung der Lage der Axen anbringt, um die allgemeine Gleichung so viel als möglich zu vereinfachen. Man kann über diese Auseinandersetzungen, welche die Gränzen der Anfangsgründe übersteigen, das fünfte Capitel des ersten Theils meines Lehrbegriffs der Differential- und Integralrechnung zu Rathe ziehen.

## §. 177.

Ich will bloß noch anmerken, daß man aus §. 174. die Gleichung des geraden Kegels ziehen kann, welcher in Rücksicht der coordinirten Ebnen jede beliebige Lage haben kann.

Denn da der gerade Kegel durch die Bewegung einer geraden Linie entsteht, welche sich um eine andre, mit welcher sie einen beständigen Winkel macht, herum bewegt, so wird, wenn man die Coordinaten des Scheitels durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet, wenn man für die feste gerade, oder für die Axe des Kegels die Gleichungen

$$x - \alpha = a\,(z - \gamma)$$
$$y - \beta = b\,(z - \gamma),$$

und für die bewegliche gerade, oder für die Seite des Kegels, die Gleichungen

$$(x - \alpha) = a'\,(z - \gamma)$$
$$(y - \beta) = b'\,(z - \gamma)$$

nimmt, der Cosinus des Winkels dieser beyden geraden seyn

$$\frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)\,(1 + a'^2 + b'^2)}};$$

da er beständig seyn muß, so wollen wir ihn durch e bezeichnen, und man wird bemerken, daß a und b, indem sie zur Axe gehören, beständige Größen ausdrücken, und daß

$$a' = \frac{(x - \alpha)}{z - \gamma}, \quad b' = \frac{y - \beta}{z - \gamma}.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird man die Gleichung

$$\frac{1 + a\left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma}\right) + b\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right)}{\sqrt{\left\{(1 + a^2 + b^3)\left[1 + \left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma}\right)^2 + \left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right)^2\right]\right\}}} = c,$$

bilden, welche sich leicht auf diese reducirt

$$\frac{a(x - \alpha) + b(y - \beta) + (z - \gamma)}{m\sqrt{[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2]}} = c,$$

wenn man zur Abkürzung $\sqrt{(1 + a^2 + b^2)} = m$ setzt.

Wenn man den Scheitel der Coordinaten in den Anfangspunct verlegt, so wird man haben

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

und

$$\frac{ax + by + z}{m\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = c,$$

Läßt man die Axe des Kegels mit der Axe der z zusammen fallen, so kommt $a = 0$, $b = 0$, $m = 1$, weil man auf dieser Axe $y = 0$, $x = 0$ hat, was auch z seyn mag; und die obige Gleichung reducirt sich auf

$$\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = c,$$

aus welcher man durch Erhebung zum Quadrat

$$z^2(1 - c^2) = c^2(x^2 + y^2).$$

erhält. Setzt man in diese Gleichung $z = n$, so wird sie

$$n^2(1 - c^2) = c^2(x^2 + y^2),$$

eine Gleichung, welche zu einem Kreise gehört, dessen Mittelpunct in der Axe der z, und dessen Halbmesser $\frac{n\sqrt{(1 - c^2)}}{c}$

ist. Hieraus folgt, daß alle Schnitte des geraden Kegels, durch eine der der x und y paralelle Ebne, Kreise sind, welches überdies aus der Natur dieses Kegels evident ist.

Aus der obigen Gleichung zieht man

$$z = \frac{c}{\sqrt{(1 - c^2)}} \sqrt{x^2 + y^2} \text{ *)};$$

es ist leicht einzusehen, daß $\sqrt{1 - c^2}$ der Sinus des Winkels ist, welchen die Seite des Kegels mit der Axe der z einschließt, und daß folglich $\frac{c}{\sqrt{(1 - c^2)}}$ die Cotangente eben dieses Winkels, oder die Tangente desjenigen ist, welchen dieselbe gerade mit der Ebne der x und y einschließt.

Wenn man den Scheitel des Kegels auf irgend einen Punct der Axe der z verlegen wollte, so würde man, da diese Axe mit der des Kegels zusammen fällt

$$z - \gamma = \frac{c}{\sqrt{(1 - c^2)}} \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

erhalten.

Setzt man $z = 0$, so würde man die Gleichung der Curve erhalten, in welcher der Kegel die Axe der x und y

*) Man sieht leicht ein, daß wenn man in dieser Gleichung $z = 0$ setzt, das Resultat, welches zum Schnitt des Kegels durch die Ebne der x und y gehören würde, die Form der allgemeinen Gleichung vom zweyten Grade mit zweyen unbekannten annehmen würde, und daß man durch dieses Mittel die Identität der Curven vom zweyten Grade mit den in einem geraden Kegel mit einer Ebne gemachten Schnitten beweisen könnte; allein dieser Weg würde viel verwickelter und nicht so allgemein seyn als der, welchen wir in §. 144 — 147. eingeschlagen haben, weil man daselbst jeden beliebigen Kegel betrachtet. Uebrigens findet sich die Rechnung für einen schiefen Kegel auf einer Kreisfläche im Anhange zum zweyten Bande von Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen 1748.

begegnet, und welche man als die Basis des Kegels betrachten kann. Diese Gleichung wird seyn

$$-\gamma = \frac{c}{\sqrt{(1-c^2)}} \sqrt{(x^2+y^2)}$$

oder

$$\frac{\gamma^2\,(1-c^2)}{c^2} = x^2 + y^2;$$

sie wird zu einem Kreise gehören, dessen Halbmesser

$$\frac{\gamma \sqrt{(1-c^2)}}{c}$$

ist.

Wenn man diesen Halbmesser durch r vorstellt, so wird man haben

$$r^2 = \frac{\gamma^2\,(1-c^2)}{c^2}, \text{ und } \gamma = \frac{cr}{\sqrt{(1-c^2)}};$$

die Gleichung

$$z - \gamma = \frac{c}{\sqrt{(1-c^2)}} \sqrt{(x^2+y^2)}$$

welche sich alsdann in

$$z - \frac{cr}{\sqrt{(1-c^2)}} = \frac{c}{\sqrt{(1-c^2)}} \sqrt{(x^2+y^2)}$$

verwandelt, kann unter der Form

$$z\sqrt{(1-c^2)} - cr = c\sqrt{(x^2+y^2)}$$

angesetzt werden; in dem Falle, wo $c = 1$ ist, verwandelt sie sich in

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

## §. 178.

Diese letztere Gleichung, welche nicht mehr als zwey von den drey Coordinaten enthält, gehört nichts desto weniger zur cylindrischen Fläche, in welchen der Kegel übergeht, wenn sein Scheitel sich unendlich weit entfernt; denn da c den Cosinus des Winkels vorstellt, welcher von der beschreibenden Linie des Kegels und seiner Axe gebildet wird, so bringt die Annahme $c = 1$ diesen Winkel auf Null, und führt den Parallelismus zwischen die Linien ein, von welchen eben geredet wird; die erste beschreibt also, indem sie sich um die zweyte herum bewegt, die Fläche eines geraden, auf der Ebne der x und y senkrechten Cylinders, welcher zur Basis auf dieser Ebne den Kreis hat, dessen Halbmesser r ist, und dessen Mittelpunct im Anfangspunct der Coordinaten liegt.

