ARCHIMÈDE

DES CORPS FLOTTANTS
STOMACHION
LA MÉTHODE
LE LIVRE DES LEMMES
LE PROBLÈME DES BŒUFS

ARCHIMÈDE

TOME III

Il a été tiré de cet ouvrage:
100 exemplaires sur papier pur fil Lafuma
numérotés de 1 à 100

COLLECTION DES UNIVERSITÉS DE FRANCE
Publiée sous le patronage de l'ASSOCIATION GUILLAUME BUDÉ

Archimedes

ARCHIMÈDE

TOME III

DES CORPS FLOTTANTS
STOMACHION
LA MÉTHODE
LE LIVRE DES LEMMES
LE PROBLÈME DES BŒUFS

TEXTE ÉTABLI ET TRADUIT
PAR
CHARLES MUGLER
Professeur honoraire à l'Université de Nice

PARIS
SOCIÉTÉ D'ÉDITION « *LES BELLES LETTRES* »
95, BOULEVARD RASPAIL
—
1971

Conformément aux statuts de l'Association Guillaume Budé, ce volume a été soumis à l'approbation de la commission technique, qui a chargé M. Ed. Delebecque d'en faire la révision et d'en surveiller la correction en collaboration avec M. Ch. Mugler.

DES CORPS FLOTTANTS

ΟΧΟΥΜΕΝΩΝ Α'

Ἀρχιμήδους Ὀχουμένων α'

Ὑποκείσθω τὸ ὑγρὸν φύσιν ἔχον τοιαύταν, ὥστε τῶν μερέων αὐτοῦ τῶν ἐξ ἴσου κειμένων καὶ συνεχέων ἐόντων ἐξωθεῖσθαι τὸ ἧσσον θλιβόμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον θλιβομένου, καὶ ἕκαστον δὲ τῶν μερέων αὐτοῦ θλίβεσθαι τῷ ὑπεράνω αὐτοῦ ὑγρῷ κατὰ κάθετον ἐόντι, εἴ κα μὴ τὸ ὑγρὸν ᾖ καθειργμένον ἔν τινι καὶ ὑπ' ἄλλου τινὸς θλιβόμενον.

α'.

Εἴ κα ᾖ ἐπιφάνειά τις ἐπιπέδῳ τεμνομένα διά τινος ἀεὶ τοῦ σαμείου τὰν τομὰν ποιέοντι circuli periferiam centrum habentem signum, per quod plano secatur, sperae erit superficies.

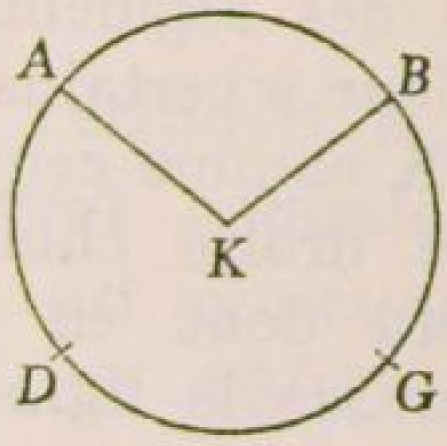

Fig. 85

Sit enim superficies aliqua secta per signum K plano semper sectionem faciente circuli periferiam, centrum autem ipsius K. Si igitur ipsa superficies non est sperae superficies, non erunt omnes quae a centro ad superficiem occurrentes lineae aequales. Sint itaque quae A, B, G, D signa in superficie, et inaequales quae AK, KB, per ipsas autem KA, KB planum educatur et faciat sectionem in superficie lineam DABG ; circuli ergo est ipsa, centrum autem ipsius K, quoniam supponebatur superficies talis. Non sunt ergo inaequales lineae KA, KB ; necessarium igitur est superficiem esse sperae superficiem.

β′.

Omnis humidi consistentis ita, ut maneat inmotum, superficies habebit figuram sperae habentis centrum idem cum terra.

Intelligatur enim humidum consistens ita, ut maneat non motum, et secetur ipsius superficies plano per centrum terrae, sit autem terrae centrum K, superficiei autem sectio linea ABGD. Dico itaque lineam ABGD circuli esse periferiam, centrum autem ipsius K.

Si enim non est, rectae a K ad lineam ABGD occurrentes non erunt aequales. Sumatur itaque aliqua recta, quae est quarundam quidem a K occurrentium ad lineam ABGD maior, quarundam autem minor, et centro quidem K, distantia autem sumptae lineae circulus describatur ; cadet igitur periferia circuli habens hoc quidem extra lineam ABGD, hoc autem intra, quoniam quae ex centro quarundam quidem a K occurrentium ad lineam ABGD est maior, quarundam autem minor, sit igitur descripti circuli periferia quae ZBH, et a B ad K recta ducatur, et copulentur quae ZK, KEL aequales facientes angulos, describatur autem et centro K periferia quaedam quae XOP in plano et in humido ; partes itaque humidi quae secundum XOP periferiam ex aequo sunt positae et continuae inuicem. Et premuntur quae quidem secundum XO periferiam humido quod secundum ZB locum ; inaequaliter igitur premuntur partes humidi quae secundum periferiam XO et quae

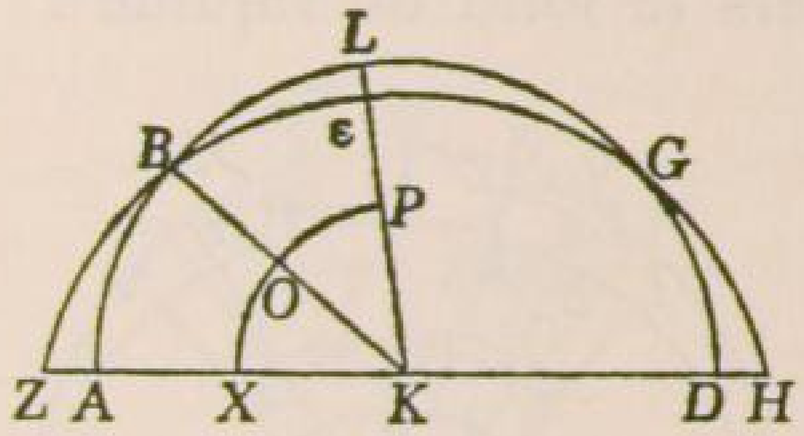

Fig. 86

[ἢ] κατὰ τὰν ΟΠ· ὥστε ἐξωθήσονται τὰ ἧσσον θλιβόμενα ὑπὸ τῶν μᾶλλον θλιβομένων· οὐ μένει ἄρα τὸ ὑγρόν. Ὑπέκειτο δὲ καθεστακὸς εἶμεν ὥστε μένειν ἀκίνητον· ἀναγκαῖον ἄρα τὰν ΑΒΓΔ γραμμὰν κύκλου περιφέρειαν εἶμεν καὶ κέντρον αὐτᾶς τὸ Κ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καί, ὅπως κα ἄλλως ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, ὅτι ἁ τομὰ ἐσσεῖται κύκλου περιφέρεια, καὶ κέντρον αὐτᾶς ἐσσεῖται ὃ καὶ τᾶς γᾶς ἐστι κέντρον. Δῆλον οὖν ὅτι ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καθεστακότος ἀκινήτου σφαίρας ἔχει τὸ σχῆμα τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσας τᾷ γᾷ, ἐπειδὴ τοιαύτα ἐστίν, ὥστε

⟨διὰ τοῦ αὐτοῦ σαμείου τμαθεῖσ⟩αν τὰν τομὰν ποιεῖν περιφέρειαν κύκλου κέντρον ἔχοντος τὸ σαμεῖον, δι᾽ οὗ τέμνεται τῷ ἐπιπέδῳ.

γ′.

Τῶν στερεῶν μεγεθέων τὰ ἰσοβαρέοντα τῷ ὑγρῷ ἀφεθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν καταβασοῦνται, ὥστε τᾶς ἐπιφανείας τᾶς τοῦ ὑγροῦ μὴ ὑπερέχειν μηδέν, καὶ οὐκέτι οἰσθήσονται ἐπὶ τὸ κάτω.

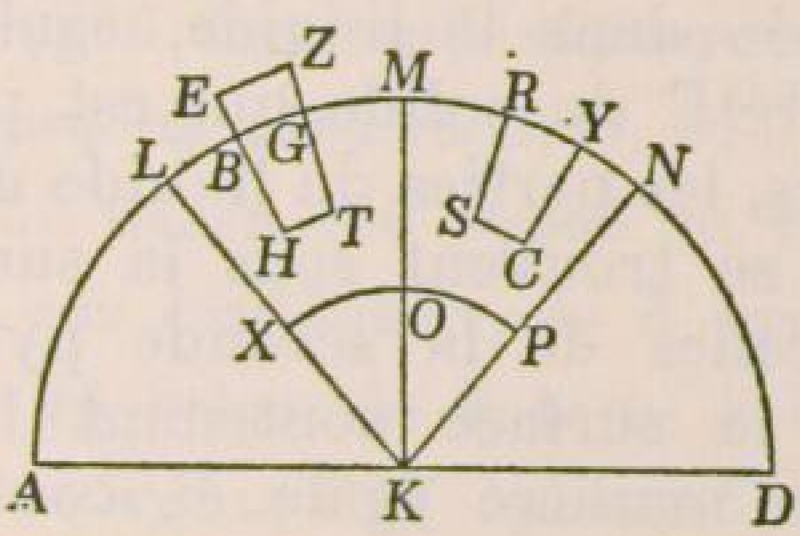

Fig. 87

Ἀφείσθω γάρ τι στερεὸν μέγεθος εἰς τὸ ὑγρὸν τῶν ἰσοβαρέων τῷ ὑγρῷ καί, εἰ δυνατόν, ὑπερεχέτω τι αὐτοῦ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καθεστάτω δὲ τὸ ὑγρόν, ὥστε μένειν ἀκίνητον. Νοείσθω δή τι ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς καὶ τοῦ ὑγροῦ καὶ διὰ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος, τομὰ δὲ ἔστω τᾶς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια, τοῦ δὲ στερεοῦ μεγέθεος τὸ ΕΖΗΘ σχῆμα, κέντρον δὲ τᾶς γᾶς τὸ Κ. Ἔστω δὴ τοῦ μὲν στερεοῦ τὸ μὲν ΒΓΗΘ ἐν τῷ ὑγρῷ, τὸ δὲ ΒΕΖΓ ἐκτός.

Νοείσθω δὴ τὸ στερεὸν σχῆμα περιλαμβανόμενον πυραμοειδεῖ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὑγροῦ, κορυφὰν δὲ τὸ κέντρον τᾶς γᾶς, ⟨τομὰ δὲ ἔστω τοῦ τε ἐπιπ⟩έδου, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια, καὶ τῶν τᾶς πυραμίδος ἐπιπέδων αἱ ΚΛ, ΚΜ. Γεγράφθω τις ἄλλας σφαίρας ἐπιφάνεια περὶ κέντρον τὸ Κ ἐν τῷ ὑγρῷ τῷ ὑπὸ τοῦ ΕΖΗΘ καὶ τεμνέσθω ἐπιπέδῳ, λελάφθω δέ τις καὶ ἄλλα πυραμὶς ἴσα καὶ ὁμοία τᾷ περιλαμβανούσᾳ τὸ στερεὸν συνεχὴς αὐτᾷ, τομὰ δὲ ἔστω τῶν ἐπιπέδων αὐτᾶς αἱ ΚΜ, ΚΝ, καὶ ἐν τῷ ὑγρῷ νοείσθω τι μέγεθος τοῦ ὑγροῦ ἀπολαμβανόμενον τὸ ΡΣΤΥ ἴσον καὶ ὅμοιον τῷ στερεῷ τῷ κατὰ τὰ Β, Η, Θ, Γ, ὅ ἐστιν αὐτοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ· τὰ δὴ μέρεα τοῦ ὑγροῦ τά τε ἐν τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν, ἐν ᾇ ἐστιν ἁ ΞΟ περιφέρεια, καὶ τὰ ἐν τᾷ ἑτέρᾳ, ἐν ᾇ ἐστιν ἁ ΠΟ, ἐξ ἴσου τέ ἐντι κείμενα καὶ συνεχέα. Οὐχ ὁμοίως δὲ θλίβονται· τὸ μὲν γὰρ κατὰ τὰν ΞΟ θλίβεται τῷ στερεῷ τῷ ΘΗΕΖ καὶ τῷ ὑγρῷ τῷ μεταξὺ τᾶν ἐπιφανειᾶν τᾶν κατὰ τὰς ΞΟ, ΛΜ καὶ τῶν τᾶς πυραμίδος ἐπιπέδων, τὸ δὲ κατὰ τὰν ΠΟ τῷ ὑγρῷ τῷ μεταξὺ τᾶν ἐπιφανειᾶν τᾶν κατὰ τὰς ΠΟ, ΜΝ καὶ τῶν τᾶς πυραμίδος ἐπιπέδων. Ἔλασσον δὲ ἐσσεῖται τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ κατὰ τὰς ΜΝ, ΟΠ· τὸ μὲν γὰρ κατὰ τὸ ΡΣΤΥ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΕΖΗΘ στερεοῦ· αὐτῷ γὰρ τῷ κατὰ τὸ ΗΒΓΘ ἴσον ἐστὶν διὰ τὸ τῷ μεγέθει ἴσον εἶμεν καὶ ἰσοβαρὲς ὑποκεῖσθαι τὸ στερεὸν ⟨τῷ ὑγρῷ· τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ⟩ ἴσον ἐστί. Δῆλον οὖν ὅτι ἐξωθήσεται τὸ μέρος τὸ κατὰ τὰν ΟΠ περιφέρειαν ὑπὸ τοῦ κατὰ τὰν ΟΞ περιφέρειαν, καὶ οὐκ ἐσσεῖται τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον. Ὑπόκειται δὲ ἀκίνητον ἐόν· οὐκ ἄρα ὑπερέξει τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας οὐδὲν τοῦ στερεοῦ μεγέθεος. Καταδὺν δὲ τὸ στερεὸν οὐκ οἰσθήσεται ἐς τὰ κάτω· ὁμοίως γὰρ πάντα θλιβησοῦντι τὰ μέρεα τοῦ ὑγροῦ τὰ ἐξ ἴσου κείμενα διὰ τὸ ἰσοβαρέα εἶμεν τὸ στερεὸν καὶ τὸ ὑγρόν.

δ'.

Τῶν στερῶν μεγεθέων ὅ κα κουφότερον ᾖ τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν οὐ καταδύσεται ὅλον, ἀλλὰ ἐσσεῖταί τι αὐτοῦ ἐκτὸς τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

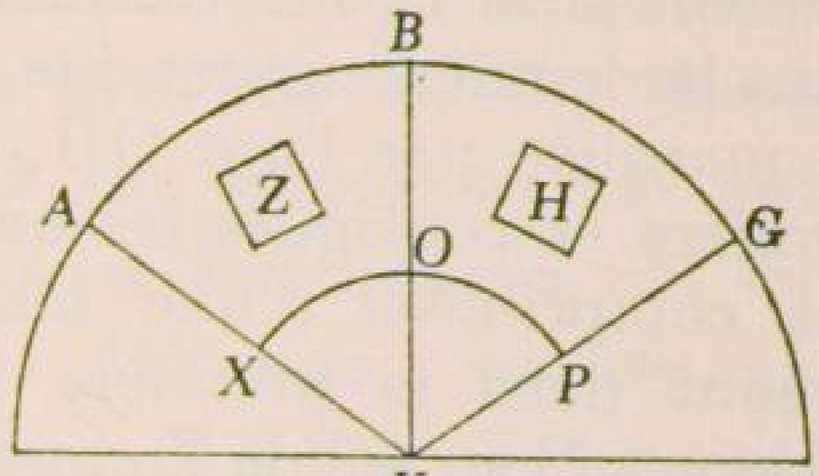

Fig. 88

Ἔστω γὰρ στερεὸν μέγεθος κουφότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν δεδυκέτω ὅλον, εἰ δυνατόν, καὶ μηδὲν αὐτοῦ ἔστω ἐκτὸς τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καθεστακέτω δὲ τὸ ὑγρόν, ὥστε μένειν ἀκίνητον. Νοείσθω δή τι ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διὰ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς καὶ διὰ τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος, τεμνέσθω δὲ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἡ μὲν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνεια κατὰ τὰν ΑΒΓ περιφέρειαν, τὸ δὲ στερεὸν μέγεθος κατὰ τὸ σχῆμα, ἐν ᾧ Ζ, κέντρον δὲ ἔστω τᾶς γᾶς τὸ Κ, νοείσθω δέ τις πυραμὶς περιλαμβάνουσα τὸ Ζ σχῆμα, καθ’ ἃ καὶ πρότερον, κορυφὰν ἔχουσα τὸ Κ σαμεῖον, τεμνέσθω δὲ αὐτᾶς τὰ ἐπίπεδα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ κατὰ τὰς ΑΚ, ΚΒ, λελάφθω δέ τις καὶ ἄλλα ἴσα πυραμὶς καὶ ὁμοία ταύτᾳ, τεμνέσθω δὲ αὐτᾶς τὰ ἐπίπεδα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰς ΚΒ, ΚΓ, γεγράφθω δέ τις καὶ ἄλλας σφαίρας ἐπιφάνεια ἐν τῷ ὑγρῷ περὶ κέντρον τὸ Κ, ὑποκάτω δὲ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος, τεμνέσθω δ’ αὕτα ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰν ΞΟΠ περιφέρειαν, νοείσθω δὲ καὶ μέγεθος ἀπολαμβανόμενον τοῦ ὑγροῦ τὸ κατὰ τὸ Η ἐν τᾷ ὕστερον πυραμίδι ἴσον τῷ κατὰ τὸ Ζ στερεῷ· τὰ δὴ μέρεα τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἐν τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΞΟ περιφέρειαν καὶ τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΟΠ περιφέρειαν ἐξ ἴσου τέ ἐντι κείμενα καὶ συνεχέα ἀλλάλοις. Οὐχ ὁμοίως δὲ θλίβονται· τὸ μὲν γὰρ ἐν τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι θλίβεται τῷ κατὰ τὸ Ζ στερεῷ μεγέθει καὶ τῷ περιέχοντι ὑγρῷ αὐτὸ καὶ ἐόντι ἐν τῷ τόπῳ τᾶς πυραμίδος τῷ κατὰ τὰ Α, Β, Ο, Ξ, τὸ δ’ ἐν τᾷ ἑτέρᾳ πυραμίδι θλίβεται τῷ ὑγρῷ τῷ περιέχοντι αὐτὸ καὶ ἐόντι τᾶς πυραμίδος ἐν τῷ τόπῳ τῷ κατὰ τὰ Π, Ο, Β, Γ, ἔστι δὲ τὸ βάρος τὸ κατὰ ⟨τὸ Ζ ἔλασσον τοῦ βάρεος τοῦ κατὰ τὸ⟩ Η, ἐπειδὴ τῷ μὲν μεγέθει ἴσον ἐστίν, κουφότερον δὲ ὑπόκειται τὸ στερεὸν μέγεθος εἶμεν τοῦ ὑγροῦ, τὰ δὲ τοῦ περιέχοντος ὑγροῦ τὰ Ζ, Η μεγέθεα ἐν ἑκατέρᾳ τᾶν πυραμίδων ἴσα· μᾶλλον οὖν θλιβήσεται τὸ μέρος τοῦ ὑγροῦ τὸ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΟΠ περιφέρειαν· ἐξωθήσει οὖν τὸ ἧσσον θλιβόμενον, καὶ οὐ μενεῖ τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον. Ὑπέκειτο δέ· οὐκ ἄρα καταδύσεται ὅλον, ἀλλ' ἐσσεῖταί τι αὐτοῦ ἐκτὸς τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

ε'.

