ABHANDLUNGEN

DREIUNDDREISSIGSTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

DREIUNDDREISSIGSTER BAND.

MIT 6 TAFELN UND 46 FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1893.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ZWANZIGSTER BAND.

MIT 6 TAFELN UND 46 FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1893.

INHALT.

OTTO FISCHER.

DIE ARBEIT DER MUSKELN UND DIE LEBENDIGE KRAFT DES MENSCHLICHEN KÖRPERS.

Des XX. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N[0] I.

MIT ZWEI TAFELN UND ELF FIGUREN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL
1893.

Einzelpreis: 4 Mark.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 ₰.
P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 ₰.
A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.
C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale u. über das Windungsgesetz v. Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 ℳ.
F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.
M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 ₰.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 ℳ.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. Mit 1 Tafel. 1852. 3 ℳ.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. I. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.
P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.
—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr' (\cos U \cos U + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.
O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.
—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen u. deren Anwend. auf die ellipt. Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.
C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.
A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Erste Abhandlung. 1856. 5 ℳ.
R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. Zweiter Abdruck. 1889. 1 ℳ 60 ₰.
H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.
—— Elektr. Untersuch. Dritte Abhandl.: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen u. erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.
G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.
G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.
G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

W. G. HANKEL, Elektr. Untersuchungen. 5. Abhandl.: Maassbestimmungen d. elektromotor. Kräfte. 1. Th. 1861. 1 ℳ 60 ₰.
—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.
P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.
G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ₰.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. 17 ℳ.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 ℳ.
G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 2 ℳ 80 ₰.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

DIE
ARBEIT DER MUSKELN
UND DIE
LEBENDIGE KRAFT DES MENSCHLICHEN KÖRPERS

VON

OTTO FISCHER.

Des XX. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften
N⁰ I.

MIT ZWEI TAFELN UND ELF FIGUREN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL
1893.

Das Manuscript eingeliefert am 19. Mai 1893.
Der Druck beendet am 8. Juni 1893.

DIE

ARBEIT DER MUSKELN

UND DIE

LEBENDIGE KRAFT DES MENSCHLICHEN KÖRPERS

VON

OTTO FISCHER.

MIT ZWEI TAFELN UND ELF FIGUREN.

DEM ANDENKEN

MEINES

UNVERGESSLICHEN, THEUREN LEHRERS UND VÄTERLICHEN FREUNDES

DES

HERRN GEHEIMEN MEDICINALRATHES

PROFESSOR DR. WILHELM BRAUNE.

Einleitung.

Die Aufgabe, den Antheil zu bestimmen, welchen die einzelnen Muskeln an der Hervorbringung bestimmter, im Leben häufig vorkommender Bewegungen des gesammten menschlichen Körpers, wie z. B. beim Gehen, Laufen, Schwimmen, Turnen u. s. w. haben, ist in hohem Grade geeignet, das Interesse der Anatomen und Physiologen in Anspruch zu nehmen. Denn die gemeinsame Thätigkeit der Muskeln ist bei allen diesen Bewegungen, sobald der Mensch in ihnen eine gewisse Sicherheit erlangt hat, eine sehr geordnete und gleichmässige. Obgleich beispielsweise die Kinder zunächst nur die allerungeschicktesten Bewegungen machen, welche bei verschiedenen Kindern ganz verschieden ausfallen, so lernen sie doch alle schliesslich in gleicher Weise gehen. Die Folge und Art der Bewegungen beim Gang ist bei allen Menschen dieselbe und wird höchstens durch die etwas verschiedenen Dimensionen der Knochen, die verschiedene Gestaltung der Knochenenden und die verschiedene Massenvertheilung im Körper in geringem Grade modificirt. Es fällt daher jedem Muskel bei der Fortbewegung des Menschen eine ganz bestimmte Rolle zu.

Wenn es gelingen sollte, diese Rolle, welche jedem einzelnen Muskel bei den Bewegungen des Gehens, Laufens u. s. w. zugetheilt ist, aufzudecken, d. h. also die Kräfte zu bestimmen, mit welchen, und die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Muskeln dabei thätig sind, so wäre diese Kenntniss für die Anatomie und Physiologie, insbesondere für die Physiologie der Rückenmarksnerven von der allergrössten Bedeutung.

Leider sind wir von einer Lösung dieser Fragen noch weit entfernt.

Der Grund hierfür ist wohl theils in den nicht unbedeutenden Schwierigkeiten zu suchen, welche infolge der Natur der Aufgabe einer vollständigen Lösung entgegenstehen, theils in dem Umstande, dass das Problem Anforderungen an die verschiedensten Wissensgebiete stellt.

Der beschreibenden Anatomie liegt es vor allen Dingen ob, durch genaue Messungen am Cadaver die Dimensionen, sowie die Masse und Massenvertheilung der einzelnen Körperabschnitte festzustellen, die durch die Gelenkverbindungen gesetzten Bedingungen für die Bewegung und die durch die Ansatzstellen und die Dimensionen der Muskeln gegebenen Bedingungen für die Wirksamkeit der Muskelkräfte aufzusuchen.

Die allgemeine Physiologie hat Untersuchungen über die allgemeine Natur und Wirkungsweise der bewegenden Kräfte im Innern des Organismus anzustellen.

Endlich muss auch die Physik, insbesondere die Mechanik, ihren Beitrag zusteuern. Wenn ein Massensystem, wie es der menschliche Körper darstellt, in Bewegung begriffen ist, so besitzt es infolge der Geschwindigkeiten, mit welchen die einzelnen Theile des Systems fortschreiten, eine bestimmte lebendige Kraft. Dieselbe bleibt erhalten, so lange keine Kräfte auf das System einwirken. Aendert sie ihren Werth, so muss diese Aenderung des Bewegungszustandes der Thätigkeit von Kräften zugeschrieben werden, und zwar bestehen zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft einerseits und den Arbeiten der äusseren und inneren Kräfte andererseits ganz bestimmte Beziehungen. Es ist Sache der Mechanik, diese Beziehungen aufzusuchen und für dieselben den analytischen Ausdruck zu formuliren, welcher den Ausgangspunkt für die rechnerische Behandlung der im mechanischen Sinne sehr verwickelten Aufgabe der Untersuchung der Bewegungen des menschlichen Körpers bilden muss.

Wenn in diesem Sinne Anatomie, Physiologie und Physik sich verbinden, um dem Ziele gemeinsam zuzustreben, darf man hoffen, der Lösung des Problems näher zu kommen, wenn sich auch vorläufig noch nicht übersehen lässt, ob dasselbe überhaupt jemals endgültig zu lösen ist.

Sehr viel ist bisher in dieser Richtung auf physiologischem Gebiete gethan worden. Da man alle hierher gehörenden Arbeiten in den grösseren Handbüchern der Physiologie angeführt findet, so kann auf Literaturangabe verzichtet werden.

Was die anatomischen Bausteine für das Problem anlangt, so sind dieselben zahlreich vorhanden, so weit sie sich auf Gelenke und Gelenkbewegungen beziehen. Am meisten haben in dieser Hinsicht wohl die beiden Anatomen HENKE[1]) und H. v. MEYER[2]) beigetragen. Ausser diesen haben sich, so viel mir bekannt, noch mit Gelenkuntersuchungen beschäftigt die Brüder WEBER[3]), ferner BORELLI[4]), BICHAT[5]), CRUVEILHIER[6]), E. H. WEBER[7]), A. FICK[8]), LANGER[9]), L. FICK[10]), HYRTL[11]), LUSCHKA[12]), WELCKER[13]), HENLE[14]), AEBY[15]), LECOMTE[16]), SAPPEY[17]), E. FICK[18]), BUCHNER[19]),

---

1) W. HENKE, Handbuch der Anatomie und Mechanik der Gelenke, Leipzig und Heidelberg 1863; ausserdem mehrere Einzelabhandlungen.

2) G. H. MEYER, Die Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes. Leipzig 1873.
Ders., Lehrbuch der Anatomie, Leipzig 1873.

3) W. WEBER u. E. WEBER, Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, Göttingen 1836.

4) JOH. ALPHONSUS BORÉLLUS, De motu animalium, Lugduni Batavorum 1679.

5) BICHAT, Traité d'Anatomie descriptive, Paris 1801.

6) CRUVEILHIER, Cours d'Études anatomiques, Paris 1830, T. I.

7) E. H. WEBER, Hildebrandt's Anatomie.

8) A. FICK, Die Gelenke mit sattelförmigen Flächen. Z. f. rat. Med. IX. Heidelberg 1854.
Ders., Specielle Bewegungslehre im Handbuch der Physiologie v. HERMANN, Bd. I, Theil II.
Ders., Die medicinische Physik, Braunschweig, 3. Aufl., 1885.

9) LANGER, Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. XII, XIV, XVIII, XXXII u. a.
Ders., Lehrbuch der Anatomie, II. Aufl., Wien 1882.

10) L. FICK, Ueber die Gestaltung der Gelenkflächen, REICHERT u. DUBOIS Archiv 1859.

11) HYRTL, Handbuch der topographischen Anatomie, Wien 1860.
Ders., Anatomie des Menschen, Wien 1875.

12) LUSCHKA, Anatomie der Glieder, Tübingen 1865.

13) WELCKER, Ueber Pronation und Supination des Vorderarmes. Archiv f. Anatomie. (REICHERT u. DU BOIS-REYMOND) 1875, p. 1.

14) HENLE, Handbuch der Bänderlehre des Menschen, Braunschweig 1872.

15) AEBY, Zeitschrift f. rat. Medicin, III. Reihe, Bd. XVII.

16) LECOMTE, Le coude et la rotation de la main. Archives générales de médécine. Août 1874, Mai et Juin 1877.

17) SAPPEY, Anatomie descriptive, Paris 1876.

18) E. FICK, Zur Mechanik des Kniegelenks. Archiv f. Anat. u. Phys. Anat. Abt. 1877, p. 439.
Ders., Zur Frage der Hüftgelenksfixation, ebendaselbst 1878, p. 222.
Ders., Zur Mechanik des Hüftgelenks, ebendaselbst 1878, p. 519.

19) BUCHNER, Archiv f. Anatomie 1877, p. 22 und 1878, p. 229.

Einthoven[1]), Koster[2]), Morris[3]), Reeves[4]), Schulin[5]), Heiberg[6]), Strasser[7]), Strasser u. Gassmann[8]), Krause[9]), Quain[10]), Hueter[11]), Testut[12]), Bowdisch u. Luce[13]), R. Fick[14]), Boegle[15]), Braune u. Kyrklund[16]), Braune u. Flügel[17]), Braune u. Fischer[18]), u. a. m.

Messungen über die Dimensionen, die Masse und Massenvertheilung der Körperabschnitte liegen dagegen in weit geringerer An-

1) Einthoven, Archives Néerlandaises des sciences etc. Harlem, T. XVII, 3. liv. p. 392.
2) Koster, Weekblad van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde 1880 p. 213.
3) Morris, The Anatomy of the joints of man. London 1879.
4) Reeves, Human Morphology, London 1882.
5) R. Schulin, Ueber die Entwickelung und weitere Ausbildung der Gelenke des menschl. Körpers. Archiv f. Anatomie u. Physiologie 1879, p. 240.
6) Heiberg, Die Drehung der Hand, Leipzig 1884.
7) Strasser, Ueber den Flug der Vögel.
Ders., Zur principiellen Einigung in Sachen der Gelenkmechanik, deutsche Zeitschrift für Chirurgie 1881.
Ders., Zur functionellen Anpassung der quergestreiften Muskulatur, Stuttgart 1883.
8) Strasser u. Gassmann, Hülfsmittel und Normen zur Bestimmung und Veranschaulichung der Stellungen, Bewegungen und Kraftwirkungen am Kugelgelenk, Wiesbaden 1893.
9) Krause, Anatomie, Hannover 1879, Bd. II.
10) Quain, Elements of Anatomy, herausgegeben von Thomson, Schäfer, Thane. London 1882.
11) Hueter, Anatomische Studie an den Extremitätengelenken Neugeborener und Erwachsener. Virchow's Archiv, Bd. 28, p. 273.
12) Testut, Anatomie, Paris 1889.
13) Charles Luce, The movements of the lower jaw. Boston med. journal 1889.
14) R. Fick, Ueber die Form der Gelenkflächen. Archiv f. Anat. u. Physiol. Anat. Abt. 1890, p. 391.
15) Boegle, Ueber den Mechanismus des menschlichen Ganges und die Beziehungen zw. Form u. Bewegung.
Ders., Die Entstehung und Verhütung der Fussabnormitäten. München und Leipzig 1893.
16) Braune u. Kyrklund, Ein Beitrag zur Mechanik des Ellbogengelenks. Archiv f. Anat. 1879, p. 332.
17) Braune u. Flügel, Ueber Pronation und Supination des menschl. Vorderarms und der Hand. Archiv f. Anat. u. Physiol. Anat. Abt. 1882, p. 169.
18) Bbaune u. Fischer, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode. Abh. d. k. S. G. d. W. Bd. XIII.
Dies., Das Handgelenk, Abh. d. kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XIV.
Dies., Das Gesetz der Bewegungen in den Gelenken an der Basis der mittleren Finger und im Handgelenk des Menschen, ebendas. Bd. XIV.
Dies., Ueber den Antheil, den die einzelnen Gelenke des Schultergürtels an der Beweglichkeit des menschlichen Humerus haben, ebendas. Bd. XIV.
Dies., Die Bewegungen des Kniegelenks nach einer neuen Methode am lebenden Menschen gemessen, ebendas., Bd. XVII.
O. Fischer, Das Ellbogengelenk, ebendas., Bd. XIV.

zahl vor. Der Erste, welcher sich überhaupt mit dieser Seite des Problems beschäftigte, war Borelli[1]); derselbe hat zuerst die Lage des Schwerpunktes im menschlichen Körper experimentell bestimmt. Dann folgen die Untersuchungen von den Brüdern Weber[2]), von Meyer[3]), Harless[4]), Braune und Fischer[5]) u. A. Durch diese Arbeiten ist trotz ihrer geringen Anzahl der menschliche Körper, so weit man sich auf die Zerlegung desselben in die grösseren Abschnitte beschränkt, ein bekanntes Object der Bewegung geworden. Denn zur mechanischen Charakterisirung eines Körpers ist nur die Kenntniss seiner Masse, der Lage seines Schwerpunktes und der Trägheitsmomente für alle Axen durch den Schwerpunkt erforderlich.

Weit weniger ist bis jetzt von anatomischer Seite zur Lösung der viel umfangreicheren Aufgabe gethan worden, die Wirkungsweise der einzelnen Muskeln festzustellen, so weit sich dieselbe aus ihrer Lage zu den Knochen und Gelenken ergiebt. Hauptsächlich sind es statische Aufgaben, denen man sich zugewendet hat. In dieser Beziehung hat zuerst A. Fick[6]) durch eine präcise Formulirung der Fragestellung und durch seine Behandlung des Gegenstandes das Fundament zu einer allgemeinen Muskelstatik gelegt. Einen Beitrag dazu liefert auch die Abhandlung von Fuchs[7]) über die Gleichungen der Muskelstatik. Von A. Fick[8]) rühren ferner die ersten genauen Messungen über Muskelansätze und die daraus sich ergebenden Werte der Drehungsmomente her. Ausserdem beschäftigen sich mit der Bestimmung von Drehungsmomenten die Arbeiten von Strasser[9]), sowie

---

1) a. a. O. 2) a. a. O.

3) H. v. Meyer, Die wechselnde Lage des Schwerpunktes im menschlichen Körper, Leipzig, 1863. — Ders., a. a. O.

4) Harless, Die statischen Momente der menschlichen Gliedmaassen. Abh. d. kgl. Bayr. Ak. d. W. 1857 u. 1860.

5) Braune u. Fischer, Ueber den Schwerpunkt des menschlichen Körpers u. s. w. Abh. d. kgl. S. G. d. W. Bd. XV.

Dies., Bestimmung der Trägheitsmomente des menschl. Körpers und seiner Glieder, ebendas. Bd. XVIII.

6) A. Fick, Specielle Bewegungslehre a. a. O. und medicinische Physik.

7) Fr. Fuchs, Ueber die Gleichungen der Muskelstatik mit Zugrundelegung der Forderung des kleinsten Stoffumsatzes. Pflüger's Archiv f. Physiol. Bd. XIX, p. 67.

8) A. Fick, Statische Betrachtung der Muskulatur des Oberschenkels. Zeitschr. f. rat. Med. IX.

9) a. a. O.

von Strasser und Gassmann[1]), die Abhandlung von E. Fick und E. Weber[2]) über die Schultermuskeln, die Arbeit von E. Fick[3]) über zweigelenkige Muskeln und die Abhandlung von W. Braune und O. Fischer[4]) über die Drehungsmomente der Beugemuskeln des Ellbogengelenks. Während A. Fick die Drehungsmomente aus den Coordinaten der Insertionsstellen der Muskeln ableitete, sind in den zuletzt genannten Arbeiten die Drehungsmomente durch Bestimmung der zu einer kleinen Gelenkverrückung gehörenden Elementararbeit des Muskels gewonnen worden. Endlich sind von R. Fick[5]) zahlreiche Messungen angestellt worden über die gesammte Arbeit, welche die auf die Fussgelenke wirkenden Muskeln während der Ueberführung der einzelnen Fussgelenke aus einer extremen Stellung in die andere leisten.

Mit diesen Arbeiten ist, so weit mir bekannt, leider die Reihe der Untersuchungen am Cadaver erschöpft, welche directe Messungen der auf die grösseren Muskelpartien bezüglichen Daten zum Gegenstand haben. Abgesehen von directen Messungen finden sich in allen Handbüchern und Lehrbüchern der Anatomie theoretische Betrachtungen über die Wirkung der Muskeln vor, insbesondere in den bekannten mechanisch-anatomischen Büchern von Henke, H. v. Meyer, und Kollmann[6]) und in der Mechanik der Gehwerkzeuge der Brüder Weber. Von grosser Bedeutung für die Frage nach der Muskelwirkung sind ferner die zahlreichen Versuche, welche Duchenne am Lebenden anstellte, um mittels isolirter Reizung die Functionen der einzelnen Muskeln aufzudecken. Die Resultate derselben sind in dem klassischen Werke »Physiologie des Mouvements«[7]) niedergelegt.

Die Frage nach der thatsächlichen Betheiligung sämmtlicher Muskeln an der Hervorbringung einer bestimmten, im Leben häufig vorkommenden Bewegung des ganzen Körpers ist dagegen, abgesehen von den Arbeiten über die Augenmuskeln und Kehlkopfmuskeln, bis jetzt

1) a. a. O.
2) E. Fick u. E. Weber, Anatomisch-mechanische Studie über die Schultermuskeln. Würzb. Verh. N. F. Bd. XI, p. 349.
3) E. Fick, Ueber zweigelenkige Muskeln, Archiv f. Anatomie 1879, p. 201.
4) W. Braune u. O. Fischer, Die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. 1889. Abh. d. kgl. S. Ges. d. Wiss. Bd. XV.
5) R. Fick, Ueber die Arbeitsleistung der auf die Fussgelenke wirkenden Muskeln. Habilitationsschrift. Würzburg 1892.
6) Kollmann, Mechanik des menschlichen Körpers. Naturkräfte Bd. 13. München, 1874.
7) Paris 1867.

noch nicht einer eingehenden Untersuchung unterworfen worden. Eine derartige Untersuchung kann auch gar nicht in Angriff genommen werden, bevor nicht von den einzelnen Wissenschaften die dazu nöthigen Vorarbeiten beendigt sind.

Was nun endlich die rein mathematisch-physikalischen Beiträge anlangt, so liegt bisher nur ein einziger vor, nämlich der Theil der WEBER'schen Mechanik der Gehwerkzeuge, welcher von der Theorie des Gehens und Laufens handelt. Wenn sich auch dabei Voraussetzungen und Einschränkungen nothwendig gemacht haben, welche sich von der Wirklichkeit mehr oder weniger entfernen — wie die Ausschliessung der Beweglichkeit in den Knie- und Fussgelenken, Verlegung der Massen vom Rumpf einerseits und der unteren Extremität andererseits nach je einem einzigen Punkte, dem Massenmittelpunkte, und infolge dessen Vernachlässigung der (damals noch nicht bekannten) Trägheitsmomente dieser Abschnitte u. s. w. —, so ist doch durch die WEBER'sche Theorie des Gehens eine streng mechanische Behandlung derartiger Fragen angebahnt worden. Im Uebrigen ist aber auf diesem Gebiete so gut wie nichts gethan worden, und es bleibt der Untersuchung noch ein weites Feld.

Einen weiteren, rein mechanischen Beitrag zu dem Problem der Muskelwirkung am bewegten Körper zu liefern, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Die Aufgaben der Mechanik lassen sich, soweit sie sich auf Kräfte und die durch dieselben hervorgebrachten Bewegungen beziehen, in zwei Gruppen theilen.

Die eine Gruppe nimmt die Kräfte als gegeben an und fragt nach den Bewegungen, welche durch dieselben an bestimmten, ihrer mechanischen Natur nach bekannten Körpern oder Körpersystemen hervorgebracht werden.

Die andere Gruppe setzt umgekehrt den Bewegungszustand des Körpers für den ganzen Verlauf der Bewegung als bekannt voraus und fragt nach den Kräften, welche thätig sein müssen, um diese Bewegung zu erzeugen.

Zu der zweiten Gruppe von mechanischen Aufgaben gehört das Problem der Bewegungen des menschlichen Körpers, so weit dieselben der Thätigkeit von Muskeln zuzuschreiben sind. Denn hier sind es die wirksamen Muskelspannungen, auf deren Bestimmung die Untersuchung hinausläuft. Daraus erwächst aber die Nothwendigkeit, sich eine genaue Kenntnis des Bewegungszustandes des menschlichen Körpers für den ganzen Verlauf der Bewegung auf empirischem Wege zu verschaffen. Erst wenn man weiss, in welcher Lage sich die einzelnen Glieder zu einander in jedem bestimmten Zeitmomente befinden, wenn man die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen festgestellt hat, mit welchen sie ihre gegenseitige Stellung und ihre Lage im Raume zu verändern streben, und wenn man die Bedingungen in Rücksicht zieht, welche den Bewegungen der Glieder durch die Massenvertheilung und die Gelenkverbindungen gesetzt sind, darf man hoffen, einen Einblick in die Thätigkeit der inneren Kräfte des Körpers zu gewinnen.

Diese nothwendige Kenntniss des Bewegungszustandes des menschlichen Körpers lässt sich aber bei geeigneter Anordnung des Versuchs und bei Anwendung sehr genauer Messinstrumente auf empirischem Wege erlangen; sie ist von uns in der That für den Gang des Menschen unter Zuhülfenahme der Photographie gewonnen worden.

Im Sommer des Jahres 1891 war es mir noch vergönnt, mit meinem, leider so früh aus einem arbeitsreichen Leben durch den Tod abberufenen, unvergesslichen, theuren Lehrer, Herrn Geheimen Medicinalrath Professor Dr. Wilhelm Braune, derartige photographische Fixirungen der einzelnen Bewegungsphasen beim Gange des unbelasteten und belasteten Menschen vorzunehmen. Wir haben zu dem Zwecke an einem Menschen in allen einzelnen Gliederabschnitten Geissler'sche Röhren (Capillarröhren) von der Länge der einzelnen Abschnitte in der Weise angebracht, dass dadurch die freie Beweglichkeit nicht im Geringsten gestört war, andererseits aber jede Röhre während der Bewegung fest mit dem betreffenden Körperabschnitte verbunden blieb. Da wir für die Bewegungen des Gehens die Hand zum Unterarm und den Kopf zum Rumpf festgestellt annahmen, so hatten wir 11 solcher Röhren nöthig. Alle 11 wurden in ein und denselben Strom eines Ruhmkorff'schen Funkeninductors eingeschaltet, welcher durch eine Stimmgabelunterbrechung in gleichgrossen Intervallen erzeugt wurde. Der Versuch wurde mitten in der Nacht angestellt, damit die sehr empfindlichen photographischen Platten (Momentplatten) nur von dem Lichte der Geissler'schen Röhren getroffen und die vier zu gleicher Zeit verwendeten photographischen Apparate vor dem Versuche ohne Gefahr geöffnet werden konnten. Nachdem das Versuchs-Individuum schon mehrere Schritte gegangen war, wurde während einer kurzen Zeit der Inductor in Thätigkeit gesetzt und auf diese Weise die Bewegung von vier verschiedenen Richtungen aus in einer grossen Anzahl, in gleichen Zeitintervallen aufeinander folgender Phasen photographisch fixirt. Auf dieselben Platten wurde hinterher ein Coordinatennetz photographirt und dadurch die Möglichkeit gegeben, die Bewegung auf ein räumliches Coordinatensystem zu beziehen.

Photographische Fixirungen der einzelnen Phasen des menschlichen Ganges sind zwar schon von dem amerikanischen Photographen Muybridge und dem deutschen Photographen Anschütz, vor allen Dingen aber zum Zwecke wissenschaftlicher Untersuchung von dem Pariser Physiologen Marey (niedergelegt in den Comptes rendus des letzten Jahrzehntes) ausgeführt worden. Aus den Arbeiten von Anschütz und Marey ist es aber nicht möglich, die räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte zu gewinnen, da Beide immer nur eine Projection auf einmal aufgenommen haben. Der Amerikaner Muybridge hat nun zwar gleichzeitige Aufnahmen von verschiedenen Seiten gewonnen; bei seiner Anordnung des Versuchs wird aber ein Schritt in zu wenig Phasen zerlegt, als dass die Bilder eine Verwendung für wissenschaftliche Zwecke gestatteten. Ausserdem eignen sich die Serienbilder von Muybridge und Anschütz schon deshalb nicht zu genauen Messungen, weil sie sich nicht, wie es bei den vorzüglichen Aufnahmen von Marey der Fall ist, auf ein und derselben Platte befinden. Diese Gründe nöthigten uns, für den angedeuteten Zweck mittelst einer anderen Methode selbst photographische Aufnahmen des Ganges zu machen.

Die Resultate dieser Untersuchung sollen später an einer anderen Stelle veröffentlich werden. So weit sich bis jetzt herausgestellt hat, sind die Messungen so genau ausgefallen, dass nicht nur die ersten Differenzen, welche bei diesen kleinen, gleichgrossen Zeitintervallen mit grosser Annäherung den Geschwindigkeiten proportional sind, sondern auch die den Beschleunigungen entsprechenden zweiten Differenzen der Coordinaten der einzelnen Gelenkmittelpunkte continuirliche, nicht von vielen Zacken durchsetzte Curven ergeben.

Ein Beweis für deren Verwendbarkeit! Man hat also damit die empirischen Unterlagen gewonnen, um in jedem beliebigen Moment den Bewegungszustand, d. h. die lebendige Kraft und die Veränderungen derselben beim menschlichen Gange angeben zu können.

Wenn ich es mir auch versagen muss, hier näher auf diese speciellen Untersuchungen einzugehen, so glaubte ich doch, in Kurzem derselben Erwähnung thun zu müssen, weil sie die Veranlassung zu der vorliegenden Arbeit geboten haben, und weil sich aus denselben die Nothwendigkeit der folgenden Betrachtungen ergibt, wenn man aus den Resultaten der photographischen Fixirung nicht blos rein geometrische Schlüsse, sondern auch solche ableiten will, welche sich auf die während der Bewegung im Inneren des Körpers thätigen Kräfte beziehen. Denn für diesen Zweck ist es vor allen Dingen erforderlich, die Beziehungen aufzustellen, welche zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft des Körpers oder, was auf dasselbe hinauskommt, zwischen den Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Massen der einzelnen Körpertheile einerseits und den Elementararbeiten der äusseren und inneren Kräfte, d. h. den Arbeiten bei unendlich kleiner Verrückung des Körpersystems andererseits bestehen.

In diesen Beziehungen hat man dann ein Mittel, die Grösse des resultirenden Drehungsmomentes der in jedem Augenblicke wirksamen inneren Kräfte zu berechnen, da man alle anderen Grössen, nämlich die lebendige Kraft und deren Aenderungen für den ganzen Verlauf der Bewegung und auch die Elementararbeiten der äusseren Kräfte auf empirischem Wege gewinnen kann. Kennt man aber das resultirende Drehungsmoment für die Gesammtheit der in Frage kommenden Muskeln, welche die inneren Kräfte repräsentiren, so ist es möglich, den Antheil zu bestimmen, welchen die einzelnen Muskeln an der Hervorbringung dieses Drehungsmomentes haben, wenn man das beim wirklichen Gebrauche der Muskeln im Leben höchst wahrscheinlich geltende Princip der kleinsten Anstrengung zu Hülfe nimmt. Es ist somit das Problem an eine Frage der Muskelstatik angeschlossen, welche schon von mehreren Seiten, namentlich von A. Fick[1]) und Fr. Fuchs[2]) in Angriff genommen worden ist.

---

1) Medicinische Physik, 3. Auflage, p. 79. 2) a. a. O.

Der Bewegungzustand eines Körpers findet seinen Ausdruck in der lebendigen Kraft oder kinetischen Energie desselben.

Handelt es sich nur um eine einzige starre Masse, so stellt sich die lebendige Kraft als Summe nur zweier Bestandtheile dar. Der erste Bestandtheil ist die lebendige Kraft des Schwerpunktes (Massenmittelpunktes), wenn in ihm die Gesammtmasse vereinigt gedacht wird. Der zweite Bestandtheil stellt die lebendige Kraft dar, welche der Körper infolge seiner Bewegung relativ zum Schwerpunkte besitzt. Bewegt sich der Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit v und bezeichnet m die Masse des Körpers, so ist der erste Bestandtheil $\frac{1}{2} m v^2$. Die dann noch zu berücksichtigende Bewegung relativ zum Schwerpunkt kann in jedem Moment nur in einer Rotation um eine Axe durch den Schwerpunkt bestehen. Beträgt die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation w und der Trägheitsradius des Körpers für die Rotationsaxe durch den Schwerpunkt $\varkappa$, so besitzt der zweite Bestandtheil die Grösse $\frac{1}{2} m \varkappa^2 w^2$. Die gesammte lebendige Kraft T hat also den Werth:

$$T = \tfrac{1}{2} m \left(v^2 + \varkappa^2 w^2\right).$$

Besteht die Bewegung des Körpers nur in einer Translation, so ist $w = 0$ und die lebendige Kraft wird allein durch $\frac{1}{2} m v^2$ dargestellt. Andererseits verschwindet dieser erste Bestandtheil, wenn die Bewegung des Körpers ausschliesslich in einer Rotation um eine Axe durch den Schwerpunkt besteht, und der Ausdruck für die ganze lebendige Kraft ist dann $\frac{1}{2} m \varkappa^2 w^2$. Die Grösse des Trägheitsradius $\varkappa$ ändert sich im Allgemeinen mit der Richtung der Rotationsaxe.

So einfach stellen sich die Verhältnisse nur bei einer einzigen starren Masse.