Dieses führt uns auf die Bemerkung, daß irgend eine Gleichung, welche nur zwey der drey Coordinaten enthält, und welche nur eine Curve in der Ebne dieser Coordinaten bezeichnet, im Raume zu einer Fläche gehört, weil die Coordinate, welche in dieser Gleichung fehlt, indem sie von den beyden übrigen unabhängig ist, für jeden Punct der citirten Ebne eine unendliche Menge Werthe giebt; und diese Werthe stimmen mit allen Puncten der aus dem Puncte, welchen man betrachtet, auf der coordinirten Ebne senkrecht geführten geraden überein.

Alle auf diese Art aus jedem Punct der Curve senkrecht geführten geraden, bilden zusammen genommen eine cylindrische Fläche, wenn man diese Benennung in der Ausdehnung nimmt, in welcher sie im Ergänzungsbande zur Geometrie genommen ist.

## Von den Curven im Raume betrachtet.

### §. 179.

Wenn man die Curven im Raume beabsichtigt, so erfolgen sie immer aus dem Durchschnitt zweyer Flächen, so wie die gerade Linie aus dem Durchschnitt zweyer Ebnen erfolgt (§. 168.). Man kann z. B. einen Kreis anzeigen, wenn man die Kugel angiebt, von welcher er einen Theil ausmacht, und die Ebne, welche sie schneidet. Nimmt man nun an, die Kugel habe ihren Mittelpunct im Anfangspunct der Coordinaten, und daß die Ebne beliebig sey, so wird das System der Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (1)$$

$$Ax + By + Cz = D \quad (2),$$

zum Kreise gehören, in welchem die Kugel und die vorgelegte Ebne einander schneiden, weil dieses System nur mit den Puncten übereinstimmen kann, welche sich zu gleicher Zeit in der einen und der andern Fläche befinden.

Es ist offenbar, daß man das System der Gleichungen (1) und (2) in eine unendliche Menge andrer verwandeln kann, welche ihnen gleichgültig sind. Was am häufigsten angewendet wird, ist dies, wechselweise eine der unbestimmten x, y und z zu eliminiren; und man erhält zwischen diesen Größen, zu zweyen und zweyen combinirt, drey Gleichungen, welche zu den Projectionen der gesuchten Curve auf jeder der coordinirten Ebnen gehören.

Im obigen Beyspiele hat man

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{D - Ax - By}{C}\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + z^2 + \left(\frac{D - Ax - Cz}{B}\right)^2 = r^2$$

$$y^2 + z^2 + \left(\frac{D - By - Cz}{A}\right)^2 = r^2;$$

jede zwey dieser Gleichungen geben die dritte; sie gehören (§. 119.) zu den Ellipsen, welche Projectionen des Kreises auf jede der coordinirten Ebnen sind (Erg. Band §. 63.).

Um leicht einzusehen, auf welche Art eine Curve durch die Gleichung ihrer Projectionen dargestellt ist, muß man erwägen, daß diese Gleichungen zu cylindrischen Flächen gehören, welche auf die Projectionen (§. 178.) senkrecht geführt sind, eben so wie die Gleichungen der Projectionen einer geraden, auch projectirte Ebnen bezeichnen.

Hieraus folgt, daß die vorgelegte Curve aus dem Durchschnitt der auf zwey dieser Projectionen geführten cylindrischen Flächen erfolgt, wie im §. 77. des Ergänzungsbandes gezeigt worden ist.

In den meisten Fällen kann der Durchschnitt zweyer krummen Flächen nicht alle seine Puncte in einer einzigen Ebne haben, und er bildet eine Curve von gedoppelter Krümmung; von dieser Art ist z. B. der Durchschnitt eines geraden Cylinders und einer Kugel, wenn die Axe des Cylinders nicht durch den Mittelpunct der Kugel geht.

Wir wollen nun annehmen, daß die Kugel ihren Mittelpunct im Anfangspunct, und daß der Cylinder zur Basis den Kreis, oder seine Axe paralell zur Axe der z habe; die Gleichungen der die vorgelegte Curve enthaltenden Flächen werden seyn

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$2ax - x^2 = y^2;$$

man wird für die Projectionen in x, z und in x, y haben

$$2ax - x^2 = y^2$$
$$2ax + z^2 = r^2.$$

Diese Curve kann beschrieben werden, wenn man einen Punct des Zirkels auf die Fläche des Cylinders setzt, und den andern auf dieser Fläche in einer Oeffnung herum bewegen läßt, welche dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

Um hiervon so viele Puncte, als man will, zu finden, muß man die Coordinaten y und z vermittelst der Abcisse x durch die Gleichungen der Projectionen bestimmen, welche geben

$$y = \sqrt{(2ax - x^2)}, \quad z = \sqrt{(r^2 - 2ax)}.$$

Man erhält die Ausdehnung dieser Curven, wenn man die Fälle bestimmt, in welchen die Coordinaten imaginär werden; man findet nehmlich nur reelle Werthe für y

von $x = 0$ bis $x = 2a$

und für z

von $x = 0$ bis $x = \frac{r^2}{2a}$ auf der positiven Seite

und von $x = 0$ bis zum Unendlichen auf der negativen Seite.

Es ist aber offenbar, daß man nur den beyden Projectionen gemeinschaftlichen Theil der Abcisse x nehmen kann, weil nur eine der Coordinaten Null zu werden braucht, damit die Curve ihre Gränze erreicht habe; sie wird sich also nur von $x = 0$ bis $x = \frac{r^2}{2a}$ erstrecken.

Selbst die Betrachtung der Projectionen bekräftigt dieses Resultat. Da die Gleichung in x und y zum Kreise AE′F′e′ Fig. 66. gehört, welcher zur Basis des Cylinders dient, und da die, welche x und z enthält, zur Parabel H″I′h″ gehört, deren Parameter $= 2a$, und deren Abstand $AI' = \frac{r^2}{2a}$ ist, so kann man offenbar nur zur Beschreibung der vorgelegten Curve die Theile E′Ae′ und H″I′h″ ihrer Projectionen anwenden, welche auf der Axe AB mit dem Theil AI′ correspondiren.