Τῶν στερεῶν μεγεθέων ὅ κα ᾖ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ἐς τοσοῦτο καταδύσεται, ὥστε ταλικοῦτον ὄγκον τοῦ ὑγροῦ, ἁλίκος ἐστὶν ὁ τοῦ καταδεδυκότος ὄγκος, ἴσον βάρος ἔχειν ὅλῳ τῷ μεγέθει.

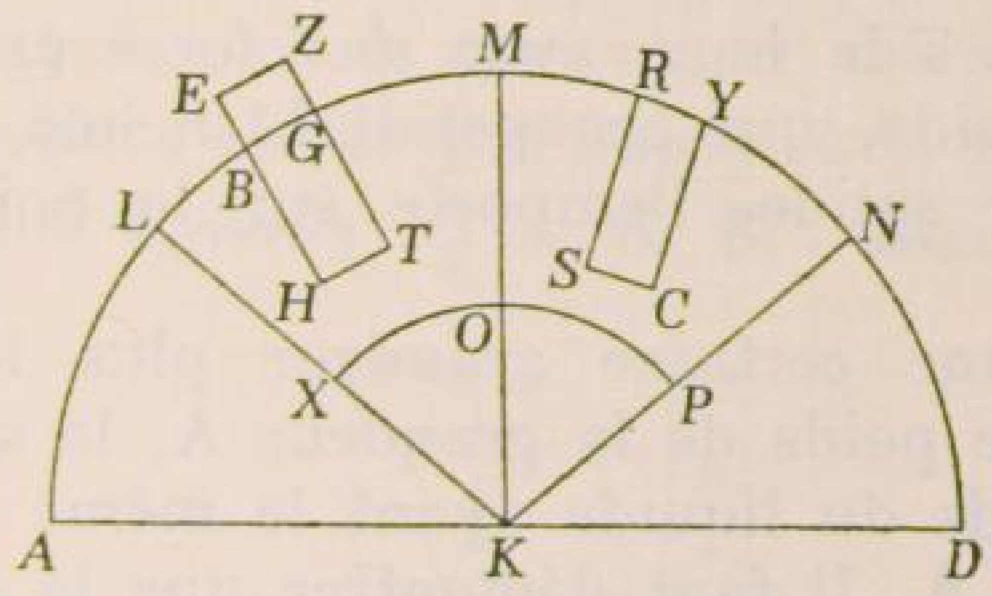

Fig. 89

Κατεσκευάσθω ταὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἔστω τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον, ἔστω δὲ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ τὸ

ΕΖΗΘ μέγεθος. Ἐπεὶ οὖν ἀκίνητόν ἐστιν τὸ ὑγρόν, ὁμοίως θλιβήσεται τὰ μέρεα αὐτοῦ τὰ ἐξ ἴσου κείμενα· ὁμοίως ἄρα θλιβήσεται τὸ ὑγρὸν τὸ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰς ΞΟ καὶ ΠΟ περιφερείας· ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ θλίβονται. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ ὑγροῦ τὸ βάρος τοῦ ἐν τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι χωρὶς τοῦ ΒΗΘΓ στερεοῦ ἴσον τῷ βάρει τῷ ⟨τοῦ ἐν τᾷ ἑτέρᾳ πυραμίδι⟩ χωρὶς τοῦ ΡΣΤΥ ὑγροῦ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ ΕΖΗΘ μεγέθεος βάρος ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ ΡΣΤΥ ὑγροῦ βάρει. Φανερὸν οὖν ὅτι ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ἁλίκον ἐστὶ τὸ δεδυκὸς τοῦ στερεοῦ μεγέθεος, ἴσον βάρος ἔχει ὅλῳ τῷ μεγέθει.

ς'.

Τὰ κουφότερα στερεὰ τοῦ ὑγροῦ βιασθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρεται τοσαύτᾳ βίᾳ ἐς τὸ ἄνω, ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ βαρύτερόν ἐστι τοῦ μεγέθεος τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ μεγέθει.

Ἔστω τι μέγεθος τὸ Α κουφότερον τοῦ ὑγροῦ, ἔστω δὲ τοῦ μὲν μεγέθεος τοῦ ἐν ᾧ Α βάρος τὸ Β, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Α τὸ ΒΓ. Δεικτέον ὅτι τὸ

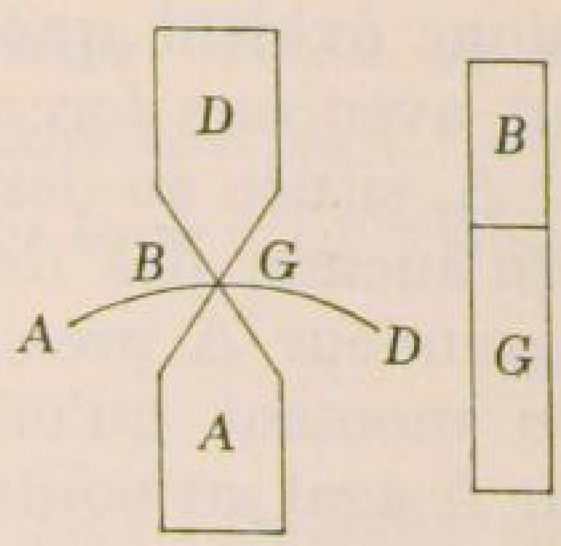

Fig. 90

Α μέγεθος βιασθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν ἀνοισεῖται ἐς τὸ ἐπάνω τοσαύτᾳ βίᾳ, ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος τὸ Γ.

Λελάφθω γάρ τι μέγεθος τὸ ἐν ᾧ τὸ Δ βάρος ἴσον ἔχον τῷ Γ· τὸ δὴ μέγεθος τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ἐν οἷς Α, Δ μεγεθέων ἐς τὰ αὐτὰ συντεθέντων κουφότερόν ἐστι τοῦ ὑγροῦ· ἔστι γὰρ τοῦ μὲν μεγέθεος τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρος τὸ ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος αὐτῷ μεῖζον τοῦ ΒΓ διὰ τὸ τοῦ ἴσον ἔχοντος ὄγκον τῷ τοῦ Α τὸ βάρος εἶμεν τὸ ΒΓ. Ἀφεθὲν οὖν ἐς τὸ ὑγρὸν τὸ μέγεθος τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Δ συγκείμενον ἐς τοσοῦτον δύσεται, ⟨ἔστε κα ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ⟩ ὑγροῦ, ἁλίκον καὶ τὸ δεδυκὸς τοῦ μεγέθεος, ἴσον βάρος ἔχῃ τῷ ὅλῳ μεγέθει· δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἔστω δὴ ἐπιφάνειά τινος ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια. Ἐπεὶ οὖν ὁ ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ἁλίκον ἐστὶ τὸ Α μέγεθος, ἴσον βάρος ἔχει τοῖς Α, Δ μεγέθεσιν, δῆλον ὅτι τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ Α μέγεθος, τὸ δὲ λοιπὸν αὐτοῦ, ἐν ᾧ Δ, ἐσσεῖται ὅλον ὑπὲρ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας· εἰ γὰρ α... δέδυκεν τὸ στερεόν, ἕπεται...... τούτου δεδειγμένου. Δῆλον οὖν ὅτι ..... ἐς τὸ ἄνω φέρεται τὸ Α μέγεθος.......... .... ὑπὸ τοῦ ἄνω τοῦ Δ ἐς τὸ κάτω, ἐπεὶ οὐδέτερον ὑπ᾽ οὐδετέρου ἐξωθεῖτο. Ἀλλὰ τὸ Δ ἐς τὸ κάτω θλίβει τοσούτῳ βάρει, ἁλίκον ἐστὶ τὸ Γ· ὑπέκειτο γὰρ τὸ βάρος τοῦ ἐν ᾧ τὸ Δ εἶμεν ἴσον τῷ Γ· δῆλον οὖν ὃ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ ἀφεθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν οἰσεῖται κάτω, ἔστ' ἂν καταβᾶντι, καὶ ἐσσοῦνται κουφότερα ἐν τῷ ὑγρῷ τοσοῦτον, ὅσον ἔχει τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ ταλικοῦτον ὄγκον ἔχοντος, ἁλίκος ἐστὶν ὁ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος ὄγκος.

Ὅτι μὲν οὖν οἰσεῖται ἐς τὸ κάτω, ἔστ' ἂν καταβᾶντι, δῆλον· τὰ γὰρ ὑποκάτω αὐτοῦ μέρεα τοῦ ὑγροῦ θλιβησοῦνται μᾶλλον τῶν ἐξ ἴσου αὐτοῖς κειμένων μερέων, ἐπειδὴ βαρύτερον ὑπόκειται τὸ στερεὸν μέγεθος τοῦ ὑγροῦ· ὅτι δὲ κουφότερα ἐσσοῦνται, ὡς εἴρηται, δειχθήσεται.

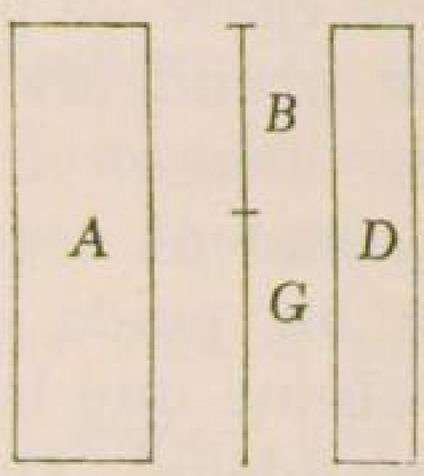

Fig. 91

Ἔστω τι μέγεθος τὸ Α, ὅ ἐστι βαρύτερον τοῦ ὑγροῦ, βάρος δὲ ἔστω τοῦ μὲν ἐν ᾧ Α μεγέθεος τὸ ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Α τὸ Β. Δεικτέον ὅτι τὸ Α μέγεθος ἐν τῷ ὑγρῷ ἐὸν βάρος ἕξει ἴσον τῷ Γ.

Λελάφθω γάρ τι μέγεθος τὸ ἐν ᾧ τὸ Δ ⟨κουφότερον τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος αὐτῷ, ἔστω⟩ δὲ τοῦ μὲν ἐν ᾧ τὸ Δ μεγέθεος βάρος ἴσον τῷ Β βάρει, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Δ μεγέθει τὸ βάρος ἔστω ἴσον τῷ ΒΓ βάρει. Συντεθέντων δὴ ἐς τὸ αὐτὸ τῶν μεγεθέων, ἐν οἷς τὰ Α, Δ, τὸ τῶν συναμφοτέρων μέγεθος ἰσοβαρὲς ἐσσεῖται τῷ ὑγρῷ· ἔστι γὰρ τῶν μεγεθέων συναμφοτέρων τὸ βάρος ἴσον συναμφοτέροις τοῖς βάρεσιν τῷ τε ΒΓ καὶ τῷ Β, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος ἀμφοτέροις τοῖς μεγέθεσι τὸ βάρος ἴσον ἐστὶ τοῖς αὐτοῖς βάρεσιν. Ἀφεθέντων οὖν τῶν μεγεθέων ἐς τὸ ὑγρὸν ἰσορροπησοῦνται τῷ ὑγρῷ καὶ οὔτε εἰς τὸ ἄνω οἰσοῦνται οὔτε εἰς τὸ κάτω· διὸ τὸ μὲν ἐν ᾧ Α μέγεθος οἰσεῖ ⟨ται ἐς τὸ κάτω καὶ τοσαύτᾳ βίᾳ ὑ⟩πὸ τοῦ ἐν ᾧ Δ μεγέθεος ἀνέλκεται ἐς τὸ ἄνω, τὸ δὲ ἐν ᾧ Δ μέγεθος, ἐπεὶ κουφότερόν ἐστι τοῦ ὑγροῦ, ἀνοισεῖται εἰς τὸ ἄνω τοσαύτᾳ βίᾳ, ὅσον ἐστὶ τὸ Γ βάρος· δέδεικται γὰρ ὅτι τὰ κουφότερα τοῦ ὑγροῦ μεγέθεα στερεὰ βιασθέντα ἐς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρονται τοσαύτᾳ βίᾳ ἐς τὸ ἄνω, ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ βαρύτερόν ἐστι τοῦ μεγέθεος τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσογκον τῷ μεγέθει. Ἔστι δὲ τῷ Γ βάρει βαρύτερον τοῦ Δ μεγέθεος τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ Δ· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐν ᾧ Α μέγεθος ἐς τὸ κάτω οἰσεῖ ⟨ται τοσούτῳ βάρει, ὅσον ἐστὶ τὸ Γ⟩.

Ὑποκεί⟨σθω τῶν ἐν τῷ ὑγρῷ ἄνω⟩ φερομένων ἕκαστον ἀναφέρεσθαι κατὰ τὰν κάθετον τὰν διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βάρεος αὐτοῦ ἀγμέναν.

η′.

Εἴ κα στερεόν τι μέγεθος κουφότερον τοῦ ὑγροῦ σφαίρας τμάματος ἔχον σχῆμα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀφεθῇ οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν τοῦ τμάματος μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὀρθὸν καταστασεῖται τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα τοῦ τμάματος κατὰ κάθετον εἶμεν· καὶ εἴ κα ὑπό τινος ἕλκηται τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν τοῦ τμάματος ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὐ μενεῖ κεκλιμένον, εἴ κα ἀφεθῇ, ἀλλ' ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται.

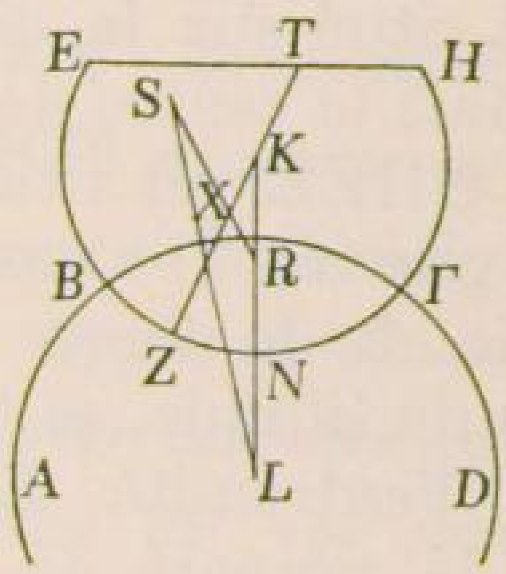

Fig. 92

Νοείσθω γάρ τι μέγεθος, οἷον εἴρηται, ἐς τὸ ὑγρὸν ἀφε⟨θέν, καὶ διά τε τοῦ ἄξονος τοῦ⟩ τμάματος καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς νοείσθω ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον, τομὰ δ' ἔστω τᾶς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ σχήματος τοῦ ἐς τὸ ὑγρὸν ἀφεθέντος ἁ ΕΖΗΘ περιφέρεια, ἄξων δὲ τοῦ τμάματος ἔστω ἁ ΘΖ· τὸ δὴ κέντρον τᾶς σφαίρας ἔστιν ἐπὶ τᾶς ΘΖ.

Πρῶτον μὲν, εἰ μεῖζόν ἐστιν ἡμισφαιρίου τὸ τμᾶμα, ἔστω τὸ Κ, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, κεκλιμένον τὸ σχῆμα ἤτοι ὑπό τινος κλιθὲν ἢ καθ' αὑτό. Δεικτέον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλ' εἰς ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται, ὥστε τὰ Ζ, Θ κατὰ κάθετον εἶμεν.

Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται κεκλίσθαι τὸ σχῆμα, οὐκ ἔστι τὰ Ζ, Θ κατὰ κάθετον. Ἄχθω δὴ διὰ τοῦ Κ καὶ τοῦ Λ ἁ ΚΛ, τὸ δὲ Λ κέντρον ὑποκείσθω τᾶς γᾶς· τὸ δὴ σχῆμα τὸ ἐν τῷ ὑγρῷ ἀπολελαμμένον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα ἔχει ἐπὶ τᾶς ΚΛ· εἰ γάρ κα δύο σφαιρᾶν ἐπιφάνειαι τέμνωντι ἀλλάλας, ἁ τομὰ κύκλος ἐστὶν ὀρθὸς ποτὶ τὰν εὐθεῖαν τὰν ἐπιζευγνύουσαν τὰ κέντρα τᾶν σφαιρᾶν. Ἔστιν οὖν τοῦ σχήματος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ περιφέρειαν ἀπολαμβανομένου ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΚΛ· ἔστω τὸ Ρ. Τοῦ δὲ τμάματος ὅλου τοῦ κατὰ τὰν ΘΗΖΕ περιφέρειαν τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΖΘ· ἔστω τὸ Ξ. Τοῦ ἄρα ⟨λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐκτὸς⟩ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΡΞ ἐστὶν ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς τᾶς ΣΞ ποτὶ τὰν ΞΡ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ περιφέρειαν τοῦ τμάματος ποτὶ τὸ βάρος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ· δέδεικται γὰρ ταῦτα. Ἔστω δὴ τὸ Σ κέντρον τοῦ εἰρημένου σχήματος. Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν σχήματος, ὅ ἐστιν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τὸ βάρος ἐς τὸ κάτω φέρεται κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΛΣ, τὸ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ ἐς τὸ ἄνω κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΡΚ, δῆλον ὡς οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ ποτὶ τῷ Ε μέρεα αὐτοῦ ἐς τὸ κάτω οἰσοῦνται, τὰ δὲ ποτὶ τῷ Η ἐς τὸ ἄνω, καὶ ἀεὶ ἐς τὸ αὐτὸ οἰσοῦνται, ἕως κα ἁ ΖΘ κατὰ κάθετον γένηται. Κατὰ κάθετον δὲ γενομένας τᾶς ΖΘ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐσσοῦνται τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ καὶ τοῦ ἐκτος ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς καθέτου · ἐπὶ γὰρ τᾶς ΖΘ ἐσσοῦνται · ἀντιθλιψοῦνται οὖν ἀλλήλοις τὰ βάρεα κατὰ τὰν αὐτὰν κάθετον, τὸ μὲν ἐς τὸ κάτω φερόμενον, τὸ δὲ ἐς τὸ ἄνω. Ὥστε μένει τὸ σχῆμα · οὐδέτερον γὰρ ὑπ' οὐδετέρου ἐξωθήσεται.

Τὰ δ' αὐτὰ ἐσσεῖται καὶ εἴ κα τὸ σχῆμα ἡμισφαίριον ᾖ ἢ ἔλασσον ἡμισφαιρίου.

θ′.

Καὶ τοίνυν, εἴ κα τὸ σχῆμα κουφότερον ἐὸν τοῦ ὑγροῦ ἀφεθῇ ἐς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, ὀρθὸν καταστασεῖται τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἶμεν.

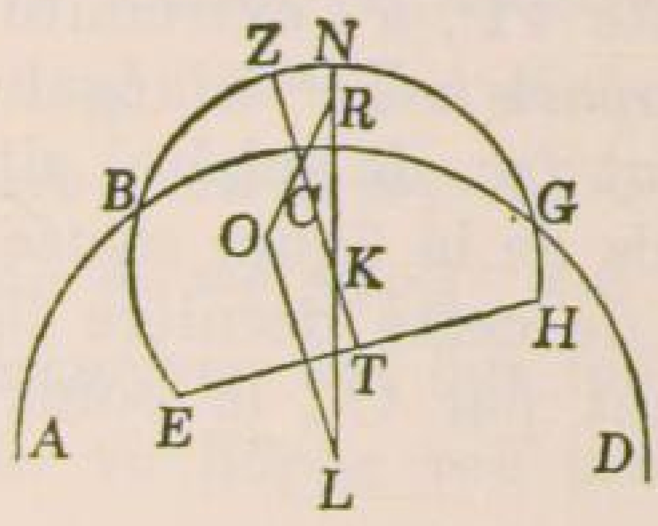

Fig. 93

Νοείσθω γάρ τι μέγεθος, οἷον εἴρηται, εἰς τὸ ὑγρὸν ἀφετώμενον, νοείσθω δὲ καὶ ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος καὶ διὰ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, τομὰ δὲ ἔστω τᾶς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια, τοῦ δὲ σχήματος ἁ ΕΖΗ περιφέρεια καὶ ἁ ΕΗ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ ΖΘ. Εἰ οὖν δυνατόν, μὴ κατὰ κάθετον ἔστω ἁ ΖΘ· δεικτέον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ ἐπ' ὀρθὸν καταστασεῖται.

Ἔστι δὴ τὸ κέντρον τᾶς σφαίρας ἐπὶ τᾶς ΖΘ· πάλιν γὰρ μεῖζον ἡμισφαιρίου ἔστω πρῶτον τὸ σχῆμα· καὶ ἔστω τὸ Κ· διὰ δὲ τοῦ Κ καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς τοῦ Λ ἄχθω ἁ ΚΛ· τὸ δὴ σχῆμα τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα ἔχει ἐπὶ τᾶς διὰ τοῦ Κ, καὶ διὰ ταὐτὰ τοῖς πρότερον ἔστιν αὐτοῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΝΚ· ἔστω [γὰρ] τὸ Ρ. Τοῦ δὲ ὅλου τμάματος τὸ κέν⟨τρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΖΘ⟩ μεταξὺ τῶν Κ, Ζ· ἔστω τὸ Τ. Τοῦ ἄρα λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ κέντρον ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΤΡ εὐθείας ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας τινός, ἃ ἕξει ποτὶ τὰν ΤΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμάματος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ποτὶ τὸ βάρος τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ· καὶ ἔστω τὸ Ο κέντρον τοῦ εἰρημένου σχήματος, καὶ διὰ τοῦ Ο κάθετος ἔστω ἁ ΟΛ· οἰσεῖται οὖν τὸ βάρος τοῦ μὲν τμάματος ὅ ἐστιν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΡΛ ἐς τὸ κάτω, τοῦ δ' ἐν τῷ ὑγρῷ σχήματος κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΟΛ ἐς τὸ ἄνω. Οὐκ ἄρα μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τοῦ σχήματος τὰ μὲν ποτὶ τῷ Η μέρεα οἰσοῦνται ἐς τὸ κάτω, τὰ δὲ ποτὶ τῷ Ε ἐς τὸ ἄνω, καὶ ἀεὶ τοῦτο ἐσσεῖται, ἔστε κα ΘΖ κατὰ κάθετον γένηται.

Β'.

α'.

Εἴ κά τι μέγεθος κουφότερον ἐὸν τοῦ ὑγροῦ ἀφεθῇ ἐς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν ἔχει τὸ δεδυκὸς μέγεθος ποτὶ τὸ ὅλον μέγεθος.

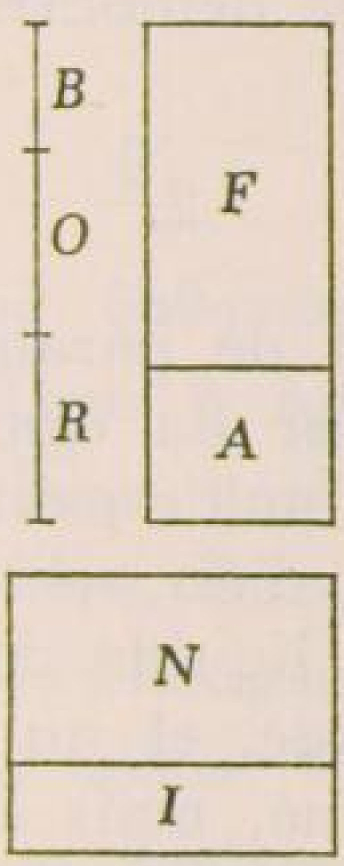

Fig. 94

Ἀφείσθω γάρ τι εἰς τὸ ὑγρὸν μέγεθος στερεὸν τὸ ΦΑ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ ἐόν, ἔστω δὲ τὸ μὲν δεδυκὸς αὐτοῦ τὸ Α, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ Φ. Δεικτέον ὅτι τὸ ΦΑ τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσογκον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Α ποτὶ τὸ ΦΑ.

Λελάφθω γάρ τι τοῦ ὑγροῦ μέγεθος τὸ ΝΙ ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ ΦΑ, καὶ τῷ μὲν Φ ἴσον ἔστω τὸ Ν, τῷ δὲ Α τὸ Ι, καὶ ἔτι τὸ μὲν τοῦ ΦΑ μέγεθεος βάρος ἔστω τὸ Β, τυῦ δὲ ΝΙ τὸ ΡΟ, τοῦ δὲ Ι τὸ Ρ· τὸ ΦΑ ἄρα ποτὶ τὸ ΝΙ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ Β ποτὶ τὸ ΡΟ. Ἀλλ' ἐπεὶ τὸ ΦΑ μέγεθος ἐς τὸ ὑγρὸν ἀφείθη κουφότερον ὑπάρχον τοῦ ὑγροῦ, δῆλον ὡς ὁ τοῦ δεδυκότος μεγέθεος ὄγκος ἴσον βάρος ἔχει τῷ ΦΑ μεγέθει· δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἴσον ἄρα τὸ Β βάρος τῷ Ρ, ἐπειδὴ τὸ μὲν Β τὸ βάρος ἐστὶ ὅλου τοῦ ΦΑ μεγέθεος, τὸ δὲ Ρ τοῦ Ι ὑγροῦ, ὃ τῷ μεγέθει ἐγένετο ἴσον τῷ ἴσον ὄγκον ἔχοντι τῷ δεδυκότι μεγέθει τῷ Α· ἔχει ἄρα τὸ ΦΑ μέγεθος τῷ βάρει ποτὶ τὸ ΝΙ ὡς τὸ Ρ ποτὶ τὸ ΡΟ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ Ρ ποτὶ τὸ ΡΟ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ Ι ποτὶ τὸ ΙΝ καὶ τὸ Α ποτὶ τὸ ΦΑ· δέδεικται ἄρα τὸ προτεθέν.

β′.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ μὴ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, πάντα λόγον ἔχον ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, τεθὲν κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμένον, ἀλλὰ ἀποκαταστασεῖται ὀρθόν. Ὀρθὸν δὲ λέγω καθεστακέναι τὸ τοιοῦτο τμᾶμα, ὁπόταν τὸ ἀποτετμακὸς αὐτὸ ἐπίπεδον παρὰ τὰν ἐπιφάνειαν ᾖ τοῦ ὑγροῦ.

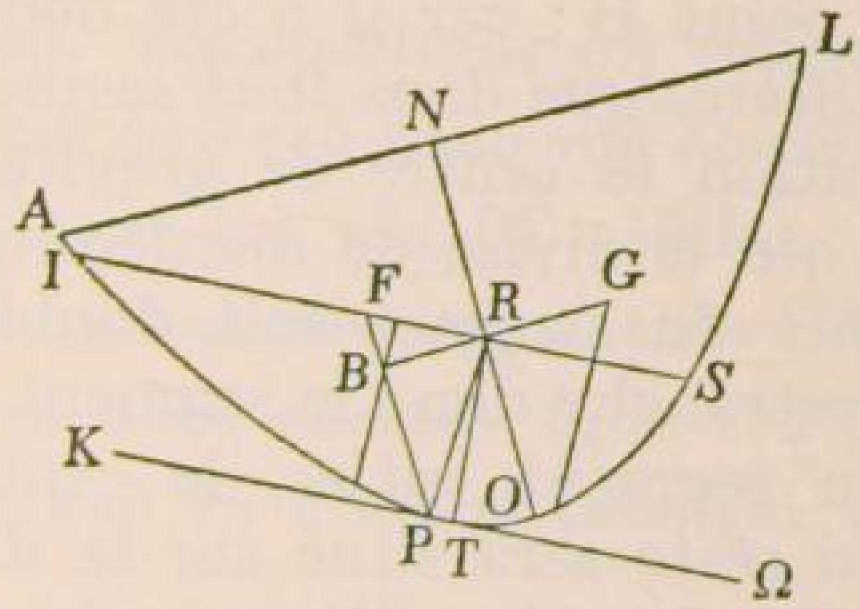

Fig. 95

Ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, οἷον εἴρηται, καὶ κείσθω κεκλιμένον. Δεικτέον ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλ' ἀποκαταστασεῖται ὀρθόν.

Τμαθέντος δὴ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ⟨ἐπίπεδον τὸ ἐπὶ τᾶς ἐπιφανείας⟩ τοῦ ὑγροῦ τμάματος ἔστω τομὰ ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΝΟ, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τομὰ ἁ ΙΣ. Ἐπεὶ οὖν τὸ τμᾶμα οὐκ ἐστὶν ὀρθόν, οὐκ ἂν εἴη παράλληλος ἁ ΑΛ τᾷ ΙΣ· ὥστε οὐ ποιήσει ὀρθὰν γωνίαν ἁ ΝΟ ποτὶ τὰν ΙΣ. Ἄχθω οὖν παράλληλος ἁ ἐφαπτομένα ἁ ΚΩ τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Π, καὶ ἀπὸ τοῦ Π παρὰ τὰν ΝΟ ἄχθω ἁ ΠΦ· τέμνει δὴ ἁ ΠΦ δίχα τὰν ΙΣ· δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. Τετμάσθω ἁ ΠΦ, ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν ΠΒ τᾶς ΒΦ, καὶ ἁ ΝΟ κατὰ τὸ Ρ τετμάσθω, ὥστε καὶ τὰν ΟΡ τᾶς ΡΝ διπλασίαν εἶμεν· ἐσσεῖται δὴ τοῦ μείζονος ἀποτμάματος τοῦ στερεοῦ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ρ, τοῦ δὲ κατὰ τὰν ΙΠΟΣ τὸ Β· δέδεικται γὰρ ἐν ταῖς Ἰσορροπίαις, ὅτι παντὸς ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος διῃρημένου οὕτως, ὥστε τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ ἄξονος τμᾶμα διπλάσιον εἶμεν τοῦ λοιποῦ. Ἀφαιρεθέντος δὴ τοῦ κατὰ τὰν ΙΠΟΣ τμάματος στερεοῦ ἀπὸ τοῦ ὅλου τοῦ λοιποῦ ⟨τὸ⟩ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΒΓ εὐθείας· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Στοιχείοις τῶν μηχα⟨νικῶν ὅτι, εἴ κα μέγεθος ἀφαιρεθῇ μὴ⟩ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τοῦ βάρεος τῷ ὅλῳ μεγέθει, τοῦ λοιποῦ τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐκβεβλημένας ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεός ἐστιν. Ἐκβεβλήσθω δὴ ἁ ΒΡ ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἔστω τὸ Γ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ λοιποῦ μεγέθεος. Ἐπεὶ οὖν ἁ ΝΟ τᾶς μὲν ΟΡ ἡμιολία, τᾶς δὲ μέχρι τοῦ ἄξονος οὐ μείζων ἢ ἡμιολία, δῆλον ὅτι ἁ ΡΟ τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος οὐκ ἐστὶ μείζων· ἁ ΠΡ ἄρα ποτὶ τὰν ΚΩ γωνίας ἀνίσους ποιεῖ, καὶ ἁ ὑπὸ τῶν ΡΠΩ γίνεται ὀξεῖα· ἁ ἀπὸ τοῦ Ρ ἄρα κάθετος ἐπὶ τὰν ΠΩ ἀγομένα μεταξὺ πεσεῖται τῶν Π, Ω. Πιπτέτω ὡς ἁ ΡΘ· ἁ ΡΘ ἄρα ὀρθά ἐστιν ποτὶ τὸ.......κ..ος ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ΣΙ, ὅ ἐστιν ἐπὶ τᾶς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ἄχθωσαν δή τινες ἀπὸ τῶν Β, Γ παρὰ τὰν ΡΘ· ἐνεχθήσεται δὴ τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τοῦ μεγέθεος εἰς τὸ κάτω κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ ἀγομέναν κάθετον· ὑπόκειται γὰρ ἕκαστον τῶν βαρέων εἰς τὸ κάτω φέρεσθαι κατὰ τὰν κάθετον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ἀγομέναν· τὸ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ μέγεθος, ἐπεὶ κουφότερον γίνεται τοῦ ὑγροῦ, ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἄνω κατὰ τὰν κάθετον τὰν διὰ τοῦ Β ἀγομέναν. Ἐπεὶ δὲ οὐ κατὰ τὰν αὐτὰν κάθετον ἀλλάλοις ἀντιθλίβονται, ⟨οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ μὲν κατὰ⟩ τὸ Α εἰς τὸ ἄνω ἐνεχθήσεται, τὰ δὲ κατὰ τὸ Λ εἰς τὸ κάτω, καὶ τοῦτο ἀεὶ ἐσσεῖται, ἕως ἂν ὀρθὸν ἀποκατασταθῇ.

γ'.

Ὀρθὸν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ μὴ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, πάντα λόγον ἔχον ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, τεθὲν κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμένον, ἀλλ' ἀποκαταστασεῖται οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἶμεν.