Hat man es dagegen mit einem System von starren Massen zu thun, welche ihre gegenseitige Lage zu einander verändern können, wie es beim menschlichen Körper der Fall ist, so setzt sich die lebendige Kraft aus einer grossen Anzahl von Bestandtheilen zusammen. Der Ausdruck für die lebendige Kraft wird dann sehr verwickelt, wie aus den späteren Darlegungen hervorgeht. Dies ist nicht allein eine Folge der grösseren Anzahl von bewegten Massen, sondern rührt hauptsächlich auch davon her, dass der Ausdruck für die lebendige Kraft den Bedingungen Rechnung zu tragen hat, welche den Bewegungen der einzelnen Körpertheile durch die Gelenkverbindungen einerseits und durch von aussen her kommende Einflüsse, wie sie z. B. das Festhalten eines Fusses am Erdboden mit sich bringt, andererseits gesetzt sind.

Man kann jedoch auch hierbei die lebendige Kraft, welche der Gesammtschwerpunkt infolge seiner Geschwindigkeit besitzen würde, wenn man die Summe aller Massen des Systems in ihm concentrirt annimmt, absondern von der Summe der lebendigen Kräfte, welche den Bewegungen der einzelnen Theile des Systems relativ zum Gesammtschwerpunkt entsprechen.

Erst nachdem man den Ausdruck für die lebendige Kraft eines im mechanischen Sinne so verwickelten Massensystems gefunden hat, kann man daran gehen, die Beziehungen zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft und den Elementararbeiten der äusseren und inneren Kräfte aufzustellen.

Da die Mechanik bisher noch wenig Veranlassung genommen hat, sich mit derartig verwickelten Systemen, wie sie die Körper des Menschen oder der höheren Thiere darstellen, zu beschäftigen, so ist es zunächst erforderlich, eine Methode aufzusuchen, mittelst deren man in diesem Falle auf möglichst einfache Weise zu dem Ausdrucke für die lebendige Kraft und zu den Beziehungen zwischen den Aenderungen derselben und den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte gelangt.

Diese Methode soll an einem besonders einfachen Körpersystem entwickelt werden. Darauf soll dann erst der menschliche Körper selbst den Gegenstand der Untersuchung bilden.

Wenn man den allgemeinsten Fall der Bewegung des menschlichen Körpers in Betracht zieht, welcher alle im Leben möglichen Bewegungen als specielle Fälle umfasst, so stellen sich naturgemäss ausserordentlich verwickelte und unübersichtliche Formeln heraus. Aus diesem Grunde soll hier nur eine besondere Bewegungsart des Körpers berücksichtigt werden, welche sich nahezu beim Gehen und Laufen verwirklicht findet. Die Ableitung der Resultate des allgemeinsten Bewegungsfalles, welche auch zur Zeit schon fertig vorliegen, wird den Gegenstand einer besonderen Veröffentlichung bilden.

I. Die Methode der Ableitung der lebendigen Kraft.

Zur Darlegung der Methode für die Gewinnung der lebendigen Kraft eines Systems von Körpern, welche miteinander durch Gelenke verbunden sind, soll folgendes einfache System in Betracht gezogen werden.

Von drei Körpern mit den Massen m_1, m_2, m_3 und den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3 sollen sowohl der erste und zweite als auch der zweite und dritte durch je ein Charniergelenk miteinander verbunden sein. Die Axen beider Gelenke seien parallel gerichtet, und die durch dieselben bestimmte Ebene enthalte den Schwerpunkt S_2 des zweiten Körpers. Ausserdem soll die Ebene der drei Schwerpunkte für irgend eine Stellung der drei Körper auf den beiden Gelenkaxen senkrecht stehen; dann wird dies für alle anderen Stellungen der Körper zu einander auch der Fall sein. Bestimmt man noch, dass die Ebene der drei Schwerpunkte im Raume fest bleibt, so kann das Körpersystem nur ebene Bewegungen ausführen, d. h. die Bahnen aller Punkte sind ebene Curven, welche der festen Ebene parallel laufen. Man hat daher nur die Projection der Bewegung auf die feste Ebene der drei Schwerpunkte zu untersuchen.

Die Durchschnittspunkte der beiden Gelenkaxen mit dieser Ebene sollen bezüglich mit $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ und die Verbindungslinien $\overline{S_1 G_{1,2}}$, $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$ und $\overline{G_{2,3} S_3}$, bezüglich deren Verlängerungen, als Längsaxen der drei Körper bezeichnet sein. (Fig. 1 auf folg. Seite.) Nach den getroffenen Voraussetzungen wird der Schwerpunkt S_2 in der Längsaxe $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$ liegen. Auf jeder der drei Längsaxen hat man eine positive und eine negative Richtung zu unterscheiden. Die positive Richtung soll diejenige sein, in welcher die Längsaxen durchlaufen werden, wenn man von S_1 aus den gebrochenen Linienzug $S_1 G_{1,2} G_{2,3} S_3$ beschreibt.

Die Lage des Systems ist vollständig bestimmt, wenn man die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 kennt, welche bezüglich die positiven Richtungen der drei Längsaxen mit einer festen Verticalen bilden, und wenn ausserdem die beiden rechtwinkligen Coordinaten x, z eines in der festen Ebene (welche vertical gestellt sein möge) gelegenen Punktes gegeben sind, der entweder fest mit einem der drei Körper verbunden, oder dessen

Lage zu den drei Körpern für jede Stellung derselben eindeutig bestimmt ist. Letzteres trifft z. B. für den Gesammtschwerpunkt S_0 des Systems zu.

Von den beiden, für diese ebene Bewegung in Betracht kommenden Coordinatenaxen falle die eine, welche die Z-Axe genannt sein möge, mit der Verticalen zusammen; die Richtung nach oben sei die positive. Die andere Coordinatenaxe, X-Axe, verläuft dann horizontal, und zwar in Fig. 1 nach rechts positiv. Für die Verticale, von welcher aus die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 gemessen werden, ist es in Anbetracht der späteren Anwendung auf den menschlichen Körper und der in der Anatomie gebräuchlichen Bezeichnungsweise zweckmässiger, dieselbe nach unten positiv zu rechnen; sie wird dann parallel der negativen Z-Axe verlaufen oder mit derselben zusammenfallen.

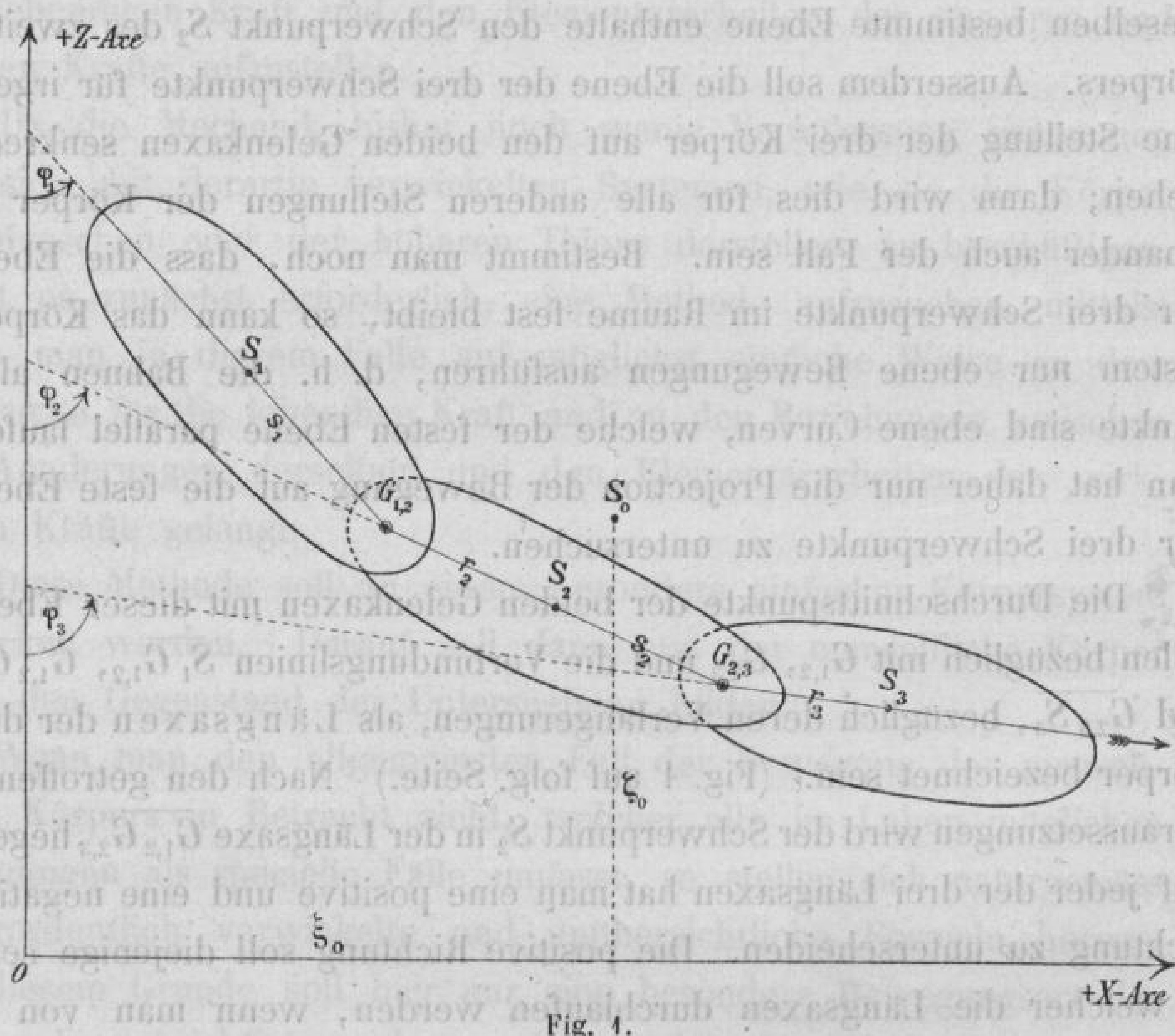


Fig. 1.

Der Gelenkpunkt $G_{1,2}$ habe von S_1 die Entfernung s_1, der Schwerpunkt S_2 von $G_{1,2}$ die Entfernung r_2, der Gelenkpunkt $G_{2,3}$ von S_2 die Entfernung s_2 und der Schwerpunkt S_3 von $G_{2,3}$ die Entfernung r_3. Bedeutet l_2 den Abstand der beiden Gelenkaxen, so muss nach der getroffenen Voraussetzung über die Lage des Schwerpunktes S_2 die Relation bestehen $r_2 + s_2 = l_2$.

A. Das frei bewegliche System.

Es soll nun zunächst angenommen werden, dass keinerlei Bedingungen für die Beweglichkeit des Systems bestehen.

Ist das Körpersystem in beliebiger Bewegung begriffen, so ist in jedem Moment die gesammte lebendige Kraft desselben gleich der lebendigen Kraft einer Masse, welche gleich der Summe m_0 der drei Massen des Systems ist und sich mit der Geschwindigkeit v_0 des Gesammtschwerpunktes S_0 bewegt, vermehrt um die Summe der lebendigen Kräfte, welche den auf den Gesammtschwerpunkt bezogenen relativen Bewegungen der einzelnen Körper des Systems entsprechen.

Die Bewegung, welche jeder der drei Körper relativ zum Gesammtschwerpunkt S_0 besitzt, kann man zerlegt denken in eine Translation von der Geschwindigkeit v_h des Einzelschwerpunktes S_h relativ zu S_0 und eine Rotation um eine zu den Gelenkaxen parallele Axe durch S_h von der Winkelgeschwindigkeit φ'_h. Die lebendige Kraft jedes einzelnen Körpers relativ zum Gesammtschwerpunkt stellt sich infolgedessen ebenfalls als Summe zweier Bestandtheile dar. Der eine Bestandtheil ist die lebendige Kraft, welche die Masse m_h des Körpers besitzt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit v_h bewegt, die der Einzelschwerpunkt S_h relativ zum Gesammtschwerpunkt S_0 besitzt, der andere Bestandtheil ist die lebendige Kraft, welche aus der Winkelgeschwindigkeit φ'_h des Körpers um die Axe durch S_h resultirt.

Es soll nun zunächst die lebendige Kraft bestimmt werden, welche das ganze System relativ zum Gesammtschwerpunkt besitzt, wenn es sich aus einer beliebigen Lage in eine unendlich benachbarte bewegt.

Nimmt man vorläufig an, dass der Gesammtschwerpunkt fest bleibt, so ist eine beliebige unendlich kleine Verrückung des Systems dadurch charakterisirt, dass die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 bezüglich die unendlich kleinen Aenderungen $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ erfahren. Diese Verrückung kann man sich in drei Schritte zerlegt denken. Bei dem einen soll nur der Winkel φ_1 der Aenderung $d\varphi_1$ unterworfen werden, während die beiden anderen Winkel φ_2 und φ_3 constant bleiben, beim zweiten und dritten Schritte soll die Verrückung nur in einer Aenderung von φ_2 bezüglich φ_3 um die Grösse $d\varphi_2$ bezüglich $d\varphi_3$

bestehen, während jedesmal die beiden anderen Winkel ihren Werth beibehalten. Es kommt also jeder der drei Schritte darauf hinaus, einem der drei Körper eine unendlich kleine Rotation zu ertheilen, während die beiden anderen, welche infolge des Zusammenhangs der Körper dabei nicht in Ruhe bleiben können, gleichzeitig nur Translationen ausführen dürfen. Die Translation jedes der anderen beiden Körper ist gegeben durch die Translation desjenigen Gelenkpunktes, welcher die unmittelbare oder mittelbare Verbindung des betreffenden Körpers mit dem in Rotation begriffenen darstellt.

Es entsteht nun die Frage: um welche Axe muss die unendlich kleine Rotation des einen Körpers stattfinden, damit bei der dadurch bedingten Verrückung des ganzen Systems der Gesammtschwerpunkt S_0 seinen Ort beibehält?

Um diese Frage zu entscheiden, soll zunächst dem ersten Körper eine unendlich kleine Rotation von der Grösse $d\varphi_1$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt S_1 ertheilt werden, während φ_2 und φ_3 constant bleiben, so dass die beiden anderen Körper nur Translationen ausführen dürfen. Diese Translationen sind für beide gleich, und zwar sind sie identisch mit der Translation des Gelenkpunktes $G_{1,2}$. Da der letztere von S_1 die Entfernung s_1 besitzt, so ist die Grösse dieser Translation $s_1 d\varphi_1$. Dieselbe Translation erfährt auch der Gesammtschwerpunkt $S_{2,3}$ vom zweiten und dritten Körper. Beachtet man nun, dass für jede Stellung des Körpersystems der Gesammtschwerpunkt S_0 des ganzen Systems auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte S_1 und $S_{2,3}$ liegt und dieselbe im umgekehrten Verhältniss der Massen bezüglich Massensumme m_1 und $(m_2 + m_3)$ theilt, so ergibt sich, dass der Gesammtschwerpunkt S_0 dabei eine Verrückung von der Grösse $\frac{m_1 + m_2}{m_0} s_1 d\varphi_1$ erleidet, wobei nach der eingeführten Bezeichnung $m_0 = m_1 + m_2 + m_3$ ist.

Um dieses Resultat zu beweisen, seien in nebenstehender Figur 2, $S_1, S_0, S_{2,3}$ die Orte der drei Schwerpunkte vor der Verrückung und $S_1, S_0', S_{2,3}'$ dieselben nach der Verrückung, bei welcher S_1 fest geblieben ist.

Dann muss stattfinden:

$$\overline{S_1 S_0} : \overline{S_0 S_{2,3}} = \overline{S_1 S_0'} : \overline{S_0' S_{2,3}'} = (m_2 + m_3) : m_1$$

und infolgedessen

$$\overline{S_1 S_0} : \overline{S_1 S_{2,3}} = \overline{S_1 S'_0} : \overline{S_1 S'_{2,3}} = \overline{S_0 S'_0} : \overline{S_{2,3} S'_{2,3}} = (m_2 + m_3) : (m_1 + m_2 + m_3).$$

Es ist daher, wenn $m_1 + m_2 + m_3 = m_0$ gesetzt wird:

$$\overline{S_0 S'_0} = \frac{m_2 + m_3}{m_0} \cdot \overline{S_{2,3} S'_{2,3}} = \frac{m_2 + m_3}{m_0} s_1 d\varphi_1 .$$

Da die Verrückung von $S_{2,3}$ senkrecht zur Längsaxe $\overline{S_1 G_{1,2}}$ des ersten Körpers gerichtet war, so ist dies auch die Verrückung von S_0. Die gleiche Verrückung wie S_0, sowohl der Grösse als auch der Richtung nach, wird daher ein Punkt H_1 auf der

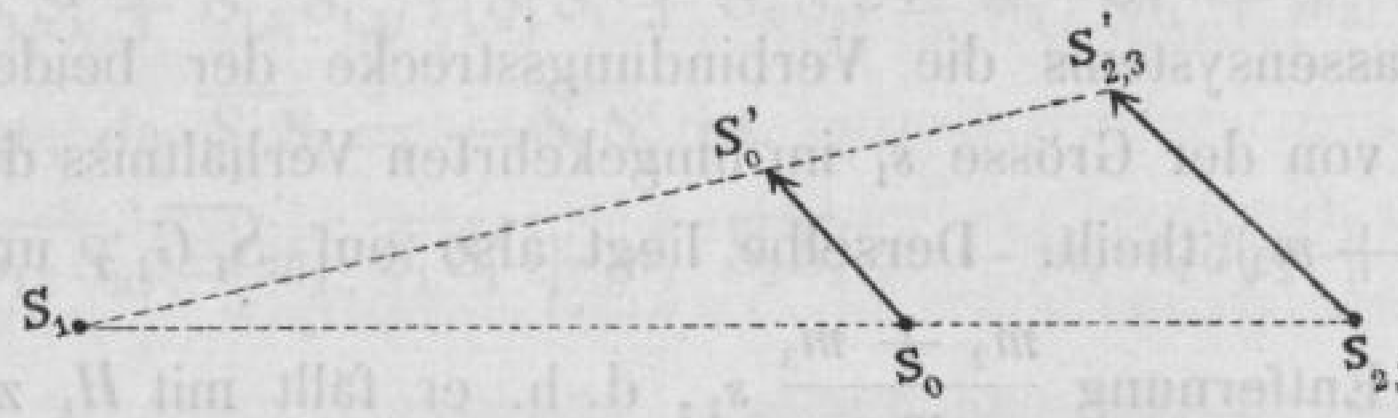


Fig. 2.

Längsaxe $\overline{S_1 G_{1,2}}$ erfahren, welcher von S_1 nach der Seite des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ hin die Entfernung $\frac{m_2 + m_3}{m_0} s_1$ besitzt.

Soll nun der Gesammtschwerpunkt S_0 des Körpersystems fest bleiben, so muss das System noch einer Translation unterworfen werden, welche entgegengesetzt gleich der Verrückung von S_0 ist, also die Grösse $-\frac{m_2 + m_3}{m_0} s_1 d\varphi_1$ besitzt. Dadurch wird nicht nur S_0 in seine alte Lage zurückgeführt, welche er vor der Verrückung inne hatte, sondern auch der Punkt H_1 auf der Längsaxe des ersten Körpers. Da durch die zuletzt hinzugefügte Translation die Winkel φ_2, φ_3 immer noch constant geblieben sind und auch die Grösse der Zunahme $d\varphi_1$ des ersten Winkels nicht geändert worden ist, so wäre man auf die schliessliche Lage des Systems auch gekommen, wenn man von vornherein dem ersten Körper nicht eine Rotation um die Axe durch den Schwerpunkt S_1, sondern um die ihr parallele Axe durch den Punkt H_1 ertheilt und gleichzeitig den beiden anderen Körpern nur Translationen gestattet hätte.

Die Lage des Punktes H_1 ist vollständig unabhängig von der anfänglichen Stellung der Körper zu einander; sie wird allein bestimmt durch die Grösse der drei Massen des Systems und die Lage des Schwerpunktes S_1 innerhalb des ersten Körpers. Daraus folgt, dass der Punkt H_1 eine feste Lage im ersten Körper besitzt, und es gilt der

Satz: Der Punkt H_1 ist der Schwerpunkt eines Massensystems, welches man erhält, wenn man in dem Gelenkpunkt $G_{1,2}$ die Massen m_2 und m_3 der beiden an $G_{1,2}$ hängenden Körper und im Schwerpunkt S_1 die Masse m_1 des ersten Körpers vereinigt annimmt.

Dieses Massensystem soll den Namen »erstes reducirtes System« führen.

Der Beweis ergiebt sich daraus, dass der Schwerpunkt dieses fingirten Massensystems die Verbindungsstrecke der beiden Punkte S_1 und $G_{1,2}$ von der Grösse s_1 im umgekehrten Verhältniss der Massen m_1 und $(m_2 + m_3)$ theilt. Derselbe liegt also auf $\overline{S_1 G_{1,2}}$ und besitzt von S_1 die Entfernung $\frac{m_2 + m_3}{m_0} s_1$, d. h. er fällt mit H_1 zusammen.

Für diesen Punkt H_1, welcher bisher noch nicht in die Mechanik eingeführt worden ist, der aber in mehrfacher Hinsicht wichtige mechanische Bedeutung besitzt, soll die Bezeichnung »Hauptpunkt des ersten Körpers« und für die Strecke zwischen dem Hauptpunkte H_1 und dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ die Bezeichnung »Hauptstrecke des ersten Körpers« verwendet werden.

Es soll nun ferner dem zweiten Körper eine unendlich kleine Rotation von der Grösse $d\varphi_2$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch S_2 ertheilt werden. Sollen die Winkel φ_1 und φ_2 dabei konstant bleiben, so muss der erste Körper die dadurch hervorgerufene Translation des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ und der dritte die Translation des Gelenkpunktes $G_{2,3}$ erfahren. Beide Translationen finden senkrecht zur Längsaxe des zweiten Körpers statt, ihre Richtungen sind aber entgegengesetzt, wenn S_2 zwischen die beiden Gelenkpunkte fällt. Da nach den Festsetzungen über die Richtung der Längsaxen der Abstand des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ von S_2 negativ zu rechnen ist, so sind die Grössen dieser beiden Translationen durch $-r_2 d\varphi_2$ und $s_2 d\varphi_2$ dargestellt. Der gemeinsame Schwerpunkt $S_{1,3}$ des ersten und dritten Körpers erleidet infolgedessen eine zur zweiten Längsaxe senkrecht gerichtete Translation von der Grösse $\frac{-m_1 r_2 + m_3 s_2}{m_1 + m_3} d\varphi_2$.

Dieses Resultat folgt daraus, dass $S_{1,3}$ auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte S_1, S_3 liegt und dieselbe im Verhältniss $m_3 : m_1$ theilt. Es ist also, wenn S_1', $S_{1,3}'$, S_3' die Lagen dieser drei Punkte nach der Verrückung bedeuten (vgl. Fig. 3)

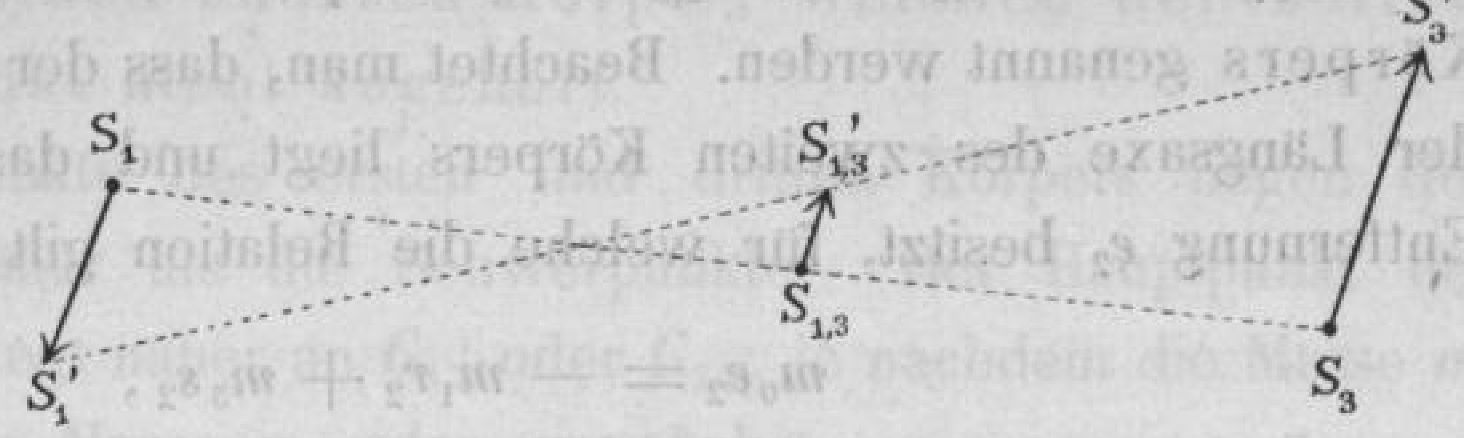


Fig. 3.

$$(\overline{S_1' S_1} + \overline{S_{1,3} S_{1,3}'}) : (\overline{S_1' S_1} + \overline{S_3 S_3'}) = m_3 : (m_1 + m_3)\,,$$

woraus folgt, da $\overline{S_1' S_1} = -\overline{S_1 S_1'}$ ist,

$$(m_1 + m_3)\,\overline{S_{1,3} S_{1,3}'} = m_1 \cdot \overline{S_1 S_1'} + m_3 \cdot \overline{S_3 S_3'} = -m_1 \cdot r_2 d\varphi_2 + m_3 \cdot s_2 d\varphi_2\,.$$

Es ist also

$$\overline{S_{1,3} S_{1,3}'} = \frac{-m_1 r_2 + m_3 s_2}{m_1 + m_3} d\varphi_2\,.$$

Da S_2 zunächst als fest angenommen ist, so resultirt daraus eine Verrückung des Gesammtschwerpunktes S_0 des Systems von der Grösse

$$\frac{m_1 + m_3}{m_0} \cdot \frac{-m_1 r_2 + m_3 s_2}{m_1 + m_3} d\varphi_2 = \frac{-m_1 r_2 + m_3 s_2}{m_0} d\varphi_2\,.$$

Dieselbe Verrückung, sowohl der Grösse als auch der Richtung nach, erfährt aber ein auf der Längsaxe des zweiten Körpers gelegener Punkt H_2, welcher von S_2 in positiver Richtung die Entfernung $\frac{-m_1 r_2 + m_3 s_2}{m_0}$ besitzt. Ertheilt man daher hinterher dem ganzen System eine Translation von der Grösse $-\frac{-m_1 r_2 + m_3 s_2}{m_0} d\varphi_2$, so wird dadurch nicht nur der Gesammtschwerpunkt S_0, sondern auch der Punkt H_2 auf der Längsaxe des zweiten Körpers an seine alte Stelle zurückgeführt. Es muss infolgedessen die Rotation des zweiten Körpers von der Grösse $d\varphi_2$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch H_2 stattfinden, wenn die Lage des Gesammtschwerpunktes S_0 erhalten bleiben soll. Der Punkt H_2 spielt daher für die zweite Art der Verrückung des Systems, bei welcher nur der Winkel φ_2 die Zunnahme $d\varphi_2$ erleiden soll, während φ_1 und φ_3 constant bleiben, dieselbe Rolle wie der Punkt H_1 für die zuerst betrachtete Verrückung, bei welcher φ_1 allein sich um $d\varphi_1$ änderte. Dementsprechend sollen H_2 der Hauptpunkt, und die Strecken zwischen H_2 und den Gelenkpunkten $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ die Hauptstrecken des zweiten Körpers genannt werden. Beachtet man, dass der Hauptpunkt H_2 auf der Längsaxe des zweiten Körpers liegt und dass er von S_2 eine Entfernung e_2 besitzt, für welche die Relation gilt

$$m_0 e_2 = - m_1 r_2 + m_3 s_2 ,$$

so ist ersichtlich, dass er mit dem Schwerpunkte des Massensystems zusammenfällt, welches man erhält, wenn man in den Gelenkpunkten $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ bezüglich die Massen m_1 und m_3 der durch diese Gelenke mit dem zweiten Körper verbundenen Körper concentrirt und in S_2 selbst die Masse des zweiten Körpers angebracht denkt. Dieses fingirte Massensystem soll »das zweite reducirte System« heissen.

Endlich ergiebt eine analoge Betrachtung, dass die Verrückung des Gesammtsystems, bei welcher φ_3 sich um $d\varphi_3$ ändert und sowohl die Grössen der Winkel φ_1, φ_2, als auch die Lage des Gesammtschwerpunktes erhalten bleiben, auf eine Rotation des dritten Körpers von der Grösse $d\varphi_3$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch einen im dritten Körper festen Punkt H_3, verbunden mit gleichzeitiger Translation der beiden anderen Körper, hinausläuft. Dieser Punkt H_3, welcher der Hauptpunkt, und dessen Entfernung von $G_{2,3}$ die Hauptstrecke des dritten Körpers genannt sein soll, liegt auf der Längsaxe des dritten Körpers und besitzt von S_3 die Entfernung $-\frac{m_1 + m_2}{m_0} r_3$. Da diese Entfernung einen negativen Werth besitzt, so ist H_3 zwischen dem Gelenkpunkte $G_{2,3}$ und dem Schwerpunkte S_3 zu suchen.

Der Hauptpunkt H_3 fällt zusammen mit dem Schwerpunkte des »dritten reducirten Systems«, d. h. des Massensystems, welches man erhält, wenn in $G_{2,3}$ die Massen m_1, m_2 der beiden ersten Körper und in S_3 die Masse des dritten Körpers concentrirt gedacht wird.

Als Resultat der voraufgehenden Betrachtung kann man den Satz aussprechen:

Satz: Jede Verrückung des Systems der drei Körper relativ zum Gesammtschwerpunkt S_0 aus der Lage φ_1, φ_2, φ_3 in die unendlich benachbarte $\varphi_1 + d\varphi_1$, $\varphi_2 + d\varphi_2$, $\varphi_3 + d\varphi_3$

kann zerlegt werden in drei unendlich kleine Rotationen um Axen durch die drei Hauptpunkte verbunden mit Translationen der beiden anderen Körper, welchen der betreffende Hauptpunkt nicht angehört.

Die Hauptpunkte des ersten und dritten Körpers liegen den Gelenkpunkten näher als die Schwerpunkte. Der Hauptpunkt des zweiten Körpers liegt näher an $G_{1,2}$ oder $G_{2,3}$, je nachdem die Masse m_1 grösser ist als die Masse m_3 oder umgekehrt.