## §. 180.

Um sich endlich zu überzeugen, daß die vorgelegte Curve keine Ebne ist, muß man untersuchen, ob sie nicht der Durchschnitt eines der auf ihre Projectionen errichteten Cylinder mit irgend eine Ebne seyn kann. Bezeichnet man die Gleichung irgend einer Ebne durch

$$Ax + By + Cz = D,$$

so wird ihr Durchschnitt mit einem auf der Parabel H″I′h″ errichteten Cylinder durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D$$
$$2ax + z^2 = r^2$$

ausgedrückt seyn; die Projection dieses Durchschnitts wird zur Gleichung auf der Ebne der y und z haben

$$A\frac{(r^2 - z^2)}{2a} + By + Cz = D,$$

und wird in allen ihren Puncten mit der der vorgelegten

Curve auf der Ebne der y und z zusammen fallen müssen, welche ist

$$r^2 - z^2 - \left(\frac{r^2 - z^2}{4a^2}\right)^2 = y^2.$$

Aus der vorhergehenden zieht man

$$y = \frac{2aD + Ar^2 - 2aCz - Az^2}{2aB};$$

man muß also für alle Werthe von z haben

$$\left(\frac{2aD + Ar^2 - 2aCz - Az^2}{2aB}\right)^2 = r^2 - z^2 - \frac{(r^2 - z^2)^2}{4a^2}.$$

Entwickelt man dieses Resultat, so kann man ihm diese Form geben

$$Pz^4 + Qz^3 + Rz^2 + Sz + T = o,$$

wo die Buchstaben P, Q, R, S und T, die aus den Größen A, B, C, D gebildeten Coefficienten bezeichnen. Damit diese Gleichung unabhängig von z Null werde, muß man besonders haben

$$P = o, \quad Q = o, \quad R = o, \quad S = o, \quad T = o.$$

Durch die Elimination kann man sich überzeugen, daß keine von diesen fünf Gleichungen in den andern begriffen ist, und daß man folglich die vier Coefficienten A, B, C, D dergestalt bestimmen kann, um zugleich allen ein Genüge zu thun; es giebt also keine Ebne, welche die vorgelegte Curve enthalten könnte; und wenn man z aus der obigen Gleichung bestimmen wollte, so könnte man höchstens nur vier Werthe erhalten, so daß die vorgelegte Curve von einer Ebne in nicht mehr als vier Puncten geschnitten werden kann.

# Zusätze.

### Zusatz zu §. 41.

Die Anwendung, welche man gewöhnlich von dem Verfahren dieses §. macht, setzt voraus, daß die Ebne ABC′ horizontal sey, und es ist indessen selten der Fall, daß man die Basis in einer horizontalen Ebne nehmen kann. Es würde leicht seyn, dieses Verfahren für den Fall zu modificiren, wo die Linie AB irgend eine Lage gegen die horizontale Ebne hat; allein, ohne mich ins Detail einzulassen, will ich bemerken, daß die Winkel C′AB und C′BA nichts anders als die auf die horizontale Ebne reducirten Winkel CAB und CBA sind (§. 58.), und daß man im allgemeinsten Fall nur vermittelst des Verfahrens §. 58, die beobachteten Winkel auf die durch einen der äußersten Puncte der Basis gehende horizontale Ebne zu reduciren brauchen wird; und hierauf die Länge der Projection der Basis auf dieser zu berechnen, indem man die auf dem Terrain gemessene Länge mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen die Basis mit der horizontalen Ebne einschließt, und welchen man unmittelbar wahrnehmen kann.

Man braucht nur Fig. 67., in welcher A′Bc′ die horizontale Ebne vorstellt, zu betrachten, um die Richtigkeit des Vorhergehenden einzusehen.

### Bestimmung eines Punctes aus der Betrachtung der Winkel, welche die von diesem Puncte nach dreyen gegebenen Puncten gezogenen geraden einschließen.

Da diese Aufgabe beym Aufnehmen der Felder, oder bey Berichtigung der Charten von einem häufigen Gebrauch ist, so glaubte ich hier eine Auflösung davon geben zu müssen.

Wenn man den allgemeinsten Fall betrachtet, so bezieht er sich auf die Geometrie im Raum, und ich habe davon eine graphische Auflösung im Ergänzungsband zur Geometrie gegeben. Wenn aber die drey Winkel in einerley Ebne sind, so giebt es immer einen, welcher die Summe oder die Differenz der beyden übrigen ist, so daß man nur diese zu haben braucht, um den ersten daraus herzuleiten; und man kann die übrigen Fälle auf diesen zurückführen, indem man sich der im §. 58. gezeigten Reduction der Winkel auf die horizontale Ebne bedient.

Die graphische Auflösung dieses Falles besteht darin, auf den Linien AB und AC Fig. 68. zwey Kreisschnitte zu setzen, welche die im Puncte D zwischen den gegebenen Puncten A und B, A und C beobachteten Winkel BDA, CDA enthalten. Die beyden Umkreise der Zirkel werden sich zuvörderst in einem Puncte schneiden, welcher ihnen nach der Construction gemein ist, und hiernächst im Puncte D, welches der gesuchte Punct seyn wird. Ich werde mich nicht in die Auseinandersetzung der verschiedenen Fälle einlassen, welche die Aufgabe in Rücksicht der verschiedenen gegenseitigen Lagen der Puncte A, B, C, und dem gesuchten Punct darbiethen kann; und will bloß noch bemerken, daß die Summe der beobachteten Winkel BDA, CDA angiebt, ob er innerhalb des Dreyecks ABC oder außerhalb desselben liegt. Im ersten Falle übertrift sie zwey recht, im zweyten Falle ist sie kleiner; und wenn sie zweyen rechten völlig gleich wäre, so würde er auf der Linie BC liegen. Dieses ist zu leicht zu beweisen, als daß ich mich dabey aufhalten sollte.

Hier ist nun eine Methode auf diese Aufgabe der trigonometrischen Calcul anzuwenden. Die gegebenen Stücke sind die Theile des Dreyecks ABC, und die beobachteten Winkel BDA und CDA; ich werde folglich setzen

$$AB = a,\ AC = b,\ BDA = \alpha,\ CDA = \beta,\ BAC = \gamma;$$

und zu den unbekannten würde ich nehmen

$$ABD = x,\quad ACD = y.$$

Dieses vorausgesetzt, werden die Dreyecke BAD und DAC geben

$$\sin BDA : \sin ABD = AB : AD$$
$$\sin CDA : \sin ACD = AC : AD',$$

oder

$$\sin \alpha : \sin x = a : AD = \frac{a \sin x}{\sin \alpha}$$
$$\sin \alpha : \sin y = b : AD = \frac{b \sin y}{\sin \beta};$$

man kann also hieraus diese Gleichung herleiten

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

welches auf

$$a \sin \beta \sin x - b \sin \alpha \sin y = 0.$$

Nun hat man im Viereck ABDC

$$ACD = 360° - ADB - ADC - BAC - ABD,$$

woraus folgt

$$y = 360° - \alpha - \beta - \gamma - x;$$

setzt man nun zur Abkürzung

$$360° - \alpha - \beta - \gamma = \delta,$$

so kommt

$$y = \delta - x$$

und folglich

$$a \sin \beta \sin x - b \sin \alpha (\sin \delta \cos x - \cos \delta \sin x) = 0;$$

dividirt man alle Glieder durch $\sin x$, so erhält man

$$a \sin \beta - b \sin \alpha \left(\sin \delta \frac{\cos x}{\sin x} - \cos \delta\right) = 0,$$

woraus man zieht

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \frac{a \sin \beta + b \sin \alpha \cos \delta}{b \sin \alpha \sin \delta}.$$

Wenn man diesen Ausdruck in zwey Theile zerlegt, so wird man haben

$$\cot x = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha \sin \delta} + \frac{\cos \delta}{\sin \delta},$$

oder besser

$$\cot x = \frac{\cos \delta}{\sin \delta} \left(\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha \cos \delta} + 1\right),$$

oder endlich

$$\cot x = \cot \delta \left(\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha \cos \delta} + 1\right).$$

Hiermit ist also die Aufgabe aufgelöst, weil man den Winkel y und den Abstand AD hat, sobald man x weiß.