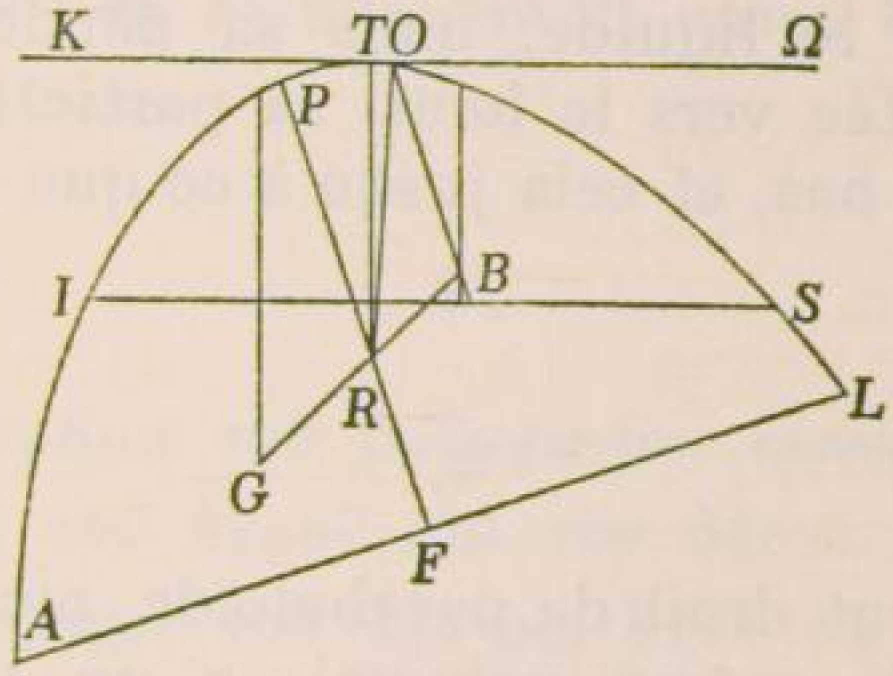

Fig. 96

Ἀφείσθω γάρ τι τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρόν, οἷον εἴρηται, καὶ ἔστω αὐτοῦ ἁ βάσις ἐν τῷ ὑγρῷ, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΠΦ, τᾶς δὲ ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἁ ΙΣ. Ἐπειδὴ οὖν κεκλιμένον κεῖται τὸ τμᾶμα, οὐκ ἐσσεῖται κατὰ κάθετον ὁ ἄξων· οὐκ ἄρα ποιήσει ἁ ΠΦ ἴσας γωνίας ποτὶ τὰν ΙΣ. Ἄχθω δή τις ⟨ἁ ΚΩ παρὰ τὰν ΙΣ ἐφαπτομένα κατὰ⟩ τὸ Ο τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς, καὶ τοῦ μὲν ΑΠΟΛ στερεοῦ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ Ρ, τοῦ δὲ ΙΠΟΣ στερεοῦ τὸ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΒΡ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ τοῦ ΙΣΛΑ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἁ μὲν ὑπὸ τᾶν ΡΟ, ΟΚ γωνία ὀξεῖα, ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ κάθετος ἐπὶ τὰν ΚΩ ἀγομένα μεταξὺ πίπτουσα τῶν Κ, Ο· ἔστω ἁ ΡΘ. Ἐὰν δὴ ἀπὸ τῶν Γ, Β ἀχθέωντί τινες παρὰ τὰν ΡΘ, τὸ μὲν ἐν τῷ ὑγρῷ ἀπολαφθὲν ἐνεχθήσεται ἄνω κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ ἀγομέναν, τὸ δ' ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὰν διὰ τοῦ Β ἀγομέναν κάτω, καὶ οὐ μενεῖ τὸ ΑΠΟΛ στερεὸν οὕτως ἔχον ἐν τῷ ὑγρῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν κατὰ τὸ Α ἄνω τὰν φορὰν ἕξει, τὸ δὲ κατὰ τὸ Λ κάτω, ἕως ἂν γένηται ἁ ΠΦ κατὰ κάθετον.

δ'.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁπόταν κουφότερον ᾖ τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ὅταν τῷ βάρει ποτὶ τὸ ἴσογκον ὑγρὸν μὴ ἐλάσ⟨σονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει⟩ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, τεθὲν κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμένον, ἀλλὰ ἀποκαταστασεῖται εἰς ὀρθόν.

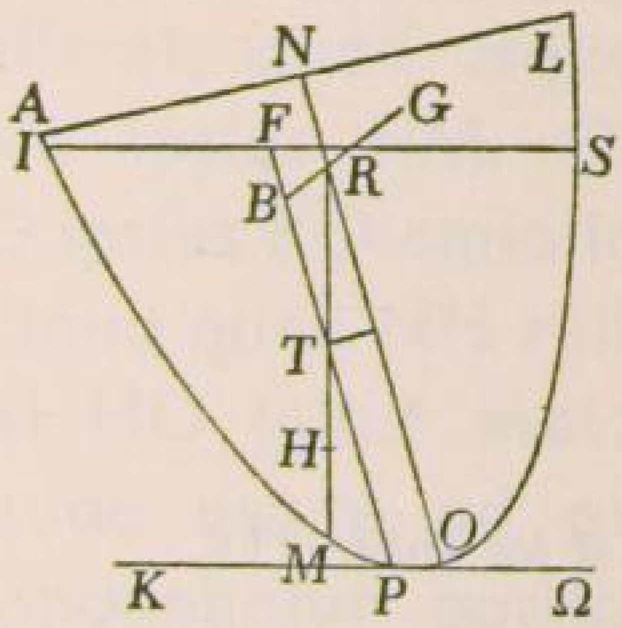

Fig. 97

Ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, οἷον εἴρηται, καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, εἰ δυνατόν, ἔστω μὴ ὀρθόν, ἀλλὰ κεκλιμένον, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τοῦ μὲν τμάματος τομὰ

sit rectanguli coni sectio quae APOL, axis autem portionis et diameter <sectionis> quae NO, superficiei autem humidi sectio sit IS. Si igitur portio non est recta, non faciet quae NO ad IS angulos aequales.

Ducatur autem quae KΩ contingens sectionem rectanguli coni penes P, aequedistans autem ipsi IS, a P autem aequedistanter ipsi ON ducatur quae PF, et accipiantur centra grauitatum, et erit solidi quidem APOL centrum R, eius autem, quod intra humidum, centrum B, et copuletur quae BR et educatur ad G, et sit solidi, quod supra humidum, centrum grauitatis G. Et quoniam quae NO ipsius quidem RO est emiolia, eius autem, quae usque ad axem, est maior quam emiolia, palam quod quae RO est maior quam quae usque ad axem. Sit igitur quae RM aequalis ei, quae usque ad axem, quae autem OM dupla ipsius HM. Quoniam igitur fit quae quidem NO ipsius RO emiolia, quae autem HO ipsius OM, et reliqua quae NH reliquae, scilicet RM, emiolia est ; ipsi HO igitur maior quam emiolius est axis eius, quae usque ad axem, scilicet RM. Et quoniam supponebatur portio ad humidum in grauitate non minorem proportionem habens illa, quam habet tetragonum, quod ab excessu, quo axis est maior quam emiolius eius, quae usque ad axem, ad tetragonum quod ab axe, palam quod non minorem proportionem habet portio ad humidum in grauitate illa proportione, quam habet tetragonum quod ab HO ad id quod ab NO, quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habet demersa ipsius portio ad totam solidam portionem ; demonstratum est enim hoc ; sed quam habet proportionem demersa portio ad totam, hanc habet tetragonum quod a PF ad tetragonum quod ab NO ; demonstratum est enim in his, quae de conoidalibus, quod, si a rectangulo conoidali duae portiones qualitercumque productis planis abscindantur, portiones adinuicem eandem habebunt proportionem quam tetragona quae ab axibus ipsorum. Non minorem ergo proportionem habet tetragonum quod a PF ad tetragonum quod ab NO quam tetragonum quod ab HO ad tetragonum quod ab NO ; quare quae PF non est minor quam HO, neque quae BP quam MO ; si igitur ab M ipsi NO recta ducatur, cadet inter B et P. Quoniam igitur quae quidem PF est aequidistanter diametro, quae autem MT est perpendicularis ad diametrum, et quae RM aequalis ei quae usque ad axem, ab R ad T copulata et educta faciet angulos rectos ad contingentem secundum P ; quare et ad IS et ad eam quae per IS superficiem humidi faciet aequales angulos. Si autem per B, G ipsi RT aequedistantes ducantur, anguli recti erunt facti ad superficiem humidi, et quod quidem in humido absumitur solidum conoidalis, sursum feretur secundum eam quae per B aequedistantem ipsi RT, quod autem extra humidum absumptum deorsum feretur in humidum secundum productam per G aequedistantem ipsi RT, et per totum idem erit, donec utique conoidale rectum restituatur.

V.

Recta portio rectanguli conoidalis, quando leuior existens humido habuerit axem maiorem quam emiolium eius quae usque ad axem, si ad humidum in grauitate non maiorem proportionem habeat illa, quam habet excessus, quo maius est tetragonum quod ab axe tetragono quod ab excessu, quo axis est maior quam emiolius eius quae usque ad axem, ad tetragonum quod ab axe, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius tota sit in humido, posita inclinata non manet inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem sit.

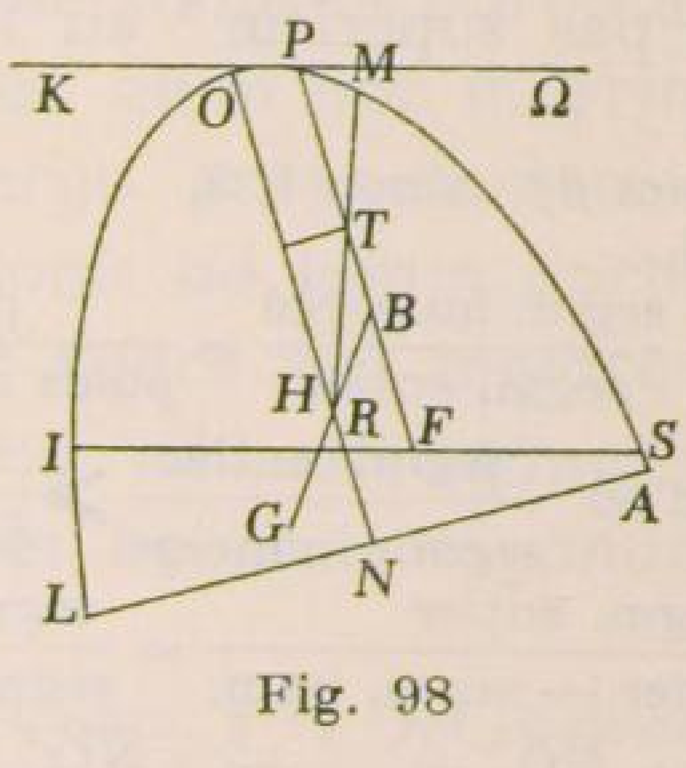

Fig. 98

Dimittatur enim in humidum aliqua portio, qualis dicta est, et sit basis ipsius tota in humido, secta autem ipsa plano per axem recto ad superficiem humidi erit sectio rectanguli coni sectio, et sit quae APOL, axis autem <portionis> et diameter sectionis quae NO, superficiei autem humidi sectio quae IS. Et quoniam non est axis secundum perpendicularem, non faciet quae NO ad IS angulos aequales. Ducatur autem quae KΩ contingens sectionem APOL secundum P aequedistans ipsi IS et per P ipsi NO aequedistans quae PF, et accipiantur centra grauitatum, et sit ipsius quidem APOL centrum R, eius autem quod extra humidum B, et copulata quae BR educatur ad G, et sit G centrum grauitatis solidi absumpti in humido, et accipiatur quae RM aequalis ei quae usque ad axem, quae autem OM dupla ipsius HM, et alia fiant consimiliter superiori. Quoniam igitur supponitur portio ad humidum in grauitate non maiorem proportionem habens proportione, quam habet excessus, quo maius est tetragonum quod ab NO tetragono quod ab HO, ad tetragonum quod ab NO, sed quam proportionem habet in grauitate portio ad humidum aequalis molis, hanc proportionem habet demersa ipsius portio ad totum solidum (demonstratum est enim hoc in primo theoremate), non maiorem ergo proportionem habet demersa magnitudo portionis ad totam portionem, quam sit dicta proportio ; quare non maiorem proportionem habet tota portio ad eam quae extra humidum portionem, quam habet tetragonum quod ab NO ad tetragonum quod ab HO. Habet autem tota portio ad portionem quae extra humidum eandem proportionem, quam habet tetragonum quod ab NO ad id quod a PF ; non maiorem ergo proportionem habet quod ab NO ad id quod a PF, quam quod ab NO ad id quod ab HO. Non minor ergo fit quae PF quam quae OH ; quare nec quae PB quam MO. Quae ergo ab M producitur ipsi RO ad rectos angulos, concidet ipsi BP inter P et B ; concidat secundum T. Et quoniam in rectanguli coni sectione quae PF est aequedistanter diametro RO, quae autem MT perpendicularis super diametrum, quae autem RM aequalis ei quae usque ad axem, palam quod quae RT educta facit angulos rectos ad KPΩ ; quare et ad IS. Quae ergo RT est perpendicularis ad superficiem humidi, et per signa B, G aequedistanter ipsi RT productae erunt perpendiculares ad superficiem humidi ; quae quidem igitur extra humidum portio deorsum feretur in humidum secundum productam per B perpendicularem, quae autem intra humidum sursum feretur secundum perpendicularem quae per G, et non manet solida portio APOL, sed intra humidum erit motum, donec utique quae NO fiat secundum perpendicularem.

VI.

Recta portio rectanguli conoidalis, quando humido leuior existens axem habuerit maiorem quidem quam hemiolium, minorem autem quam ut hanc habeat proportionem ad eam quae usque ad axem, quam habent quindecim ad quattuor, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius contingat humidum, numquam stabit inclinata ita, ut basis ipsius secundum unum signum contingat humidum.

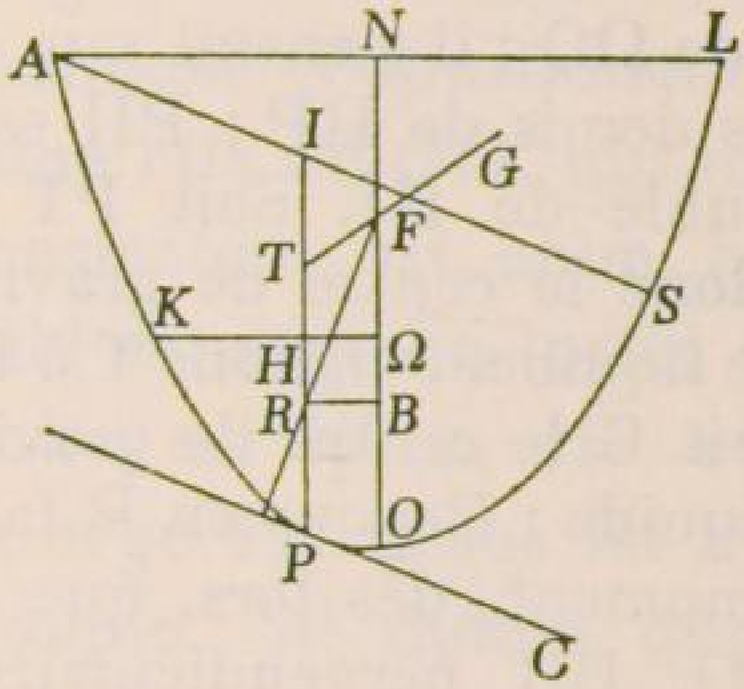

Fig. 99

Sit portio, qualis dicta est, et dimissa in humidum consistat, sicut ostensum est, ita ut basis ipsius secundum unum signum contingat humidum, secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi sectio superficiei portionis sit quae APOL rectanguli coni sectio, superficiei autem humidi quae AS, axis autem portionis et diameter <sectionis> sit quae NO, et secetur secundum F quidem ita, ut quae OF sit dupla ipsius FN, secundum Ω autem ita, ut quae NO ad FΩ habeat proportionem, quam quindecim ad quattuor, et ipsi NO adducatur quae ΩK. Quae autem NO maiorem proportionem habet ad FΩ quam ad eam quae usque ad axem. Sit quae FB aequalis ei quae usque ad axem, et ducatur quae quidem PC aequedistanter ipsi AS contingens sectionem APOL secundum P, quae autem PI aequedistanter ipsi NO ; secet autem quae PI prius ipsam KΩ. Quoniam igitur in portione APOL contenta a recta et a sectione rectanguli coni quae quidem KH aequedistanter ipsi AL, quae autem PI aequedistanter diametro secta ipsa KΩ, quae autem AS aequedistanter contingenti secundum P, necessarium est ipsam PI aut eandem proportionem habere ad PH, quam habet quae NΩ ad ΩO, aut maiorem proportionem ; demonstratum est enim hoc per sumpta. Quae autem ΩN est emiolia ipsius ΩO ; et quae IP ergo aut emiolia est ipsius HP aut maior quam emiolia ; quae ergo PH ipsius HI aut dupla est aut minor quam dupla. Sit autem quae PT ipsius TI dupla ; centrum ergo grauitatis eius quod in humido est signum T. Et copulata quae TF educatur, et sit centrum grauitatis eius quod extra humidum G, et a B ipsi NO recta quae BR. Quoniam igitur est quae quidem PI aequedistanter diametro NO, quae autem BR perpendicularis super diametrum, quae autem FB aequalis ei quae usque ad axem, palam quod quae FR educta aequales facit angulos ad contingentem sectionem APOL secundum P ; quare et ad AS et ad superficiem aquae. Ductis autem per T, G aequedistanter ipsi FR erunt et ipsae perpendiculares ad superficiem aquae, et magnitudo quidem intra humidum absumpta ex solido APOL sursum feretur secundum eam quae per T perpendicularem, quae autem extra humidum deorsum feretur in humidum secundum eam quae per G perpendicularem. Reuoluetur ergo solidum APOL, et basis ipsius non tanget superficiem humidi secundum unum signum.