Es sollen nun folgende Bezeichnungen für die Hauptstrecken und die Abstände der Schwerpunkte von den zugehörigen Hauptpunkten eingeführt werden (vgl. Fig. 4):

$$\overline{S_1 H_1} = e_1, \quad \overline{H_1 G_{1,2}} = d_1, \quad \overline{G_{1,2} H_2} = c_2, \quad \overline{S_2 H_2} = e_2,$$
$$\overline{H_2 G_{2,3}} = d_2, \quad \overline{G_{2,3} H_3} = c_3 \text{ und } \overline{H_3 S_3} = e_3.$$

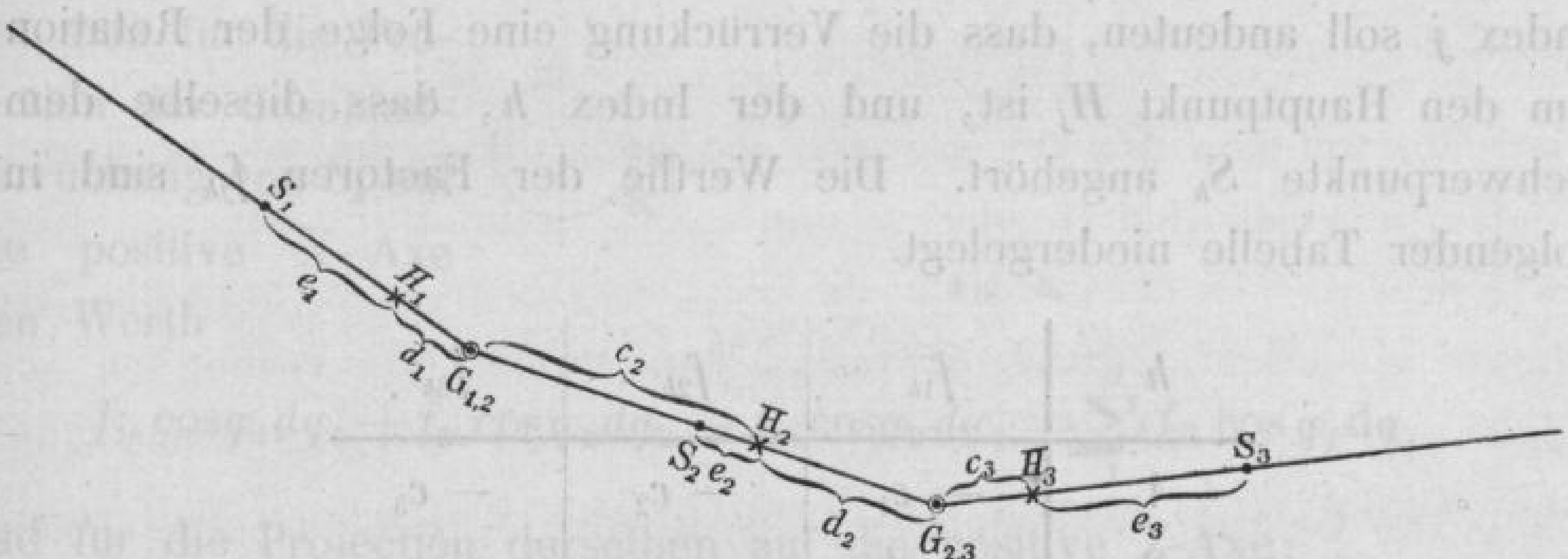


Fig. 4.

Nach der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reducirten Systeme müssen zwischen diesen Grössen und den Massen der drei Körper bei der in Figur 4 angenommenen Lage der einzelnen Punkte zu einander die Relationen bestehen:

$$- m_1 e_1 + (m_2 + m_3)\, d_1 = 0$$
$$- m_1 c_2 - m_2 e_2 + m_3 d_2 = 0$$
$$- (m_1 + m_2) c_3 + m_3 e_3 = 0.$$

Infolge der drei Verrückungen des Systems, welche bezüglich einer alleinigen Aenderung eines der drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 entsprechen, erleidet jeder der Einzelschwerpunkte drei Translationen. Beachtet man, dass die Abstände von den Hauptpunkten positiv oder negativ zu rechnen sind, je nachdem sie in positiver oder negativer Richtung auf den Längsaxen verlaufen, so ergeben sich als Grössen dieser Translationen bei der in der Figur angegeben Lage der einzelnen Punkte zu einander

$$\begin{array}{llll} \text{für } S_1: & -e_1\,d\varphi_1, & -c_2\,d\varphi_2, & -c_3\,d\varphi_3 \\ \text{für } S_2: & +d_1\,d\varphi_1, & -e_2\,d\varphi_2, & -c_3\,d\varphi_3 \\ \text{für } S_3: & +d_1\,d\varphi_1, & +d_2\,d\varphi_2, & +e_3\,d\varphi_3. \end{array}$$

Von den drei zu einem Schwerpunkte gehörenden Verrückungen ist immer die erste senkrecht zur ersten Längsaxe, die zweite senkrecht zur zweiten und die dritte senkrecht zur dritten Längsaxe gerichtet. Der Sinn jeder Verrückung ergibt sich aus dem Vorzeichen derselben.

Der Werth einer jeden der drei Verrückungen des Einzelschwerpunktes S_h stellt sich in der Form $f_{jh}\,d\varphi_j$ dar, wobei f_{jh} die positiv oder negativ zu rechnende Länge einer Hauptstrecke bedeutet. Der Index j soll andeuten, dass die Verrückung eine Folge der Rotation um den Hauptpunkt H_j ist, und der Index h, dass dieselbe dem Schwerpunkte S_h angehört. Die Werthe der Factoren f_{jh} sind in folgender Tabelle niedergelegt.

h	f_{1h}	f_{2h}	f_{3h}
1	$-e_1$	$-c_2$	$-c_3$
2	$+d_1$	$-e_2$	$-c_3$
3	$+d_1$	$+d_2$	$+e_3$

Die Gesammtverrückung eines jeden Schwerpunktes S_h ist nun die geometrische Summe (Resultante) der drei zugehörigen Einzelverrückungen. Sie wird also erhalten als Schlusslinie eines Streckenzuges, der in S_h beginnt, und dessen Seiten den drei Einzelverrückungen in beliebiger Aufeinanderfolge geometrisch gleich sind.

Um die geometrische Summe analytisch zu bestimmen, hat man jede Verrückung auf die beiden Coordinatenaxen zu projiciren. Zu dem Zwecke ist zu beachten, dass die drei Verrückungen, welche mit $d\varphi_j$ multiplicirt sind, einander parallel und zwar senkrecht zur $j$ten Längsaxe verlaufen. Die Richtung der positiven Verrückung $f_{jh}\,d\varphi_j$ bildet, wie man aus Figur 5 erkennt, mit der positiven X-Axe und Z-Axe bezüglich die Winkel φ_j und $\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi_j\right)$. Es besitzen daher die Projectionen der Verrückung $f_{jh}\, d\varphi_j$ auf die positive X-Axe und die positive Z-Axe bezüglich die Werthe

$f_{jh} \cos\varphi_j\, d\varphi_j$ und

$f_{jh} \sin\varphi_j\, d\varphi_j$.

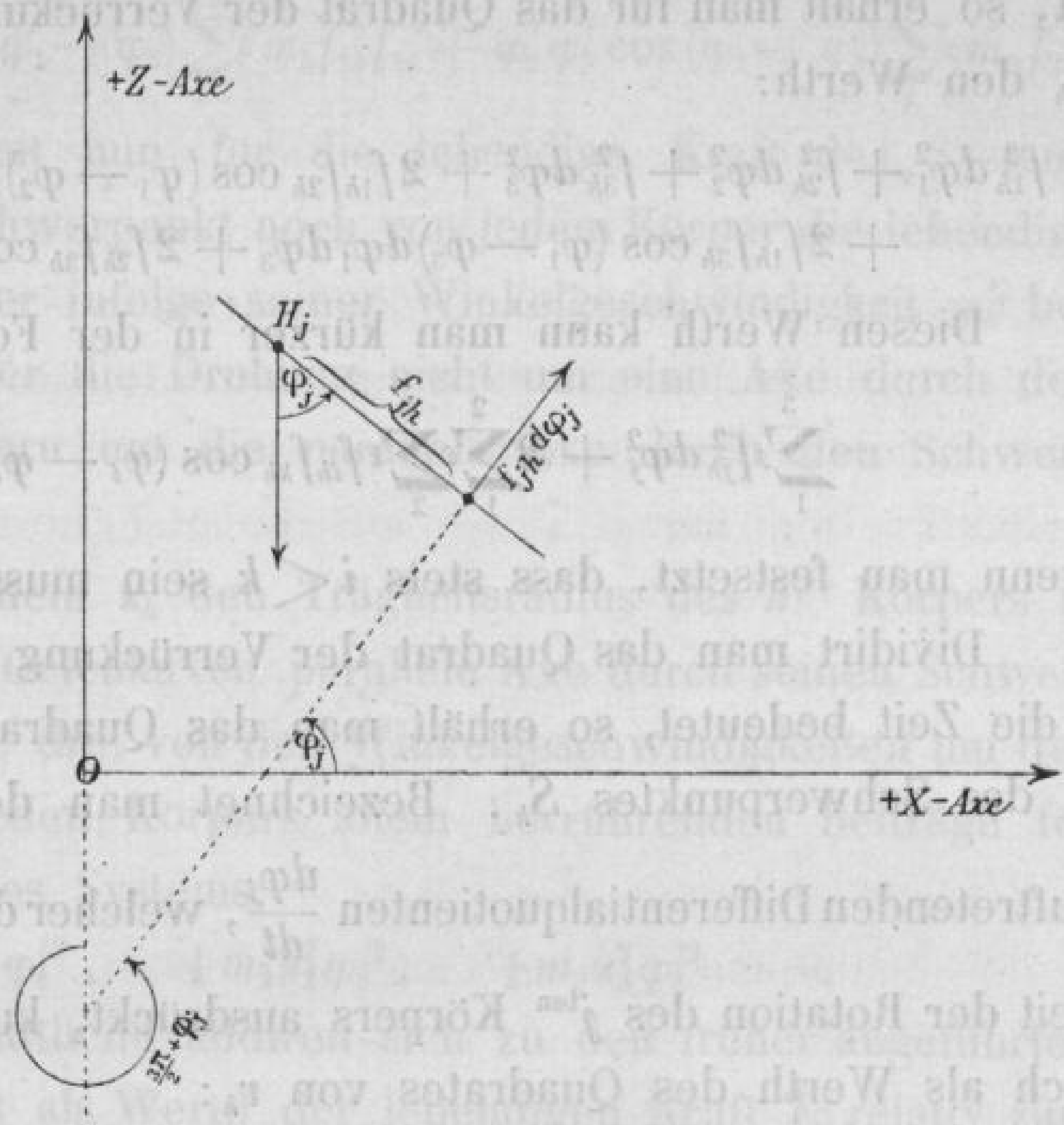


Fig. 5.

Da die Projection der geometrischen Summe der drei Verrückungen des Schwerpunktes S_h auf jede der Coordinatenaxen gleich der Summe der Projectionen der drei Verrückungen auf dieselben Axen ist, so hat man für die Projection der Gesammtverrückung von S_h auf die positive X-Axe den Werth

$$f_{1h} \cos\varphi_1\, d\varphi_1 + f_{2h} \cos\varphi_2\, d\varphi_2 + f_{3h} \cos\varphi_3\, d\varphi_3 = \sum_1^3{}^j f_{jh} \cos\varphi_j\, d\varphi_j$$

und für die Projection derselben auf die positive Z-Axe:

$$f_{1h} \sin\varphi_1\, d\varphi_1 + f_{2h} \sin\varphi_2\, d\varphi_2 + f_{3h} \sin\varphi_3\, d\varphi_3 = \sum_1^3{}^j f_{jh} \sin\varphi_j\, d\varphi_j .$$

Man erhält daraus für das Quadrat der Gesammtverrückung des Schwerpunktes S_h:

$$\left(\sum_1^3{}^j f_{jh} \cos\varphi_j\, d\varphi_j\right)^2 + \left(\sum_1^3 f_{jh} \sin\varphi_j\, d\varphi_j\right)^2 .$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\left(\sum_1^3{}^j f_{jh} \cos\varphi_j\, d\varphi_j\right)^2 = {} & f_{1h}^2 \cos^2\varphi_1\, d\varphi_1^2 + f_{2h}^2 \cos^2\varphi_2\, d\varphi_2^2 + f_{3h}^2 \cos^2\varphi_3\, d\varphi_3^2 \\ & + 2 f_{1h} f_{2h} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2 + 2 f_{1h} f_{3h} \cos\varphi_1 \cos\varphi_3\, d\varphi_1\, d\varphi_3 \\ & + 2 f_{2h} f_{3h} \cos\varphi_2 \cos\varphi_3\, d\varphi_2\, d\varphi_3\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\sum_1^3{}^j f_{jh} \sin\varphi_j\, d\varphi_j\right)^2 = {} & f_{1h}^2 \sin^2\varphi_1\, d\varphi_1^2 + f_{2h}^2 \sin^2\varphi_2\, d\varphi_2^2 + f_{3h}^2 \sin^2\varphi_3\, d\varphi_3^2 \\ & + 2 f_{1h} f_{2h} \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2 + 2 f_{1h} f_{3h} \sin\varphi_1 \sin\varphi_3\, d\varphi_1\, d\varphi_3 \\ & + 2 f_{2h} f_{3h} \sin\varphi_2 \sin\varphi_3\, d\varphi_2\, d\varphi_3 .\end{aligned}$$

Beachtet man, dass

$$\cos^2\varphi_j + \sin^2\varphi_j = 1 \quad \text{und} \quad \cos\varphi_i \cos\varphi_k + \sin\varphi_i \sin\varphi_k = \cos(\varphi_i - \varphi_k)$$

ist, so erhält man für das Quadrat der Verrückung des Schwerpunktes S_h den Werth:

$$f_{1h}^2 d\varphi_1^2 + f_{2h}^2 d\varphi_2^2 + f_{3h}^2 d\varphi_3^2 + 2 f_{1h} f_{2h} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2$$
$$+ 2 f_{1h} f_{3h} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) d\varphi_1 d\varphi_3 + 2 f_{2h} f_{3h} \cos(\varphi_2 - \varphi_3) d\varphi_2 d\varphi_3 .$$

Diesen Werth kann man kürzer in der Form schreiben:

$$\sum_1^3{}^j f_{jh}^2 d\varphi_j^2 + 2\sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k f_{ih} f_{kh} \cos(\varphi_i - \varphi_k) d\varphi_i d\varphi_k ,$$

wenn man festsetzt, dass stets $i < k$ sein muss.

Dividirt man das Quadrat der Verrückung von S_h durch dt^2, wo t die Zeit bedeutet, so erhält man das Quadrat der Geschwindigkeit v_h des Schwerpunktes S_h. Bezeichnet man den in dem Ausdrucke auftretenden Differentialquotienten $\frac{d\varphi_j}{dt}$, welcher die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des j^{ten} Körpers ausdrückt, kurz mit φ_j', so ergiebt sich als Werth des Quadrates von v_h:

$$v_h^2 = \sum_1^3{}^j f_{jh}^2 \cdot \varphi_j'^2 + 2\sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k f_{ih} f_{kh} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \varphi_i' \varphi_k'$$

(wo stets $i < k$).

Der Beitrag, welchen der Schwerpunkt S_h infolge seiner eignen Bewegung relativ zum Gesammtschwerpunkte für die gesammte lebendige Kraft des Körpersystems leistet, besitzt daher die Grösse

$$\tfrac{1}{2} m_h v_h^2 = \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}^j m_h f_{jh} \varphi_j'^2 + \sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k m_h f_{ih} f_{kh} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \varphi_i' \varphi_k' .$$

Dieser Ausdruck gilt für den Schwerpunkt S_1, S_2 oder S_3, je nachdem man für h den Werth 1, 2 oder 3 einsetzt.

Man erkennt, dass die zu den drei Schwerpunkten gehörenden Werthe von $\frac{1}{2} m_h v_h^2$ sich nur in den Producten $m_h f_{jh}^2$ und $m_h f_{ih} f_{kh}$ unterscheiden. Man erhält infolge dessen den Beitrag für die lebendige Kraft, welchen die drei Schwerpunkte zusammen infolge ihrer eignen Geschwindigkeit leisten, und welcher gleich der Summe der Einzelbeiträge der drei Schwerpunkte ist, indem man in dem obigen Ausdruck an Stelle der Grössen $m_h f_{jh}^2$ und $m_h f_{ih} f_{kh}$ bezüglich die Summen $\sum_1^3{}^h m_h f_{jh}^2$ und $\sum_1^3{}^h m_h f_{ih} f_{kh}$ einsetzt. Derselbe besitzt daher den Werth:

$$\tfrac{1}{2}\varphi_1'^2\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2+\tfrac{1}{2}\varphi_2'^2\sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2+\tfrac{1}{2}\varphi_3'^2\sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2+\varphi_1'\varphi_2'\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}f_{2h}$$
$$+\varphi_1'\varphi_3'\cos(\varphi_1-\varphi_3)\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}f_{3h}+\varphi_2'\varphi_3'\cos(\varphi_2-\varphi_3)\sum_1^3{}^h m_h f_{2h}f_{3h}\,.$$

Ausserdem kommt nun für die lebendige Kraft des Systems relativ zum Gesammtschwerpunkt noch von jedem Körper die lebendige Kraft hinzu, welche er infolge seiner Winkelgeschwindigkeit φ_h' besitzen würde, wenn er die Drehung nicht um eine Axe durch den Hauptpunkt H_h, sondern um die parallele Axe durch den Schwerpunkt S_h ausführte.

Bezeichnet allgemein $\varkappa_h$ den Trägheitsradius des h^{ten} Körpers in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt S_h, so sind die drei von den Winkelgeschwindigkeiten um den Schwerpunkt eines jeden Körpers allein herrührenden Beiträge für die lebendige Kraft des Systems

$$\tfrac{1}{2}m_1\varkappa_1^2\varphi_1'^2\,,\qquad \tfrac{1}{2}m_2\varkappa_2^2\varphi_2'^2\,,\qquad \tfrac{1}{2}m_3\varkappa_3^2\varphi_3'^2\,.$$

Diese drei Bestandtheile addiren sich zu den früher angeführten hinzu, und man erhält als Werth der lebendigen Kraft T_r relativ zum Gesammtschwerpunkt:

$$T_r=\tfrac{1}{2}\varphi_1'^2\Big[m_1\varkappa_1^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2\Big]+\tfrac{1}{2}\varphi_2'^2\Big[m_2\varkappa_2^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2\Big]+\tfrac{1}{2}\varphi_3'^2\Big[m_3\varkappa_3^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2\Big]$$
$$+\varphi_1'\varphi_2'\cos(\varphi_1-\varphi_2)\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}f_{2h}+\varphi_1'\varphi_3'\cos(\varphi_1-\varphi_3)\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}f_{3h}$$
$$+\varphi_2'\varphi_3'\cos(\varphi_2-\varphi_3)\sum_1^3{}^h m_h f_{2h}f_{3h}\,.$$

Die Ausdrücke $m_j\varkappa_j^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{jh}^2$ und $\sum_1^3{}^h m_h f_{ih}f_{kh}$ besitzen eine bemerkenswerthe Bedeutung.

Es ist nach der Tabelle auf S. 26:

$$m_1\varkappa_1^2+\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2=m_1(\varkappa_1^2+e_1^2)+(m_2+m_3)\,d_1^2\,.$$

Da $\varkappa_1$ der Trägheitsradius des ersten Körpers in Bezug auf die den Gelenkaxen parallele Axe durch den Schwerpunkt S_1 ist, und da der erste Hauptpunkt H_1 von S_1 die Entfernung e_1 besitzt, so ist $m_1(\varkappa_1^2+e_1^2)$ das Trägheitsmoment des ersten Körpers in Bezug auf die Axe durch den Hauptpunkt H_1. Ferner ist $(m_2+m_3)\,d_1^2$ das Trägheitsmoment, welches die beiden Massen m_2 und m_3 in Bezug auf die Axe durch H_1 besitzen würden, wenn sie im Gelenkpunkte $G_{1,2}$ concentrirt wären, denn $G_{1,2}$ besitzt von H_1 die Entfernung d_1. Es ist daher der Ausdruck $m_1 \varkappa_1^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2$ das Trägheitsmoment des ersten reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch den Schwerpunkt H_1 desselben.

Die Masse des reducirten Systems ist gleich der Gesammtmasse m_0. Bezeichnet man den constanten Trägheitsradius des ersten reducirten Systems in Bezug auf die Axe durch seinen Schwerpunkt H_1 mit k_1, so wird

$$m_1 \varkappa_1^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{1h}^2 = m_0 k_1^2 .$$

Aus den Werthen für die beiden anderen Ausdrücke

$$m_2 \varkappa_2^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2 = m_1 c_2^2 + m_2 (\varkappa_2^2 + e_2^2) + m_3 d_2^2 \quad \text{und}$$

$$m_3 \varkappa_3^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2 = (m_1 + m_2) c_3^2 + m_3 (\varkappa_3^2 + e_3^2)$$

geht hervor, dass $m_2 \varkappa_2^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2$ das Trägheitsmoment des zweiten reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt H_2 und $m_3 \varkappa_3^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2$ das Trägheitsmoment des dritten reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt H_3 ist.

Bezeichnet man die beiden zugehörigen Trägheitsradien bezüglich mit k_2 und k_3, so hat man

$$m_2 \varkappa_2^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{2h}^2 = m_0 k_2^2$$

$$m_3 \varkappa_3^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{3h}^2 = m_0 k_3^2 .$$

Diese Resultate sollen zusammengefasst werden in den

Satz: Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit φ_h' ist in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft des Körpersystems relativ zum Gesammtschwerpunkt multiplicirt mit dem Trägheitsmoment des h^{ten} reducirten Systems in

Bezug auf die den Gelenkaxen parallele Axe durch den Schwerpunkt H_h desselben.

Ferner ist nach der Tabelle auf S. 26:

$$\sum_1^3{}^h m_h f_{1h} f_{2h} = m_1 e_1 c_2 - m_2 d_1 e_2 + m_3 d_1 d_2 = m_1 e_1 c_2 - (m_2 e_2 - m_3 d_2) d_1 .$$

Nach den Relationen auf pag. 25 ist nun

$$m_1 e_1 = (m_2 + m_3) d_1 \quad \text{und}$$

$$m_2 e_2 - m_3 d_2 = - m_1 c_2 . \quad \text{Es ist daher}$$

$$\sum_1^3{}^h m_h f_{1h} f_{2h} = (m_2 + m_3) d_1 c_2 + m_1 d_1 c_2 = m_0 d_1 c_2 .$$

In gleicher Weise leitet man unter Berücksichtigung der Relationen auf S. 25 ab, dass

$$\sum_1^3{}^h m_h f_{1h} f_{3h} = m_0 d_1 c_3 \quad \text{und} \quad \sum_1^3{}^h m_h f_{2h} f_{3h} = m_0 d_2 c_3 .$$

Durch Vergleichen dieser Werthe mit denen der Tabelle auf pag. 26 erkennt man, dass

$$d_1 c_2 = - f_{12} f_{21} , \quad d_1 c_3 = - f_{13} f_{31} \quad \text{und} \quad d_2 c_3 = - f_{23} f_{32} .$$

Man kann daher allgemein schreiben $\sum_1^3{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = - m_0 f_{ik} f_{ki}$. Der Ausdruck für die lebendige Kraft des Körpersystems relativ zum Gesammtschwerpunkt erhält infolgedessen die kürzere Form:

$$\begin{aligned} T_r = {} & \tfrac{1}{2} m_0 k_1^2 \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_2^2 \varphi_2'^2 + \tfrac{1}{2} m_0 k_3^2 \varphi_3'^2 \\ & - m_0 f_{12} f_{21} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \varphi_1' \varphi_2' - m_0 f_{13} f_{31} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \varphi_1' \varphi_3' \\ & - m_0 f_{23} f_{32} \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \varphi_2' \varphi_3' . \end{aligned}$$

Da die Gesammtmasse m_0 allen Gliedern gemeinsam ist, so kann man $\frac{1}{2} m_0$ als Factor absondern und erhält dann

$$T_r = \tfrac{1}{2} m_0 \left[\sum_1^3{}^j k_j^2 \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k f_{ik} f_{ki} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \varphi_i' \varphi_k' \right],$$

wobei immer $i < k$ sein muss.

Dabei bedeuten also m_0 die Gesammtmasse des Systems, k_j den Trägheitsradius des j^{ten} reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch seinen Schwerpunkt H_j, und f_{ik}, f_{ki} die in der Tabelle auf S. 26 niedergelegten Hauptstrecken.

Es ist zu beachten, dass in dem Ausdrucke für T_r die einzelnen Massen m_h gar nicht explicit auftreten. Dies ist der Einführung der

Hauptstrecken und der Trägheitsradien k_j zu verdanken. Die Grössen dieser Strecken hängen hauptsächlich von der Masse und Massenvertheilung der einzelnen Körper ab, und der Einfluss, den die einzelnen Massen auf den Werth der lebendigen Kraft des ganzen Systems ausüben, macht sich allein in der Länge dieser Strecken geltend.

Der Factor von $\frac{1}{2} m_0$ ist äquivalent mit dem Quadrate einer linearen Geschwindigkeit. Man könnte daher auch T_r in der Form schreiben

$$T_r = \tfrac{1}{2} m_0 v_r^2 ,$$

wo

$$v_r^2 = \sum_1^3{}^j k_j^2 \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k f_{ik} f_{ki} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \varphi_i' \varphi_k' \qquad (i < k).$$

Der Gesammtschwerpunkt S_0 des Systems besitze die rechtwinkligen Coordinaten ξ_0, ζ_0 (Fig. 1). Bleibt nun derselbe nicht fest, sondern bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v_0, wo

$$v_0^2 = \xi_0'^2 + \zeta_0'^2 ,$$

so resultirt daraus ein weiterer Bestandtheil T_0 für die gesammte lebendige Kraft T des Körpersystems, nämlich $T_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2$. Es ist daher

$$T = T_r + T_0 = \tfrac{1}{2} m_0 (v_r^2 + v_0^2), \qquad \text{d. h. aber}$$

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 \left[\sum_1^3{}^j k_j^2 \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^2{}^i \sum_2^3{}^k f_{ik} f_{ki} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \varphi_i' \varphi_k' + \xi_0'^2 + \zeta_0'^2 \right]$$

B. Das bedingt bewegliche System.

Wenn das System der drei Körper frei beweglich ist, so sind die fünf Coordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \xi_0$ und ζ_0 vollständig unabhängig von einander. Ist dagegen die Bewegung des Systems an gewisse Bedingungen geknüpft, so treten in vielen Fällen die Coordinaten ξ_0, ζ_0 des Gesammtschwerpunktes in Abhängigkeit von den Winkelgrössen φ_h. Besteht z. B. die Bedingung für die Bewegung des Körpersystems darin, dass ein Punkt mit den Coordinaten x_1, y_1 auf einer der drei Längsaxen festbleibt, so ist im Übrigen jede Lage und Haltung des Körpersystems durch die drei Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ vollständig bestimmt. Es muss also gelingen, die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes ξ_0, ζ_0 bei dieser Bedingung für die Beweglichkeit des Systems durch die Grössen φ_h und die Coordinaten x_1, z_1 des festbleibenden Punktes auszudrücken.

Für die Darstellung der Grössen ξ_0, ζ_0 als Functionen von φ_1, φ_2, φ_3, x_1 und z_1 leisten nun wieder die Hauptpunkte der drei Körper wesentliche Dienste. Es gilt nämlich der

Satz: Man gelangt stets zu dem Gesammtschwerpunkte S_0 des Körpersystems, wenn man von irgend einem Hauptpunkte H_j der drei Körper aus die geometrische Summe der zu den beiden anderen Körpern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des gebrochenen Linienzuges der drei Längsaxen dem Hauptpunkte H_j zugekehrt sind.

Es ist also nach diesem Satze:

$$[H_1 S_0] = [G_{1,2} H_2] + [G_{2,3} H_3]$$
$$[H_2 S_0] = [G_{1,2} H_1] + [G_{2,3} H_3]$$
$$[H_3 S_0] = [G_{2,3} H_2] + [G_{1,2} H_1] \quad \text{(vgl. Fig. 4 auf S. 25).}$$

Beweis dieses Satzes: Zieht man von einem beliebigen Punkte O aus die Verbindungsstrecken nach den drei Einzelschwerpunkten S_h und dem Gesammtschwerpunkte S_0, so findet bekanntlich die Relation statt

$$m_0[O S_0] = \sum_1^3{}^h m_h [O S_h],$$

wo das Σ-Zeichen die geometrische Summation andeuten soll. Der Punkt O ist ganz beliebig. Insbesondere kann derselbe mit dem Hauptpunkte H_1 zusammenfallen, dann ist

$$m_0[H_1 S_0] = m_1[H_1 S_1] + m_2[H_1 S_2] + m_3[H_1 S_3].$$

Ersetzt man nun die Strecken $[H_1 S_2]$ und $[H_1 S_3]$ durch die geometrischen Summen $[H_1 G_{1,2}] + [G_{1,2} S_2]$ bezüglich $[H_1 G_{1,2}] + [G_{1,2} G_{2,3}] + [G_{2,3} S_3]$, so folgt

$$m_0[H_1 S_0] = m_1[H_1 S_1] + m_2[H_1 G_{1,2}] + m_2[G_{1,2} S_2] + m_3[H_1 G_{1,2}]$$
$$+ m_3[G_{1,2} G_{2,3}] + m_3[G_{2,3} S_3].$$

Wendet man denselben Satz auf die drei reducirten Systeme an, indem man beim ersten von H_1, beim zweiten von $G_{1,2}$ und beim dritten von $G_{2,3}$ ausgeht und berücksichtigt, dass H_1, H_2, H^3 die Schwerpunkte derselben bedeuten, so erhält man, da $[H_1 H_1] = [G_{1,2} G_{1,2}] = [G_{2,3} G_{2,3}] = 0$ ist, die Relationen:

$$0 = m_1[H_1 S_1] + (m_2 + m_3)[H_1 G_{1,2}]$$
$$m_0[G_{1,2} H_2] = m_2[G_{1,2} S_2] + m_3[G_{1,2} G_{2,3}]$$
$$m_0[G_{2,3} H_3] = m_3[G_{2,3} S_3].$$

Infolgedessen geht die obige Formel über in

$$m_0[H_1 S_0] = m_0[G_{1,2} H_2] + m_0[G_{2,3} H_3]\,,$$

so dass sich in der That ergibt

$$[H_1 S_0] = [G_{1,2} H_2] + [G_{2,3} H_3]\,, \quad \text{q. e. d.}$$

Lässt man den Punkt O mit H_2 zusammenfallen, so ist

$$\begin{aligned} m_0[H_2 S_0] &= m_1[H_2 S_1] + m_2[H_2 S_2] + m_3[H_2 S_3] \\ &= m_1[H_2 G_{1,2}] + m_1[G_{1,2} S_1] + m_2[H_2 S_2] + m_3[H_2 G_{2,3}] + m_3[G_{2,3} S_3]\,. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$m_1[G_{1,2} S_1] = m_0[G_{1,2} H_1]$$

$$m_1[H_2 G_{1,2}] + m_2[H_2 S_2] + m_3[H_2 G_{2,3}] = 0$$

$$m_3[G_{2,3} S_3] = m_0[G_{2,3} H_3]\,,$$ folglich ist auch:

$$[H_2 S_0] = [G_{1,2} H_1] + [G_{2,3} H_3]\,.$$

Auf entsprechende Weise ergibt sich die dritte Relation:

$$[H_3 S_0] = [G_{2,3} H_2] + [G_{1,2} H_1]\,.$$

Dieses Resultat kann man auch, wie beiläufig bemerkt sein soll, verwenden, um sich mit Hülfe eines einfachen Mechanismus aus Cartonstreifen für alle Stellungen der Längsaxen der drei Körper zu einander die Lage des Gesammtschwerpunktes S_0 zu verschaffen und sich gleichzeitig die drei Verrückungsarten des Systems zu veranschaulichen.

Dieser Mechanismus soll durch die beifolgende Figur 6 angedeutet sein.