Zusatz zu §. 113. und 120.

Es ist zu merken, daß sich die Parabel unter zweyen verschiedenen Umständen in eine gerade Linie verwandelt. Wenn man zuvörderst in §. 113. $n = o$ hätte, so würde kommen

$$u = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{p};$$

eine Gleichung, welche zu zweyen geraden zur Axe der t parallellen Linien gehört. Nimmt man die Gleichung $\alpha u'^2 - \beta t'^2 = o$, welche sich auf die Axe bezieht (§. 120.), so findet man, wenn $\beta = o$, nur die Gleichung $\alpha u'^2 = o$; da aber diese Gleichung zwey Mahl $u' = o$ giebt, so bringt sie die Axe der Abcissen, als die Vereinigung zweyer geraden hervor, welche in eine einzige zusammen fallen.

Die Gleichung $\alpha u'^2 - \beta t'^2 = o$ stellt auch einen andern besondern Fall dar, wenn $\alpha = o$, denn es erfolgt daraus $t = o$, eine Gleichung, welche zur geraden, auf der Axe der u senkrechten Linie gehört.

Zusätze zu §. 140 und 141.

Man kann nach der Elimination der Größen m, n, p, q in diesem Abschnitte einige Vereinfachungen anbringen

Die Ausdrücke von $a'^2$ und $b'^2$ biethen diese Gleichungen dar

$$a'^2 a^2 n^2 + a'^2 b^2 m^2 = a^2 b^2, \quad b'^2 a^2 q^2 + b'^2 b^2 p^2 = a^2 b^2;$$

setzt man respectiv

$$n^2 + m^2 = 1, \quad q^2 + p^2 = 1$$

hinzu, so wird man zwey Systeme von Gleichungen, das eine in m und n, das andre in p und q erhalten. Die Formeln in Beziehung der Gleichungen von ersten Grade mit zweyen unbekannten Größen, auf das erste System angewandt, geben

$$n^2 = \frac{a^2 b^2 - a'^2 b^2}{a'^2 a^2 - a'^2 b^2} = \frac{b^2 (a^2 - a'^2)}{a'^2 (a^2 - b^2)}$$

$$m^2 = \frac{a'^2 a^2 - a^2 b^2}{a'^2 a^2 - a'^2 b^2} = \frac{a^2 (a'^2 - b^2)}{a'^2 (a^2 - b^2)}.$$

Um $q^2$ und $p^2$ zu erhalten, braucht man bloß in diesen Werthen $a'$ in $b'$ zu verwandeln, und es kommt

$$q^2 = \frac{b^2 (a^2 - b'^2)}{b'^2 (a^2 - b^2)}$$

$$p^2 = \frac{a^2 (b'^2 - b^2)}{b'^2 (a^2 - b^2)}.$$

Die Gleichung

$$a^2nq + b^2mp = 0$$

läßt sich auf

$$a^2nq = - b^2mp$$

bringen, und wenn man sie quadrirt hat, hat man

$$a^4n^2q^2 = b^4m^2p^2.$$

Substituirt man in dieser letztern, die nach der einfachsten Art auf einerley Benennung gebrachten Werthe von $n^2$, $m^2$, $q^2$, $p^2$, so erhält man, wenn man diesen Renner ausläßt

$$(a^2 - a'^2)(a^2 - b'^2) = (a'^2 - b^2)(b'^2 - b^2).$$

Entwickelt, reducirt und zerfällt man in Factoren, so kommt

$$(a^4 - b^4) - (a^2 - b^2)(a'^2 + b'^2) = 0;$$

läßt man hierauf den gemeinschaftlichen Factor $a^2 - b^2$ aus, so findet man endlich

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Die Rechnung ist dieselbe wie im §. 141., wenn man bloß auf die verschiedenen Zeichen aufmerksam ist, welche die Größe $a^2b^2$ in den Gleichungen

$$a'^2b^2m^2 - a'^2a^2n^2 = a^2b^2,$$
$$b'^2b^2p^2 - b'^2a^2q^2 = - a^2b^2$$

annimt, weil man beym Uebergang von den Werthen von $m^2$ und $n^2$ zu denen von $p^2$ und $q^2$ das Zeichen von $a^2b^2$ ändern muß.

(Diese Anmerkung ist vom Bürger Puissant.)

## Zusatz zu §. 144 und 146.

Die Umstände, in welchen die Curven vom zweyten Grade ihre Natur ändern, lassen sich im Kegel finden. Denn wenn die schneidende Ebne durch den Scheitel geht, ohne in die Curve zu kommen, so reducirt sich der Schnitt auf einen Punct, welcher mit dem in §. 110. betrachteten correspondirt.

Wenn die schneidende Ebne noch immer durch den Scheitel geht, und innerhalb des Kegels fällt, so hat man zwey gerade Linien; und wenn hierauf die schneidende Ebne vom Scheitel abweicht, indem sie sich zu sich selbst paralell bewegt, so wird man eine Reihe Hyperbel erhalten, die die obigen geraden, welche entweder durch senkrechte auf die Ebne der Curve zurückgebracht, oder auf dieselbe projectirt sind, zu Asymptoten haben.