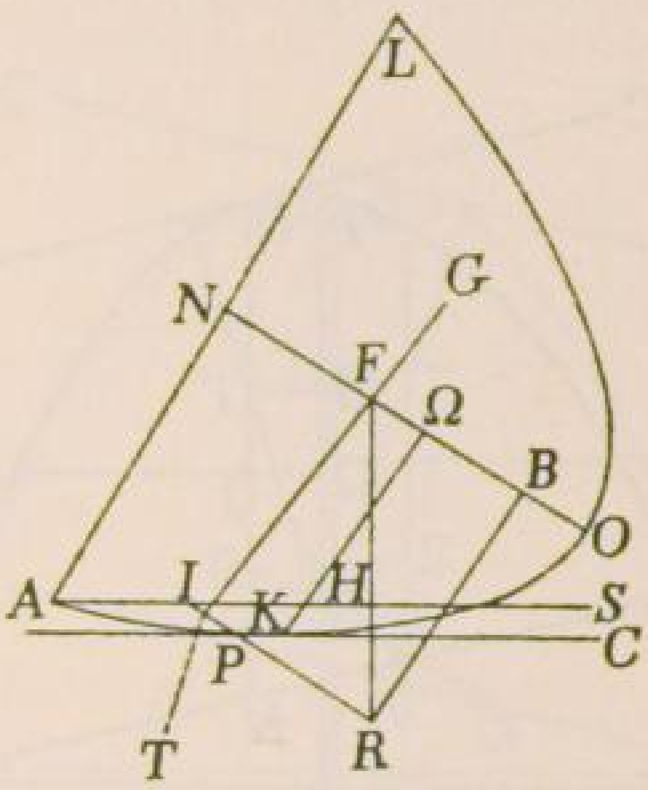

Fig. 100

Si autem quae PI non secuerit lineam KΩ, sicut in secunda figura descriptum est, manifestum quod signum T, quod est centrum grauitatis demersae portionis, cadet inter P et I, et reliqua similiter demonstrabuntur.

ζ′.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τοῦ ὑγροῦ κουφότερον ᾖ καὶ τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα μὲν ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε λόγον ἔχειν ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος, ὃν τὰ ιε̅ ποτὶ δ̅, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως ὥστε τὰν βάσιν ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, οὐδέποτε καταστασεῖται οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, ἀλλ' ὥστε ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ μηδὲ καθ' ἓν σαμεῖον ἁπτομέναν τᾶς ἐπιφανείας.

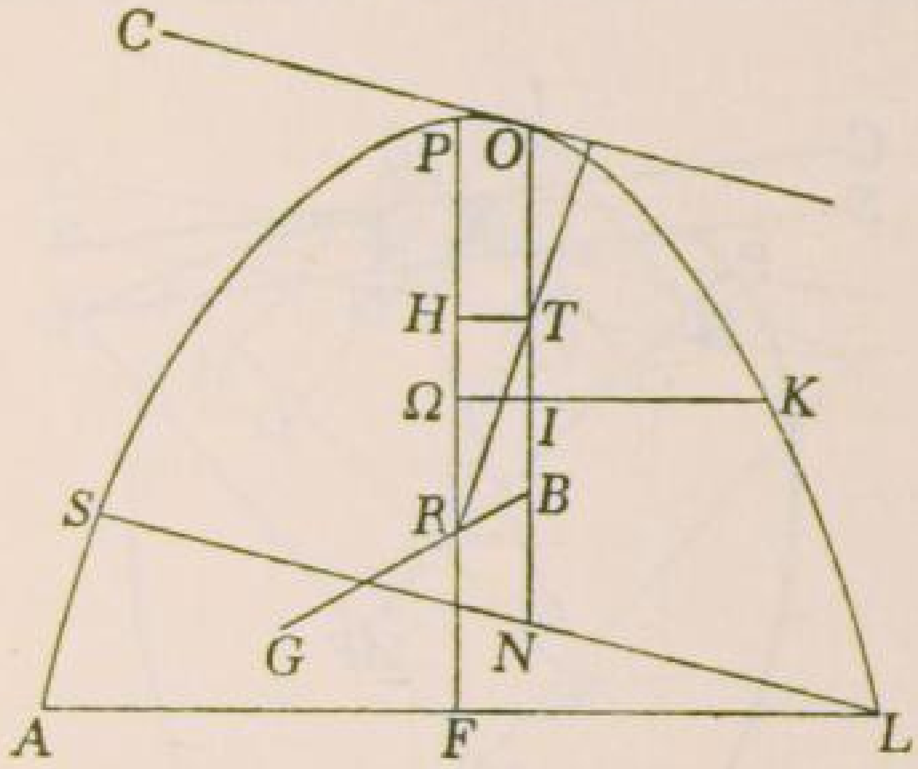

Fig. 101

Ἔστω τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καθάπερ ἐρρέθη καθεστακέτω οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας. Δεικτέον ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλὰ ἀνακλιθήσεται οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

Τμαθέντος γὰρ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν τομὰ ἔστω ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἔστω δὲ καὶ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τομὰ ἁ ΣΛ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος ἁ ΠΦ, πάλιν δὲ τεμνέσθω ἁ ΠΦ κατὰ μὲν τὸ Ρ, ὥστε διπλασίαν εἶμεν τὰν ΡΠ τᾶς ΡΦ, κατὰ δὲ τὸ Ω, ὥστε τὰν ΠΦ ποτὶ τὰν ΡΩ λόγον ἔχειν ὃν τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ τὰ $\overline{\delta}$, καὶ ἁ ΩΚ ὀρθὰ ἄχθω τᾷ ΠΦ· ἐσσεῖται δὴ ἐλάσσων ἁ ΡΩ τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. Ἀπολελάφθω οὖν τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος ἴσα ἁ ΡΗ, καὶ ἁ μὲν ΤΟ ἄχθω ἐφαπτομένα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Ο παράλληλος ἐοῦσα τᾷ ΣΛ, ἁ δὲ ΝΟ τᾷ ΠΦ, τεμνέτω δὲ ἁ ΝΟ τὰν ΚΩ πρότερον κατὰ τὸ Ι. Ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται ὅτι ἁ ΝΟ ἤτοι ἡμιολία τᾶς ΟΙ ἢ μείζων ἢ ἡμιολία· γίνεται δὴ ἁ ΟΙ τᾶς ΙΝ ἐλάσσων ἢ διπλασία. Ἔστω δὴ ἁ ΟΒ διπλασία τᾶς ΒΝ, καὶ κατεσκευάσθω τὰ

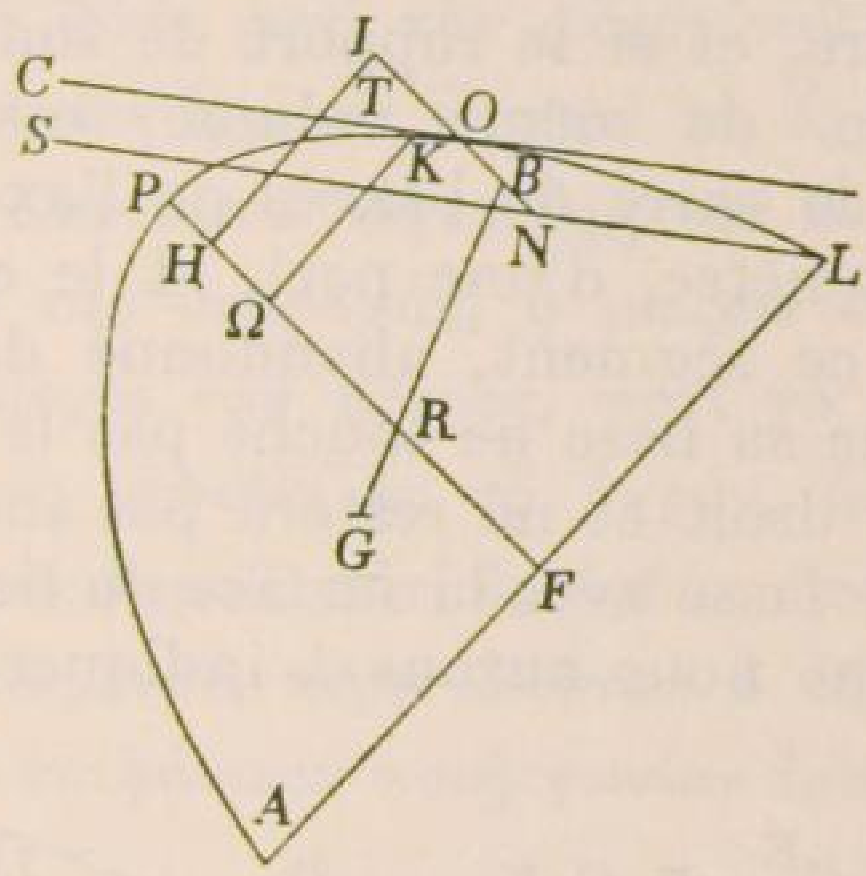

Fig. 102

αὐτά· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἁ ΡΘ ὀρθὰς γωνίας ποιοῦσα ποτὶ τὰν ΤΟ καὶ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, καὶ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἀχθεῖσαι παρὰ τὰν ΡΘ κάθετοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν. Κατενεχθήσεται οὖν τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τὰν διὰ τοῦ Β κάθετον, τὸ δ' ἐν τῷ ὑγρῷ ἀνενεχθήσεται κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ· φανερὸν οὖν ὅτι ἐπικλιθήσεται τὸ στερεόν, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, ἐπειδὴ νῦν καθ' ἓν σαμεῖον ⟨ἁπτόμενον ἐπὶ τὸ κάτω φέρε⟩ται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Λ.

Φανερὸν δὲ ὅτι, κἂν ἁ ΟΝ μὴ τέμνῃ τὰν ΩΚ, ταὐτὰ δειχθήσεται.

η′.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον ὃν ἔχει τὰ $\overline{\iota\varepsilon}$ ποτὶ τὰ $\overline{\delta}$, ὅταν τὸ βάρος ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὔτ᾽ ἐς ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται οὔτε μενεῖ κεκλιμένον, πλὴν ὁπόταν ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν ποιῇ γωνίαν ἴσαν τᾷ μελλούσᾳ λέγεσθαι.

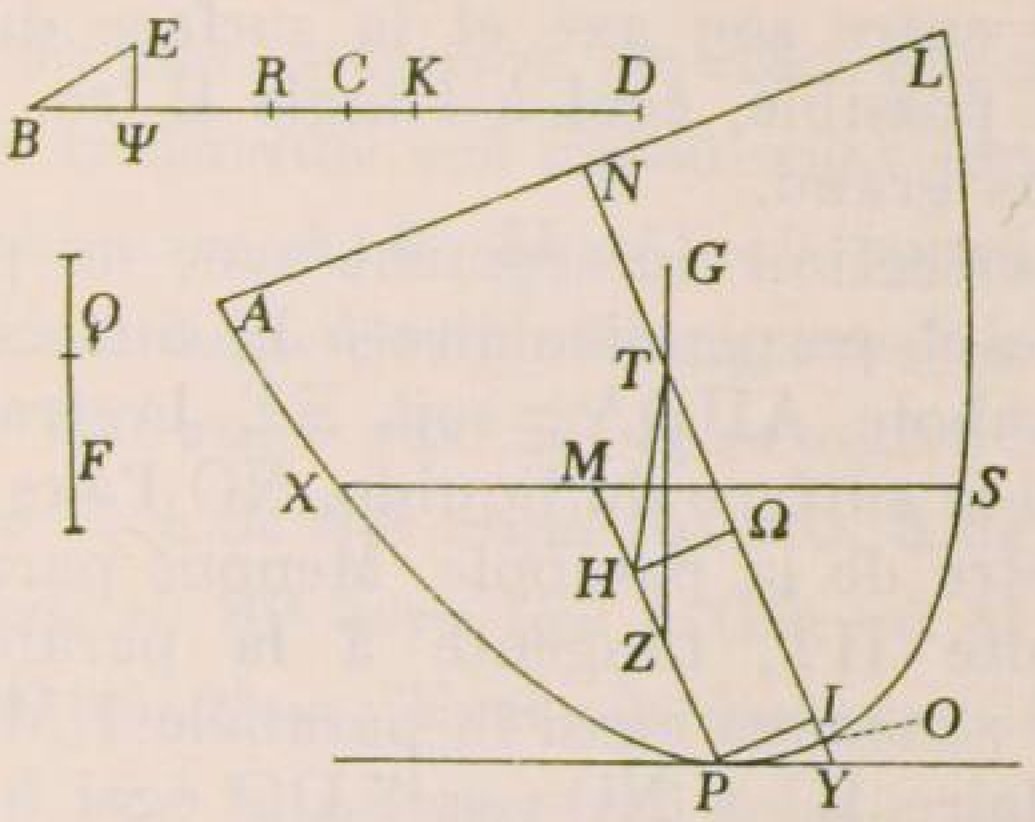

Fig. 103

Ἔστω τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ ἁ ΒΔ ἴσα τῷ ἄξονι, καὶ ἁ μὲν ΒΚ τᾶς ΚΔ διπλασία, ἁ δὲ ΚΡ ἴσα τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος, ἔστω δὲ καὶ ἁ μὲν ΤΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ, ἁ δὲ ΤΔ τᾶς ΚΡ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, ἔστω δὲ καὶ ἁ Φ ⟨διπλασία τᾶς Χ. Δῆλον οὖν ὅτι⟩ ἁ ΦΧ ποτὶ τὰν ΔΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΤΒ ποτὶ τὰν ΒΔ· ἔστι γὰρ ἁ ΤΒ ἁ ὑπεροχά, ᾇ μείζων ἢ ἡμιόλιος ὁ ἄξων τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος· ἐλάσσων ἄρα ἁ ΦΧ τᾶς ΒΤ· ὥστε καὶ ἁ Φ τᾶς ΒΡ. Ἔστω δὴ τᾷ Φ ἴσα ἁ ΡΨ, καὶ τᾷ ΒΔ ὀρθὰ ἄχθω ἁ ΨΕ δυναμένα τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν ΚΡ, ΒΨ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΒΕ. Δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ὡς εἴρηται καταστασεῖται κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεῖν γωνίαν ἴσαν τᾷ ΕΒΨ.

Ἀφείσθω γάρ τι ἐς τὸ ὑγρὸν τμᾶμα, καὶ ἁ βάσις αὐτοῦ μὴ ἁπτέσθω τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καί, εἰ δυνατόν, μὴ ποιείσθω ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἴσαν τᾷ Β, ἀλλὰ μείζω πρῶτον.

Τμαθέντος δὴ τοῦ τμάματος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείᾳ ἁ ΞΣ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος [τοῦ τμήματος] ἁ ΝΟ. Ἄχθω δὴ καὶ ἁ μὲν ΠΥ παρὰ τὰν ΞΣ ἐφαπτομένα τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς κατὰ τὸ Π, ἁ δὲ ΠΜ παρὰ τὰν ΝΟ, ἁ δὲ ΠΙ κάθετος ἐπὶ τὰν ΝΟ, καὶ τᾷ ΒΡ ἔστω ἴσα ἁ ΟΩ, τᾷ δὲ ΡΚ ἁ ΩΘ, καὶ ὀρθὰ ἁ ΩΗ τῷ ἄξονι. Ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὁ ἄξων τοῦ τμάματος ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν μείζονα τᾶς Β, δῆλον ὅτι τοῦ ΠΙΥ τριγώνου ἁ ποτὶ τῷ

Υ γωνία μείζων τᾶς Β· μείζονα δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ. Ἀλλ' ὃν μὲν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ, τοῦτον ἔχει ἁ ΚΡ ποτὶ ΥΙ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ, τοῦτον ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν ΨΒ· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΚΡ ποτὶ τὰν ΥΙ ἤπερ ἁ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν ΨΒ· ἐλάσσων ἄρα ἢ διπλασία ἁ ΥΙ τᾶς ΨΒ. Τᾶς δὲ ΟΙ διπλασία ἁ ΙΥ· ἐλάσσων ἄρα ἁ ΟΙ τᾶς ΨΒ· ὥστε ἁ ΙΩ μείζων ἐστὶ τᾶς ΨΡ. Ἁ δὲ ΨΡ ἴσα ἐστὶ τᾷ Φ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἁ ΙΩ τᾶς Φ. Καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἔχειν λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ ποτὶ τὸ ὅλον τμᾶμα, ὃν δὲ τὸ δεδυκὸς ποτὶ τὸ ὅλον, τοῦτον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΜ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΝ, ὃν ἄρα λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΠ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΝ· ἴσα ἄρα ἐστὶν ἁ ΦΧ τᾷ ΠΜ. Ἁ δὲ ΠΗ ἐδείχθη μείζων ἐοῦσα τᾶς Φ· δῆλον οὖν ὅτι ἁ ΠΜ ἐλάσσων ἢ ἡμιολία ἐστὶν τᾶς ΠΗ, ἁ δὲ ΠΗ τᾶς ΗΜ μείζων ἢ διπλασίων. Ἔστω οὖν ἁ ΠΖ διπλασίων τᾶς ΖΜ· ἐσσεῖται δὴ τὸ μὲν Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ στερεοῦ, τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ Ζ· τοῦ δὴ λοιποῦ μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΖΘ εὐθείας ἐπιζευχθείσας καὶ ἐκβληθείσας. Ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ· δειχθήσεται δὴ ὁμοίως ἁ ΘΗ κάθετος ἐοῦσα ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, καὶ τὸ μὲν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὰν διὰ τοῦ Ζ ἀγμέναν κάθετον ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἐντὸς κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ· οὐ μενεῖ δὴ τὸ τμᾶμα κατὰ τὰν ὑποκειμέναν κλίσιν.

Οὐδὲ μὴν εἰς τὸ ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται. Δῆλον δὲ διὰ τούτων· ἐπειδὴ τῶν ἀγμένων διὰ τῶν Ζ, Γ καθέτων ἁ μὲν διὰ τοῦ Ζ ἀγμένα τᾶς ΓΖ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρεα πίπτει, ἐφ᾿ ἅ ἐστι τὸ Λ, ἁ δὲ διὰ τοῦ Γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α, δῆλον ὅτι διὰ τὰ προειρημένα τὸ μὲν Ζ κέντρον ἄνω οἰσθήσεται, τὸ δὲ Γ κάτω· ὥστε τοῦ ὅλου μεγέθεος τὰ μέρεα τὰ ἀπὸ τοῦ Α κάτω οἰσθήσεται.

Τοῦτο δ᾿ ἦν εὔχρηστον ποτὶ τὸ δεῖξαι.