$\overline{L_1 G_{1,2}}$, $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$, $\overline{G_{2,3} L_3}$ sollen die Längsaxen der drei Körper und H_1, H_2, H_3 die auf ihnen gelegenen Hauptpunkte repräsentiren.

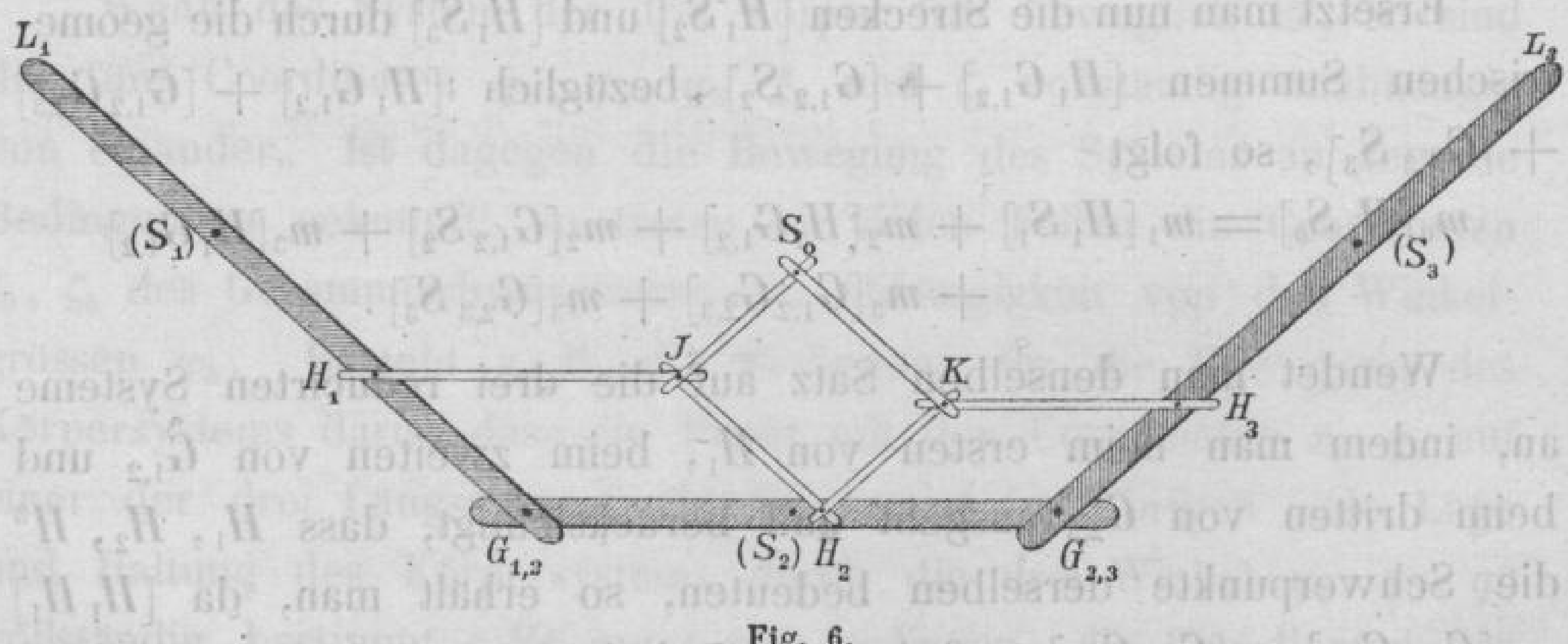


Fig. 6.

Diese drei Streifen sind in $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ gelenkartig verbunden. Die übrigen sechs Cartonstreifen $H_1 J$, $J H_2$, $H_2 K$, $K H_3$, $J S_0$ und $S_0 K$ sind in den Punkten H_1, H_2, H_3, J, K und S_0 in der aus der Figur erkennbaren Weise gelenkartig mit einander bezüglich mit den drei Längsaxenstreifen verbunden. Sind nun die Dimensionen der Streifen so getroffen, dass

$$\overline{H_1 J} = \overline{G_{1,2} H_2}\,, \quad \overline{H_3 K} = \overline{G_{2,3} H_2}$$

$$\overline{S_0 K} = \overline{J H_2} = \overline{H_1 G_{1,2}} \quad \text{und} \quad \overline{S_0 J} = \overline{K H_2} = \overline{H_3 G_{2,3}}\,,$$

so muss für jede Stellung der drei Längsaxen zu einander

$$\overline{H_1 J} \parallel \overline{G_{1,2} G_{2,3}} \parallel \overline{K H_3}\,,$$

$$\overline{S_0 K} \parallel \overline{J H_2} \parallel \overline{L_1 G_{1,2}}$$

und $\overline{S_0 J} \parallel \overline{K H_2} \parallel \overline{L_3 G_{2,3}}$ sein und infolgedessen S_0 die Lage des Gesammtschwerpunktes darstellen.

Man kann sich mit Hülfe dieses Mechanismus auch jede der drei Verrückungen veranschaulichen, bei welcher nur eine der drei Grössen φ_1, φ_2, φ_3 ihren Werth ändert, während jedes Mal die beiden anderen constant bleiben. Hält man nämlich H_1 und S_0 fest, so ist auch $\overline{H_1 J}$ und $\overline{J S_0}$ festgelegt, und es kann das erste Glied zwar noch um H_1 rotiren, die beiden anderen können aber nur Translationen beschreiben, da $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$ immer parallel dem festgestellten Glied $\overline{H_1 J_1}$ und $\overline{G_{2,3} L_3}$ parallel dem festgestellten Glied $\overline{J S_0}$ bleiben muss. Die beiden anderen Verrückungsarten, bei welchen nur φ_2 bezüglich φ_3 seinen Werth ändert, erhält man, je nachdem man H_2 und S_0 oder H_3 und S_0 festhält.

Es soll nun ein Punkt P_1 mit den Coordinaten x_1, z_1 auf der ersten Längsaxe fest bleiben und der erste Hauptpunkt von demselben in positiver Richtung die Entfernung c_1 besitzen. Da allgemein die positive Richtung der j^{ten} Längsaxe mit der positiven X- und Z-Axe bezüglich die Winkel $\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi_j\right)$ und $(\pi + \varphi_j)$ bildet, so erhält man für die Coordinaten ξ_0, ζ_0 des Schwerpunktes nach dem oben abgeleiteten Satze die Werthe:

$$\xi_0 = x_1 + c_1 \sin\varphi_1 + c_2 \sin\varphi_2 + c_3 \sin\varphi_3$$

$$\zeta_0 = z_1 - c_1 \cos\varphi_1 - c_2 \cos\varphi_2 - c_3 \cos\varphi_3\,.$$

Daraus folgt für das Quadrat der Geschwindigkeit v_0 des Gesammtschwerpunktes, da x_1 und z_1 constant sind:

$$v_0^2 = \xi_0'^2 + \zeta_0'^2 = c_1^2 \varphi_1'^2 + c_2^2 \varphi_2'^2 + c_3^2 \varphi_3'^2 + 2 c_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\, \varphi_1' \varphi_2'$$
$$+ 2 c_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\, \varphi_1' \varphi_3' + 2 c_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\, \varphi_2' \varphi_3'\,.$$

Es ist demnach für diesen Fall die gesammte lebendige Kraft des Körpersystems nach der Formel auf S. 32 und der Tabelle auf S. 26:

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 [(k_1^2 + c_1^2)\varphi_1'^2 + (k_2^2 + c_2^2)\varphi_2'^2 + (k_3^2 + c_3^2)\varphi_3'^2$$
$$+ 2(c_1 + d_1) c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2' + 2(c_1 + d_1) c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\varphi_1'\varphi_3'$$
$$+ 2(c_2 + d_2) c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_2'\varphi_3'] .$$

Dabei ist $m_0(k_1^2 + c_1^2)$ das Trägheitsmoment des ersten reducirten Systems in Bezug auf die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch P_1, dagegen sind $m_0(k_2^2 + c_2^2)$ und $m_0(k_3^2 + c_3^2)$ die Trägheitsmomente des zweiten und dritten reducirten Systems in Bezug auf die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ bezüglich durch $G_{2,3}$.

Setzt man $k_1^2 + c_1^2 = \lambda_1^2$, $k_2^2 + c_2^2 = \lambda_2^2$, $k_3^2 + c_3^2 = \lambda_3^2$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Trägheitsradien der drei reducirten Systeme in Bezug auf die bezüglich durch P, $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ gehenden Axen bedeuten, und schreibt man ferner $c_1 + d_1 = l_1$, $c_2 + d_2 = l_2$, so nimmt der Werth für die lebendige Kraft die etwas einfachere Form an:

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 [\lambda_1^2\varphi_1'^2 + \lambda_2^2\varphi_2'^2 + \lambda_3^2\varphi_3'^2 + 2 l_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1'\varphi_2'$$
$$+ 2 l_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\varphi_1'\varphi_3' + 2 l_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_2'\varphi_3'] .$$

Während im Falle vollständig freier Beweglichkeit des Systems die lebendige Kraft von den fünf von einander unabhängigen Coordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \xi_0, \zeta_0$, bezüglich deren Abgeleiteten abhing, gehen unter der Bedingung, dass ein Punkt des Systems festbleibt, nur die drei Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und deren Abgeleitete in den Ausdruck für die lebendige Kraft ein, so dass derselbe von den Werthen x_1, z_1 der Coordinaten des festbleibenden Punktes unabhängig ist.

Zu demselben Resultate kann man auch auf folgende Art gelangen.

Man kann, ähnlich wie früher, die Frage aufwerfen: »Um welche Axe muss die der Änderung eines der drei Winkel φ_h entsprechende unendlich kleine Rotation stattfinden, damit bei gleichzeitiger Translation der beiden anderen Körper der Punkt P_1 auf der ersten Längsaxe festbleibt?«

Die Antwort auf diese Frage ist nicht schwer. Man erkennt ohne Weiteres, dass die unendlich kleine Rotation des ersten Körpers um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch P_1, die der beiden anderen Körper dagegen um eine der beiden Gelenkaxen selbst stattfinden muss, und zwar für den zweiten Körper um die durch $G_{1,2}$ und für den dritten um die durch $G_{2,3}$ gehende Axe.

Infolge dieser Rotationen und gleichzeitigen Translationen erfahren die drei Einzelschwerpunkte nach den eingeführten Bezeichnungen folgende Translationen:

$$\begin{array}{llll} S_1: & (c_1 - e_1)\,d\varphi_1\,, & 0\,, & 0\,, \\ S_2: & (c_1 + d_1)\,d\varphi_1\,, & (c_2 - e_2)\,d\varphi_2\,, & 0\,, \\ S_3: & (c_1 + d_1)\,d\varphi_1\,, & (c_2 + d_2)\,d\varphi_2\,, & (c_3 + e_3)\,d\varphi_3\,. \end{array}$$

Es empfiehlt sich wieder, für die Factoren von $d\varphi_j$ Bezeichnungen f'_{jh} einzuführen, welche eine kürzere Schreibweise der Formeln gestatten, wobei der Index j übereinstimmt mit dem Index des zugehörigen Factors $d\varphi$ und der Index h andeutet, dass die Grösse zu einer Verrückung des Schwerpunktes S_h gehört. Die Werthe der f'_{jh} sind daher die in der folgenden Tabelle niedergelegten:

h	f'_{1h}	f'_{2h}	f'_{3h}
1	$c_1 - e_1$	0	0
2	$c_1 + d_1$	$c_2 - e_2$	0
3	$c_1 + d_1$	$c_2 + d_2$	$c_3 + e_3$

Da nun von den drei zu ein und demselben Schwerpunkte gehörenden Translationen wieder immer die erste senkrecht zur ersten Längsaxe, die zweite und dritte senkrecht zur zweiten bezüglich dritten Längsaxe gerichtet ist, so erhält man unter Wiederholung der früheren Entwickelungen als Werth der lebendigen Kraft des Körpersystems nach S. 29:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}^j \varphi_j'^2\Big[m_j\varkappa_j^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{jh}'^2\Big] + \sum_1^2{}^i\sum_2^3{}^k \varphi_i'\varphi_k' \cos(\varphi_i - \varphi_k)\sum_1^3{}^h m_h f'_{ih} f'_{kh}$$

wo stets $i < k$.

In diesem Falle hat man damit den vollständigen Ausdruck für die lebendige Kraft, weil nicht blos die Verrückungen der Einzelschwerpunkte relativ zum Gesammtschwerpunkte, sondern die ganzen Verrückungen derselben in Betracht gezogen sind, welche sie unter der für die Bewegungen gesetzten Bedingung erfahren.

Da die f'_{jh} nicht mehr, wie früher, Hauptstrecken bedeuten, so gelten jetzt nicht mehr dieselben Relationen für die in dem Ausdrucke auftretenden Summen.

Für $m_1 \varkappa_1^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{1h}'^2$ ergibt sich nach der Tabelle auf S. 37 als Bedeutung: das Trägheitsmoment des ersten reducirten Systems in Bezug auf die Axe durch P_1. Die Ausdrücke $m_2 \varkappa_2^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{2h}'^2$ und $m_3 \varkappa_3^2 + \sum_1^3{}^h m_h f_{3h}'^2$ bedeuten das Trägheitsmoment des zweiten bezüglich dritten reducirten Systems in Bezug auf die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ bezüglich durch $G_{2,3}$.

Ferner ist

$$\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}' f_{2h}' = m_2 (c_1 + d_1)(c_2 - e_2) + m_3 (c_1 + d_1)(c_2 + d_2)$$

$$\sum_1^3{}^h m_h f_{1h}' f_{3h}' = m_3 (c_1 + d_1)(c_3 + e_3)$$

$$\sum_1^3{}^h m_h f_{2h}' f_{3h}' = m_3 (c_2 + d_2)(c_3 + e_3)\,.$$

Da infolge der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reducirten Systeme

$$m_2 (c_2 - e_2) + m_3 (c_2 + d_2) = m_0 c_2 \quad \text{und}$$

$$m_3 (c_3 + e_3) = m_0 c_3 \quad \text{ist, so folgt der}$$

schon auf S. 36 angegebene Werth für T.

Auf analoge Weise erledigen sich die Fälle, wo ein Punkt der zweiten oder dritten Längsaxe festgehalten wird. Auch die Behandlung des Falles, in welchem der festbleibende Punkt nicht auf der Längsaxe eines Körpers liegt, bringt keine neue Schwierigkeit mit sich, wenn sich auch einige Glieder in dem Ausdrucke für T etwas verwickelter gestalten.

Es ist gerade der eine Fall herausgegriffen und ausführlich behandelt worden, weil er am menschlichen Körper ein Analogon findet. Ein am ruhenden Körper hängendes Bein, welches sich parallel der Medianebene des Menschen bewegt, bietet unter gewissen Einschränkungen ein solches System dreier hintereinander durch Gelenke verbundener Körper dar, deren Axen für die vorausgesetzte Bewegungsart nahezu einander parallel laufen.

II. Die Elementararbeiten der Kräfte.

Im Allgemeinen wird nun die lebendige Kraft des Systems während der Bewegung nicht constant bleiben. Die Änderungen des Werthes derselben stehen in bestimmter Beziehung zu den Elementararbeiten der wirksamen äusseren und inneren Kräfte. Um diese Beziehungen, welche in den Bewegungsgleichungen des Körpersystems ihren Ausdruck finden, zu formuliren, ist zunächst festzustellen,

»welche Elementararbeiten die am Körpersystem wirksamen Kräfte leisten, wenn das System einer beliebigen Verrückung unterworfen wird«.

Zu dem Zwecke hat man nur die Grösse und Richtung der Translation zu bestimmen, welche der Angriffspunkt der Kraft bei der Verrückung des Systems erleidet. Die Projection dieser Translation auf die Richtung der Kraft multiplicirt mit der Intensität der letzteren gibt den Werth der Elementararbeit, welche die Kraft während der betreffenden Verrückung des ganzen Systems leistet. Ist die Intensität der Kraft K, die Grösse der Translation ihres Angriffspunktes $d\tau$ und der Winkel zwischen den Richtungen von Kraft und Translation γ, so besitzt demnach die Elementararbeit der Kraft den Werth:

$$K \cos\gamma \, d\tau .$$

Es muss nun in jedem Falle Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein, die Grösse der Translation des Angriffspunktes und den Winkel γ aus den allgemeinen Coordinaten des Körpersystems zu bestimmen.

Diese Untersuchung soll zunächst im Princip für das frei bewegliche System und dann für das System angestellt werden, bei welchem der erste Körper um eine feste zu den Gelenkaxen parallele Axe drehbar ist.

A. Das frei bewegliche System.

Die Lage des Systems ist durch die fünf von einander unabhängigen Coordinaten φ_1, φ_2, φ_3, ξ_0 und ζ_0 bestimmt. Wie schon früher erläutert wurde, kann dasselbe aus einer Lage in irgend eine unendlich benachbarte dadurch übergeführt werden, dass man successive dem System fünf Verrückungen ertheilt, bei welchen immer nur je eine der fünf Coordinaten ihren Werth ändert, während alle anderen constant bleiben.

Einer alleinigen Änderung des Winkels φ_j um $d\varphi_j$ entspricht nach den früheren Entwickelungen eine unendlich kleine Rotation des j^{ten} Körpers von der Grösse $d\varphi_j$ um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch den Hauptpunkt H_j, verbunden mit gleichzeitiger Translation der beiden anderen Körper.

Einer alleinigen Aenderung einer der Strecken ξ_0 und ζ_0 um $d\xi_0$ bezüglich $d\zeta_0$ entspricht eine Translation des ganzen Körpersystems von der Grösse $d\xi_0$ bezüglich $d\zeta_0$ parallel der X-Axe bezüglich Z-Axe.

Für diese fünf Verrückungen sollen die Bezeichnungen V_{φ_1}, V_{φ_2}, V_{φ_3}, V_{ξ_0} und V_{ζ_0} eingeführt werden.

4) Elementararbeiten äusserer Kräfte.

a. Allgemeine Betrachtungen: Es greife die Kraft K in einem Punkte A des ersten der drei Körper an, welcher von der durch den ersten Hauptpunkt H_1 gehenden zu den Gelenkaxen parallele Axe den Abstand a_1 besitzt (vgl. Figur 7.)

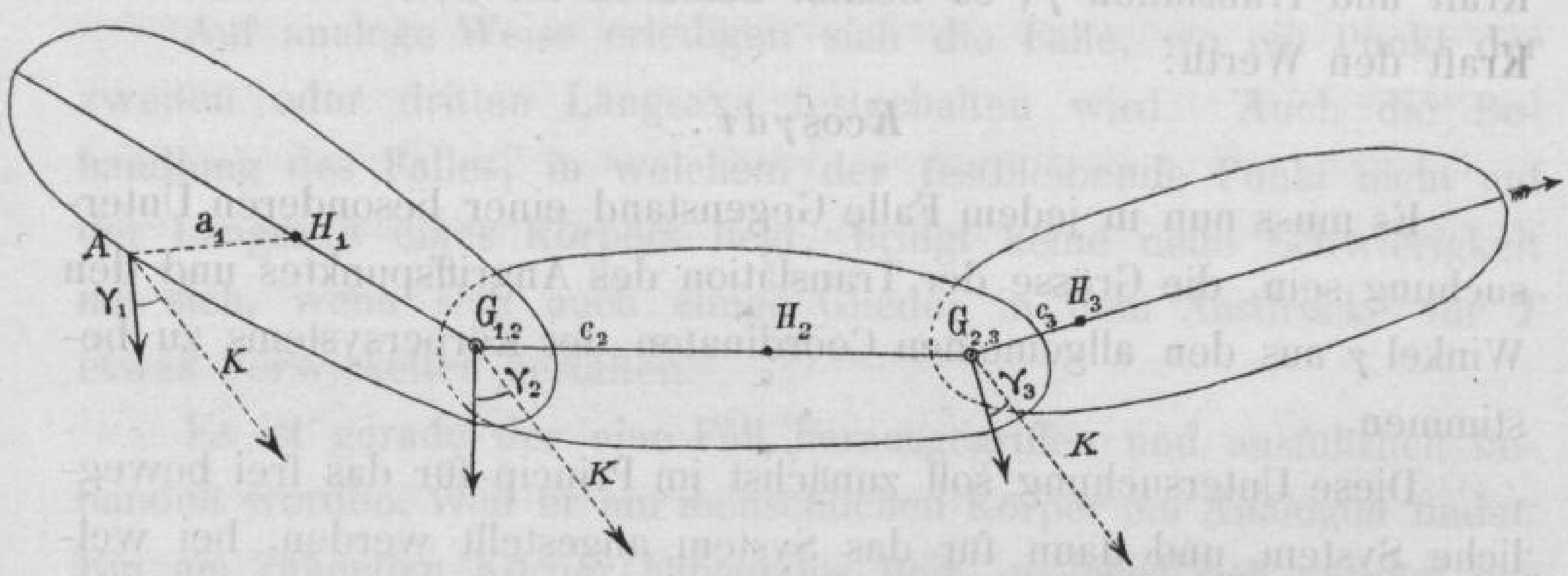


Fig. 7.

Der Angriffspunkt A erfährt bei der Verrückung V_{φ_1} eine Translation von der Grösse $a_1 d\varphi_1$. Bildet dieselbe mit der Richtung von K den Winkel γ_1, so ist die zur Verrückung V_{φ_1} gehörende Elementararbeit $K \cos\gamma_1 \, a_1 d\varphi_1$. Beachtet man, dass $K\cos\gamma_1 \cdot a_1$ das Drehungsmoment D_{φ_1} der Kraft in Bezug auf die Axe durch H_1 ist, so kann man die Elementararbeit auch in der Form schreiben $D_{\varphi_1} . d\varphi_1$. Fällt insbesondere der Angriffspunkt der Kraft mit dem Hauptpunkte H_1 zusammen, so besitzt die Elementararbeit den Werth Null.

Bei der Verrückung V_{φ_2} erfährt der Angriffspunkt A eine Translation, welche bezüglich gleich derjenigen des Gelenkpunktes $G_{1,2}$ ist; dieselbe besitzt also, absolut genommen, die Grösse $c_2 d\varphi_2$. Bildet sie mit der Richtung von K den Winkel γ_2, so ist die zur Verrückung V_{φ_2} gehörende Elementararbeit der Kraft: $K \cos\gamma_2 c_2 d\varphi_2$. Dabei ist $K \cos\gamma_2 c_2$ das Drehungsmoment D_{φ_2}, welches die Kraft für die Axe durch H_2 besitzen würde, wenn sie nicht in A, sondern im Gelenkpunkte $G_{1,2}$ angriffe; man kann also auch schreiben: $D_{\varphi_2} . d\varphi_2$.

Entsprechend erhält man für die Elementararbeit, welche die Kraft bei der Verrückung V_{φ_3} leistet, den Werth $K \cos\gamma_3 \; c_3 d\varphi_3$ oder $D_{\varphi_3} . d\varphi_3$, wenn man unter γ_3 den Winkel zwischen der Verrückung des Punktes $G_{2,3}$ und der Kraftrichtung, und unter D_{φ_3} das Drehungsmoment versteht, welches die Kraft für die Axe durch H_3 besitzt, wenn man ihren Angriffspunkt nach $G_{2,3}$ verlegt denkt, ohne ihre Richtung zu ändern.

Die Winkel γ_h werden sich im Allgemeinen mit der Richtung der Längsaxen ändern. Bildet insbesondere K mit der nach unten positiv gerechneten festen Verticalen einen constanten Winkel, so ist es leicht, die Winkel γ_h durch diesen Winkel und die Coordinaten φ_h darzustellen.

Wiederholt man dieselben Betrachtungen für die Fälle, wo K in einem Punkte des zweiten oder dritten Körpers angreift, so ergiebt sich allgemein der

Satz: Bei der Verrückung V_{φ_j} leistet jede am j^{ten} Körper angreifende Kraft eine Elementararbeit, welche dargestellt ist durch das Product der Zunahme $d\varphi_j$ des Winkels φ_j in das Drehungsmoment, welches die Kraft für die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch den Hauptpunkt des j^{ten} Körpers besitzt. Greift die Kraft an einem der beiden anderen Körper an, so tritt an Stelle des zweiten Factors das Drehungsmoment, welches die Kraft in Bezug auf die Axe durch H_j besitzt, wenn sie parallel mit sich nach dem ihr auf dem Linienzuge der drei Längsaxen zunächst liegenden Gelenkpunkte verlegt wird.

Die Elementararbeiten, welche eine Kraft bei den beiden Verrückungen V_{ξ_0} und V_{ζ_0} leistet, lassen sich leicht angeben, wenn man weiss, welche Winkel die Richtung der Kraft mit den beiden Coordinatenaxen bildet. Ist die Richtung der Kraft gegen die nach unten gerichtete Verticale um den Winkel ψ geneigt, so sind diese Winkel bezüglich $\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ und $(\pi - \psi)$. Infolgedessen sind die Elementararbeiten $K \sin \psi \,.\, d\xi_0$ und $-K \cos \psi \,.\, d\zeta_0$. Dabei sind $K \sin \psi$ und $-K \cos \psi$ die Componenten der Kraft K parallel den beiden Coordinatenaxen.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen ist es nicht schwer, die Elementararbeiten für bestimmte Fälle anzugeben.

b. Die Elementararbeiten der Schwere: Die Wirkung der Schwere kann man sich für das Körpersystem dargestellt denken durch drei vertical nach unten gerichtete Kräfte von der Grösse $m_1 g$, $m_2 g$ und $m_3 g$, welche bezüglich in den Schwerpunkten S_1, S_2 und S_3 angreifen.

Für die Verrückung V_{φ_1} ist nach dem oben abgeleiteten Satze die Summe der Elementararbeiten der drei Kräfte

$$-m_1 g e_1 d\varphi_1 + (m_2 + m_3) g d_1 d\varphi_1 .$$

Da nach S. 25: $-m_1 e_1 + (m_2 + m_3) d_1 = 0$ ist, so verschwindet dieser Ausdruck. Die Schwere leistet also bei der Verrückung V_{φ_1} keine Arbeit.

Zu diesem Resultate gelangt man auch, wenn man berücksichtigt, dass die in S_1 angreifende Kraft $m_1 g$ sich mit den beiden anderen nach $G_{1,2}$ verlegten Kräften $m_2 g$ und $m_3 g$ zu der im Schwerpunkte des ersten reducirten Systems angreifenden Resultante $m_0 g$ zusammensetzt. Der Schwerpunkt des reducirten Systems fällt aber mit H_1 zusammen. Da H_1 bei der Verrückung V_{φ_1} fest bleibt, so besitzt die Arbeit dieser Resultante den Werth Null.

Desgleichen leistet die Schwere keine Arbeit bei den Verrückungen V_{φ_2} und V_{φ_3}.

Für die Verrückungen V_{ξ_0} und V_{ζ_0} kann das System als starr angesehen werden, und die Wirkung der Schwere stellt sich infolgedessen durch die einzige im Gesammtschwerpunkte S_0 angreifende, vertical nach unten gerichtete Kraft $m_0 g$ dar. Die Richtung derselben bildet mit der Translation $d\xi_0$ den Winkel $\frac{\pi}{2}$ und mit der Translation $d\zeta_0$ den Winkel π. Daher besitzt die zur Verrückung V_{ξ_0} gehörende Elementararbeit der Schwere ebenfalls den Werth Null. Es kommt also allein die Elementararbeit der Schwere für die Verrückung V_{ζ_0} in Betracht; ihre Grösse ist $-m_0 g d\zeta_0$.

2) Elementararbeiten innerer Kräfte (d. i. der Muskelkräfte).

Zwischen festen Punkten je zweier der drei Körper wirken entweder längs einer geraden Linie oder längs einer kürzesten Linie, welche über einen Vorsprung eines der beiden Körper gezwungen ist, Kräfte, welche die Länge dieser Linie zu verkürzen streben. Solche Kräfte treten an jeder Stelle immer paarweise auf, und zwar sind beide stets entgegengesetzt gleich. Eine sich contrahirende Muskelfaser ruft ein Paar solcher entgegengesetzt gleicher Kräfte hervor. Diese paarweise auftretenden Kräfte sind für das ganze Körpersystem als innere Kräfte anzusehen. Die Summe ihrer Elementararbeiten, welche sie bei den Verrückungen V_{ξ_0} und V_{ζ_0} des Gesammtschwerpunktes leisten, muss daher stets den Werth Null besitzen. Verlegt man sie beide nach dem Gesammtschwerpunkte S_0 des Systems, so heben sich in der That die beiden Kräfte auf, da sie entgegengesetzt gleich sind.

Für jeden einzelnen der drei Körper stellen die paarweise auftretenden Kräfte dagegen zwei äussere Kräfte dar, welche bei jeder der drei Verrückungen V_{φ_n} im Allgemeinen sehr verschiedene Elementararbeiten leisten. Zur Bestimmung der letzteren lassen sich direct die für die Wirkung der äusseren Kräfte gefundenen Resultate verwenden. Es kann nun ein Mal dadurch eine verschiedene Wirkungsweise bedingt sein, dass die Linie, welche die Richtung des Zugs dieser Kräfte angibt, durch zwei feste Punkte benachbarter oder nicht benachbarter Körper hindurchgeht, ein anderes Mal dadurch, dass sie zwischen diesen Punkten geradlinig ausgespannt oder durch Vorsprünge an den Körpern am geradlinigen Verlaufe gehindert ist. Für die Muskeln bedeutet dies eine Unterscheidung zwischen eingelenkigen und mehrgelenkigen Muskeln einerseits und zwischen frei zwischen zwei Knochenpunkten oder auf dem Umwege über Knochenvorsprünge wirkenden Muskeln andererseits.

Demnach kann man für das System der drei Körper folgende Fälle unterscheiden:

a. **Die beiden Kräfte wirken zwischen zwei benachbarten Körpern** (eingelenkige Muskeln) und zwar

α) *Die Zuglinie ist geradlinig zwischen den beiden Ansatzpunkten ausgespannt.* Die Kräfte mögen zwischen dem ersten und zweiten Körper wirken; die Intensität derselben sei K. Ihre Richtungen, welche durch die Lage der beiden Ansatzpunkte A_1, A_2 (vgl. Fig. 8) bestimmt sind, verlaufen entgegengesetzt.