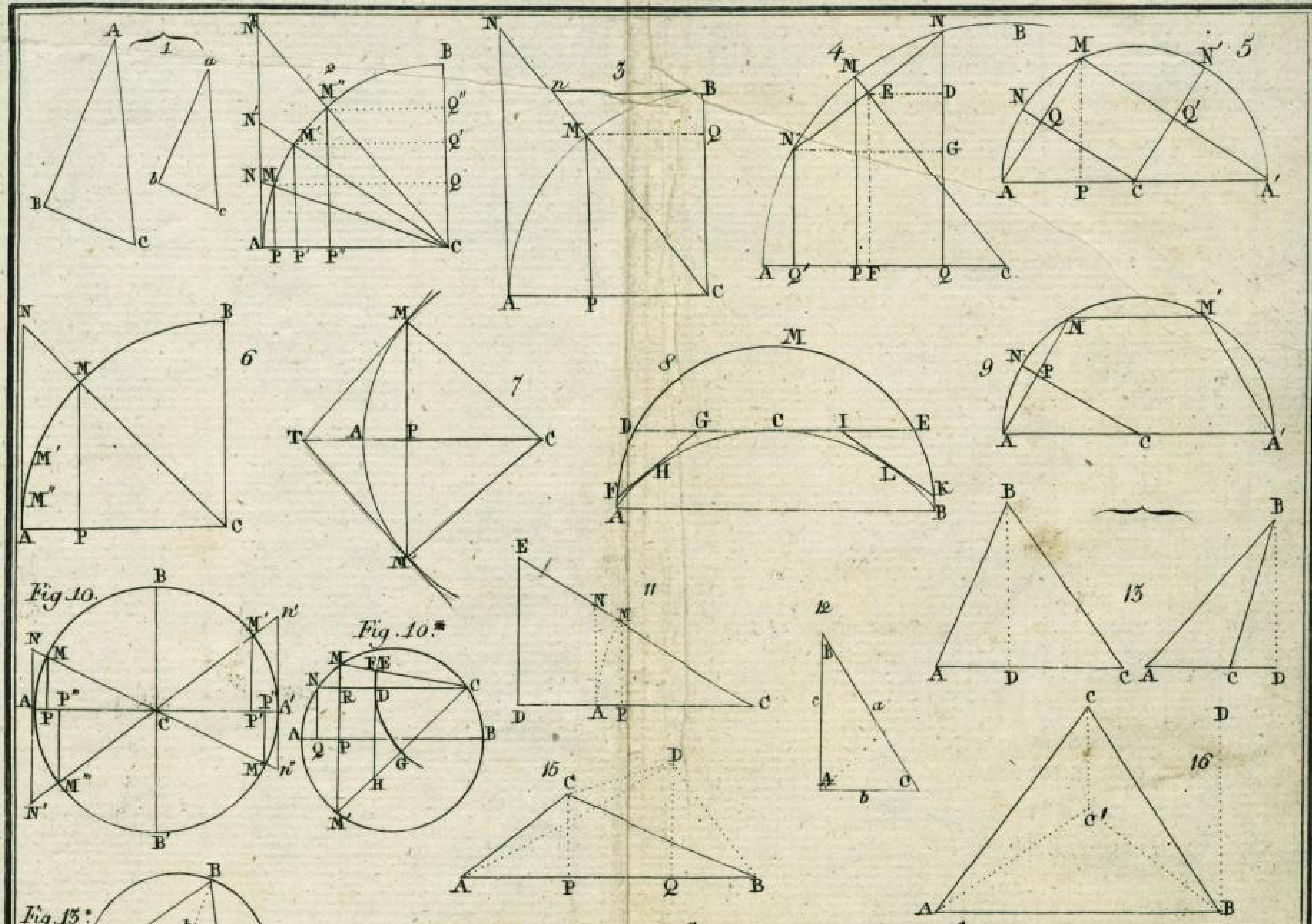
Wenn endlich die schneidende Ebne zur Seite des Kegels paralell ist, so wird sie, wenn sie durch den Scheitel geht, nur den Kegel nach einer geraden Linie berühren, welche man aber als doppelt betrachten muß; denn sie ist die Vereinigung zweyer Theile der Parabel, welche sich durch das Zusammenziehen, welchem diese Curve desto mehr unterworfen ist, je mehr sich die schneidende Ebne der Berührung mit dem Kegel nähert, unaufhörlich nähern.

Andrerseits öffnet oder erweitert sich die Parabel desto mehr gegen den Scheitel, je mehr man die schneidende Ebne vom Scheitel des Kegels, aber immer zur Seite desselben paralell entfernt, und strebt folglich immer mehr, sich der durch diesen Punct senkrecht zur Axe geführten Linie zu nähern.

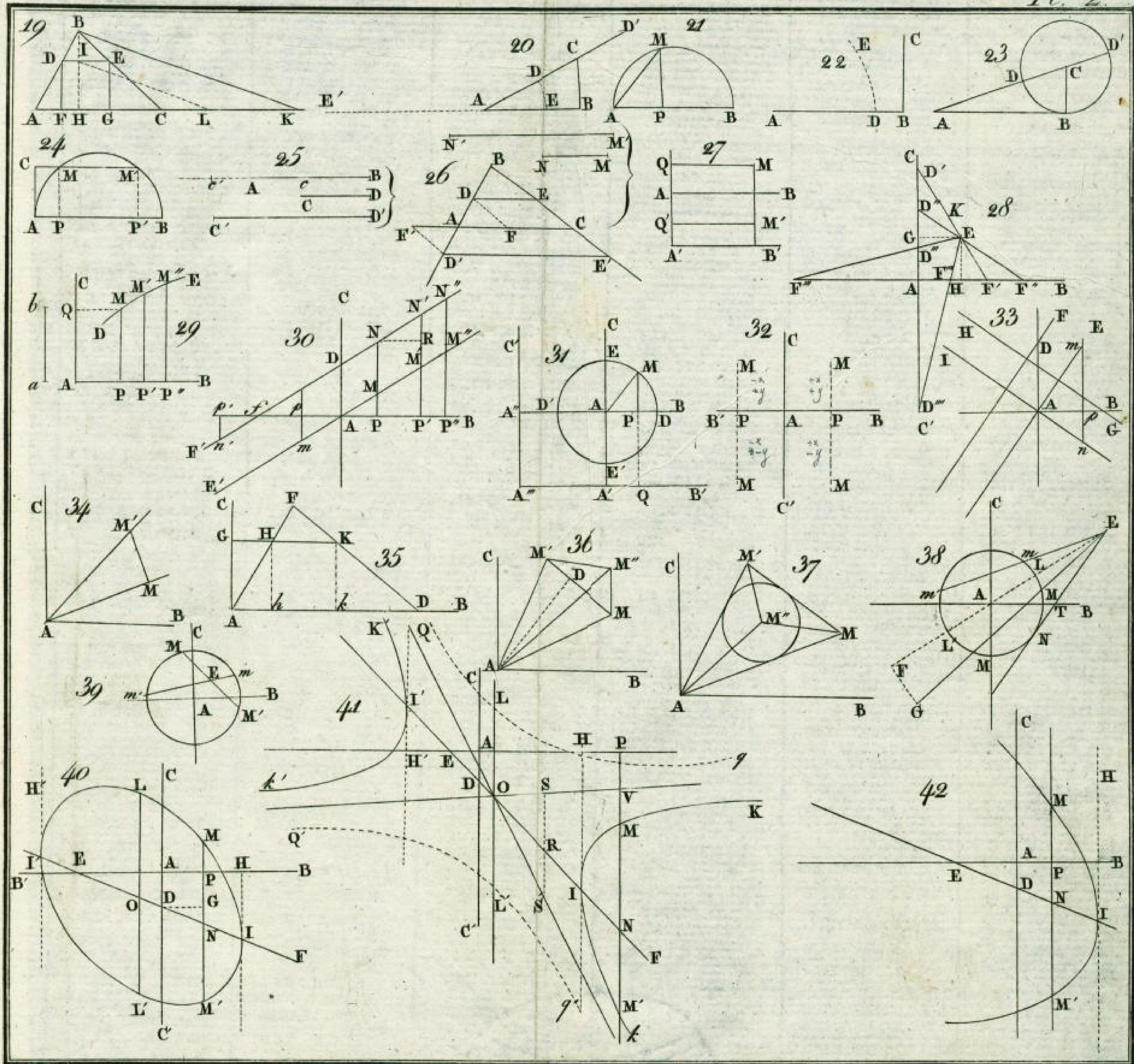
Zusatz zu §. 160 und 161.

Die in dem ersten dieser Abschnitte eingeführte Größe p, welche immer unbestimmt bleibt, kann zur Vereinfachung der Construction alle beliebige Werthe erhalten, welche man ihr beylegen will, außer Null.