Ὑποκείσθω πάλιν τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, ὁ δὲ ἄξων τοῦ τμάματος ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεί⟨τω γωνίαν ἐλάσσονα τᾶς ποτὶ τῷ Β· ἐλάσσονα δὴ λόγον⟩ ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ· καὶ ἁ ΚΡ ἄρα ποτὶ τὰν ΥΙ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν ΨΒ. Μείζων ἄρα ἐσσεῖται ἢ διπλασίων ἁ ΙΥ τᾶς ΨΒ· ἁ ἄρα ΩΙ ἐλάσσων τᾶς ΨΡ. Ἐσσεῖται οὖν καὶ ἁ ΠΗ ἐλάσσων τᾶς Φ. Ἁ δὲ ΜΠ τᾷ ΦΧ ἴσα· δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἢ ἡμιολία ἁ ΠΜ τᾶς ΠΗ, ἁ δὲ ΠΗ ἐλάσσων ἢ διπλασίων τᾶς ΗΜ. Ἔστω οὖν ἁ ΠΖ τᾶς ΖΜ διπλασία. Πάλιν οὖν τοῦ μὲν ὅλου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Θ, τοῦ δ᾿ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ Ζ· ἐπιζευχθείσας δὴ τᾶς ΖΘ καὶ ἐκβληθείσας ἐσσεῖται τὸ ⟨κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τᾶς ἐκβληθείσας. Ἔστω τὸ Γ, καὶ ἄχθωσαν κά⟩θετοι ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν διὰ τῶν Ζ, Γ παρὰ τὰν ΗΘ· δῆλον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ τὸ ὅλον τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεῖν γωνίαν μείζονα ἇς νῦν ποιεῖ.

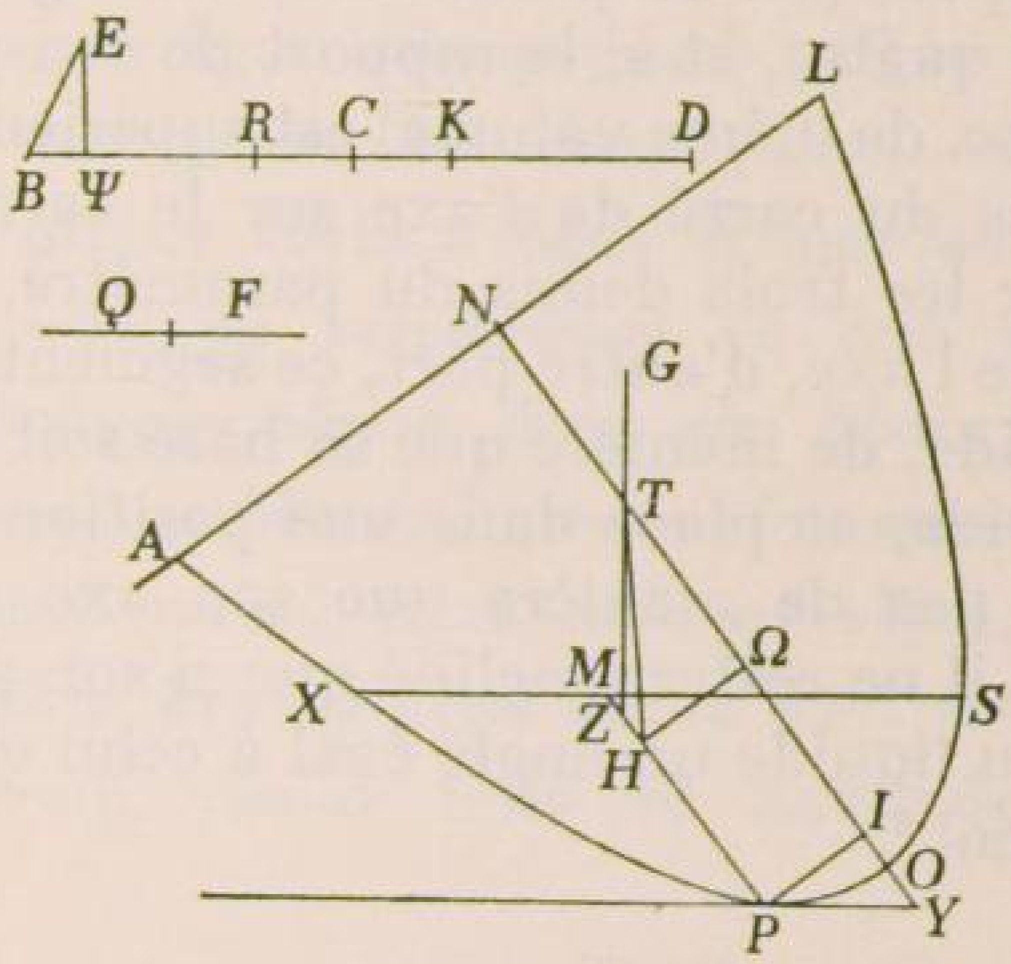

Fig. 104

Ἐπεὶ οὖν οὔτε γωνίαν μείζονα τᾶς Β ποιοῦντος τοῦ ἄξονος ποτὶ τὸ ὑγρὸν σταθήσεται τὸ τμᾶμα οὔτ᾿ ἐλάσσονα, φανερὸν ὅτι ταλικαύταν ποιοῦντος γωνίαν σταθήσεται· οὕτως γὰρ ἁ ΙΟ ἐσσεῖται ἴσα τᾷ ΨΒ καὶ ἁ ΩΙ τᾷ ΨΡ καὶ τᾷ Φ ἁ ΠΗ· ἡμιολία ἄρα ἐσσεῖται ἁ ΜΠ τᾶς ΠΗ, ἁ δὲ ΠΗ τᾶς ΗΜ διπλασία. Τὸ Η ἄρα τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ βάρεος κέντρον ἐστίν· ὥστε κατὰ τὰν αὐτὰν κάθετον ἀνενεχθήσεται, καὶ τὸ ἐκτὸς ἐς τὸ κάτω ἐνεχθήσεται. Μενεῖ ἄρα· ἀντωθοῦνται γὰρ ὑπ' ἀλλάλων.

θ'.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχη μείζονα μὲν ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ $\overline{\delta}$, καὶ τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν μείζονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ὑπεροχά, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος τετράγωνον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, τεθὲν κεκλιμένον οὔτε κατασταθήσεται, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἶμεν, οὔτε μενεῖ κεκλιμένον, πλὴν ὅταν ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιῇ γωνίαν ἴσαν τᾷ λαφθείσᾳ ὁμοίως ᾇ πρότερον.

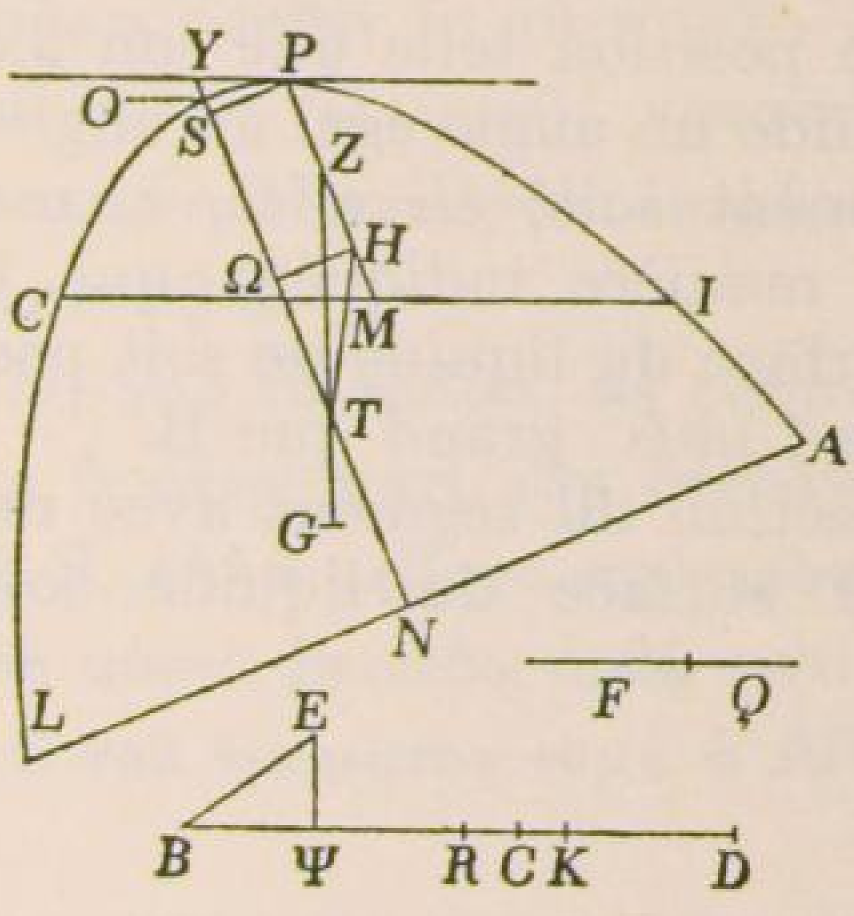

Fig. 105

Ἔστω τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ κείσθω ἁ ΔΒ ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ ἁ μὲν ΒΚ τᾶς ΚΔ διπλασία ἔστω, ἁ δὲ ΚΡ ἴσα τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος, ἁ δὲ ΤΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἔστω δὲ ἁ Φ διπλασία τᾶς Χ. Δῆλον οὖν ὅτι ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΤ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ · ἔστι γὰρ ἁ ΒΤ ἁ ὑπεροχά, ᾇ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος ὁ ἄξων τοῦ τμάματος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. Μείζονι ἄρα ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΤ · ὥστε ἁ ΦΧ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΒΤ · καὶ ἁ Φ ἄρα τᾶς ΒΡ.

Ἔστω οὖν τᾷ Φ ἴσα ἁ ΡΨ, καὶ ἁ ΨΕ ὀρθὰ ἄχθω τᾷ ΒΔ δυναμένα τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΚΡ, ΨΒ. Φαμὶ ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, καταστασεῖται οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἴσαν τᾷ Β.

Ἀφείσθω [μὲν] γὰρ τὸ τμᾶμα, ὡς εἴρηται, ἐς τὸ ὑγρόν, καὶ μὴ ποιείτω ὁ ἄξων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσαν τᾷ Β, ἀλλὰ μείζονα πρότερον.

Τμαθέντος δὴ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἔστω τοῦ τμάματος τομὰ ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας ά ΤΙ, ἄξων δὲ [τῆς τομῆς] καὶ διάμετρος ά ΝΟ, καὶ τετμάσθω κατὰ τὰ Ω, Θ, ὡς καὶ πρότερον, ἄχθω δὲ καὶ ά μὲν ΥΠ παρὰ τὰν ΤΙ ἐφαπτομένα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Π, ά δὲ ΠΜ aequedistanter ipsi NO, quae vero PS perpendicularis super axem. Quoniam igitur axis portionis ad superficiem humidi facit angulum maiorem angulo B, erit utique et angulus qui sub SYP maior angulo B; tetragonum ergo quod a PS ad tetragonum quod ab SY habet proportionem maiorem quam tetragonum quod a ΨE ad tetragonum quod a ΨB. Ergo et quae KR ad SY habet proportionem maiorem quam medietas ipsius KR ad ΨB; minor ergo quae SY quam dupla ipsius ΨB. Et quae SO quam ΨB minor;

μείζων ἄρα ά ΣΩ τᾶς ΡΨ καὶ ά ΠΗ τᾶς Φ. Καὶ ἐπεὶ τὸ τμᾶμα βάρει λόγον ἔχει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν ά ὑπεροχά, ᾇ μεῖζόν ἐστιν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ τμᾶμα ποτὶ τὸ ὅλον, δῆλον ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ μέρος ποτὶ τὸ ὅλον τμᾶμα, ὃν ά ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ΒΔ· ἕξει οὖν καὶ τὸ ὅλον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ὅλον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΝΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ ΠΜ· ἴσα ἄρα ά ΜΠ τᾷ

ΦΧ. Ἁ δὲ ΠΗ δέδεικται μείζων τᾶς Φ· ἁ ἄρα ΜΗ ἐλάσσων ἐστὶν τᾶς Χ· μείζων ⟨ἄρα ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ΠΗ⟩ τᾶς ⟨ΗΜ. Ἔστω δὴ ἁ ΠΖ διπλασία τᾶς ΖΜ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΖΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ· ἔσται οὖν τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐκτὸς⟩ τοῦ ὑγροῦ τὸ ⟨Ζ, τοῦ δὲ ἐντὸς ἐν τᾳ ΘΓ· ἔστω δὲ τὸ⟩ Γ. ⟨Δειχθήσεται δὴ ὁμοίως τοῖς πρότερον ἁ ΘΗ⟩ κάθετος ἐπὶ ⟨τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ αἱ διὰ τῶν Ζ, Γ παρὰ τὰν ΘΗ⟩ ἀγόμεναι κάθετοι καὶ αὐταὶ ἐπὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Κατενεχθήσεται ἄρα τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα ἐς τὸ κάτω κατὰ τὰν διὰ τοῦ Ζ, τὸ δὲ ἐντὸς κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ ἀνενεχθήσεται· οὐ μενεῖ οὖν τὸ ὅλον τμᾶμα ἀκλινές. Οὐδὲ μὴν καταστραφήσεται, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τὸν ἄξονα ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, ἐπειδὴ τὰ ἐπὶ ⟨τὰ αὐτὰ τῷ Λ κάτω, τὰ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α ἐς τὰ ἄνω οἰσθήσεται,⟩ διὰ τὰ ἀνάλογον τοῖς λεγομένοις ἐπὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ.

Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων ποτὶ τὸ ὑγρὸν ποιῇ γωνίαν ἐλάσσονα τᾶς Β, ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ἕως ἂν ὁ ἄξων ποιῇ γωνίαν ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἴσαν τᾳ Β.

ιʹ.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν κουφότερον ὂν τοῦ ὑγροῦ τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα ἢ ὥστε λόγον ἔχειν ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος [τοῦ] ὃν ἔχει τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ τὰ $\overline{\delta}$, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὁτὲ μὲν ὀρθὸν καταστασεῖται, ὁτὲ δὲ κεκλιμένον, καὶ ποτὲ μὲν οὕτω κεκλιμένον, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ καθ' ἓν σαμεῖον ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τοῦτο ἐν δισσοῖς κλιμάτεσσι ποιήσει, ποτὲ δὲ οὕτως κεκλιμένον καταστασεῖται, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τόπον βρέχεσθαι, ποτὲ δὲ οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφα⟨νείας· ὃν δὲ λόγον ἔχοντος τῷ⟩ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἕκαστα αὐτῶν ἐσσεῖται, νῦν δηλωθήσεται.