Aus den Betrachtungen über die Wirkungsweise äusserer Kräfte

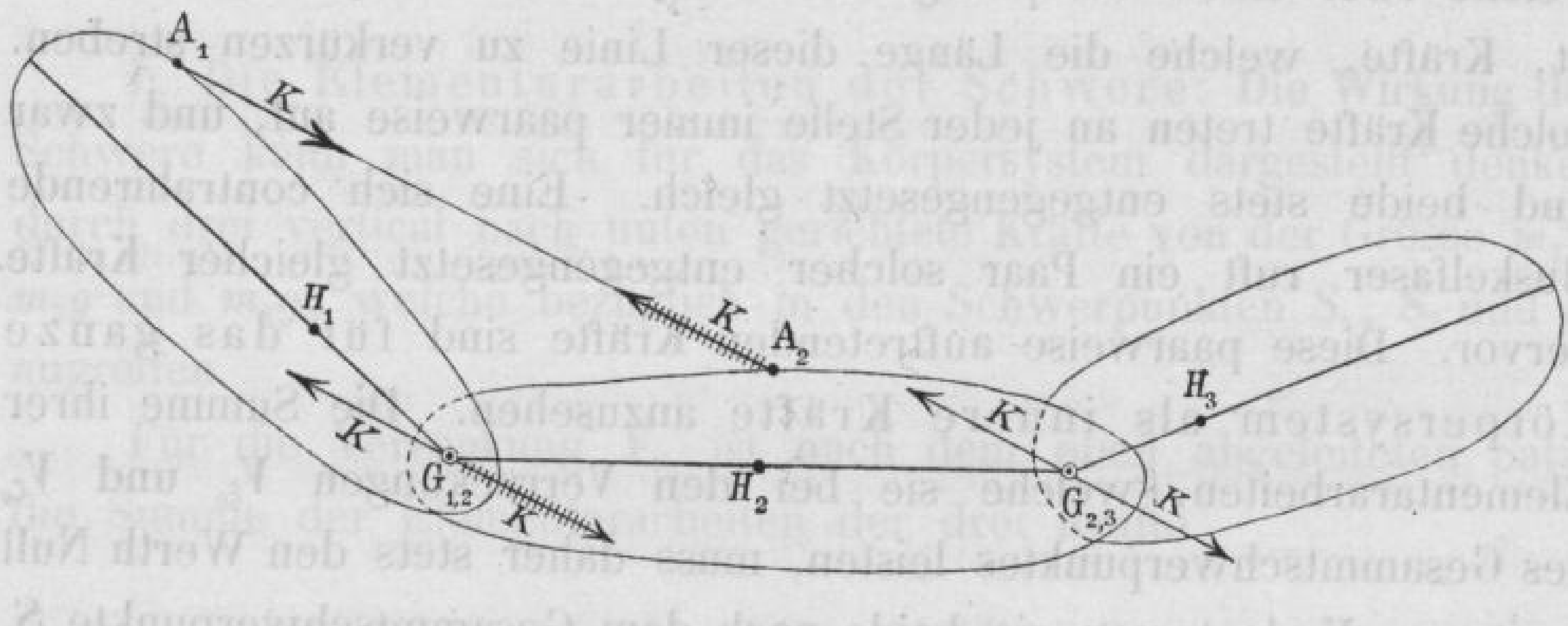


Fig. 8.

ergiebt sich, dass

für die Verrückung V_{φ_1} die in A_1 angreifende Kraft eine Elementararbeit $D'_{\varphi_1} . d\varphi_1$ leistet, wo D'_{φ_1} das Drehungsmoment der Kraft in Bezug auf die Axe durch den Hauptpunkt H_1 ist, während die Elementararbeit der in A_2 angreifenden Kraft die Grösse $D''_{\varphi_1} d\varphi_1$ besitzt, wo D''_{φ_1} das Drehungsmoment bedeutet, welches dieselbe in Bezug auf die Axe durch H_1 besitzen würde, wenn man sie parallel mit sich nach dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ verlegte. Die Gesammtelementararbeit beider entgegengesetzt gleicher Kräfte ist daher

$$(D'_{\varphi_1} + D''_{\varphi_1})\, d\varphi_1 \,.$$

Da die beiden in A_1 und $G_{1,2}$ angreifenden Kräfte entgegengesetzt gleich sind, so bilden sie ein Kräftepaar; das Moment desselben ist gleich $D'_{\varphi_1} + D''_{\varphi_1}$.

Man kann das Resultat auch so auffassen: Die beiden Drehungsmomente setzen sich zu einem einzigen D_{φ_1} zusammen, welches gleich dem Drehungsmoment ist, das die eine im Punkte A_1 des ersten Körpers angreifende Kraft für die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ besitzt.

Für die Verrückung V_{φ_2} ergibt sich in analoger Weise als Gesammtelementararbeit der beiden Kräfte das mit $d\varphi_2$ multiplicirte Moment des Kräftepaares, welches durch die in A_2 angreifende Kraft und die nach $G_{1,2}$ verlegte, ihr entgegengesetzt gleiche Kraft gebildet wird. Das letztere ist gleich dem Drehungsmoment D_{φ_2}, welches die im Punkte A_2 des zweiten Körpers angreifende Kraft in Bezug auf die Gelenkaxe $G_{1,2}$ ausübt.

Bei dem in der Figur 8 dargestellten Falle strebt das zur Verrückung V_{φ_1} gehörende Kräftepaar den Winkel φ_1 zu verkleinern, dagegen das zur Verrückung V_{φ_2} gehörende Kräftepaar den Winkel φ_2 zu vergrössern. Analytisch wird sich dies dadurch ausdrücken, dass im ersten Falle das Drehungsmoment einen negativen Werth annimmt, weil der Winkel zwischen Kraftrichtung und Translation des Punktes A_1 grösser wie $\frac{\pi}{2}$ ist.

Da für die dritte Verrückung V_{φ_3} die beiden Kräfte nach demselben Punkte, nämlich $G_{2,3}$, verlegt werden müssen, so heben sich ihre Wirkungen gegenseitig auf und die resultirende Elementararbeit ist Null.

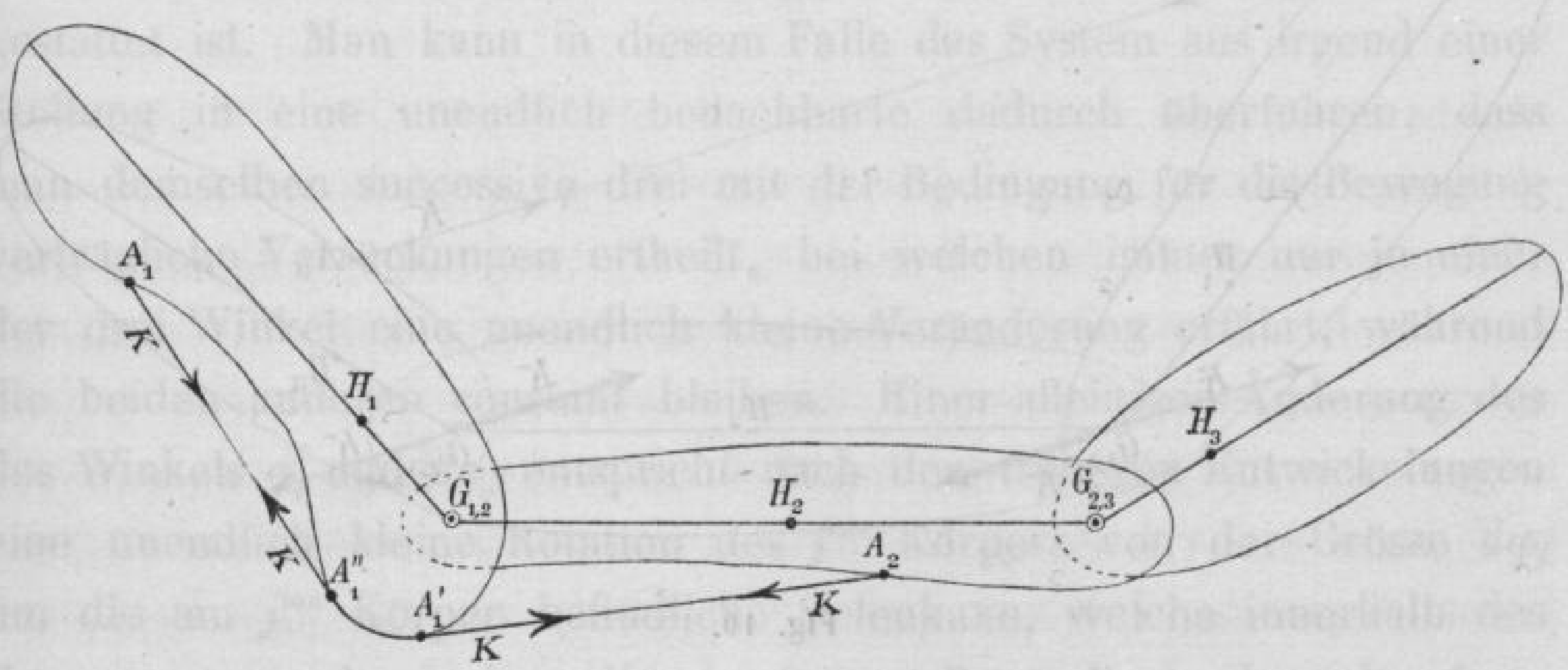


Fig. 9.

β) *Die Zuglinie läuft über einen Vorsprung des einen Körpers.* Dieser Fall lässt sich auf den ersten zurückführen. Es kommt für die Wirkung der beiden Kräfte hier nur das Stück der Zuglinie in Betracht, welches zwischen zwei Punkten der beiden Körper geradlinig verläuft, also in der umstehenden Figur 9 nur das Stück $A_1' A_2$. Das zwischen den beiden Punkten A_1, A_1'' bezüglich A_1' desselben Körpers verlaufende Stück kommt für die Gesammtelementararbeit der beiden Kräfte nicht in Betracht, da die beiden Drehungsmomente der in A_1 und A_1'' entgegensetzt angreifenden gleichen Kräfte sich gegenseitig in ihren Wirkungen aufheben.

Ein Unterschied zwischen dem ersten [α)] und zweiten [β)] Falle besteht nur darin, dass im ersten Falle das geradlinige Stück der Zuglinie zwischen zwei festen Punkten A_1, A_2 der beiden Körper ausgespannt war, während im zweiten Falle der eine Endpunkt A_1' dieser geradlinigen Strecke im Allgemeinen mit der Veränderung der Winkel φ_1 und φ_2 seine Lage im ersten Körper nicht beibehält. Diese Wanderung des Punktes A_1' hängt ganz von der Gestalt des ersten Körpers ab, ihre Bestimmung muss daher für jedes System von Körpern den Gegenstand einer besonderen Untersuchung bilden.

b. Die beiden Kräfte wirken zwischen zwei nicht benachbarten Körpern (mehrgelenkige Muskeln).

Da die Fälle, wo die Zuglinie sich nicht von Anfang bis zu Ende geradlinig zwischen zwei festen Punkten der beiden Körper

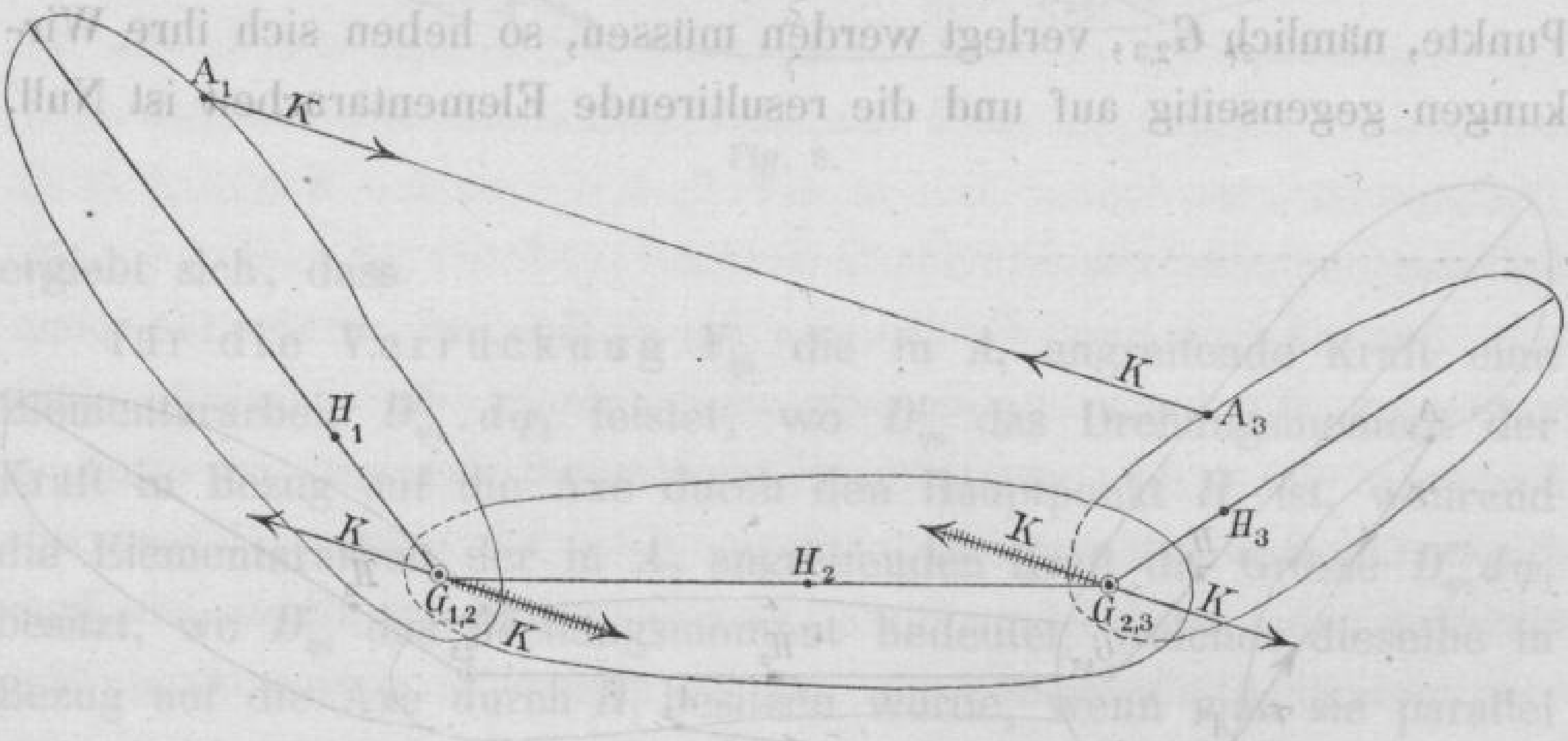


Fig. 10.

ausspannen kann, sich auf den Fall zurückführen lassen, wo die Kräfte ungehindert zwischen den beiden Ansatzpunkten wirken, so wird es nur nöthig sein, die allgemeinen Gesichtspunkte für die Behandlung dieses einen Falles aufzustellen.

Wirken beide Kräfte längs der zwischen den festen Punkten A_1

und A_3 des ersten und dritten Körpers geradlinig ausgespannten Zuglinie (Figur 10), so ergeben sich aus Betrachtungen, welche den früheren vollständig analog sind, folgende Resultate: Die Gesammtelementararbeit der beiden Kräfte ist

für die Verrückung V_{φ_1} gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Moment D_{φ_1} des Kräftepaares, welches durch die in A_1 angreifende und die ihr entgegengesetzt gleiche nach $G_{1,2}$ verlegte Kraft gebildet wird,

für die Verrückung V_{φ_2} gleich dem mit $d\varphi_2$ multiplicirten Moment des Kräftepaares, welches durch die von A_1 nach $G_{1,2}$ und die von A_3 nach $G_{2,3}$ parallel mit sich verlegten, entgegengesetzt gleichen Kräfte dargestellt ist, und endlich

für die Verrückung V_{φ_3} gleich dem mit $d\varphi_3$ multiplicirten Moment des Kräftepaares, welches durch die in A_1 angreifende Kraft einerseits und die ihr entgegengesetzt gleiche nach $G_{2,3}$ verlegte Kraft zusammengesetzt ist.

B. Das bedingt bewegliche System.

Es soll wieder der schon früher in Betracht gezogene Fall behandelt werden, bei welchem ein Punkt P_1 der ersten Längsaxe fest bleibt, so dass dem ersten Körper nur eine Bewegung um die durch diesen Punkt gehende und zu den Gelenkaxen parallele Axe gestattet ist. Man kann in diesem Falle das System aus irgend einer Stellung in eine unendlich benachbarte dadurch überführen, dass man demselben successive drei mit der Bedingung für die Bewegung verträgliche Verrückungen ertheilt, bei welchen immer nur je einer der drei Winkel eine unendlich kleine Veränderung erfährt, während die beiden anderen constant bleiben. Einer alleinigen Änderung des des Winkels φ_j und $d\varphi_j$ entspricht nach den früheren Entwickelungen eine unendlich kleine Rotation des j^{ten} Körpers von der Grösse $d\varphi_j$ um die am j^{ten} Körper befindliche Gelenkaxe, welche innerhalb des Körpersystems demjenigen Körper am nächsten liegt, dem der feste Punkt P_1 angehört, verbunden mit Translationen oder auch der Ruhe der anderen Körper. Dies gilt allgemein, mag der feste Punkt auf der Längsaxe des betreffenden Körpers liegen oder nicht, wobei die Axe durch P_1 auch unter die Gelenkaxen gerechnet sein möge.

Diese Verrückungen sollen wieder mit V_{φ_j} bezeichnet sein.

1. Elementararbeiten äusserer Kräfte.

a. Allgemeine Betrachtungen: Obgleich diese Fälle sich durch die gleichen Betrachtungen, mutatis mutandis, erledigen lassen, wie die Fälle vollkommen freier Beweglichkeit, so soll doch etwas ausführlicher auf sie eingegangen werden, als es vielleicht unbedingt nöthig erscheint, weil gerade die bedingte Bewegung beim menschlichen Körper die Regel ist, während die ganz freie Bewegung nur seltener, z. B. beim Sprung, vorkommt.

Greift eine Kraft K im Punkte A des ersten Körpers (Fig. 11)

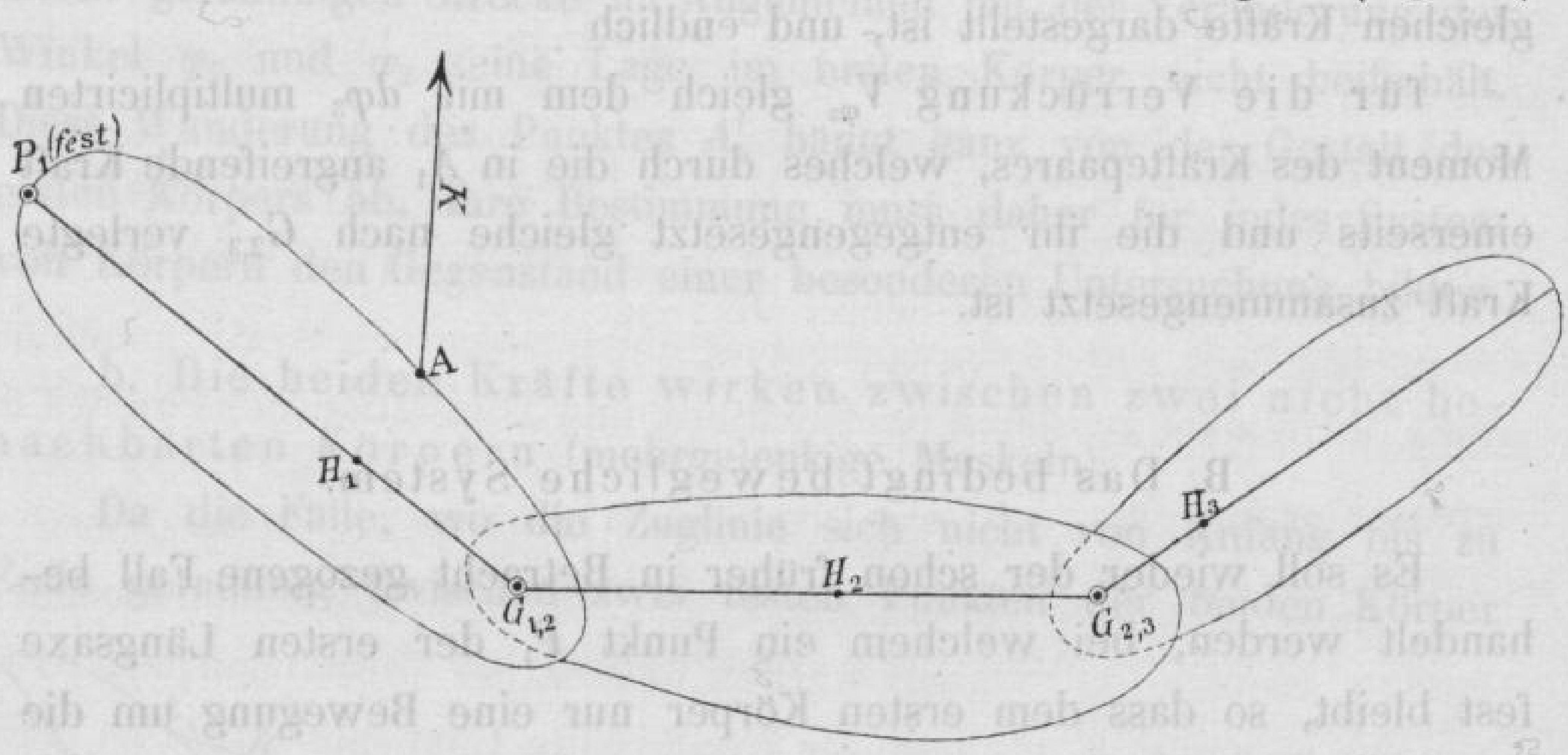


Fig. 11.

an, so kommt zu der Elementararbeit, welche sie bei der unendlich kleinen Drehung $d\varphi_1$ um den Hauptpunkt H_1 leistete, jetzt noch die Elementararbeit hinzu, welche aus der Verrückung des Hauptpunktes hervorgeht. Dieser letztere Bestandtheil ist nach dem Früheren gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die Kraft, wenn man sie parallel mit sich nach dem Hauptpunkte H_1 verlegte, in Bezug auf die Axe durch P_1 leisten würde. Der erste Bestandtheil der Gesammtelementararbeit war gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment der Kraft in Bezug auf die Axe durch H_1. Beide Drehungsmomente setzen sich zu dem einen Drehungsmoment zusammen, welches die Kraft bei der thatsächlichen Lage des Angriffspunktes in Bezug auf die Axe durch P_1 besitzt. Die Gesammtelementararbeit derselben ist daher bei der Verrückung V_{φ_1} gleich dem Product aus diesem resultirenden Drehungsmoment und der Grösse $d\varphi_1$.

Da der Hauptpunkt H_1 in dem Endresultat nicht mehr vorkommt, so muss man zu dem letzteren auch auf directem Wege gelangen können, ohne erst den Umweg über den Hauptpunkt zu machen; dies lässt sich leicht bestätigen.

Bei den Verrückungen V_{φ_2} und V_{φ_3} bleibt jetzt der erste Körper fest, und die Kraft leistet daher keine Arbeit.

Greift die Kraft K in einem Punkte A des zweiten Körpers an, so leistet sie bei der Verrückung V_{φ_1} dieselbe Elementararbeit, als wenn sie in $G_{1,2}$ angriffe; die Grösse der letzteren ist also gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die Kraft in Bezug auf die Axe durch P_1 besitzt, wenn man sie parallel mit sich nach dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ verlegt.

Zu der Verrückung V_{φ_2} gehört eine Elementararbeit der Kraft, welche gleich dem mit $d\varphi_2$ multiplicirten Drehungsmoment derselben in Bezug auf die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ ist.

Bei der Verrückung V_{φ_3} bleiben die beiden ersten Körper vollständig in Ruhe, da die Bedingung, dass der Punkt P_1 des ersten Körpers fest bleibt, auch eine Translation verbietet. Infolgedessen leistet die am zweiten Körper angreifende Kraft keine Elementararbeit.

Hat endlich die Kraft ihren Angriffspunkt am dritten Körper, so ist ihre Elementarbeit

für die Verrückung V_{φ_1} gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment, welches sie in Bezug auf die Axe durch P_1 besitzen würde, wenn man ihren Angriffspunkt nach dem Gelenkpunkte $G_{1,2}$ verlegte,

für die Verrückung V_{φ_2} gleich dem mit $d\varphi_2$ multiciplirten Drehungsmoment, welches sie in Bezug auf die Axe durch $G_{1,2}$ besitzen würde, wenn man sie parallel mit sich nach $G_{2,3}$ verlegte, und

für die Verrückung V_{φ_3} gleich dem mit $d\varphi_3$ multiplicirten Drehungsmoment, welches dieselbe für die Gelenkaxe durch $G_{2,3}$ besitzt.

Diese sämmtlichen Resultate behalten ihre Gültigkeit, wenn der Punkt P_1 ausserhalb der Längsaxe des ersten Körpers liegt.

Ganz entsprechende Resultate ergeben sich, wenn nicht ein Punkt des ersten Körpers, sondern eines der beiden anderen Körper festbleibt. Man gelangt auf diese Weise zu folgenden allgemeinen Sätzen:

1. Satz. Greift eine Kraft K an demjenigen (h^{ten}) Körper an, welchem der feste Punkt P_h angehört, so ist die Ele-

mentararbeit derselben bei der Verrückung V_{φ_h}, welche allein die Richtung der Längsaxe dieses Körpers ändert, gleich dem mit $d\varphi_h$ multiplicirten Drehungsmoment der Kraft in Bezug auf die Axe durch P_h. Bei den übrigen Verrückungen leistet die Kraft in diesem Falle keine Arbeit.

2. Satz. Greift die Kraft K an einem der Körper an, welchem der feste Punkt P_h nicht angehört, so ist die Elementararbeit derselben bei der Verrückung V_{φ_h} gleich dem mit $d\varphi_h$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die Kraft in Bezug auf die Axe durch P_h besitzt, wenn ihr Angriffspunkt nach demjenigen Gelenkpunkte des h^{ten} Körpers verlegt wird, welcher innerhalb des Körpersystems dem Angriffspunkte der Kraft am nächsten liegt. Bei der Verrückung, welche einer unendlich kleinen Rotation desjenigen Körpers entspricht, an welchem die Kraft angreift, leistet dieselbe eine Elementararbeit gleich dem Product aus der entsprechenden Winkeländerung $d\varphi$ in das Drehungsmoment, welches die Kraft für diejenige Gelenkaxe desselben Körpers besitzt, die im Innern des Systems dem Punkte P_h am nächsten liegt. Für die dritte Verrückung V_{φ_j} endlich kommt in Frage, ob der j^{te} Körper im Innern des Systems dem festen Punkte P_h näher oder entfernter liegt als der Körper, an welchem die Kraft angreift. Im ersteren Falle ist die Elementararbeit gleich dem mit $d\varphi_j$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die Kraft in Bezug auf die dem Punkte P_h näher liegende Gelenkaxe des j^{ten} Körpers besitzt, wenn man ihren Angriffspunkt nach dem dem Punkte P_h entfernteren Gelenkpunkte des j^{ten} Körpers verlegt; im letzteren Falle leistet die Kraft dagegen keine Arbeit.

b. Elementararbeiten der Schwere. Denkt man sich wieder die Wirkung der Schwere durch die drei in den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3 angreifenden und vertical nach unten gerichteten Kräfte $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$ dargestellt, so hat man für die Verrückung V_{φ_1} die beiden letzteren der drei Kräfte nach $G_{1,2}$ zu verlegen. Die drei jetzt am ersten Körper allein angreifenden Kräfte setzen sich zusammen zu der ebenfalls vertical nach unten gerichteten Resultante $m_0 g$, deren Angriffspunkt in den Hauptpunkt H_1 als den Schwerpunkt des ersten reducirten Systems hineinfällt. In Folge dessen ist die gesammte Elementararbeit der Schwere bei der Verrückung V_{φ_1} gleich dem mit $d\varphi_1$ multiplicirten Drehungsmoment, welches die im Hauptpunkte H_1 angreifende Resultante $m_0 g$ in Bezug auf die Axe durch den festen Punkt P_1 ausübt.

Analog ergibt sich, dass die Elementararbeit der Schwere für die Verrückungen V_{φ_2} bezüglich V_{φ_3} gleich dem mit $d\varphi_2$ bezüglich $d\varphi_3$ multiplicirten Drehungsmoment ist, welches die im Hauptpunkte H_2 bezüglich H_3 angreifende Kraft von der Grösse $m_0 g$ auf die Gelenkaxe durch $G_{1,2}$ bezüglich durch $G_{2,3}$ ausübt.

Man erkennt daraus von Neuem, welche wichtige Bedeutung die Hauptpunkte für das ganze Problem besitzen.

2) Elementararbeiten innerer Kräfte.

Es lässt sich leicht zeigen, dass das Festhalten des Punktes P_1 an den Elementararbeiten der für das frei bewegliche System betrachteten inneren Kräfte keine Aenderung hervorbringt. Es lassen sich also die für das freie System gefundenen Resultate direct auf den Fall der bedingten Beweglichkeit übertragen.

Ein Beispiel mag dies erläutern.

In dem durch Figur 8 auf S. 44 versinnlichten Falle würde bei Festhaltung eines Punktes P_1 des ersten Körpers die Gesammtelementararbeit der beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte K sich darstellen als das Product der Grösse $d\varphi_1$ in die Summe der Drehungsmomente, welche die in A_1 angreifende und die ihr entgegengesetzt gleiche im Punkte $G_{1,2}$ angreifende Kraft in Bezug auf die Axe durch P_1 ausüben. Die beiden Drehungsmomente haben in diesem Falle verschiedenes Vorzeichen oder gleiches, je nachdem der Punkt P_1 ausserhalb oder innerhalb des durch die beiden Kraftrichtungen gebildeten Flächenstreifens fällt. Man erkennt leicht, dass ihre algebraische Summe wie beim frei beweglichen System gleich dem Moment des Kräftepaares ist, welches durch die beiden Kräfte gebildet wird. Bei dem durch Figur 8 dargestellten Falle sucht das Kräftepaar ebenfalls den Winkel φ_1 zu verkleinern; dies geht schon daraus hervor, dass das Drehungsmoment der nach $G_{1,2}$ verlegten Kraft über dasjenige der in A_1 direct angreifenden Kraft überwiegt.

III. Die Beziehungen zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft und den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte.

Die Beziehungen, welche zwischen den Aenderungen der lebendigen Kraft des in Bewegung begriffenen Körpersystems einerseits und den Elementararbeiten der sämmtlichen äusseren und inneren Kräfte andererseits bestehen, sind gegeben durch die bestimmten Differentialgleichungen der Bewegung in der von Lagrange herrührenden Form, bei der die rechtwinkligen Coordinaten durch allgemeine Coordinaten ersetzt sind, welche die Lage des Systems vollständig bestimmen.

Für das zunächst in Betracht gezogene Körpersystem stellen die drei Winkel φ_1, φ_2, φ_3 in Verbindung mit den variabelen Coordinaten ξ_0, ζ_0 des Gesammtschwerpunktes bei freier Beweglichkeit des Systems oder den constanten Coordinaten x_1, z_1 des festbleibenden Punktes P_1 in dem betrachteten Falle bedingter Beweglichkeit ein solches System allgemeiner Coordinaten dar, durch welches die Lage und Gestalt des Körpersystems eindeutig bestimmt ist.

Das System der fünf Differentialgleichungen der Bewegung lautet für den Fall freier Beweglichkeit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} = Q_{\varphi_h} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_0} = Q_{\xi_0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_0} = Q_{\zeta_0}.$$

Für den in Betracht gezogenen Fall bedingter Beweglichkeit kommen die beiden letzten Gleichungen in Wegfall. Es treten auch keine neuen hinzu, da die Coordinaten x_1, z_1 des festbleibenden Punktes constante Grössen sind, so dass schon die drei ersten Differentialgleichungen das vollständige System der Bewegungsgleichungen darstellen.

Die Ausführung der Differentiationen bei dem auf S. 32 niedergelegten Ausdrucke für die gesammte lebendige Kraft des Systems bei freier Beweglichkeit ergibt zunächst für die linke Seite der ersten Differentialgleichung den Werth:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = m_0 \left\{ k_1^2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - f_{12} f_{21} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - f_{13} f_{31} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} \right.$$
$$\left. - f_{12} f_{21} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 - f_{13} f_{31} \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \left(\frac{d\varphi_3}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Die Werthe der Grössen f sind aus der Tabelle auf S. 26 zu ersehen.