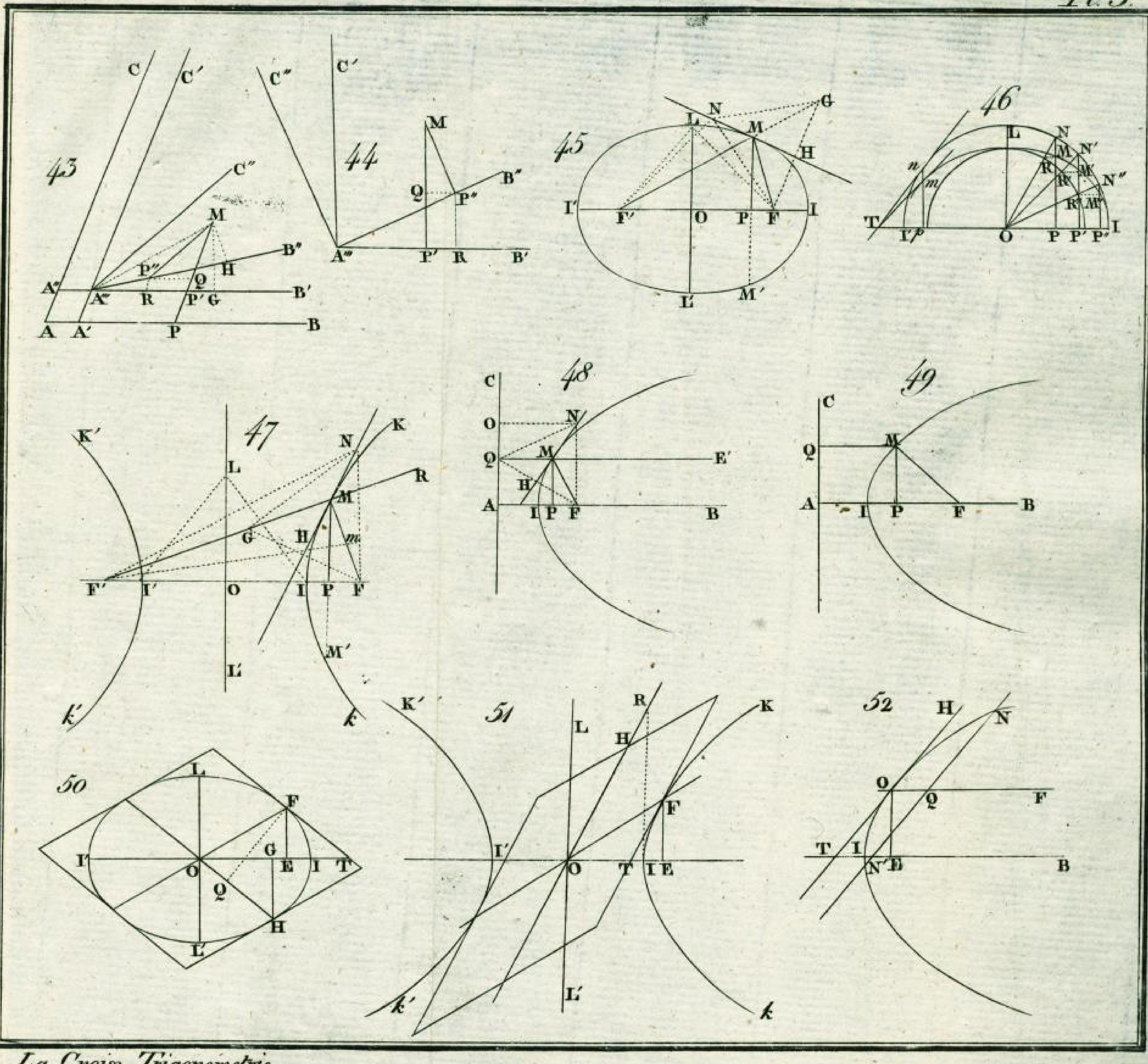
Im §. 161. kann man $p = a$ nehmen, und durch dieses Mittel werden die zu construirenden Gleichungen der beyden Parabel $x^2 = ay$, $y'^2 = 2ax$ werden; die zweyte wird einen doppelten Parameter als die der ersten haben.



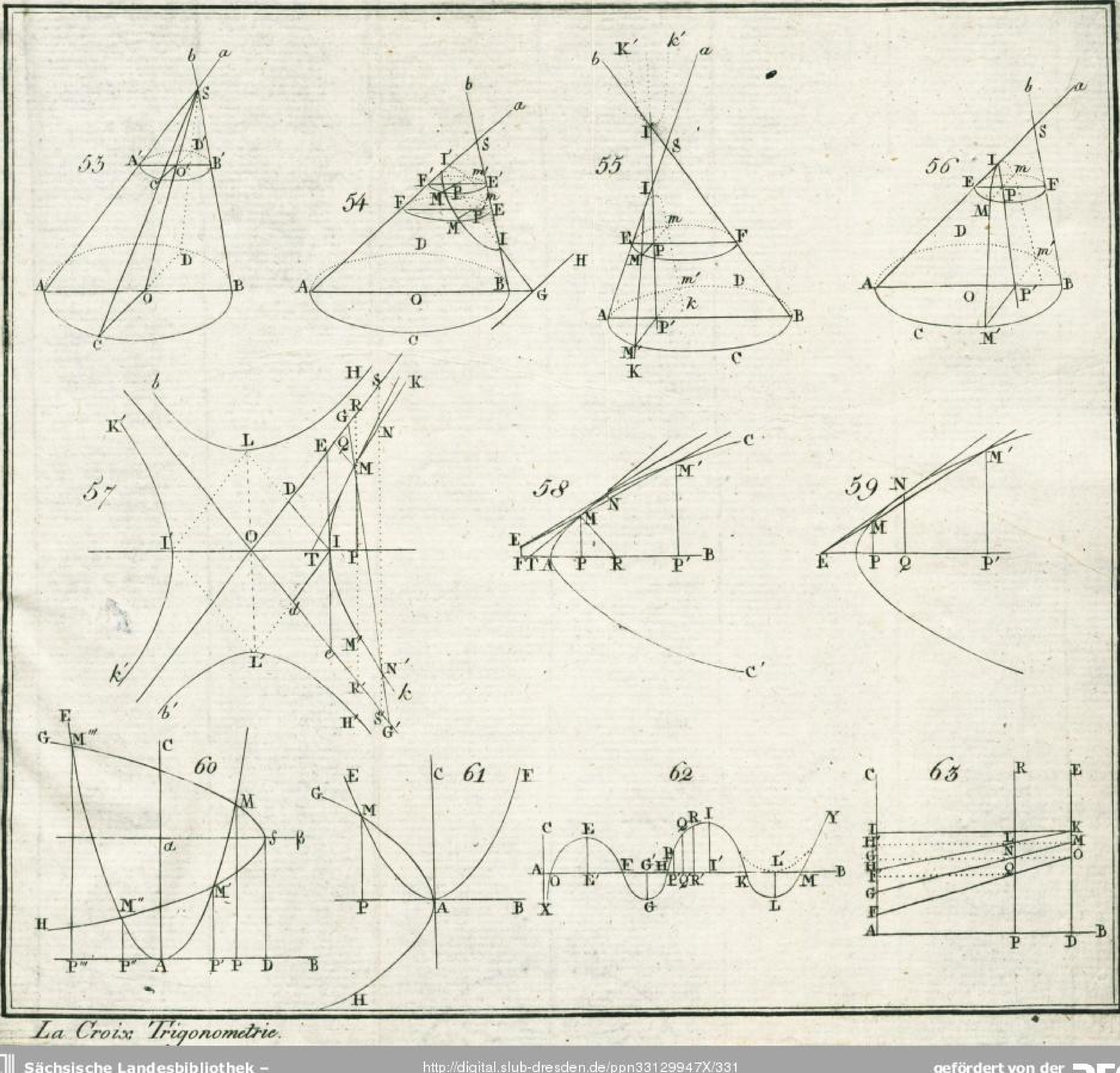

La Croix Trigonometrie.