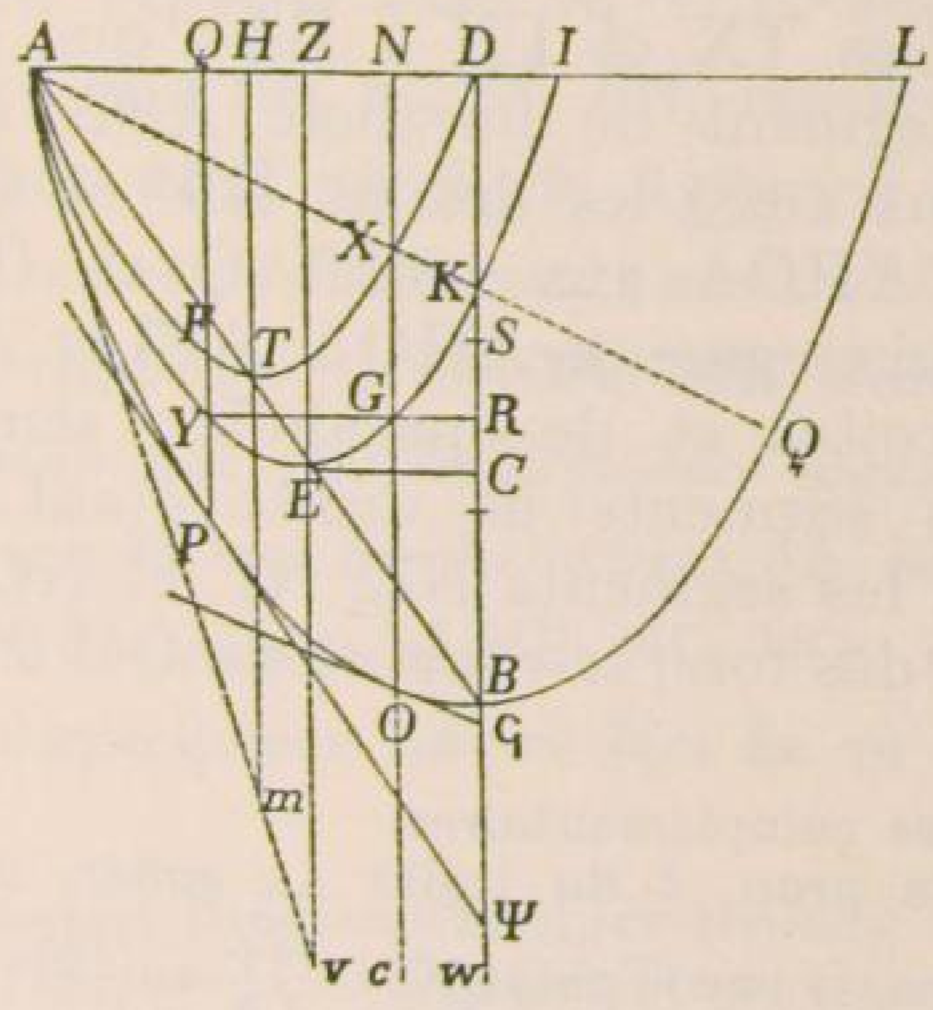

Fig. 106

Ἔστω τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ, τετμάσθω δὲ ἁ ΒΔ κατὰ τὸ Κ, ὥστε διπλασίαν εἶμεν τὰν ΒΚ τᾶς ΚΔ, κατὰ δὲ τὸ Τ, ὥστε τὰν ΔΒ ποτὶ τὰν ΚΤ λόγον ἔχειν ὡς τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ $\overline{\delta}$· δῆλον οὖν ὅτι ἁ ΚΤ μείζων ἐστὶ τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. Ἔστω οὖν ἁ ΚΡ ἴσα τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος, τᾶς δὲ ΒΡ ἡμίσεια ἔστω ἁ ΡΣ· ἔστι δὴ καὶ ἁ ΣΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ. Ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς ΑΒ καὶ τᾶς ΤΕ ὀρθᾶς ἀχθείσας ἄχθω ἁ ΕΖ παρὰ τὰν ΒΔ, καὶ πάλιν τᾶς ΑΒ δίχα τμαθείσας κατὰ τὸ Θ ἄχθω παρὰ τὰν ΒΔ ἁ ΘΗ, καὶ λελάφθω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΕΙ περὶ διάμετρον τὰν ΕΖ καὶ ἁ ΑΘΔ περὶ διάμετρον τὰν ΘΗ, ὥστε ὅμοια εἶμεν τὰ ΑΕΙ, ΑΘΔ τμάματα τῷ ΑΒΛ τμάματι· γραφήσεται δὴ ἁ ΑΕΙ κώνου τομὰ διὰ τοῦ Κ, ἁ δὲ ἀπο τοῦ Ρ ὀρθὰ ἀχθεῖσα τᾷ ΒΔ τεμεῖ τὰν ΑΕΙ. Τεμνέτω κατὰ τὰ Υ, Γ, καὶ διὰ τῶν Υ, Γ ἄχθωσαν παρὰ τὰν ΒΔ αἱ ΥΧ, ΓΝ, τεμνέτωσαν δὲ αὗται τὰν ΑΘΔ τομὰν κατὰ τὰ Ξ, Φ, ἄχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΠΨ, ΟϚ ἐφαπτόμεναι τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς κατὰ τὰ Ο, Π. Δεδομένα δὴ τρία τινὰ τμάματα τὰ ΑΠΟΛ, ΑΕΙ, ΑΘΔ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν εὐθειᾶν καὶ τᾶν ὀρθογωνίων κώνων τομᾶν ὀρθὰ καὶ ὅμοια, ἄνισα δέ, καὶ ἀπολέλαπται ἀφ᾽ ἑκάστας βάσιος, ἀπὸ δὲ τοῦ Ν ἀναγμέναι αἱ ΝΞ, ΝΓ, ΝΟ· ἁ ΟΓ ἄρα ποτὶ τὰν ΓΞ τὸν συγκείμενον λόγον ἕξει ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἁ

ΙΛ ποτὶ ΛΑ, καὶ ὃν ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ ΔΙ. Ἔχει δὲ καὶ ἁ ΛΙ ποτὶ ΛΑ ὃν δύο ποτὶ ε̄· ἅ τε γὰρ ΤΒ ποτὶ ΒΔ ἐστὶν ὡς δύο ποτὶ ε̄, καὶ ἁ ΕΒ ποτὶ ΒΑ καὶ ἁ ΔΖ ποτὶ ΔΑ, τούτων δὲ διπλάσιαι αἱ ΛΙ, ΛΑ· ἁ δὲ ΑΔ ποτὶ ΔΙ ἔχει ὅσον πέντε πρὸς ᾱ, ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὰ δύο ποτὶ τὰ ε̄ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὰ πέντε ποτὶ τὸ ἓν ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὰ δύο ποτὶ τὸ ᾱ· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΟΓ τᾶς ΓΞ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ΠΥ τᾶς ΥΦ. Ἐπεὶ δέ ἐστιν ἁ ΔΣ ἡμιολία τᾶς ΚΡ, δῆλον ὅτι ἁ ΒΣ ἁ ὑπεροχά ἐστιν, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος.

Εἰ μὲν οὖν τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΣ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἢ μείζονα τούτου τοῦ λόγου, ἀφεθὲν τὸ τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὀρθὸν καταστασεῖται· δέδεικται γὰρ πρότερον ὅτι [ἐὰν] τμᾶμα μείζονα ἔχον τὸν ἄξονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐὰν τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν μὴ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν οὕτως ὡς εἴρηται, ὀρθὸν καταστασεῖται.

Ἐπὴν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΣΒ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, μείζονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΞ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ γωνίαν ποιεῖν ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ μείζονα τᾶς Ϛ.

Ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ἅπτεσθαι καθ' ἓν τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἴσαν τᾷ Ϛ.

Ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, μείζονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τόπον τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ.

Εἰ δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ καθ' ἓν σαμεῖον ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποιεῖν γωνίαν ἴσαν τᾷ Ψ.

Ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει πρὸς τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὸν μὲν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἐλάσσονα τᾶς Ψ, τὰν δὲ βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

Δειχθήσεται δὲ ταῦτα ἑξῆς.

Ἐχέτω δὴ πρῶτον τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν μείζονα μὲν λόγον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἐλάσσονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετράγωνον, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετράγωνον, καὶ ὑποκείσθω τὸ πρότερον κατεσκευασμένον σχῆμα, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω τὸ ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ· ἔστι δὴ ἁ Ψ τᾶς μὲν ΞΟ μείζων, ἐλάσσων δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς,

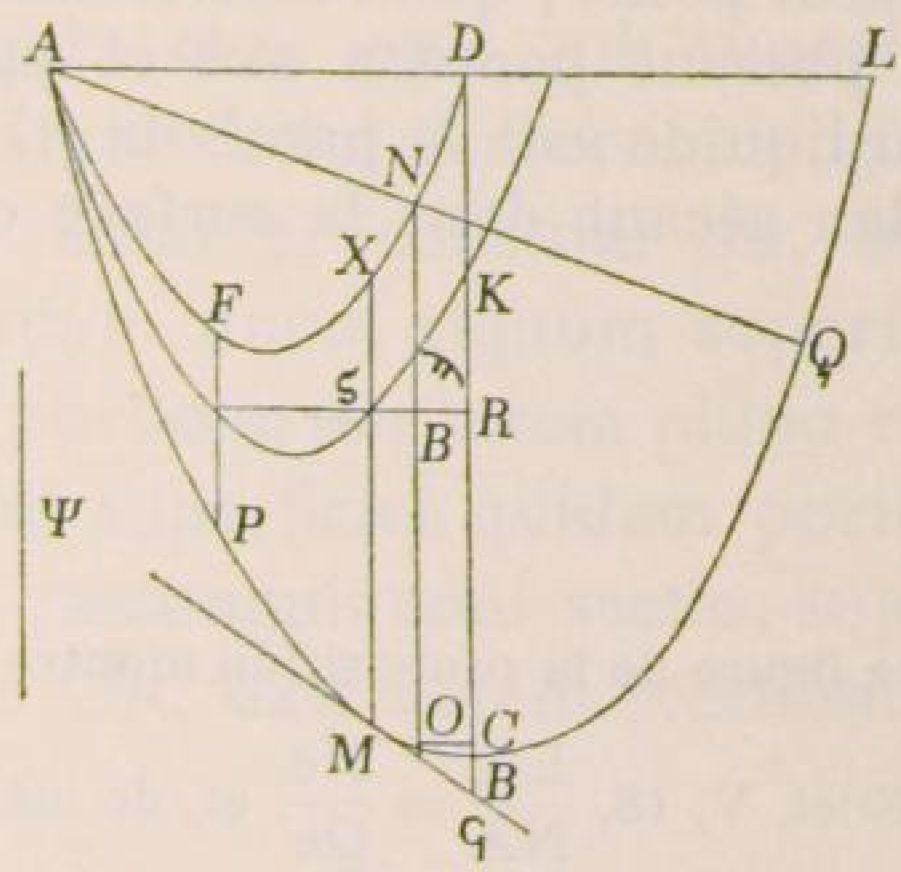

Fig. 107

ἃ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. Ἐναρμόσθω δέ τις μεταξὺ τῶν ΑΠΟΛ, ΑΞΔ κώνων ⟨τομᾶν⟩, quae NO aequalis ipsi Ψ', et secet ipsa reliquam coni sectionem penes ϡ, ipsam autem Rς rectam penes B' ; demonstrabitur autem quae Oϡ dupla ipsius ϡN, sicut demonstrata est quae Mς ipsius ςX dupla, ab O autem ducatur quae Oϟ contingens sectionem APOL, quae autem OC perpendicularis super BD, et ab A ad N copuletur ; erunt autem quae AN, QN aequales inuicem. Quoniam enim in similibus portionibus APOL, AXD productae sunt a basibus ad portiones quae AN, AQ aequales angulos facientes ad bases, eandem proportionem habebunt quae QA, AN cum ipsis LA, AD propter secundam figuram praescriptarum ; aequalis ergo quae AN ipsi QN, et aequedistans ipsi Oϟ. Demonstrandum, quod dimissa in humidum ita, ut basis ipsius non secundum unum tangat <humidum, ita inclinata consistet, ut basis eius in nullo puncto superficiem humidi tangat, et> axis ad superficiem humidi angulum acutum faciat maiorem angulo ϟ.

Dimittatur enim et consistat ita, ut basis ipsius tangat secundum unum signum superficiem humidi, secta autem portione per axem plano recto ad superficiem humidi superficiei quidem portionis sectio sit quae APOL rectanguli coni sectio, superficiei autem humidi quae OA, axis autem [sectionis] et diameter

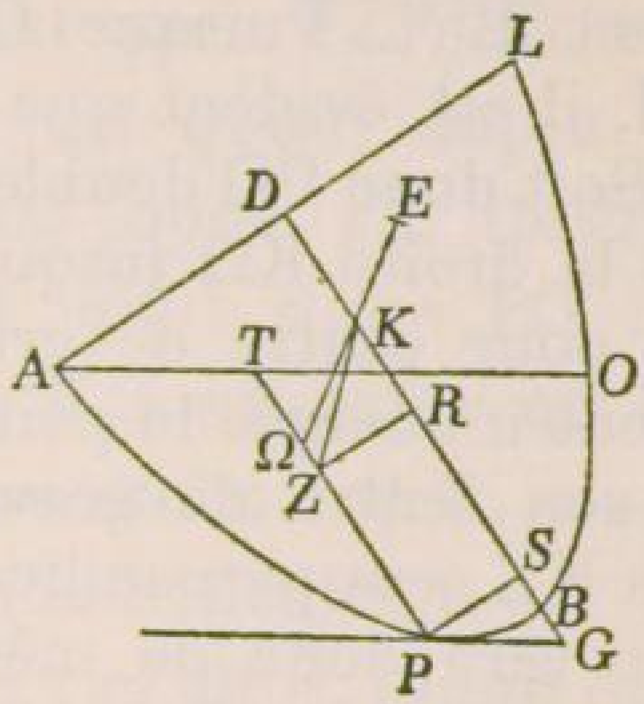

Fig. 108

quae BD, et secetur quae BD penes K, R, ut dictum est. Ducatur autem et quae quidem PG aequedistanter ipsi AO recta contingens sectionem APOL secundum P, quae autem PT aequedistanter ipsi BD, quae autem PS perpendicularis super BD, quoniam igitur portio ad humidum in grauitate proportionem habet quam tetragonum quod a Ψ ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum, hanc habet demersa ipsius portio ad totam, quam autem demersa ad totam, tetragonum quod a TP ad id quod a DB, erit quae Ψ ipsi TP aequalis. Et quae NO ergo ipsi TP aequalis est ; quare et portiones APQ, APO inuicem sunt aequales. Quoniam autem in portionibus aequalibus et similibus APOL, AMQL ab extremitatibus basium productae sunt quae OA, AQ, et portiones ablatae faciunt ad diametros angulos aequales propter tertiam figuram praescriptarum, quare anguli qui apud ϛ, G sunt aequales, et quae ϛB, GB, ergo aequales sunt ; quare et quae SR, CR et quae PZ, OB′ et quae ZT, B′N. Quoniam minor est quam dupla quae OB′ ipsius B′N, palam quod quae PZ ipsius ZT est minor quam dupla. Sit igitur quae PΩ ipsius ΩT dupla, et copulata quae KΩ educatur ad E ; totius quidem igitur centrum grauitatis erit K, eius autem portionis quae intra humidum centrum Ω, eius autem quae extra in linea KE ; et sit E. Quae autem KZ perpendicularis erit super superficiem humidi ; quare et quae per signa E, Ω aequidistanter ipsi KZ. Non ergo manet portio, sed reclinabitur, ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem humidi, quoniam nunc secundum unum tacta ipsa reclinatur ; manifestum igitur quod portio consistet ita, ut axis ad superficiem humidi faciat angulum maiorem angulo ϛ.

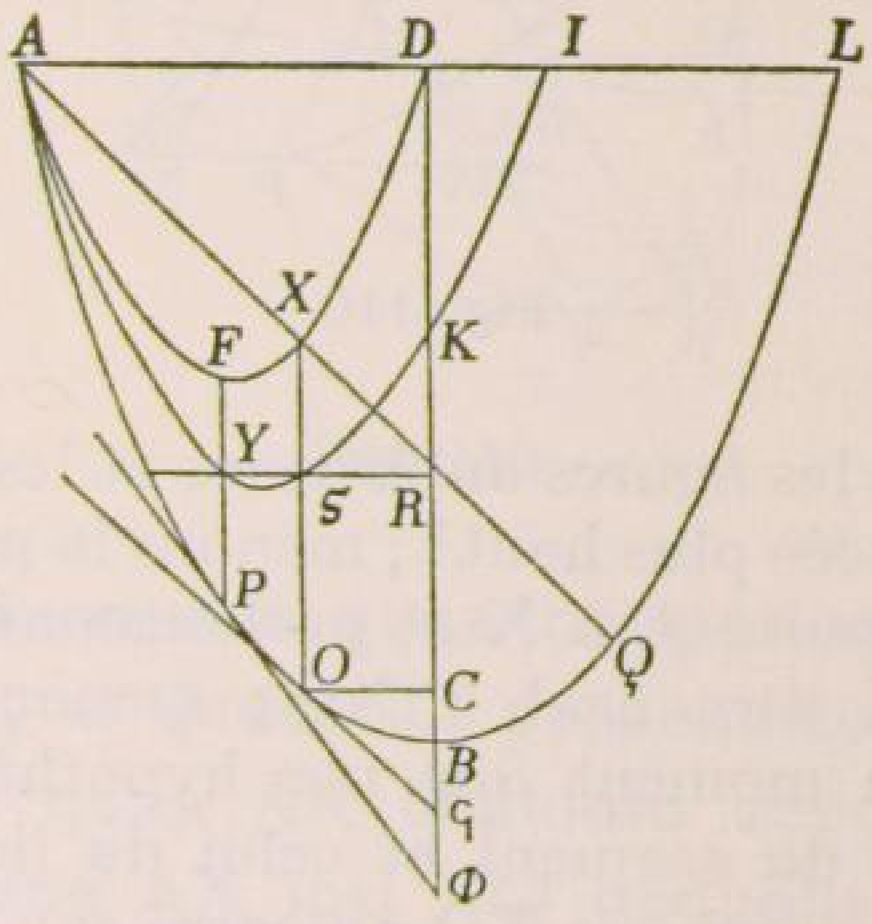

Fig. 109

Habeat autem portio ad humidum in grauitate hanc proportionem, quam habet tetragonum quod ab XO ad id quod a BD, et dimittatur in humidum ita inclinata. Secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi solidi quidem sectio sit quae APOL rectanguli coni sectio, superficiei autem humidi quae OI, axis autem portionis et diameter sectionis quae BD, et secetur quae BD ut prius, et ducatur quae quidem PN aequedistanter ipsi IO contingens sectionem secundum P, quae autem PT aequedistanter ipsi BD, quae autem PS perpendicularis super BD. Demonstrandum quod portio non manet inclinata sic, sed inclinatur, donec utique basis secundum unum signum tangat superficiem humidi.

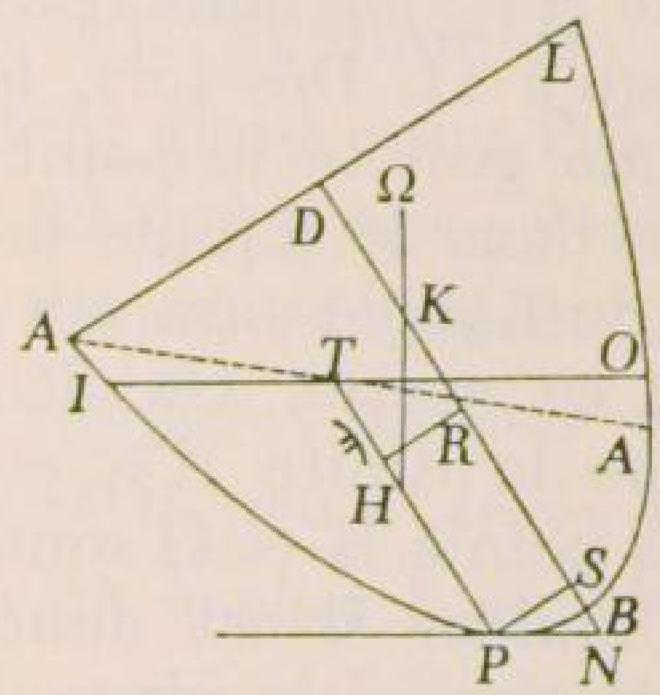

Fig. 110

Praeiaceant autem et quae in superiori figura prius disposita sunt, et quae CO perpendicularis ducatur super BD, et quae AX copulata educatur ad Q ; erit autem quae AX ipsi XQ aequalis ; et ducatur ipsi AQ quae OϘ aequedistans. Et quoniam supponitur portio ad humidum in grauitate hanc habere proportionem, quam habet tetragonum quod ab XO ad id quod a BD, habet autem hanc proportionem et demersa portio ad totam, hoc est quod a TP ad id quod a BD, aequalis utique erit quae PT ipsi XO. Et quoniam portionum IBO, ABQ diametri sunt aequales, et portiones. Rursum quoniam in portionibus aequalibus et similibus APOL, AOQL productae sunt AQ, IO aequales portiones auferentes, hoc quidem ab extremitate basis, hoc autem non ab extremitate, palam quod minorem facit acutum angulum ad diametrum totius portionis, quae ab extremitate basis producta est. Et quoniam angulus qui apud ϛ est minor quam qui apud N, maior est quae BC quam BS, quae autem CR minor quam RS ; quare et quae Oϛ minor quam Pϡ, <et ϛX> maior est quam ϡT. Et quoniam quae Oϛ dupla est ipsius ϛX, palam quod quae Pϡ maior est quam dupla ipsius ϡT. Sit igitur quae PH dupla ipsius HT.