Man kann den Ausdruck auch in der kürzeren Form schreiben:

$$m_0 \left\{ \sigma_1^2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \sum_1^3{}^j f_{1j} f_{j1} \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_j) \frac{d^2\varphi_j}{dt^2} + \sin(\varphi_1 - \varphi_j) \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 \right] \right\},$$

wobei unter σ_1 der Trägheitsradius des ersten reducirten Systems in Bezug auf die durch den Einzelschwerpunkt S_1 gehende Axe bedeutet. Die Richtigkeit dieses Resultates erkennt man, wenn man beachtet, dass nach der Bedeutung von σ_1 stattfinden muss

$$\sigma_1^2 = k_1^2 + e_1^2 = k_1^2 + f_{11}^2$$

und dass $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ ist.

Die Zweckmässigkeit dieser letzteren Schreibweise erhellt ganz besonders daraus, dass dieser Ausdruck, wovon man sich leicht überzeugt, auch zugleich den Werth von

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_3'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3}$$

darstellt, wenn man in ihm den Index 1 bezüglich durch 2 oder 3 ersetzt.

Ferner ist nun

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_0} = m_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_0} = m_0 \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}.$$

Man hat daher das System der Differentialgleichungen:

$$m_0 \left\{ \sigma_h^2 \frac{d^2\varphi_h}{dt^2} - \sum_1^3{}^j f_{hj} f_{jh} \left[\cos(\varphi_h - \varphi_j) \frac{d^2\varphi_j}{dt^2} + \sin(\varphi_h - \varphi_j) \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 \right] \right\} = Q_{\varphi_h}, \quad (h = 1, 2, 3)$$

$$m_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2} = Q_{\xi_0} \quad \text{und} \quad m_0 \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = Q_{\zeta_0}.$$

Die Grössen Q_{φ_h}, Q_{ξ_0} und Q_{ζ_0} hängen sehr eng mit den Elementararbeiten der wirksamen Kräfte zusammen. $Q_{\varphi_h} d\varphi_h$ bedeutet die Summe der Elementararbeiten sämmtlicher äusserer und innerer Kräfte für die Verrückung V_{φ_h}, und $Q_{\xi_0}\, d\xi_0$ bezüglich $Q_{\zeta_0}\, d\zeta_0$ bedeutet die Summe der Elementararbeiten der äusseren Kräfte allein für die Verrückung V_{ξ_0} bezüglich V_{ζ_0}.

Nach den früheren Entwickelungen stellen daher die Grössen Q_{φ_h} durchweg Drehungsmomente und die Grössen Q_{ξ_0}, Q_{ζ_0} die Componentensummen der äusseren Kräfte parallel der X-Axe bezüglich parallel der Z-Axe dar.

Sind insbesondere ausser der Schwere keine äusseren Kräfte vorhanden, so ist $Q_{\xi_0} = 0$, $Q_{\zeta_0} = -m_0 g$, während jede der Grössen Q_{φ_h} die Summe der Momente aller Kräftepaare darstellt, welche dadurch entstehen, dass man zu den am h^{ten} Körper selbst angreifenden Kräften die anderen noch auftretenden Kräfte in der Weise hinzufügt, dass man jede derselben parallel mit sich nach demjenigen Gelenkmittelpunkte des h^{ten} Körpers verlegt, welcher ihrem Angriffspunkte innerhalb des Körpersystems am nächsten liegt.

Für den Fall, dass ein Punkt P_1 auf der Längsaxe des ersten Körpers festliegt, so dass der erste Körper nur Drehungen um die zu den Gelenkaxen parallele Axe durch P_1 ausführen kann, erhält man unter Benutzung des auf S. 36 niedergelegten Werthes für T die drei Differentialgleichungen:

$$m_0\left[\lambda_1^2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + l_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + l_1 c_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} \right.$$
$$\left. + l_1 c_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 + l_1 c_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \left(\frac{d\varphi_3}{dt}\right)^2 \right] = Q_{\varphi_1}$$

$$m_0\left[\lambda_2^2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + l_2 c_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + l_1 c_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} \right.$$
$$\left. + l_2 c_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \left(\frac{d\varphi_3}{dt}\right)^2 + l_1 c_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 \right] = Q_{\varphi_2}$$

$$m_0\left[\lambda_3^2 \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + l_1 c_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + l_2 c_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} \right.$$
$$\left. + l_1 c_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + l_2 c_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 \right] = Q_{\varphi_3}.$$

Jede der Grössen Q_{φ_h} bedeutet jetzt die Summe der Drehungsmomente, welche sämmtliche am Körper angreifenden äusseren und inneren Kräfte in Bezug auf die Axe bezüglich durch P_1, $G_{1,2}$ oder $G_{2,3}$ ausüben, nachdem alle diejenigen, welche nicht direct am h^{ten} Körper angreifen, parallel mit sich nach dem Gelenkpunkte verlegt worden sind, der ihnen innerhalb des Körpersystems am h^{ten} Körper am nächsten liegt. Die Drehungsmomente zweier zusammengehöriger innerer Kräfte setzen sich dabei immer zum Moment eines Kräftepaares zusammen.

Hat man sich nun auf empirischem Wege eine eingehende Kenntniss der bei den einzelnen Körpern des Systems auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen verschafft, und kennt man ausserdem die wirksamen äusseren Kräfte, so kann man nicht nur für jeden Zeitmoment die Werthe der linken Seiten aller dieser Bewegungsgleichungen berechnen, sondern man kann auch den numerischen Werth des Bestandtheiles der rechten Seite angeben, welcher von den äusseren Kräften herrührt. Es bleibt infolgedessen in jeder dieser Gleichungen auf der rechten Seite nur noch das betreffende Gesammtdrehungsmoment der inneren Kräfte als Unbekannte übrig. Man ist daher in den Stand gesetzt, den zu jeder der Verrückungsarten V_{φ_h}, bezüglich V_{ξ_0} und V_{ζ_0} gehörenden Werth des resultirenden Drehungsmomentes der inneren Kräfte für den ganzen Verlauf der Bewegung anzugeben.

Kommen nur drei verschiedene Paare innerer Kräfte (Muskelkräfte) vor, so kann man darauf ohne Weiteres auch den Antheil bestimmen, den jedes derselben an der Hervorbringung des resultirenden Drehungsmomentes besitzt. Hat man mehr wie drei Paare von Kräften, so muss man zu dieser letzteren Bestimmung noch ein Princip, wie das der kleinsten Anstrengung, zu Hülfe nehmen.

Damit ist im Princip dieser einfache Fall der Bewegungen eines Systems von drei durch Gelenke mit einander verbundenen Körpern erledigt. Die bei demselben gewonnenen Methoden für die Aufstellung der einzelnen Bestandtheile der Bewegungsgleichungen lassen sich, mutatis mutandis, auf die viel verwickelteren Systeme, wie sie der menschliche Körper oder die Körper der Thiere darstellen, anwenden. Gewisse Bewegungen der letzteren, bei welchen nur zwei oder drei zusammenhängende Glieder ihre Lage zu einander verändern, wie z. B. die Bewegung eines frei herabhängenden Beins parallel der Medianebene des Menschen infolge beliebiger Contraction der Muskeln sind durch den behandelten Fall schon vollständig erledigt.

IV. Die lebendige Kraft des menschlichen Körpers.

Wenn der menschliche Körper für die Mechanik greifbar werden soll, so muss man gewisse Voraussetzungen und Einschränkungen in Bezug auf seine Zusammensetzungen machen, welche der Wirklichkeit nicht vollständig entsprechen. Wenn man z. B. die Wirkungsweise von Muskeln untersuchen will, welche zwischen grösseren Körpertheilen ausgespannt sind, so kann man diese Aufgabe nur dadurch für die Mechanik lösbar gestalten, dass man erstens von der Deformation der Körpertheile infolge der Contraction der Muskeln oder infolge anderer Einflüsse, wie Blutstrom u. s. w. absieht und die Glieder als starre Massen auffasst, und dass man zweitens über die Wirkungsweise der Muskeln gewisse, nicht streng realisirte Voraussetzungen macht, wie das Vorhandensein einer Resultante für den ganzen Muskel oder wenigstens für bestimmte Muskelpartien, geradliniger Verlauf dieser Resultante entweder direct zwischen zwei Knochenpunkten oder auf dem Umwege über Knochenvorsprünge, Sehnenrollen u. s. w. Die Zerlegung des Körpers in einzelne starre Massen ist im Allgemeinen gegeben durch die Gelenke. Es hängt nun ganz von der Art der zu untersuchenden Bewegung ab, wie weit man die Zerlegung in starre Massen vorzunehmen hat. So kommt beispielsweise für die Bewegungen des Gehens und Laufens die Beweglichkeit der Fingerglieder, ja selbst die Beweglichkeit der Hand gegen den Unterarm nicht in Betracht. Man kann daher in diesen Fällen den Unterarm mit der Hand zusammen als eine starre Masse auffassen. Wollte man dagegen die Bewegungen eines Clavierspielers untersuchen, so könnte man vom mechanischen Standpunkte aus andererseits unbedenklich den ganzen Körper mit Ausnahme der Arme als eine starre Masse ansehen; dagegen hätte man auf die Bewegungen in den Arm-, Hand- und Fingergelenken das Hauptgewicht zu legen. Beim Gehen oder Laufen kann man ferner mit grosser Annäherung auch den Rumpf als eine starre Masse ansehen, obgleich derselbe während des Athmens fortwährend seine Form ändert, ja man kann bei dieser Bewegungsart sogar den Schultergürtel und den Kopf als starr mit dem Rumpfe verbunden auffassen. Wenn auch der Schultergürtel und der Kopf gewöhnlich beim Gehen etwas gegen den Rumpf verrückt werden, so sind diese Bewegungen für die Fortbewegung des ganzen Körpers nicht unbedingt erforderlich. Unterdrückt man dieselben, was beim Militär besonders geübt wird, so wird dadurch weder die Möglichkeit noch die Art des Gehens wesentlich beeinflusst. Man könnte endlich für den Gang sogar die Arme zum Rumpfe feststellen und mit grosser Annäherung den Rumpf mit dem Kopfe und den Armen zu einer einzigen starren Masse zusammennehmen. Dadurch würde sich die mechanische Aufgabe wesentlich vereinfachen. Für andere Bewegungsarten, wie z. B. das Schwimmen, kommt andererseits gerade die Beweglichkeit der Arme in Frage und man könnte in diesem Falle etwa nur den Kopf gegen den Rumpf feststellen.

Es lässt sich daher von vornherein keine für alle Fälle gleichwerthige Zergliederung des menschlichen Körpers in einzelne starre Massen angeben. Dieselbe richtet sich jedesmal nach der besonderen Art der zu untersuchenden Bewegung.

Für viele im Leben häufiger vorkommende Bewegungen ist die Zerlegung des ganzen Körpers in folgende 12 als starre Massen zu behandelnden Theile ausreichend:

Rumpf (1), rechter Oberschenkel (2), linker Oberschenkel (3), rechter Unterschenkel (4), linker Unterschenkel (5), rechter Fuss (6), linker Fuss (7), rechter Oberarm (8), linker Oberarm (9), rechter Unterarm mit Hand (10), linker Unterarm mit Hand (11) und Kopf (12).

Dabei soll der Schultergürtel fest zum Rumpfe angenommen werden und einen Theil desselben ausmachen.

Da für jeden dieser 12 Körperabschnitte sowohl die Masse und die Lage des Schwerpunktes[1]) als auch die Grösse der drei Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes[2]) früher von uns bestimmt worden sind, so stellen dieselben im mechanischen Sinne vollständig bekannte Massen dar und können daher als Object der Bewegung in Betracht gezogen werden.

Für die Behandlung von Bewegungen des menschlichen Körpers, welche eine weitergehende Zergliederung desselben zur Voraussetzung haben, würde es sich dagegen nöthig machen, erst noch kleinere

1) Abhandl. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XV.
2) Abhandl. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XVIII.

Theile des Körpers auf ihre Masse, Massenvertheilung und Trägheitsmomente zu untersuchen.

In der folgenden Darlegung soll nun oft für die einzelnen Körperabschnitte die in Klammer beigesetzte Nummerirung verwendet werden. Ferner soll als Längsaxe des Körperabschnittes oder Gliedes eingeführt sein: bei den durch zwei Gelenke begrenzten Extremitätenabschnitten (2, 3, 4, 5, 8, 9) die Verbindungslinie der beiden Gelenkmittelpunkte, bei den Endkörpertheilen (6, 7, 10, 11, 12) die Verbindungslinie des Gelenkmittelpunktes mit dem Einzelschwerpunkt, und beim Rumpf (1) die Verbindungslinie des Mittelpunktes vom Atlanto-occipitalgelenk mit der Mitte der Hüftaxe. Der Schwerpunkt des h^{ten} Gliedes, welcher nach unseren früheren Untersuchungen immer mit grosser Annäherung in der Längsaxe des Gliedes liegt, soll mit S_h, der Gesammtschwerpunkt des menschlichen Körpers mit S_0 und der Mittelpunkt des Gelenkes, welches das i^{te} und k^{te} Glied mit einander verbindet, mit $G_{i,k}$ bezeichnet sein. Demnach erhält man die in der Figur auf Tafel I eingetragenen Bezeichnungen für die einzelnen Schwerpunkte und Gelenkmittelpunkte.

Um die Lage eines jeden der 12 Körpertheile im Raume zu bestimmen, sind im Allgemeinen 6 Coordinaten erforderlich. Es empfiehlt sich, dazu die 3 rechtwinkligen Coordinaten eines zum Körpertheil festen Punktes und drei Winkel φ, ϑ, ϱ zu verwenden. Von den drei rechtwinkligen Coordinatenaxen sei die Z-Axe vertical und nach oben positiv gerichtet, dann liegen die X-Axe und Y-Axe in einer Horizontalebene. Es soll φ den Winkel bedeuten zwischen der Längsaxe des Gliedes und einer nach unten positiv zu rechnenden Verticalen, ϑ den Winkel zwischen der durch die Längsaxe gehenden Verticalebene und einer im Raume festen Verticalebene, welche mit der YZ-Ebene des Coordinatensystems parallel laufen möge.

Zur Feststellung der Bedeutung des dritten Winkels ϱ soll Folgendes verabredet sein: Als Normalstellung des menschlichen Körpers soll diejenige bezeichnet werden, welche der Körper einnimmt, wenn alle Längsaxen mit Ausnahme derer der beiden Füsse vertical gerichtet sind und in einer einzigen zur YZ-Ebene parallelen Verticalebene liegen. Setzt man dann noch fest, dass bestimmte zu den einzelnen Körpertheilen feste Ebenen durch die Längsaxen (Frontalebenen) mit dieser Verticalebene zusammenfallen, dass die

Arme herabhängen, und dass die durch die Längsaxen der Füsse gelegten Verticalebenen (Sagitalebenen) auf der YZ-Ebene senkrecht stehen, so ist bei der eigenthümlichen Art der Gelenkverbindungen und der Freiheit der Gelenkbewegungen damit eine feste Stellung des Körpers eindeutig bestimmt; dies die Normalstellung. In unserer Arbeit über den Schwerpunkt des menschlichen Körpers haben wir gezeigt, dass der Körper auch wirklich im Stande ist, diese Stellung einzunehmen. Es kann nun die Längsaxe eines jeden Körpertheils aus ihrer Lage in der Normalstellung in die neue dadurch übergeführt werden, dass der ganze Körpertheil um eine horizontale Axe $\mathfrak{A}_\varphi$, welche mit der festen Verticalebene den Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$ bildet, um den Winkel φ gedreht wird. Dabei wird im Allgemeinen die Ebene des Körpertheils, welche in der Normalstellung parallel der YZ-Ebene verlief, um die Längsaxe eine Drehung ausgeführt haben. Die Grösse dieser Drehung, welche man als Rollung des Körpertheils zu bezeichnen pflegt, soll durch den Winkel ϱ dargestellt sein.

Zur Unterscheidung der zu den verschiedenen Gliedern gehörenden Winkel φ, ϑ, ϱ soll denselben immer die Nummer des Gliedes als Index beigegeben werden.

Da 12 Glieder in Betracht kommen, so würden demnach zur Bestimmung der Lage aller Glieder im Raume 72 Coordinaten gehören. Diese sind aber nicht alle von einander unabhängig. Es ist leicht ersichtlich, dass infolge der Gelenkverbindungen die Haltung des Körpers und seine Lage im Raume schon durch 39 Coordinaten vollständig bestimmt ist, nämlich durch die 36 Winkel φ, ϑ, ϱ und drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z für irgend einen Punkt des Gesammtkörpers. Letzterer braucht nicht unbedingt fest zu irgend einem Gliede zu liegen; es genügt, wenn seine Lage für jede Haltung des Körpers eindeutig bestimmt ist. Dies ist z. B. für den Gesammtschwerpunkt S_0 der Fall.

Die 36 Winkelcoordinaten sind genau genommen nur dann von einander unabhängig, wenn jedes Gelenk zwischen zwei Gliedern drei Grade der Freiheit besitzt. Jede Beschränkung der Beweglichkeit im Gelenk, sei sie durch die besondere Form der Gelenkflächen, durch Arretirungen oder durch die besondere Art der gleichzeitigen Innervation der auf das Gelenk wirkenden Muskeln hervorgerufen, bedingt eine Abhängigkeit zwischen den Winkelgrössen der betreffenden Glieder und vermindert infolgedessen die Zahl der unabhängigen Coordinaten. Da diese Verhältnisse zum Theil noch nicht genügend aufgeklärt sind, so können sie vorläufig noch keine Berücksichtigung erfahren, und es sollen für's Erste die Grössen φ, ϑ, ϱ als von einander unabhängig behandelt werden.

Die lebendige Kraft des menschlichen Körpers muss sich dann als Function der Grössen φ, ϑ, ϱ, φ', ϑ', ϱ' und der Coordinaten des Gesammtschwerpunktes, bezüglich eines anderen für die Bewegung bevorzugten Punktes, und deren Abgeleiteten darstellen lassen. Die Grössen φ', ϑ', ϱ' bedeuten die Winkelgeschwindigkeiten $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d\varrho}{dt}$.

Die Ableitung des Ausdruckes für die lebendige Kraft kann auf ganz entsprechende Weise geschehen wie für das System der drei Körper. Es ist dabei Folgendes zu beachten:

Man kann bei festgehaltenem Gesammtschwerpunkt den Körper aus einer Stellung in eine unendlich benachbarte dadurch überführen, dass man dem ganzen System successive unendlich kleine Verrückungen ertheilt, bei welchen jeweilig nur die drei Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j für ein Glied (j^{tes} Glied) geändert werden, während die zu den übrigen Gliedern gehörenden Winkel constant bleiben. Bei einer solchen Verrückung erfährt das j^{te} Glied eine unendlich kleine Rotation um irgend eine Axe, während die anderen Glieder gleichzeitig nur Translationen ausführen können.

Es gilt nun folgender

Satz: Die Axe dieser Rotation muss, unabhängig von ihrer Richtung, immer durch einen zum j^{ten} Gliede festen Punkt hindurchgehen, wenn der Gesammtschwerpunkt des Körpers während der Verrückung an seiner Stelle bleiben soll. Dieser Punkt, für welchen der Name **Hauptpunkt des j^{ten} Gliedes** eingeführt sein soll, fällt zusammen mit dem Schwerpunkte eines Systems, welches man erhält, indem man zu der Masse des j^{ten} Gliedes die Massen aller anderen Glieder des menschlichen Körpers in der Weise hinzufügt, dass man in dem Mittelpunkte eines jeden am

j^{ten} Gliede befindlichen Gelenkes die Massen aller der Glieder vereinigt annimmt, welche durch dieses Gelenk mit dem j^{ten} Gliede in mittelbarer oder unmittelbarer Verbindung stehen.

Letzteres fingirte Massensystem, welches, wie man aus der Betrachtung des voraufgeschickten einfachen Falles weiss, für das Problem der Bewegung des menschlichen Körpers oder ähnlich zusammengesetzter Massensysteme eine wichtige Rolle spielt, soll wie früher den Namen »j^{tes} reducirtes System« führen. An Stelle der Nummer soll sehr oft auch, der besseren Anschaulichkeit halber, der Name des Gliedes verwendet werden. Es ist also z. B 1$^{\text{tes}}$ reducirtes System und »reducirtes Rumpfsystem« dasselbe. Die Masse eines jeden reducirten Systems stimmt überein mit der Gesammtmasse des Körpers.

Dieser Satz ist die directe Verallgemeinerung des entsprechenden Satzes vom Dreikörpersystem für eine grössere Anzahl durch Gelenke verbundener Körper und für beliebige Richtung der Rotationsaxe. Der Beweis desselben soll aus diesem Grunde nicht wieder in der früheren Form ausführlich mitgetheilt werden, da die Anleitung zu demselben im Princip durch die früheren Entwickelungen gegeben ist. Es soll dagegen an dieser Stelle gezeigt werden, wie man den Satz noch auf andere Art, ohne alle Rechnung, beweisen kann:

Es möge zunächst dem j^{ten} Gliede eine unendlich kleine Rotation um irgend eine Axe durch seinen Einzelschwerpunkt S_j ertheilt werden. Dabei können die anderen Glieder infolge des Zusammenhangs zwischen den einzelnen Körpertheilen nicht in Ruhe bleiben. Da ihre Bewegung aber nur in einer Translation bestehen darf, so ist klar, dass die Translation eines jeden der 11 anderen Glieder übereinstimmt mit der Translation des am j^{ten} Gliede befindlichen Gelenkmittelpunktes, welcher die Verbindung zwischen diesem und dem j^{ten} Gliede darstellt. Handelt es sich z. B. um eine unendlich kleine Rotation $d\omega$ des rechten Oberschenkels um eine Axe durch seinen Schwerpunkt S_2, so werden alle Glieder, welche durch das rechte Kniegelenk mit dem rechten Oberschenkel in Verbindung stehen (rechter Unterschenkel und rechter Fuss) eine unendlich kleine Translation erfahren, welche übereinstimmt mit der Translation des Kniegelenkmittelpunktes.

Alle anderen Glieder sind Translationen unterworfen, welche gleich der Translation des rechten Hüftgelenkmittelpunktes sind.

Es soll nun mit S' der gemeinsame Schwerpunkt für alle Glieder jenseits des Hüftgelenks und mit S'' der gemeinsame Schwerpunkt für die beiden Glieder jenseits des Kniegelenks bezeichnet werden.

Die Translation des Schwerpunktes S' ist unabhängig von der Stellung der einzelnen Glieder jenseits des Hüftgelenks zu einander; sie würde also dieselbe bleiben, wenn man diesen Gliedern eine solche Stellung zu einander ertheilen könnte, bei welcher der Schwerpunkt S' gerade in den Mittelpunkt $G_{1,2}$ des Hüftgelenks hineinfällt. Desgleichen könnte der gemeinsame Schwerpunkt S'' der Glieder jenseits des Kniegelenks in den Mittelpunkt $G_{2,4}$ des Kniegelenks fallen, ohne dass dadurch die Translation desselben beeinflusst würde. Der Gesammtschwerpunkt des ganzen Körpers würde aber dann auch mit einem im Oberschenkel festen Punkte zusammenfallen, nämlich gerade mit dem Schwerpunkte H_2 desjenigen Massensystems, welches man erhält, wenn man im Hüftgelenkmittelpunkt einerseits und im Kniegelenkmittelpunkt andererseits die Massen aller durch diese beiden Gelenke mit dem Oberschenkel in Verbindung stehenden Glieder vereinigt annimmt. Für dieses fingirte Massensystem ist die Bezeichnung »2^{tes} reducirtes System« oder auch »reducirtes Oberschenkelsystem« und für den Schwerpunkt H_2 desselben die Bezeichnung »Hauptpunkt des Oberschenkels« eingeführt worden. Soll nun der Gesammtschwerpunkt während der Verrückung des ganzen Körpers fest bleiben, so darf auch der Hauptpunkt H_2 seinen Ort nicht verändern; es muss daher die Axe der Rotation stets durch denselben hindurchgehen.

Entsprechendes gilt natürlich auch, wenn das bevorzugte Glied, welchem bei der Verrückung des ganzen Körpers jeweils allein eine Rotation gestattet ist, durch mehr als zwei Gelenke mit den übrigen Gliedern verbunden ist. Im Körper existirt ein solches Glied, nämlich der Rumpf. Auch in diesem gibt es daher einen Hauptpunkt; derselbe ist wieder identisch mit dem Schwerpunkte des reducirten Rumpfsystems.

Die Strecken zwischen dem Hauptpunkte H_j und den Gelenkmittelpunkten des j^{ten} Gliedes sollen wieder den Namen »Hauptstrecken des j^{ten} Gliedes« führen.

Die Lage des Hauptpunktes innerhalb eines jeden Körpertheils und die Grösse der Hauptstrecken hängen von den Massen sämmtlicher Glieder ab. Verändert man die Masse auch nur eines Körpertheils, z. B. des Rumpfes, indem man ihn mit einem Tornister beschwert, oder des Armes, indem man ein Gewicht in der Hand hält, so verändert sich auch sofort die Lage sämmtlicher Hauptpunkte, und zwar immer in der Weise, dass sie alle innerhalb des Körpers dem beschwerten Gliede näher rücken.

Die Hauptpunkte der 12 Körperabschnitte ermöglichen wieder eine wesentliche Vereinfachung für die Ableitung der lebendigen Kraft des menschlichen Körpers. Aus der Bedeutung derselben geht unmittelbar folgender Satz hervor:

Satz: Der menschliche Körper kann aus einer beliebigen Stellung in eine unendlich benachbarte mit derselben Lage des Gesammtschwerpunktes dadurch übergeführt werden, dass man ihm nach einander 12 unendlich kleine Verrückungen V_j ertheilt, bei welchen immer nur je ein Glied um eine Axe seines Hauptpunktes unendlich wenig gedreht wird, während alle anderen Glieder gleichzeitig Translationen ausführen.

Infolgedessen stellt sich die Verrückung eines jeden der 12 Einzelschwerpunkte im Allgemeinen dar als geometrische Summe von 12 Translationen, welche leicht zu berechnen sind, nachdem man die Lage der 12 Hauptpunkte und die Richtungen der 12 Axen für die Verrückungen V_j $(j = 1, 2 \ldots 12)$ festgestellt hat. Die Translation, welche der Schwerpunkt S_h bei der Verrückung V_j erfährt, ist identisch mit der aus der Rotation um die Axe durch H_j resultirenden Translation des am j^{ten} Gliede befindlichen Gelenkmittelpunktes, welcher dem Schwerpunkte S_h innerhalb des Körpersystems am nächsten liegt. Es ist daher dem Schwerpunkte S_h für jede Verrückung V_j (bei welcher $j \lesseqgtr h$) ein Gelenkmittelpunkt und eine Hauptstrecke des j^{ten} Gliedes zugeordnet.

Aus diesem Grunde stellt sich zunächst die Nothwendigkeit ein, die Translationen festzustellen, welche die Gelenkmittelpunkte des j^{ten} Gliedes bei den unendlich kleinen Rotationen desselben um Axen durch den zugehörigen Hauptpunkt H_j erfahren.

Für die analytische Durchführung dieser Aufgabe ist nun die

Thatsache von Bedeutung, dass der Schwerpunkt eines jeden Gliedes in der Längsaxe desselben liegt. Infolgedessen fällt auch jeder Hauptpunkt in die Längsaxe seines Gliedes. Davon ist der Rumpf nicht ausgenommen, wenn von der Bewegung des Schultergürtels abgesehen wird, und wenn die für eine gewisse mittlere Haltung geltende Annahme gemacht wird, dass die fünf am Rumpfe befindlichen Gelenkmittelpunkte in einer einzigen Ebene liegen, welche den Schwerpunkt und die Längsaxe des Rumpfes enthält.

Die Lage der Gelenkmittelpunkte zum Hauptpunkte desselben Gliedes wird durch die Hauptstrecken bestimmt. Mit Ausnahme des Rumpfes bilden dieselben bei allen Körpertheilen Strecken auf den Längsaxen. Für den Rumpf ist das nur bei der Hauptstrecke der Fall, welche den Hauptpunkt H_1 mit dem Mittelpunkte des Atlanto-occipitalgelenks verbindet, während die vier anderen Strecken, welche H_1 mit den Schulter- und Hüftgelenkmittelpunkten verbinden und welche gleichfalls in der Ebene der fünf Rumpfgelenkmittelpunkte liegen, gegen die Längsaxe des Rumpfes geneigt sind. Es empfiehlt sich, jede dieser vier Hauptstrecken durch je zwei zu einander senkrecht gerichtete zu ersetzen, von denen die eine die Projection der Verbindungsstrecke des betreffenden Gelenkmittelpunktes mit dem Hauptpunkt auf die Rumpflängsaxe und die andere den Abstand dieses Gelenkmittelpunktes von der Rumpflängsaxe darstellt.

Für die Hauptstrecken des menschlichen Körpers sollen nun die folgenden aus der Tafel II ersichtlichen Bezeichnungen eingeführt sein: An den Extremitätenabschnitten und am Kopfe sind die Strecken mit c_j oder d_j bezeichnet worden, je nachdem sie den Hauptpunkt H_j mit dem dem Rumpfe näher gelegenen oder vom Rumpfe entfernteren Gelenkmittelpunkte verbinden. Die Strecken der Rumpflängsaxe, welche den Mittelpunkt des Kopfgelenks, die Mitte der Schulterlinie und die Mitte der Hüftlinie mit dem ersten Hauptpunkte verbinden, tragen bezüglich die Bezeichnungen k, o, u, und die Entfernungen der Schultergelenk- und Hüftgelenkmittelpunkte von der Rumpflängsaxe bezüglich die Bezeichnungen a und b. Die Verbindungsstrecke des Hauptpunktes H_j mit dem Schwerpunkte S_j desselben Gliedes, welche ebenfalls Hauptstrecke genannt werden soll, ist mit e_j bezeichnet worden.

Die Grössen c_j, d_j, e_j, k, o, u, a und b sollen zunächst nur die absoluten Längen der Strecken ausdrücken. Für die Verrückungen ist es nun nicht gleichgültig, in welcher Richtung dieselben vom Hauptpunkte aus verlaufen. Man hat daher sowohl auf jeder Längsaxe als auch auf der in der Ebene der fünf Rumpfaxen liegenden, auf der Längsaxe des Rumpfes senkrechten Geraden eine positive und negative Richtung zu unterscheiden. Zur Bestimmung derselben ist es am bequemsten, sich den Körper in die oben näher bezeichnete Normalstellung versetzt zu denken. Es soll dann für die Längsaxen die Richtung nach unten, bezüglich für die Fusslängsaxen die Richtung nach unten und vorn, und für die zur Rumpflängsaxe senkrechten Strecken die Richtung nach der rechten Körperseite zu als positiv eingeführt werden. Es ist demnach z. B. $\overline{H_3 G_{3,5}} = + d_3$, $\overline{H_3 G_{1,2}} = - c_3$, $\overline{M_1 G_{1,8}} = + a$, $\overline{M_1 G_{1,9}} = - a$, u. s. w.