La Croix Trigonometrie.

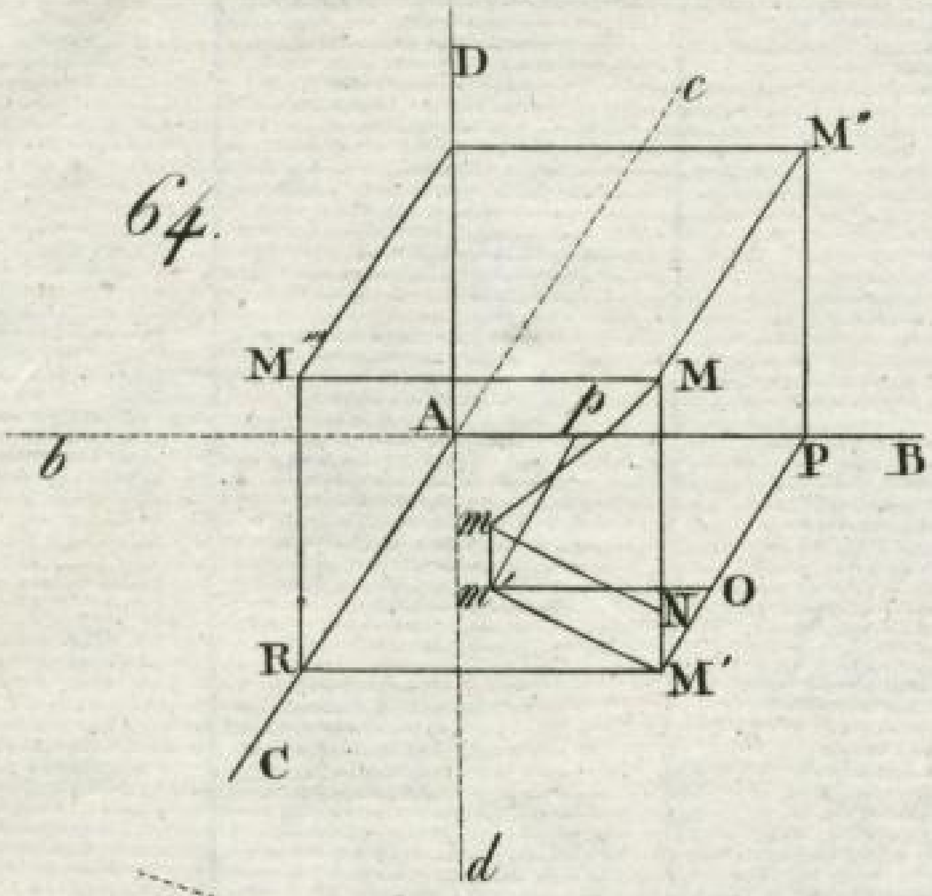



*La Croix Trigonometrie.*

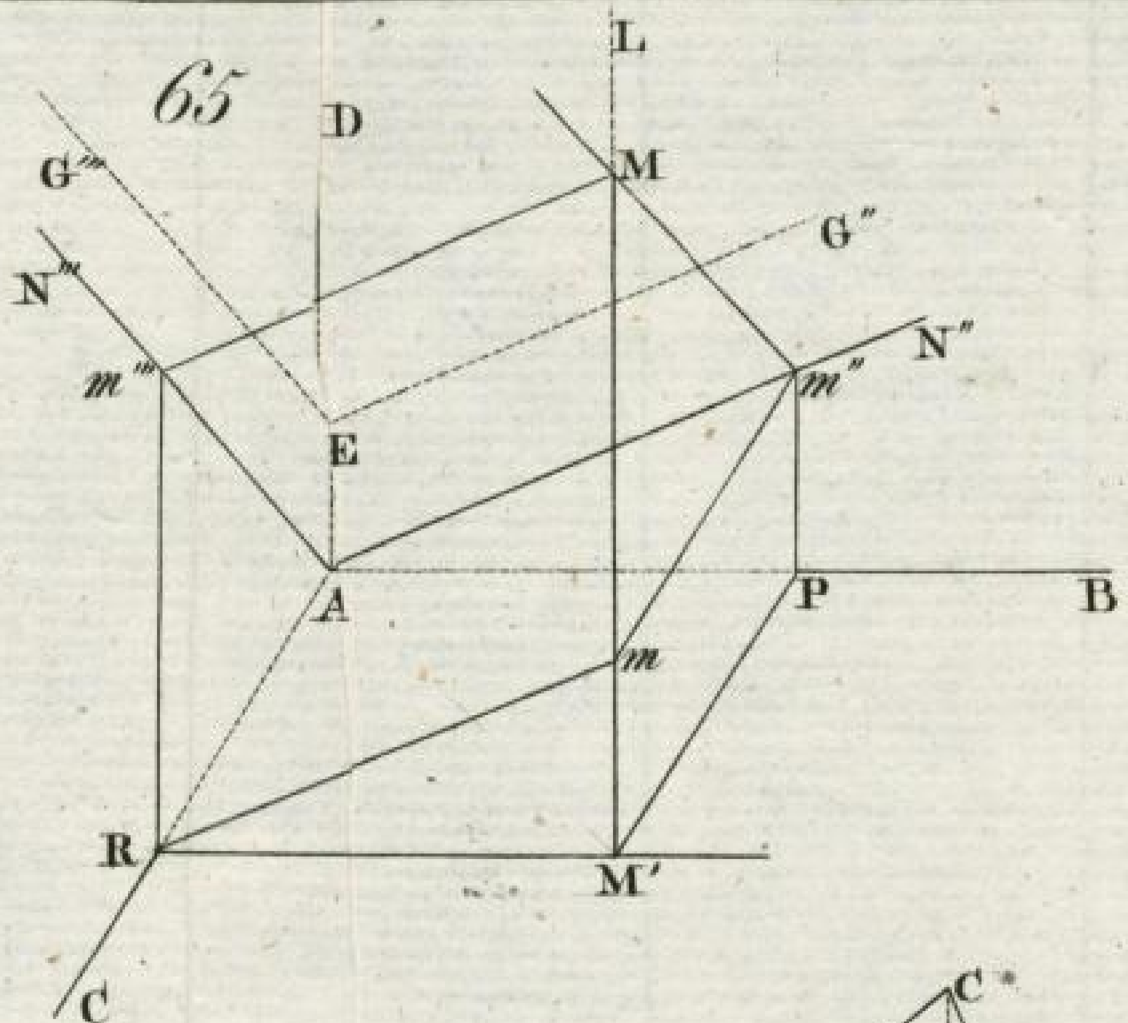



La Croix Trigonometrie.