Es wurde oben (S. 63) auseinandergesetzt, dass einem jeden Schwerpunkte S_h für die Verrückung V_j (wo $j \lesseqgtr h$) eine Hauptstrecke des j^{ten} Gliedes zugeordnet ist. Dieselbe ist diejenige unter den Hauptstrecken des j^{ten} Gliedes, welche das dem Schwerpunkte S_h innerhalb des Körpers am nächsten liegende Gelenk des j^{ten} Gliedes, d. h. also das Gelenk, welches die unmittelbare oder mittelbare Verbindung zwischen dem j^{ten} Gliede und dem h^{ten} Gliede darstellt, mit dem Hauptpunkte des j^{ten} Gliedes verbindet. Führt man für die dem Schwerpunkte S_h in Bezug auf die Verrückung V_j zugeordnete Hauptstrecke die Bezeichnung f_{jh}, bezüglich für die in Bezug auf die Verrückung V_1 zugeordneten beiden Hauptstrecken die Bezeichnungen f_{1h} und q_{1h} ein, wobei die Grössen f_{jh} sämmtlich auf Längsaxen und die Grössen q_{1h} auf Senkrechten zur Rumpflängsaxe liegen, bezeichnet man ferner insbesondere die dem Schwerpunkte S_h in Bezug auf die Verrückung V_h selbst zugeordnete Hauptstrecke, d. h. die Entfernung e_h des Schwerpunktes S_h von H_h mit f_{hh}, und berücksichtigt man das Vorzeichen dieser Strecken, so ergiebt sich für die Werthe dieser Grössen nach der durch Tafel II eingeführten Bezeichnung die Tabelle:

h	f_{1h}	f_{2h}	f_{3h}	f_{4h}	f_{5h}	f_{6h}	f_{7h}	f_{8h}	f_{9h}	f_{10h}	f_{11h}	f_{12h}	q_{1h}
1	$-e_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	0
2	$+u$	$+e_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+b$
3	$+u$	$-c_2$	$+e_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$-b$
4	$+u$	$+d_2$	$-c_3$	$+e_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+b$
5	$+u$	$-c_2$	$+d_3$	$-c_4$	$+e_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$-b$
6	$+u$	$+d_2$	$-c_3$	$+d_4$	$-c_5$	$+e_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+b$
7	$+u$	$-c_2$	$+d_3$	$-c_4$	$+d_5$	$-c_6$	$+e_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$-b$
8	$-o$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$+e_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+a$
9	$-o$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$+e_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$-a$
10	$-o$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$+d_8$	$-c_9$	$+e_{10}$	$-c_{11}$	$+c_{12}$	$+a$
11	$-o$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$+d_9$	$-c_{10}$	$+e_{11}$	$+c_{12}$	$-a$
12	$-k$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	$-c_8$	$-c_9$	$-c_{10}$	$-c_{11}$	$-e_{12}$	0

Die Verrückung V_j, bei welcher nur das j^{te} Glied um irgend eine Axe durch den j^{ten} Hauptpunkt H_j unendlich wenig rotirt, während alle anderen Glieder gleichzeitig Translationen ausführen, kann nun allgemein in drei Componenten V_{φ_j}, V_{ϑ_j}, V_{ϱ_j} zerlegt werden. Dabei bedeutet:

V_{φ_j} eine Verrückung, bei welcher von allen Coordinaten nur φ_j seinen Werth um $d\varphi_j$ ändert, während die anderen constant bleiben. Nach der Bedeutung der Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j entspricht dies einer unendlich kleinen Rotation des j^{ten} Gliedes von der Grösse $d\varphi_j$ um eine durch den Hauptpunkt H_j gehende horizontale Axe $\mathfrak{A}_{\varphi_j}$, welche mit der im Raume festen Verticalebene den Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_j\right)$ bildet, verbunden mit Translationen der anderen Glieder,

V_{ϑ_j} eine Verrückung, bei welcher allein ϑ_j seinen Werth um $d\vartheta_j$ ändert, während alle anderen Coordinaten constant bleiben. Dies kommt auf eine unendlich kleine Rotation des j^{ten} Gliedes von der Grösse $d\vartheta_j$ um die durch den Hauptpunkt H_j gehende Verticalaxe $\mathfrak{A}_{\vartheta_j}$ und gleichzeitige Translationen der anderen Glieder hinaus,

V_{ϱ_j} eine Verrückung, bei welcher sich nur ϱ_j um $d\varrho_j$ ändert, während alle anderen Coordinaten constant bleiben. Dies entspricht einer unendlich kleinen Rotation des j^{ten} Gliedes um seine eigene (durch H_j gehende) Längsaxe. Im Allgemeinen werden dabei alle anderen Glieder in Ruhe bleiben; nur bei der Rotation des Rumpfes um seine Längsaxe, d. h. also bei der Verrückung V_{ϱ_1} müssen die

Extremitäten gleichzeitig Translationen ausführen; der Kopf bleibt aber auch in diesem Falle im Raume (nicht zum Rumpfe) fest.

Da die Lage eines jeden Gliedes bei festgehaltenem Gesammtschwerpunkt durch die Winkelgrössen φ, ϑ, ϱ eindeutig bestimmt ist, so geht daraus hervor, dass jede Verrückung V_j sich immer auf eine einzige Art durch drei derartige Verrückungen V_{φ_j}, V_{ϑ_j}, V_{ϱ_j} ersetzen lässt.

Man kann daher den früheren Satz, welcher von der Überführung des Körpers aus einer Lage in eine beliebige unendlich benachbarte bei festgehaltenem Gesammtschwerpunkt handelte, jetzt in der Form aussprechen:

Satz: Der menschliche Körper kann aus irgend einer Lage in eine unendlich benachbarte mit demselben Orte des Gesammtschwerpunktes dadurch übergeführt werden, dass man ihn successive 36 Verrückungen V_{φ_j}, V_{ϑ_j}, V_{ϱ_j} $(j = 1, 2 \cdots 12)$ unterwirft. Dies ist immer nur auf eine Art möglich.

Es erfährt dabei jeder der 12 Einzelschwerpunkte 36 unendlich kleine Translationen, deren geometrische Summe die Gesammtverrückung desselben für die allgemeinste Bewegung des menschlichen Körpers darstellt.

Es liegt in der Natur der Sache, dass die Behandlung des Falles uneingeschränktester Beweglichkeit, welche nach den voraufgegangenen Entwickelungen durchaus keinen Schwierigkeiten mehr unterliegt, infolge der zahlreichen Verrückungen sehr verwickelt wird, und dass der hieraus resultirende Ausdruck für die lebendige Kraft des Körpersystems nur schwer zu übersehen und zu deuten sein wird, so lange man noch nicht über die Verhältnisse bei speciellen, einfacheren Bewegungsarten des Körpers volle Klarheit erlangt hat. Aus diesem Grunde soll zunächst die Behandlung des allgemeinsten Falles, obgleich die Resultate schon fertig vorliegen, nicht weiter verfolgt werden, sondern es soll nur eine besondere Bewegungsart in Betracht gezogen werden, welche sich in sehr vielen, im Leben häufiger vorkommenden Fällen, z. B. gerade beim Gehen und Laufen mit grosser Annäherung realisirt findet.

Untersucht man zunächst nur solche Bewegungen des ganzen Körpers, bei welchen alle Längsaxen parallel einer festen Verticalebene bleiben, und bei denen keine Rollungen um die Längsaxen der Glieder stattfinden, so kommen von den drei Verrückungsarten V_{φ_j}, V_{ϑ_j}, V_{ϱ_j} nur die drei ersten in Betracht. Es sind nämlich in diesem Falle sowohl alle ϑ_j als auch alle ϱ_j constante Grössen, und zwar sollen sämmtliche ϑ_j den Werth $\frac{\pi}{2}$ und sämmtliche ϱ_j den Werth Null besitzen; infolgedessen ist $d\vartheta_j = d\varrho_j = 0$. Die ganze Bewegung ist dann als eine ebene Bewegung anzusehen. Die Ebene, auf welche die ganze Bewegung sich unverkürzt projicirt, ist eine Verticalebene, welche mit der im Raume festen Verticalebene den Winkel $\vartheta_j = \frac{\pi}{2}$ bildet; dieselbe soll geradezu mit der XZ-Ebene des rechtwinkligen Coordinatensystems zusammenfallen, dann wird für die Bahnen sämmtlicher Punkte des Körpers die Coordinate y einen constanten Werth besitzen.

Auf diesen speciellen Fall der Bewegungen des menschlichen Körpers lassen sich nun Wort für Wort dieselben Betrachtungen anwenden, wie auf den Fall der drei durch zwei Charniergelenke verbundenen Körper. Der Umstand, dass in der Projection auf die Bewegungsebene an zwei Stellen, nämlich dem Durchschnitt der Schulterlinie und Hüftlinie mit dieser Ebene, mehr als zwei Glieder durch ein Gelenk scheinbar verbunden sind, bedingt durchaus keine Complication gegenüber dem Falle einer fortlaufenden Kette von Körpern. Man kann daher sofort den Ausdruck für das mit $\frac{1}{2}m_h$ multiplicirte Quadrat der Verrückung des Schwerpunktes S_h hinschreiben; dasselbe ist (vgl. S. 28)

$$\tfrac{1}{2} m_h v_h^{\,2} = \tfrac{1}{2} \sum_1^{12}{}^j\, m_h f_{jh}^2 \varphi_j'^2 + \sum_1^{11}{}^i \sum_2^{12}{}^k\, m_h f_{ih} f_{kh} \cos(\varphi_i - \varphi_k)\, \varphi_i' \varphi_k'$$

(wo stets $i < k$ sein muss).

Der Unterschied zwischen dieser und der Formel auf S. 28 liegt ausschliesslich in einer, der vergrösserten Körperanzahl entsprechenden Vermehrung der Glieder.

Bezeichnet man mit $\varkappa_h$ den Trägheitsradius des h^{ten} Gliedes in Bezug auf die durch den Schwerpunkt S_h gelegte, zur Bewegungsebene und daher auch zur Längsaxe des h^{ten} Gliedes senkrechte Axe, so muss man zu obigem Werthe noch $\frac{1}{2} m_h \varkappa_h^2 \varphi_h'^2$ hinzufügen, um die lebendige Kraft des h^{ten} Gliedes relativ zum Gesammtschwerpunkt zu bekommen. Die ganze lebendige Kraft des menschlichen Körpers relativ zum Gesammtschwerpunkt wird daher erhalten, indem man der Reihe nach $h = 1, 2 \cdots 12$ setzt und alle diese Werthe addirt.

Als Factor von $\frac{1}{2}\varphi_j'^2$ erscheint dann die Summe $m_j \varkappa_j^2 + \sum_1^{12}{}^h m_h f_{jh}^2$ und als Factor von $\cos(\varphi_i - \varphi_k)\, \varphi_i' \varphi_k'$ die Summe $\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh}$.

Aus der Bedeutung der Grössen f_{jh} geht nun hervor, dass die Summe $m_j \varkappa_j^2 + \sum_1^{12}{}^h m_h f_{jh}^2$ wieder das Trägheitsmoment des j^{ten} reducirten Systems in Bezug auf die zur Bewegungsebene senkrechte Axe durch den Hauptpunkt H_j des j^{ten} Gliedes ist, so dass man dafür $m_0 k_j^2$ schreiben kann, wenn unter k_j der zugehörige Trägheitsradius verstanden wird.

Ferner ergibt sich ganz allgemein, dass die Summe $\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh}$ durch das negative Product $-m_0 f_{ik} f_{ki}$ ersetzt werden kann. Zu diesem Resultat gelangt man auf folgende Weise:

Es sei $1 < i < k$. Die Summe der Massen, welche am i^{ten} Gliede in entgegengesetzter Richtung als das k^{te} Glied hängen, sei m_i', die Summe der Massen, welche am k^{ten} Gliede in entgegengesetzter Richtung als das i^{te} Glied hängen, sei m_k'; die Massen des i^{ten} und k^{ten} Gliedes selbst seien m_i und m_k und die Summe der dann noch übrig bleibenden, zwischen dem i^{ten} und k^{ten} Gliede befindlichen Massen sei m_{ik}. An dem i^{ten} Gliede hat man drei Hauptstrecken zu unterscheiden: diejenige, welche das Gelenk in der Richtung nach dem k^{ten} Gliede mit H_i verbindet, f_{ik}, diejenige, welche das entgegengesetzte Gelenk mit H_i verbindet, sie soll mit $f_{ii'}$ bezeichnet sein, und die Strecke f_{ii} zwischen dem i^{ten} Schwerpunkt S_i und dem i^{ten} Hauptpunkte H_i. Desgleichen hat man am k^{ten} Gliede drei Hauptstrecken f_{ki}, $f_{kk'}$ und f_{kk} zu unterscheiden, wo f_{ki} das dem i^{ten} Gliede zugekehrte Gelenk, $f_{kk'}$ das entgegengesetzte Gelenk und f_{kk} den Schwerpunkt S_k mit dem Hauptpunkte verbindet.

Es sind daher die

den Schwerpunkten der Massensumme m'_i zugeordneten

Hauptstrecken: $f_{ii'}$ und f_{ki},

den Schwerpunkten der Masse m_i zugeordneten

Hauptstrecken: f_{ii} und f_{ki},

den Schwerpunkten der Massensumme m_{ik} zugeordneten

Hauptstrecken: f_{ik} und f_{ki},

den Schwerpunkten der Masse m_k zugeordneten

Hauptstrecken: f_{ik} und f_{kk},

den Schwerpunkten der Massensumme m'_k zugeordneten

Hauptstrecken: f_{ik} und $f_{kk'}$,

und man hat

$$\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = m'_i f_{ii'} f_{ki} + m_i f_{ii} f_{ki} + m_{ik} f_{ik} f_{ki} + m_k f_{ik} f_{kk} + m'_k f_{ik} f_{kk'}.$$

Nun ist in Folge der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reducirten Systeme

$$m'_i f_{ii'} + m_i f_{ii} = -(m'_k + m_k + m_{ik}) f_{ik}$$
$$m_k f_{kk} + m'_k f_{kk'} = -(m_{ik} + m_i + m'_i) f_{ki}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so ergibt sich

$$\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = -(m'_k + m_k + m_{ik} - m_{ik} + m_{ik} + m_i + m'_i) f_{ik} f_{ki}$$

und, da $m'_k + m_k + m_{ik} + m_i + m'_i = m_0$ ist:

$$\sum_1^{12}{}^h m_h f_{ih} f_{kh} = -m_0 f_{ik} f_{ki}.$$

q. e. d.

Ist $i = 1$, so empfiehlt es sich nicht, den Beweis allgemein zu führen, da zu viel specielle Fälle unterschieden werden müssen. Man überzeugt sich aber leicht unter Benutzung der in der Tabelle auf S. 66 niedergelegten Werthe und der Relationen, welche zwischen den Hauptstrecken je eines Gliedes bestehen müssen, dass auch in diesem Falle gilt:

$$\sum_1^{12}{}^h m_h f_{1h} f_{kh} = -m_0 f_{1k} f_{k1}$$

für alle Werthe von k. Man kann diesen Relationen die, vorläufig noch nicht in Betracht kommende, Relation hinzufügen:

$$\sum_1^{12}{}^h m_h q_{1h} f_{jh} = -m_0 q_{1j} f_{j1}.$$

Beachtet man noch, dass bei freier Beweglichkeit des menschlichen Körpers zu der lebendigen Kraft relativ zum Gesammtschwerpunkt S_0 die lebendige Kraft $\frac{1}{2} m_0 (\xi_0'^2 + \zeta_0'^2)$ [1]) hinzukommt, welche S_0 in Folge seiner (ebenen) Bewegung besitzen würde, wenn in ihm die Gesammtmasse m_0 vereinigt wäre, so ergibt sich schliesslich als Werth für die gesammte lebendige Kraft T des menschlichen Körpers bei freier Beweglichkeit desselben:

$$T = \frac{1}{2} m_0 \left[\xi_0'^2 + \zeta_0'^2 + \sum_1^n {}^j k_j^2 \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^{n-1} {}^i \sum_2^n {}^k f_{ik} f_{ki} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \varphi_i' \varphi_k' \right],$$

wo $n = 12$ und i immer kleiner wie k sein muss.

Die Grössen k_j und f_{ik} lassen sich in jedem Falle leicht berechnen, wenn die Dimensionen, Massen und Trägheitsmomente der einzelnen Körperabschnitte des in Bewegung begriffenen Individuums bekannt sind.

Da hier nur allgemeine mechanische Gesichtspunkte für die Behandlung der Bewegungen des menschlichen Körpers gegeben werden sollen, so mag von der Berechnung dieser Grössen vorläufig abgesehen werden, um so mehr, als auf dieselbe in der später erscheinenden Arbeit über den menschlichen Gang ausführlich eingegangen werden muss.

In dem obigen Ausdrucke für T sind die Componenten der Geschwindigkeit des Gesammtschwerpunktes ξ_0', ζ_0' (wozu im Falle allgemeinster Bewegung noch η_0' kommt) vertreten. Die Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 und ihre Abgeleiteten sind von den sonst noch auftretenden Winkeln und Winkelgeschwindigkeiten unabhängig, so lange die Bewegung vollständig frei ist; dieselben lassen sich dagegen im Allgemeinen als Functionen der Winkel φ, ϑ, ϱ und ihrer Abgeleiteten darstellen, sobald die Bewegung des Körpers an gewisse Bedingungen geknüpft ist. Für die hier betrachtete specielle Bewegungsart heisst dies also insbesondere, die Grössen ξ_0', ζ_0' lassen sich dann durch die φ_j und φ_j' allein ausdrücken.

In vielen Fällen wird die Bedingung für die Beweglichkeit darin bestehen, dass ein Punkt P des Körpers festbleibt; dann werden die Coordinaten des Gesammtschwerpunktes ξ_0, ζ_0 (und η_0) Functionen der Coordinaten x_1, z_1 (und y_1) dieses Punktes und der Winkelgrössen φ_j (und ϑ_j, ϱ_j).

1) η_0' besitzt in diesem speciellen Falle der Bewegungen den Werth Null, da η_0 constant ist.

Für die analytische Ausführung dieses Gedankens leisten wieder die Hauptpunkte der Glieder wichtige Dienste. Es gilt auch bei dem viel verwickelteren System des menschlichen Körpers der schon früher für das Dreikörpersystem gefundene

Satz: Man gelangt immer zu dem Gesammtschwerpunkte S_0 des menschlichen Körpers, wenn man von irgend einem Hauptpunkte H_j aus die geometrische Summe der zu den 11 übrigen Körpern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Körpers dem Hauptpunkte H_j zugekehrt sind.

Beweis dieses Satzes: In der Figur auf Tafel I bedeutet allgemein S_h den Schwerpunkt des h^{ten} Gliedes (die zugehörige Masse ist m_h) und $G_{i,k}$ den Mittelpunkt des Gelenkes zwischen dem i^{ten} und k^{ten} Gliede. S_0 sei der Gesammtschwerpunkt und m_0 die Gesammtmasse; endlich sei H_1 der Hauptpunkt des Rumpfes.

Ist O ein beliebiger Punkt im Raume, so ist nach dem bekannten, schon früher verwendeten, Satze von Leibniz:

$$m_0 [O S_0] = \sum_1^{12}{}^i m_i [O S_i],$$

wobei das Σ-Zeichen die geometrische Summation ausdrücken soll.

Setzt man $\dfrac{m_i}{m_0} = \mu_i$, so kann man auch schreiben:

$$[O S_0] = \sum_1^{12}{}^i \mu_i [O S_i].$$

Der Punkt O ist ganz beliebig. Lässt man denselben beispielsweise mit dem Hauptpunkte H_1 des Rumpfes zusammenfallen, so folgt:

$$[H_1 S_0] = \sum_1^{12}{}^i \mu_i [H_1 S_i].$$

Ersetzt man nun noch allgemein die Strecke $H_1 S_i$ durch die geometrische Summe des gebrochenen Linienzugs von H_1 über die das i^{te} Glied successive mit dem Rumpfe verbindenden Gelenke hinweg bis S_i, also z. B. (vgl. Tafel I)

$[H_1 S_{11}]$ durch $[H_1 G_{1,9}] + [G_{1,9} G_{9,11}] + [G_{9,11} S_{11}]$

oder $[H_1 S_6]$ durch $[H_1 G_{1,2}] + [G_{1,2} G_{2,4}] + [G_{2,4} G_{4,6}] + [G_{4,6} S_6]$ u. s. w., so wird

$$
\begin{aligned}
[H_1 S_0] = \mu_1 [H_1 S_1] & \\
+ \mu_2 [H_1 G_{1,2}] & + \mu_2 [G_{1,2} S_2] \\
+ \mu_3 [H_1 G_{1,3}] & + \mu_3 [G_{1,3} S_3] \\
+ \mu_4 [H_1 G_{1,2}] & + \mu_4 [G_{1,2} G_{2,4}] + \mu_4 [G_{2,4} S_4] \\
+ \mu_5 [H_1 G_{1,3}] & + \mu_5 [G_{1,3} G_{3,5}] + \mu_5 [G_{3,5} S_5] \\
+ \mu_6 [H_1 G_{1,2}] & + \mu_6 [G_{1,2} G_{2,4}] + \mu_6 [G_{2,4} G_{4,6}] + \mu_6 [G_{4,6} S_6] \\
+ \mu_7 [H_1 G_{1,3}] & + \mu_7 [G_{1,3} G_{3,5}] + \mu_7 [G_{3,5} G_{5,7}] + \mu_7 [G_{5,7} S_7] \\
+ \mu_8 [H_1 G_{1,8}] & + \mu_8 [G_{1,8} S_8] \\
+ \mu_9 [H_1 G_{1,9}] & + \mu_9 [G_{1,9} S_9] \\
+ \mu_{10} [H_1 G_{1,8}] & + \mu_{10} [G_{1,8} G_{8,10}] + \mu_{10} [G_{8,10} S_{10}] \\
+ \mu_{11} [H_1 G_{1,9}] & + \mu_{11} [G_{1,9} G_{9,11}] + \mu_{11} [G_{9,11} S_{11}] \\
+ \mu_{12} [H_1 G_{1,12}] & + \mu_{12} [G_{1,12} S_{12}].
\end{aligned}
$$

Nun ist infolge der Bedeutung des j^{ten} Hauptpunktes als Schwerpunkt des j^{ten} reducirten Systems:

$$
\begin{aligned}
& \mu_1 [H_1 S_1] + (\mu_2 + \mu_4 + \mu_6) [H_1 G_{1,2}] + (\mu_3 + \mu_5 + \mu_7) [H_1 G_{1,3}] \\
& \qquad + (\mu_8 + \mu_{10}) [H_1 G_{1,8}] + (\mu_9 + \mu_{11}) [H_1 G_{1,9}] + \mu_{12} [H_1 G_{1,12}] = 0 \\
& \mu_2 [G_{1,2} S_2] + (\mu_4 + \mu_6) [G_{1,2} G_{2,4}] = [G_{1,2} H_2] \\
& \mu_3 [G_{1,3} S_3] + (\mu_5 + \mu_7) [G_{1,3} G_{3,5}] = [G_{1,3} H_3] \\
& \mu_4 [G_{2,4} S_4] + \mu_6 [G_{2,4} G_{4,6}] = [G_{2,4} H_4] \\
& \mu_5 [G_{3,5} S_5] + \mu_7 [G_{3,5} G_{5,7}] = [G_{3,5} H_5] \\
& \mu_6 [G_{4,6} S_6] = [G_{4,6} H_6] \\
& \mu_7 [G_{5,7} S_7] = [G_{5,7} H_7] \\
& \mu_8 [G_{1,8} S_8] + \mu_{10} [G_{1,8} G_{8,10}] = [G_{1,8} H_8] \\
& \mu_9 [G_{1,9} S_9] + \mu_{11} [G_{1,9} G_{9,11}] = [G_{1,9} H_9] \\
& \mu_{10} [G_{8,10} S_{10}] = [G_{8,10} H_{10}] \\
& \mu_{11} [G_{9,11} S_{11}] = [G_{9,11} H_{11}] \\
& \mu_{12} [G_{1,12} S_{12}] = [G_{1,12} H_{12}].
\end{aligned}
$$

Daher erhält man

$$
\begin{aligned}
[H_1 S_0] = & [G_{1,2} H_2] + [G_{1,3} H_3] + [G_{2,4} H_4] + [G_{3,5} H_5] + [G_{4,6} H_6] + [G_{5,7} H_7] \\
& + [G_{1,8} H_8] + [G_{1,9} H_9] + [G_{8,10} H_{10}] + [G_{9,11} H_{11}] + [G_{1,12} H_{12}]
\end{aligned}
$$

q. e. d.

Anstatt von H_1 auszugehen, kann man auch jeden anderen Hauptpunkt zum Ausgangspunkt nehmen und erhält dann stets die Bestätigung des obigen Satzes. Es ist zu beachten, dass dieses Resultat ganz unabhängig von der Haltung des Körpers ist und auch nicht die, beim Menschen nahezu realisirte, Annahme, dass die Einzelschwerpunkte in den Längsaxen liegen, zur Voraussetzung hat.

Bleibt nun während der Bewegung ein Punkt P des j^{ten} Gliedes fest oder besitzt er eine bestimmte Lage zu diesem Gliede, so hat man den 11 Strecken nur noch die Strecke $[PH_j]$ hinzuzufügen, wenn man die geometrische Summe von P aus bilden will. Es empfiehlt sich die Strecke $[PH_j]$ durch Projection auf die j^{te} Längsaxe in zwei rechtwinklige Componenten zu zerlegen. In vielen Fällen wird P der Längsaxe selbst angehören, dann fällt die eine der beiden Componenten fort.

Im speciellen Falle des menschlichen Ganges bleibt, während der Körper nur von einem Fusse, z. B. dem rechten, unterstützt ist, für einige Zeit ein Punkt P fest, welcher mit grosser Annäherung auf der Längsaxe des rechten Fusses, d. h. also auf der Verbindungslinie des Tibio-talus-Gelenkmittelpunktes mit dem Schwerpunkte S_6 des rechten Fusses liegt. Die Entfernung dieses Punktes von H_6 sei $+d_6$, dann erhält man den Ort des Gesammtschwerpunktes S_0 als Endpunkt der von P aus gebildeten geometrischen Summe:

$$[-d_6]+[-d_4]+[-d_2]+[-b]+[-u]+[+c_3]+[+c_5]+[+c_7]$$
$$+[+c_8]+[+c_{10}]+[+c_9]+[+c_{11}]+[-c_{12}]$$

(vgl. hierzu Tafel II). Die Richtungen dieser Strecken sind in dem angenommenen Falle der ebenen Bewegung durch die Winkelgrössen φ_j vollständig bestimmt, denn $[-b]$ verschwindet in der Projection auf die Bewegungsebene, da diese Strecke senkrecht zur letzteren gerichtet ist.

Da diese Hauptstrecken in gewisser Beziehung dem Gesammtschwerpunkte S_0 zugeordnet sind, so sollen dieselben analog der früheren Bezeichnungsweise mit f_{j0} bezeichnet sein.

Bewegt sich nun der Körper aus einer Stellung in eine unendlich benachbarte so, dass der Punkt P festbleibt, so erfährt der Gesammtschwerpunkt S_0 dabei auch eine Verrückung. Dieselbe setzt sich in gleicher Weise aus 12 zu den verschiedenen Längsaxen senkrechten Verrückungen zusammen, wie die Verrückung des Einzelschwerpunktes S_h; dabei spielen die Hauptstrecken f_{j0} dieselbe Rolle wie die f_{jh} für die Verrückungen von S_h. Man erhält infolgedessen den Werth des Antheiles $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$, welchen der Gesammtschwerpunkt zu der lebendigen Kraft des ganzen Systems beisteuert, indem man in dem Ausdruck für $\frac{1}{2} m_h v_h^2$ auf S. 68 für $h = 0$ einsetzt. Dabei ergeben sich die Werthe von f_{j0} aus der folgenden Tabelle:

$f_{1,0}$	$f_{2,0}$	$f_{3,0}$	$f_{4,0}$	$f_{5,0}$	$f_{6,0}$	$f_{7,0}$	$f_{8,0}$	$f_{9,0}$	$f_{10,0}$	$f_{11,0}$	$f_{12,0}$
$-u$	$-d_2$	$+c_3$	$-d_4$	$+c_5$	$-d_6$	$+c_7$	$+c_8$	$+c_9$	$+c_{10}$	$+c_{11}$	$-c_{12}$

Es tritt daher in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft relativ zum Gesammtschwerpunkte (die Formel für T auf S. 71 bei Weglassung der Glieder $\xi_0'^2$ und $\zeta_0'^2$) zu den Grössen $m_0 k_j^2$ und $-m_0 f_{ik} f_{ki}$ bezüglich noch hinzu $m_0 f_{j0}^2$ und $+m_0 f_{i0} f_{k0}$. Man erhält infolgedessen als Werth der lebendigen Kraft T

bei der Bedingung, das ein Punkt P des Körpers festbleibt:

$$T = \frac{1}{2} m_0 \Big[\sum_1^n {}^j (k_j^2 + f_{j0}^2) \varphi_j'^2 - 2 \sum_1^{n-1} {}^j \sum_2^n {}^k (f_{ik} f_{ki} - f_{i0} f_{k0}) \cos(\varphi_i - \varphi_k) \varphi_i' \varphi_k' \Big],$$

wo $n = 12$ und i stets $< k$ sein muss.

Zu demselben Resultate gelangt man auch, indem man, ohne von dem Falle der freien Beweglichkeit des Systems auszugehen, von vornherein untersucht, welche Translationen die einzelnen Schwerpunkte S_h erfahren, wenn man dem ganzen Körper eine solche Verrückung ertheilt, bei welcher allein das j^{te} Glied seine Richtung ändert, während alle anderen Glieder nur Translationen ausführen dürfen.

Es ist nicht schwer, einzusehen, dass die Axe der unendlich kleinen Rotation jetzt nicht mehr durch den Hauptpunkt H_j, sondern durch denjenigen Gelenkmittelpunkt des j^{ten} Gliedes hindurchgeht, welcher innerhalb des Körpers dem festen Punkt P am nächsten liegt. Die zwischen diesem Gelenkmittelpunkt und dem festen Punkte P gelegenen Körpertheile bleiben dabei ganz in Ruhe, während alle anderen Glieder Translationen ausführen. Es kommt infolgedessen zu der Translation, welche der Schwerpunkt S_h infolge der unendlich kleinen Drehung des j^{ten} Gliedes um eine Axe durch den Hauptpunkt H_j desselben erfuhr, noch die Translation hinzu, welche der Hauptpunkt H_j selbst erfährt, wenn man die Rotationsaxe parallel mit sich nach demjenigen Gelenkmittelpunkte des j^{ten} Gliedes verlegt, welcher innerhalb des menschlichen Körpers dem festbleibenden Punkte P am nächsten liegt.