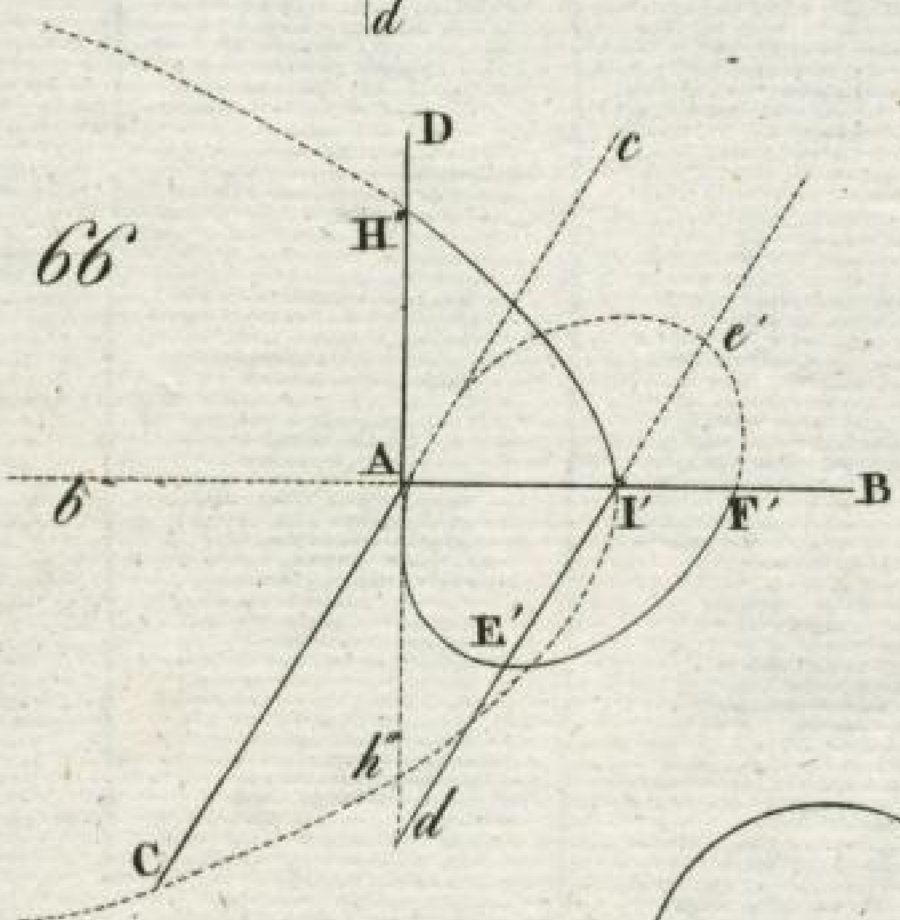
64.


D
c
M''
M'''
M
A
p
b
P
B
m
m'
N
O
R
M'
C
d

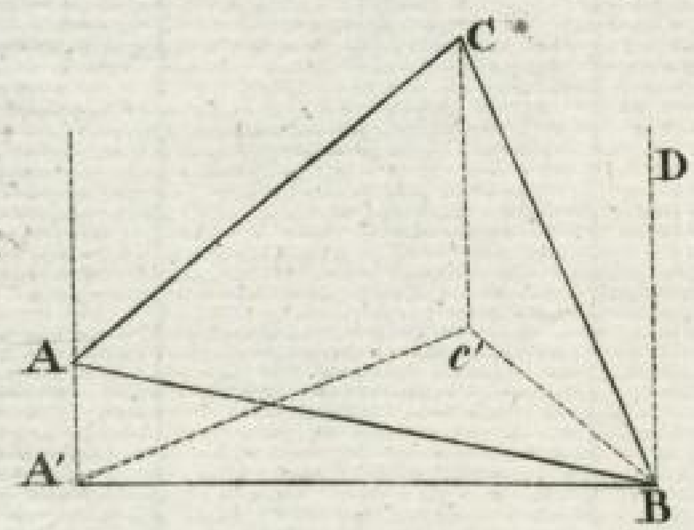
65


L
D
M
G'''
G''
N'''
N''
m'''
m''
E
A
P
B
m
R
M'
C

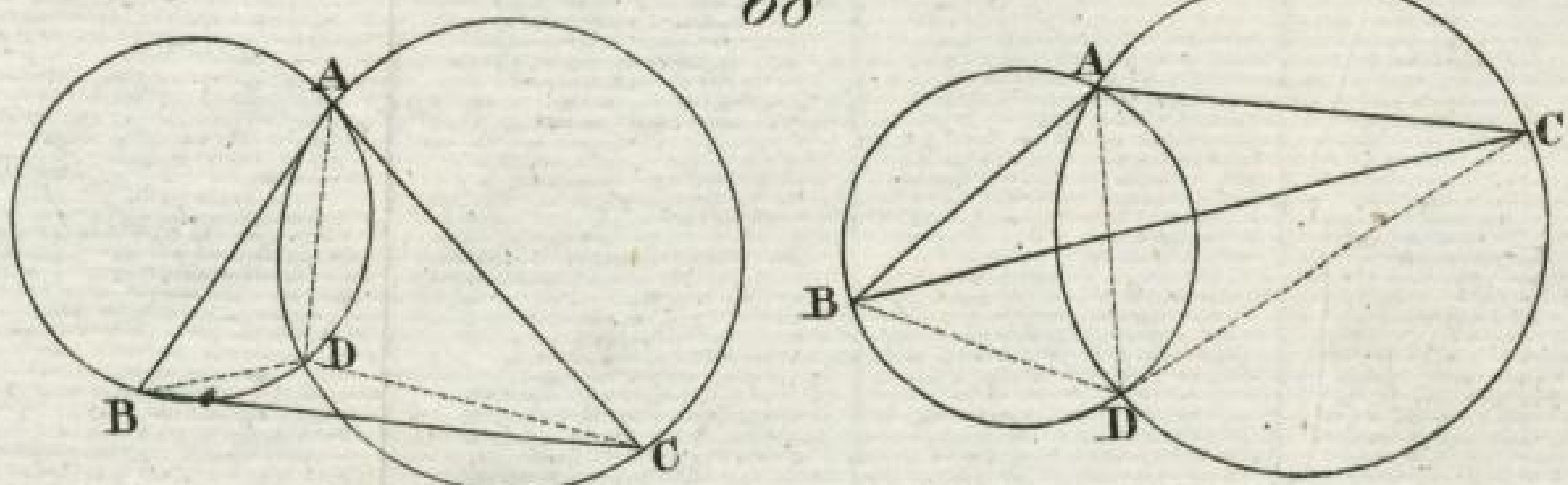
66


D
c
H''
e'
A
b
B
I'
F'
E'
h''
d
C

67


C
D
A
c'
A'
B

68


A
D
B
C
A
C
B
D

Datum der Entleihung bitte hier einstempeln!