Die Entfernung der Hauptpunkte H_j von diesen Gelenkmittelpunkten wird nun durch die oben eingeführte Grösse f_{j0} dargestellt. Insbesondere setzt sich die Entfernung des Hauptpunktes H_1 vom rechten Hüftgelenkmittelpunkt aus den beiden zu einander rechtwinkligen Strecken $f_{1,0} = -u$ und $q_{1,0} = -b$ zusammen, von denen die letztere für den hier vorläufig allein behandelten Fall der ebenen Bewegung nicht in Frage kommt, da dieselbe rechtwinklig zur Bewegungsebene verläuft. Es gehen infolgedessen die für die Verrückungen des Schwerpunktes S_h in Betracht kommenden Grössen f_{jh} jetzt über in Grössen f'_{jh} und die Grössen q_{1h} über in Grössen q'_{1h}, welche durch die Relationen definirt sind:

$$f'_{jh} = f_{jh} + f_{j0} \quad \text{und} \quad q'_{1h} = q_{1h} + q_{10}\,.$$

Führt man noch folgende Bezeichnungen ein:

l_j für die Grösse der Längsaxe des j^{ten} Gliedes, insbesondere l_6 für die Entfernung des festen Punktes P vom Tibio-talus-Gelenkmittelpunkt, r_j und s_j für die Entfernungen des Schwerpunktes S_j vom proximalen bezüglich distalen Gelenkmittelpunkte, insbesondere s_1 für die Entfernung des Rumpfschwerpunktes S_1 vom Mittelpunkt der Hüftlinie und h_1 für die Entfernung der Hüft- und Schulterlinie von einander, so erhält man für die Werthe der Grössen f'_{jh} folgende Tabelle:

h	f'_{1h}	f'_{2h}	f'_{3h}	f'_{4h}	f'_{5h}	f'_{6h}	f'_{7h}	f'_{8h}	f'_{9h}	f'_{10h}	f'_{11h}	f'_{12h}	q'_{1h}
1	$-s_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	$-b$
2	0	$-s_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$-l_2$	$+r_3$	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	$-2b$
4	0	0	0	$-s_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	0
5	0	$-l_2$	$+l_3$	$-l_4$	$+r_5$	$-l_6$	0	0	0	0	0	0	$-2b$
6	0	0	0	0	0	$-s_6$	0	0	0	0	0	0	0
7	0	$-l_2$	$+l_3$	$-l_4$	$+l_5$	$-l_6$	$+r_7$	0	0	0	0	0	$-2b$
8	$-h_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	$+r_8$	0	0	0	0	$+(a-b)$
9	$-h_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	$+r_9$	0	0	0	$-(a+b)$
10	$-h_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	$+l_8$	0	$+r_{10}$	0	0	$+(a-b)$
11	$-h_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	$+l_9$	0	$+r_{11}$	0	$-(a+b)$
12	$-l_1$	$-l_2$	0	$-l_4$	0	$-l_6$	0	0	0	0	0	$+r_{12}$	$-b$

Setzt man diese Grössen f'_{jh} an Stelle der f_{jh} in dem Ausdrucke für $\frac{1}{2} m_h v_h^2$ (S. 68) ein, so erhält man den Beitrag, den der Schwer punkt S_h für die gesammte lebendige Kraft infolge seiner Geschwindigkeit leistet, wenn in ihm die Masse m_h des h^{ten} Gliedes vereinigt ist. Man darf indessen nicht erwarten, den richtigen Ausdruck für die gesammte lebendige Kraft des Systems bei festgehaltenem Punkte P

zu erhalten, wenn man die f'_{jh} an Stelle der f_{jh} auch in dem Ausdrucke für T_r relativ zum Gesammtschwerpunkte einsetzen würde, denn die Grössen f'_{jh} genügen nicht denselben Relationen, wie die f_{jh} und die q'_{1h} nicht denselben wie die q_{1h}.

Es ergibt sich nämlich jetzt:

$$\sum_1^n {}^h m_h f'^2_{jh} = \sum_1^n {}^h m_h f^2_{jh} + 2 f_{j0} \sum_1^n {}^h m_h f_{jh} + f^2_{j0} \sum_1^n {}^h m_h$$

$$\sum_1^n {}^h m_h f'_{ih} f'_{kh} = \sum_1^n {}^h m_h f_{ih} f_{kh} + f_{i0} \sum_1^n {}^h m_h f_{kh} + f_{k0} \sum_1^n {}^h m_h f_{ih} + f_{i0} f_{k0} \sum_1^n {}^h m_h$$

$$\sum_1^n {}^h m_h q'^2_{1h} = \sum_1^n {}^h m_h q^2_{1h} + 2 q_{10} \sum_1^n {}^h m_h q^2_{1h} + q^2_{10} \sum_1^n {}^h m_h$$

$$\sum_1^n {}^h m_h q'_{1h} f'_{jh} = \sum_1^n {}^h m_h q_{1h} f_{jh} + f_{j0} \sum_1^n {}^h m_h q_{1h} + q_{10} \sum_1^n {}^h m_h f_{jh} + q_{10} f_{j0} \sum_1^n {}^h m_h .$$

Aus der Bedeutung der Grössen f_{jh} und q_{1h} als Hauptstrecken folgt, dass

$$\sum_1^n {}^h m_h f_{jh} = 0\,, \quad \sum_1^n {}^h m_h f_{ih} = 0\,, \quad \sum_1^n {}^h m_h f_{kh} = 0\,, \quad \sum_1^n {}^h m_h q_{1h} = 0\,.$$

Setzt man $\sum_1^n {}^h m_h = m_0$, so folgt schliesslich

$$\sum_1^n {}^h m_h f'^2_{jh} = \sum_1^n {}^h m_h f^2_{jh} + m_0 f^2_{j0}$$

$$\sum_1^n {}^h m_h f'_{ih} f'_{kh} = \sum_1^n {}^h m_h f_{ih} f_{kh} + m_0 f_{i0} f_{k0} = - m_0 (f_{ik} f_{ki} - f_{i0} f_{k0})$$

$$\sum_1^n {}^h m_h q'^2_{1h} = \sum_1^n {}^h m_h q^2_{1h} + m_0 q^2_{10}$$

$$\sum_1^n {}^h m_h q'_{1h} f'_{jh} = \sum_1^n {}^h m_h q_{1h} f_{jh} + m_0 q_{10} f_{j0} = - m_0 (q_{1j} f_{j1} - q_{10} f_{j0})\,.$$

Die Relationen, welche die Grössen q enthalten, sind hier mit angeführt worden, weil sie für den allgemeinsten Bewegungsfall Bedeutung besitzen. Aus den die Grössen f allein enthaltenden Relationen findet man in der That die schon auf dem anderen Wege abgeleiteten Formeln für T.

Bleibt irgend ein anderer Punkt auf einer der 12 Längsaxen während der Bewegung fest, so ändern sich nur die Werthe von f_{j0} in entsprechender Weise. Es bedeutet f_{j0} dabei stets die Länge derjenigen Strecke auf der Längsaxe des j^{ten} Gliedes, welche den dem

Punkte P innerhalb des Körpers am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkt bezüglich dessen Projection auf die Längsaxe (beim Rumpf) mit dem Hauptpunkte H_j verbindet.

Verminderung der Anzahl der beweglichen Körpertheile.

Nimmt man für die Bewegungen des Gehens den Kopf zum Rumpfe festgestellt an, so vermindert sich die Anzahl der Glieder in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft. Man hat dann den Rumpf mit dem Kopfe zusammen als einen einzigen starren Körper aufzufassen, dessen Hauptpunkt jetzt dem Kopfe näher liegt als der Hauptpunkt des Rumpfes allein. Die Hauptpunkte aller übrigen Körpertheile werden dadurch nicht berührt. Infolgedessen ändern sich nur die Hauptstrecken des Rumpfes; die Hauptstrecken des Kopfes verschwinden vollständig, so dass die Summen in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft sich jetzt nur noch von 1 bis 11 zu erstrecken haben. Wollte man ausserdem einen Arm oder beide Arme zum Rumpfe feststellen und auch dabei die Beweglichkeit in den Ellbogengelenken ausschliessen, so hätte man die Summen sogar nur über 9 bezüglich 7 Glieder zu erstrecken. Gleichzeitig treten an Stelle des Hauptpunktes H_1 und der zugehörigen Hauptstrecken jetzt der Hauptpunkt und die Hauptstrecken des zu einem starren Körper vereinigten Systems »Rumpf + Kopf + ein Arm« bezüglich »Rumpf + Kopf + beide Arme«, während die Hauptpunkte und Hauptstrecken für alle übrigen Glieder unverändert bleiben.

Die Lage des neuen Hauptpunktes H_1 lässt sich mit Hülfe der Lagen der Hauptpunkte der zu einem starren Systeme zu vereinigenden Körper und der zugehörigen Hauptstrecken leicht bestimmen. Man hat zu dem Zwecke nur von einem der in Frage kommenden Hauptpunkte aus die geometrische Summe der ihm zugekehrten Hauptstrecken zu bilden, welche zu den übrigen der zu einander festgestellten Körpertheile gehören.

Von der Richtigkeit dieses Satzes kann man sich in jedem Falle ohne alle Rechnung auf folgende Weise überzeugen:

Es soll z. B. der Hauptpunkt für das zu einem starren Körper vereinigte System »Rumpf + Kopf + beide Arme« bestimmt werden. Derselbe ist der Schwerpunkt des Massensystems, welches man erhält, wenn man in jedem der beiden Hüftgelenkmittelpunkte die

Masse des ganzen Beins und im Gesammtschwerpunkt des Systems »Rumpf + Kopf + beide Arme« die Gesammtmasse dieses Systems concentrirt annimmt. Die Länge dieses Hauptpunktes ist ganz unabhängig von der Gestalt der Beine und der Lage der Schwerpunkte der einzelnen Abschnitte der Beine. Sie würde insbesondere genau dieselbe bleiben, wenn man an Stelle der Beine an jedem Hüftgelenk einen Körper drehbar anbringen würde, dessen Masse gleich der Masse des ganzen Beines wäre und dessen Schwerpunkt in den Hüftgelenkmittelpunkt hineinfiele. Der Hauptpunkt eines jeden der beiden Körper fiele dann ebenfalls in den Hüftgelenkmittelpunkt hinein, und die dem Rumpfe zugekehrte Hauptstrecke desselben hätte die Länge Null. Die Länge der Hauptstrecken und die Lage der Hauptpunkte sämmtlicher anderen Glieder könnte dadurch nicht verändert werden. Der Gesammtschwerpunkt dieses neuen Körpersystems würde nun nach den früheren Entwickelungen von H_1 aus gewonnen werden allein durch Bilden der geometrischen Summe der dem Hauptpunkte H_1 zugekehrten Hauptstrecken vom Kopf und von den Abschnitten der Arme, denn die zu den Beinen gehörenden Hauptstrecken kommen infolge ihrer verschwindenden Länge dabei nicht mehr in Betracht. Der Gesammtschwerpunkt wäre dann aber, infolge der besonderen Natur des Systems, gerade der Hauptpunkt H_1 des starren Systems »Rumpf + Kopf + beide Arme«.

V. Die Bewegungsgleichungen des menschlichen Körpers.

Die Beziehungen, welche zwischen der Änderung der lebendigen Kraft einerseits und den Elementararbeiten der wirksamen inneren und äusseren Kräfte andererseits bestehen, sind auch beim menschlichen Körper wieder gegeben durch die bestimmten Differentialgleichungen der Bewegung in der von Lagrange herrührenden Form, bei der die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch allgemeine Coordinaten ersetzt sind, welche die Lage des Systems vollständig bestimmen. Für den menschlichen Körper stellt die Gesammtheit der Winkelgrössen $\varphi, \vartheta, \varrho$ verbunden mit den drei Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 des Gesammtschwerpunktes bei freier Beweglichkeit oder mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1 eines festbleibenden Punktes P bei bedingter Beweglichkeit ein solches System allgemeiner Coordinaten dar, durch welches die Lage und Haltung des Körpers eindeutig bestimmt ist. Das System der Differentialgleichungen lautet allgemein bei der Zergliederung in n Körpertheile für das frei bewegliche System:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} = Q_{\varphi_h} \qquad (h = 1, 2 \cdots n)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_h} = Q_{\vartheta_h} \qquad (h = 1, 2 \cdots n)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varrho_h} = Q_{\varrho_h} \qquad (h = 1, 2 \cdots n)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_0} = Q_{\xi_0}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_0} = Q_{\eta_0}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta_0'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_0} = Q_{\zeta_0}.$$

Für das betrachtete bedingt bewegliche System kommen die letzten drei Gleichungen in Wegfall, da die ξ_0, η_0, ζ_0 durch die Winkelgrössen φ_h, ϑ_h, ϱ_h und die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des festbleibenden Punktes P ausgedrückt werden können, und die letzten drei Coordinaten constante Werthe besitzen.

Dabei sind unter T die gesammte lebendige Kraft und unter $Q_{\varphi_h}\, d\varphi_h$, $Q_{\vartheta_h}\, d\vartheta_h$, $Q_{\varrho_h}\, d\varrho_h$, $Q_{\xi_0}\, d\xi_0$, $Q_{\eta_0}\, d\eta_0$, $Q_{\zeta_0}\, d\zeta_0$ die Summen der partiellen Elementararbeiten zu verstehen, welche von sämmtlichen am System angreifenden inneren und äusseren Kräften geleistet werden, wenn man dem menschlichen Körper eine solche mit den Bedingungen der Bewegung verträgliche unendlich kleine Verrückung ertheilt, bei welcher bezüglich nur eine der Grössen φ_h, ϑ_h, ϱ_h, ξ_0, η_0, ζ_0 unendlich wenig geändert wird, während alle anderen Coordinaten constant bleiben.

Es sind nun zunächst die Ausdrücke für die linken Seiten der Differentialgleichungen zu berechnen.

Wenn es auch gewiss von grossem Werthe ist, die allgemeinen Formeln zu besitzen, aus denen man die für jeden bestimmten Fall geltenden durch Specialisirung gewinnen kann, so sollen dieselben an dieser Stelle doch ebenso wenig angegeben werden, als es oben für den allgemeinen Ausdruck der lebendigen Kraft geschehen ist. Die meisten im Leben vorkommenden Fälle geordneter Bewegung bedingen eine so grosse Vereinfachung der Ausdrücke, dass der Umfang der letzteren in gar keinem Verhältniss steht zu der Ausdehnung der allgemeinen Formeln. Es empfiehlt sich daher, für jeden Fall zunächst den Ausdruck für die lebendige Kraft T des menschlichen Körpers besonders abzuleiten, in der Weise wie es oben für eine bestimmte Bewegungsart schon geschehen ist, und dann von diesem bei der Aufstellung der Differentialgleichungen auszugehen.

Für die in Betracht gezogene Art der Bewegung, welche durch $\vartheta_j = \frac{\pi}{2}$, $\varrho_j = 0$ charakterisirt ist, und zu der unter bestimmten, im Leben annähernd verwirklichten Voraussetzungen auch der Gang gehört, hatte sich bei freier Beweglichkeit der auf S. 71 niedergelegte und bei Feststellung eines Punktes der Fusslängsaxe der Werth auf S. 75 für T ergeben.

Durch Ausführung der nothwendigen Differentiationen erhält man bei freier Beweglichkeit des Systems die $n + 2$ Bewegungsgleichungen:

$$m_0 \left[k_h^2 \frac{d^2\varphi_h}{dt^2} - \sum_1^{h-1}{}^i f_{ih} f_{hi} \cos(\varphi_h - \varphi_i) \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} - \sum_{h+1}^{n}{}^k f_{hk} f_{kh} \cos(\varphi_h - \varphi_k) \frac{d^2\varphi_k}{dt^2} \right.$$
$$\left. - \sum_1^{h-1}{}^i f_{ih} f_{hi} \sin(\varphi_h - \varphi_i) \left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2 - \sum_{h+1}^{n}{}^k f_{hk} f_{kh} \sin(\varphi_h - \varphi_k) \left(\frac{d\varphi_k}{dt}\right)^2 \right] = Q_{\varphi_h}$$
$$(h = 1, 2, \cdots n),$$

$$m_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2} = Q_{\xi_0} \quad \text{und} \quad m_0 \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} = Q_{\zeta_0}$$

und

für den Fall, dass ein Punkt P der Fusslängsaxe festbleibt, die n Bewegungsgleichungen:

$$m_0\Big[(k_h^2+f_{h0}^2)\frac{d^2\varphi_h}{dt^2}-\sum_1^{h-1}{}^i(f_{ih}f_{hi}-f_{i0}f_{h0})\cos(\varphi_h-\varphi_i)\frac{d^2\varphi_i}{dt^2}$$
$$-\sum_{h+1}^{n}{}^k(f_{hk}f_{kh}-f_{h0}f_{k0})\cos(\varphi_h-\varphi_k)\frac{d^2\varphi_k}{dt^2}$$
$$-\sum_1^{h-1}{}^i(f_{ih}f_{hi}-f_{i0}f_{h0})\sin(\varphi_h-\varphi_i)\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2$$
$$-\sum_{h+1}^{n}{}^k(f_{hk}f_{kh}-f_{h0}f_{k0})\sin(\varphi_h-\varphi_k)\left(\frac{d\varphi_k}{dt}\right)^2\Big]=Q_{\varphi_h}$$
$$(h=1,2,\cdots n).$$

Mit Ausnahme der Grössen Q_{ξ_0}, Q_{ζ_0} im ersten Falle, welche einfach die Componentensummen der äusseren Kräfte parallel der X-Axe bezüglich Z-Axe bedeuten, stellen die Q_{φ_h} Summen von Drehungsmomenten dar. Die Methode für die Ableitung der letzteren ist beim speciellen Falle des Dreikörpersystems ausführlich dargelegt worden und braucht daher hier nicht wiederholt zu werden. Es muss speciellen Untersuchungen überlassen bleiben, die Werthe dieser Drehungsmomente für bestimmte Fälle auszurechnen, und **es ist insbesondere Aufgabe der Anatomie, die Werthe der Drehungsmomente, welche die sämmtlichen Muskeln des menschlichen Körpers für die verschiedenen Körpertheile besitzen, bis auf den einen unbestimmten Factor, die Muskelspannung, auf empirischem Wege abzuleiten.** Es ist in der Einleitung erörtert worden, wie wenig Resultate in dieser Beziehung bis jetzt vorliegen und ein wie weites Feld sich der Untersuchung noch darbietet.

In entsprechender Weise wie bei dem einfacheren System lassen sich die obigen Bewegungsgleichungen in etwas kürzerer Form schreiben, wenn man den Trägheitsradius σ_h des h^{ten} **reducirten Systems** in Bezug auf den Einzelschwerpunkt S_h des h^{ten} Gliedes einführt und beachtet, dass

$$\sigma_h^2=k_h^2+f_{hh}^2,\quad \cos 0=1\quad \text{und}\quad \sin 0=0 \qquad \text{ist.}$$

Man erkennt dann leicht die Richtigkeit der folgenden Schreibweise **beim Falle freier Beweglichkeit:**

$$m_0\left\{\sigma_h^2\cdot\frac{d^2\varphi_h}{dt^2}-\sum_1^n{}^j f_{hj}f_{jh}\left[\cos(\varphi_h-\varphi_j)\frac{d^2\varphi_j}{dt^2}+\sin(\varphi_h-\varphi_j)\left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2\right]\right\}=Q_{\varphi_h}$$
$$(h=1,2,\ldots n),$$
$$m_0\frac{d^2\xi_0}{dt^2}=Q_{\xi_0}\quad\text{und}\quad m_0\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}=Q_{\zeta_0},$$

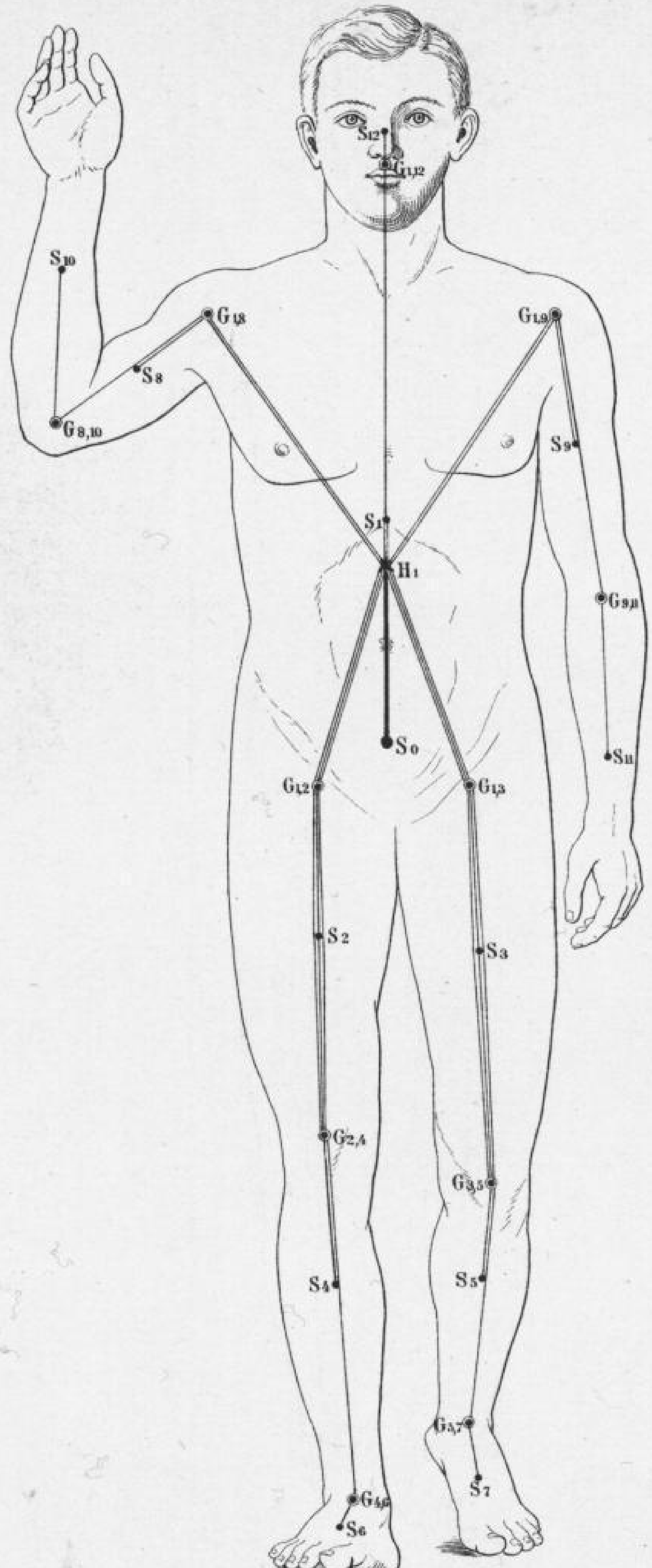
und bei dem betrachteten Falle bedingter Beweglichkeit:

$$m_0\left\{\sigma_h^2\cdot\frac{d^2\varphi_h}{dt^2}-\sum_1^n{}^j (f_{hj}f_{jh}-f_{h0}f_{j0})\left[\cos(\varphi_h-\varphi_j)\frac{d^2\varphi_j}{dt^2}+\sin(\varphi_h-\varphi_j)\left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2\right]\right\}=Q_{\varphi_h}$$
$$(h=1,2,\ldots n).$$

Damit ist das eingangs gesteckte Ziel erreicht. Diese Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen der einzelnen durch Gelenke verbundenen Körpertheile einerseits und den auf die letzteren einwirkenden äusseren Kräften und Drehungsmomenten der inneren Kräfte andererseits ermöglichen es nun, die unbekannten Spannungen der Muskeln während der Bewegung in der schon früher angedeuteten Weise zu bestimmen. Die Ausführbarkeit dieses Gedankens soll demnächst in der erwähnten Arbeit über den Gang des Menschen dargelegt werden. Hier handelte es sich allein darum, einen nothwendigen mathematisch-physikalischen Beitrag zur Methode der Untersuchung der Muskelwirkung bei der Bewegung des Lebenden zu liefern. Derselbe wird überall da Verwendung finden, wo es sich nicht nur um Aufstellung einer Hypothese für die Thätigkeit der Muskeln bei den im Leben ausgeführten Bewegungen des menschlichen Körpers handelt, sondern wo man, auf der Grundlage eingehender und genauer Messungen der Bewegungszustände der einzelnen Körpertheile und deren Aenderungen für den ganzen Verlauf der Bewegung, Berechnungen der Intensität der Muskelspannungen ausführen will.

Wenn auch der hierdurch angezeigte Weg der Untersuchung ein sehr mühsamer ist, auf dem man nur langsam vorwärts schreiten kann, so steht doch zu erwarten, dass man bei consequenter Verfolgung desselben allmählich einen tieferen Einblick in die Thätigkeit der Muskeln gewinnt.

Inhaltsverzeichnis.

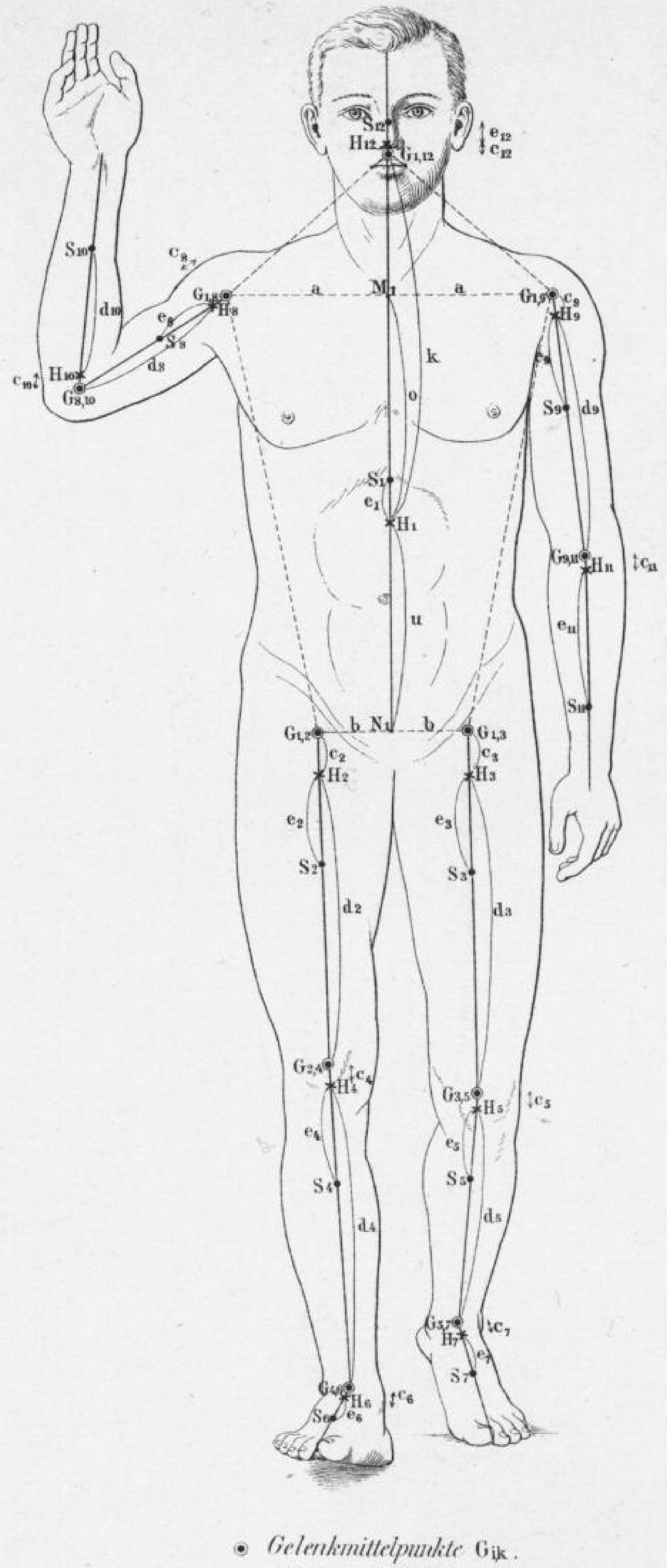


◉ *Gelenkmittelpunkte.*

• *Schwerpunkte* (● S_0 *Gesammtschwerpunkt.*)

× H_1 *Hauptpunkt des Rumpfes.*

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.



◉ *Gelenkmittelpunkte* G_{ik}.

• *Schwerpunkte* S_j.

× *Hauptpunkte* H_j.

M_1 *Mittelpunkt der Schulterlinie.*

N_1 *Mittelpunkt der Hüftlinie.*

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 *M*.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 *M* 60 *Pf*.
— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 *M* 80 *Pf*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 *M* 40 *Pf*.
P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 *M* 80 *Pf*.
— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 *M*.

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 *M*.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 *M* 40 *Pf*.
— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 *M*.
— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 *M*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 *M* 40 *Pf*.
P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 *M*.
G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 2 *M*.

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 *M*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 *M* 60 *Pf*.
P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 *M* 60 *Pf*.
C. BRUHNS und E. WEISS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 *M*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 *M*.
— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 *M*.
C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 *M* 80 *Pf*.
P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 *M*.
— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Funktion der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 *M*.
— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 *M*.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 *M*.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 *M*.
C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 *M*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 *M*.
P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 *M*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 *M*.
W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 *M*.
C. NEUMANN, Das Weber'sche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 *M*.
W. WEBER, Elektrodynam. Maassbestimmungen, insbes. über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 *M*.

ZWÖLFTER BAND. (XX. Bd.) Mit 13 Tafeln. hoch 4. 1883. brosch. Preis 22 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 *M*.
W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 *M*.
— Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 *M* 50 *Pf*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 *M*.
C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 *M* 40 *Pf*.
C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 *M* 50 *Pf*.
— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 1880. 2 *M* 40 *Pf*.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfzehnte Abhandlung: Ueber die Aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen. Mit 4 Tafeln. 1881. 2 *M*.
— Elektrische Untersuchungen. Sechszehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases und Titanits. Mit 3 Tafeln. 1882. 2 *M*.
— Elektrische Untersuchungen. Siebzehnte Abhandlung: Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten. 1883. 1 *M* 80 *Pf*.

DREIZEHNTER BAND. (XXII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1887. brosch. Preis 30 *M*.

G. T. FECHNER, Ueber die Frage des Weber'schen Gesetzes und Periodicitätsgesetzes im Gebiete des Zeitsinnes. 1884. 2 *M* 80 *Pf*.
— Ueber die Methode der richtigen und falschen Fälle in Anwendung auf die Massbestimmungen der Feinheit oder extensiven Empfindlichkeit des Raumsinnes. 1884. 7 *M*.
W. BRAUNE u. O. FISCHER, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode, erläutert am Gelenkmechanismus des Vorderarms beim Menschen. Mit 4 Tafeln. 1885. 2 *M*.
F. KLEIN, Ueber die elliptischen Normalcurven d. n^{ten} Ordnung u. zugehörige Modulfunctionen d. n^{ten} Stufe. 1885. 1 *M* 80 *Pf*.
C. NEUMANN, Ueber die Kugelfunctionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke $P_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$. 1886. 2 *M* 40 *Pf*.
W. HIS, Zur Geschichte des menschlichen Rückenmarkes und der Nervenwurzeln. Mit 1 Tafel und 10 Holzschnitten. 1886. 2 *M*.
H. BRUNS, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. 1886. 2 *M*.
R. LEUCKART, Neue Beiträge zur Kenntniss des Baues und der Lebensgeschichte der Nematoden. Mit 3 Taf. 1887. 7 *M*.
C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels, erste Abhandlung. Mit 11 Holzschnitten. 1887. 3 *M* 20 *Pf*.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.