Καὶ ἐπεζεύχθω ἁ HK καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ω. Ἐσσεῖται δὴ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ K, τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ H, τοῦ δ' ἐκτὸς ἐπὶ τᾶς KΩ· ἔστω τὸ Ω. Δειχθήσεται δὴ ὁμοίως ἅ τε Kϡ κάθετος ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν καὶ αἱ διὰ τῶν H, Ω σαμείων παρὰ τὰν Kϡ. Δῆλον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλ' ἐπικλιθήσεται, ἕως ἂν ἁ βάσις αὐτοῦ ἅπτηται καθ' ἓν σαμεῖον τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καθάπερ demonstrabitur in tertia figura, quomodo se habet in tertio theoremate, et manebit portio ita consistens.

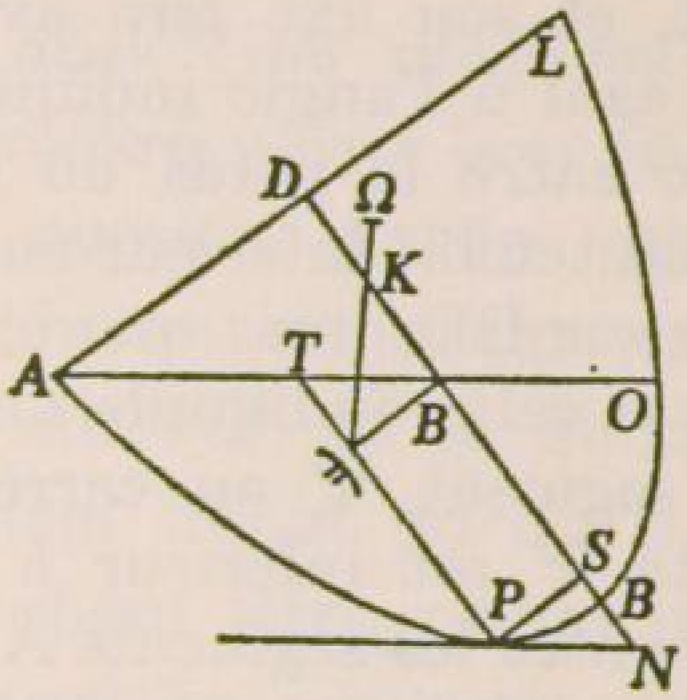

Fig. 111

In portionibus enim aequalibus APOL, AOQL productae erunt ab extremitatibus basium quae AQ, AO aequales <portiones> auferentes ; demonstrabitur enim APQ aequalis ipsi APO similiter prioribus ; aequales igitur facient acutos angulos quae AO, AQ ad diametros portionum, quoniam aequales sunt qui apud N, ϛ anguli. Et <sit Pϡ dupla ipsius> ϡT ; copulata autem ipsa ϡK et educta ad Ω erit totius quidem portionis centrum grauitatis K, eius autem quae intra humidum ϡ, eius autem quae extra in linea KΩ ; et sit Ω. Et quae Kϡ ⟨κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ⟩ ἐπιφάνειαν. Κατὰ τὰς αὐτὰς οὖν εὐθείας τό τε ἐν τῷ ὑγρῷ ἀνενεχθήσεται καὶ τὸ ⟨ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ⟩ κατενεχθήσεται · μενεῖ ⟨δὴ τὸ τμᾶμα, καὶ⟩ ἅ τε ⟨βάσις καθ' ἓν σαμεῖον ἅψεται τᾶς τοῦ⟩ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ ὁ ἄξων ⟨τοῦ τμάματος⟩ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιήσει γωνίαν ἴσαν τᾷ προγεγραμμένᾳ.

Habeat etiam rursum portio ad humidum in grauitate proportionem minorem ea, quam habet tetragonum quod ab NT ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habeat tetragonum quod a Ψ <ad tetragonum quod a BD> ; minor autem est quae Ψ quam TN. Rursum igitur inaptetur quaedam intermedia portionum AMD, APOL quae PI aequedistanter ipsi BD producta aequalis ipsi Ψ, secet autem ipsa intermediam coni sectionem penes Y, ipsam autem XR εὐθεῖαν κατὰ τὸ H. Δειχθήσεται δὴ ἁ ΠΥ διπλασία τᾶς ΥΙ, καθάπερ ἐδείχθη καὶ ἁ ΓΟ τᾶς ΓΧ. Ἄχθω δὲ καὶ ἁ μὲν ΠΩ ἐφαπτομένα τᾶς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Π, ἁ δὲ ΠΕ κάθετος ἐπὶ τὰν ΒΔ, καὶ ἁ ΙΑ ἐπιζευχθεῖσα ⟨ἐκβεβλήσθω⟩ ἐπὶ τὸ Χ· ἐσσεῖται δὲ ἁ ΑΙ τᾷ ΙΧ ἴσα καὶ ἁ ΑΧ τᾷ ΠΩ παράλληλος. Δεικτέον δὴ ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὕτως καταστασεῖται κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ⟨ἐλάσσονα τᾶς Φ, τὰν δὲ βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

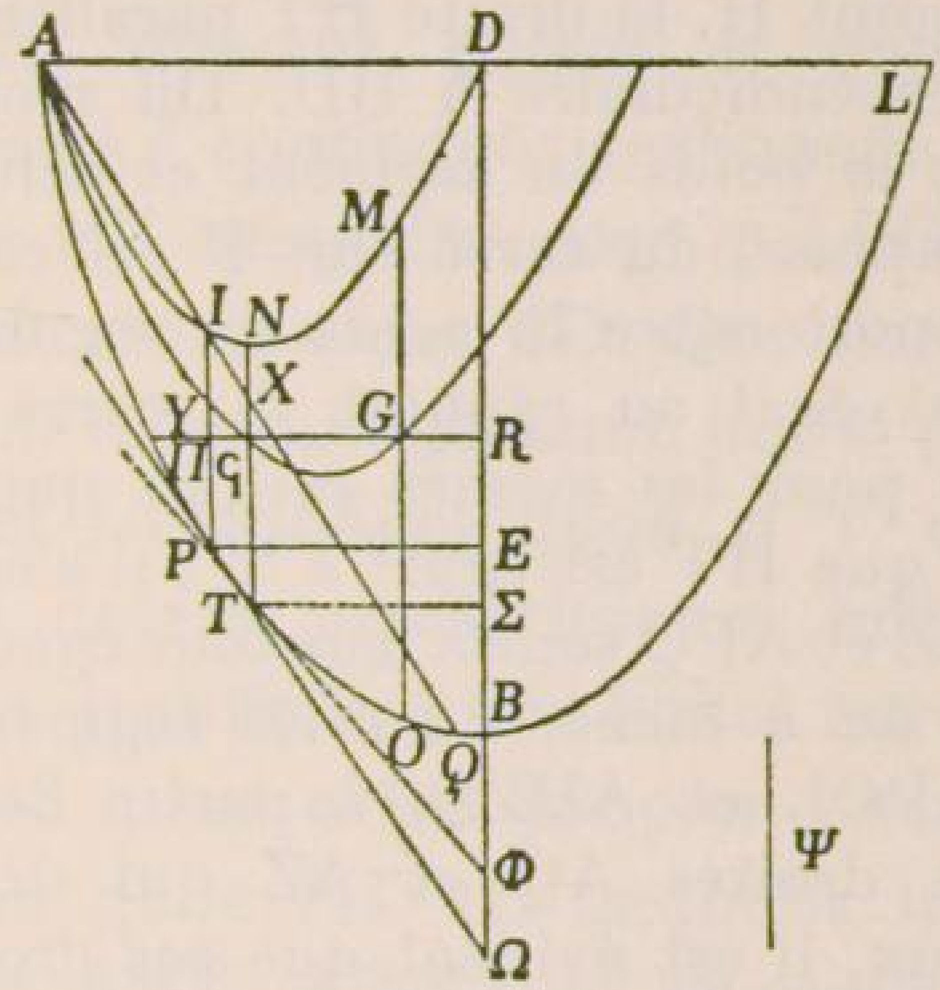

Fig. 112

'Αφείσθω γὰρ εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ καθεστακέτω οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν⟩ αὐτοῦ καθ' ἓν σαμεῖον ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, τμαθέντος δὲ τοῦ τμάματος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν διὰ τοῦ ἄξονος τομὰ ἔστω τᾶς μὲν τοῦ τμάματος ἐπιφανείας ἁ ΑΗΒΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας ἁ ΑΖ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ, καὶ τετμάσθω ἁ ΒΔ κατὰ τὰ Κ, Ρ ὁμοίως

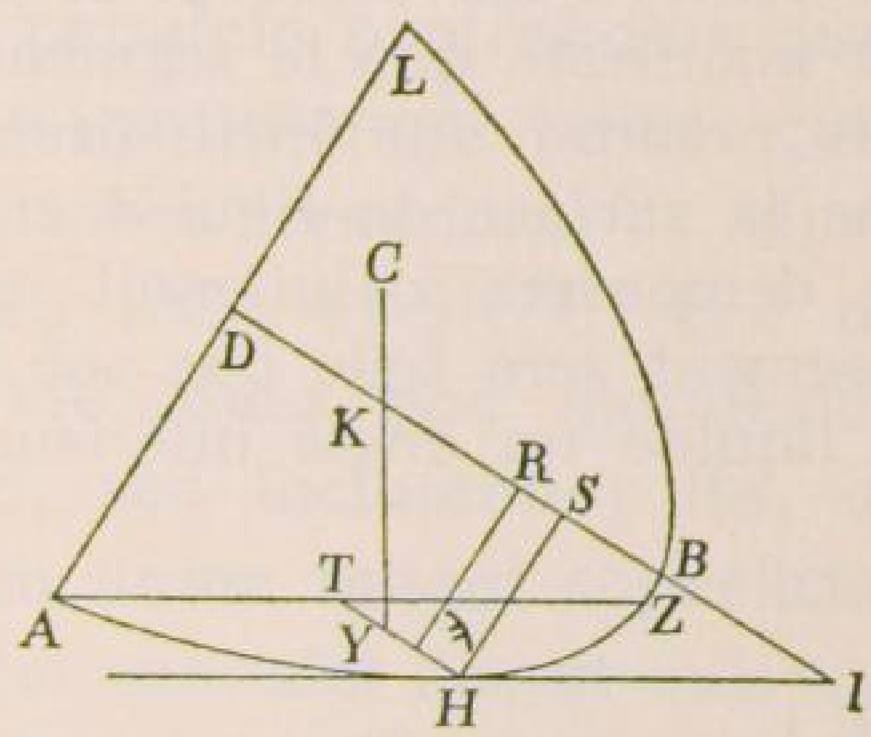

Fig. 113

superioribus, ducatur autem et quae HI aequedistanter ipsi AZ contingens sectionem coni penes H, quae autem HT aequedistanter ipsi BD, quae autem HS perpendicularis super BD. Quoniam igitur portio ad humidum in grauitate hanc habet proportionem, quam habet tetragonum quod a Ψ ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habet tetragonum quod ab HT ad id quod a BD propter eadem prioribus, palam quod quae HT est aequalis ipsi Ψ ; quare et portiones AHZ, APQ sunt aequales. Et quoniam in portionibus aequalibus et similibus APOL, AHZL ab extremitatibus basium sunt productae quae AQ, AZ aequales portiones auferentes, palam quod aequales faciunt angulos ad diametros portionum. Adhuc autem et trigonorum HIS, PΩE aequales sunt anguli qui apud I, Ω ; erunt <igitur> et SB, EB aequales ; quare et quae SR, ER aequales et quae Hϡ, PH et quae ϡT, HI. Et quoniam est dupla quae PY ipsius YI, manifestum quod minor est quam dupla quae Hϡ ipsius ϡT. Sit igitur quae HY dupla ipsius YT, et copulata protrahatur quae YKC ; sunt autem centra grauitatum totius quidem K, eius autem quod intra humidum Y, eius autem quod extra in linea KC ; et sit C. Erit autem propter praecedens theorema hoc manifestum quod non manet portio, sed inclinabitur ita, ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem humidi.

Quod autem consistet ita, ut axis ipsius ad superficiem humidi faciat angulum minorem angulo Φ

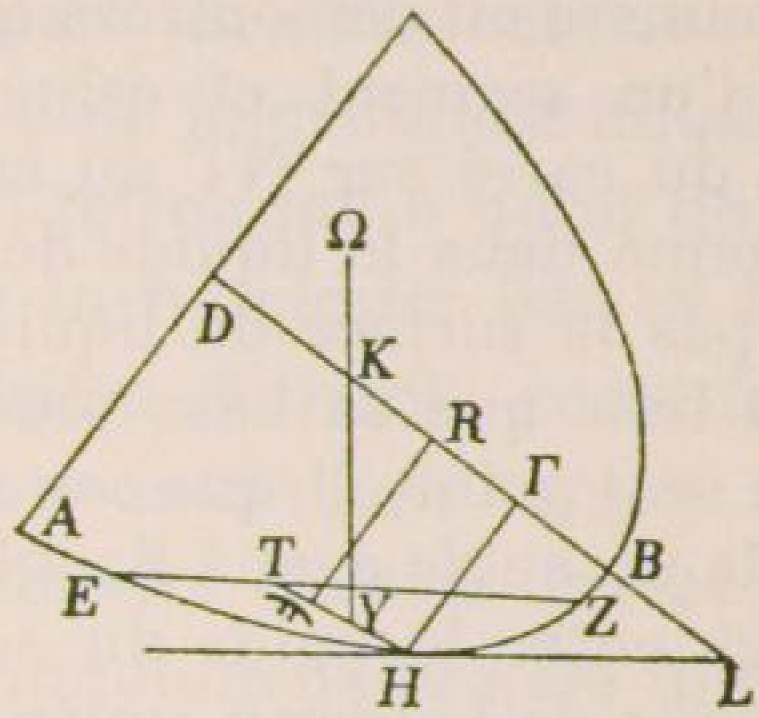

Fig. 114

demonstrabitur. Consistat enim, si possibile est, ita, ut faciat angulum non minorem angulo Φ, et alia ⟨κατε-⟩

σκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ τρίτῳ σχήματι. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἁ ΘΗ ἴσα τᾳ Ψ· ὥστε καὶ τᾳ ΙΠ ἴσα. Ἐπεὶ οὖν ἁ Λ γωνία οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς Φ, οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἁ ΓΒ τᾶς ΣΒ, οὐδὲ ἁ ΓΡ ἐλάσσων τᾶς ΣΡ οὐδὲ ἁ Ηϡ τᾶς Θϛ. Καὶ ἐπειδὴ ἁ ΙΠ ἡμιολία ἐστὶ τᾶς ΠΥ, ἐλάσσων δὲ ἁ ΠΥ τᾶς Θϛ, καὶ ἁ μὲν ΗΘ ἴσα τᾳ ΠΙ, ἁ δὲ Ηϡ οὐκ ἐλάσσων τᾶς Θϛ, μείζων ἔσται ἁ ϡΗ τᾶς ΠΥ· ἁ ἄρα Ηϡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία τᾶς ϡΘ. Ἔστω δὴ ἁ ΗΥ διπλασία τᾶς ΥΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΥΚ ἐκβεβλήσθω· δῆλον δὴ ὁμοίως τοῖς πρότερον ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν ⟨τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἐλάσσονα τᾶς Φ⟩.

Similiter autem demonstrabitur <quod> et, si portio ad humidum in grauitate habeat proportionem eandem, quam tetragonum quod ab NT ad id quod a BD, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius non tangat superficiem humidi, consistet inclinata ita, ut basis ipsius secundum unum signum tangat superficiem humidi, et axis ipsius ad superficiem humidi faciat angulum aequalem angulo qui apud Φ.

Ἔστω δὴ πάλιν τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει μείζονα μὲν λόγον ἔχον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΠ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἐλάσσονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω τὸ ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ· δῆλον οὖν ὅτι ἁ Ψ τᾶς μὲν ΖΠ μείζων ἐστίν, τᾶς δὲ ΞΟ ἐλάσσων. Ἐναρμόσθω δὴ εἰς τὸ μεταξὺ τᾶν ΑΞΔ, ΑΠΟΛ [τμημάτων] ἴσα τᾷ Ψ, παράλληλος δὲ τᾷ ΒΔ ἁ ΦΙ τέμνουσα τὰν μεταξὺ [τοῦ] κώνου τομὰν κατὰ τὸ Υ· πάλιν δὴ ἁ ΦΥ διπλασία τᾶς ΥΙ δειχθήσεται, καθάπερ ἁ ΟΓ τᾶς ΞΓ. Ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Φ τοῦ ΑΠΟΛ ἐφαπτομένα κατὰ τὸ Φ ἁ ΦΩ· ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἁ μὲν ΑΙ τᾷ ΧΙ ἴσα, ἁ δὲ ΑΧ τᾷ ΦΩ παράλληλος. Δεικτέον δὲ ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν μὴ ἅπτεσθαι τᾶς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως κλιθήσεται, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τόπον τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ.

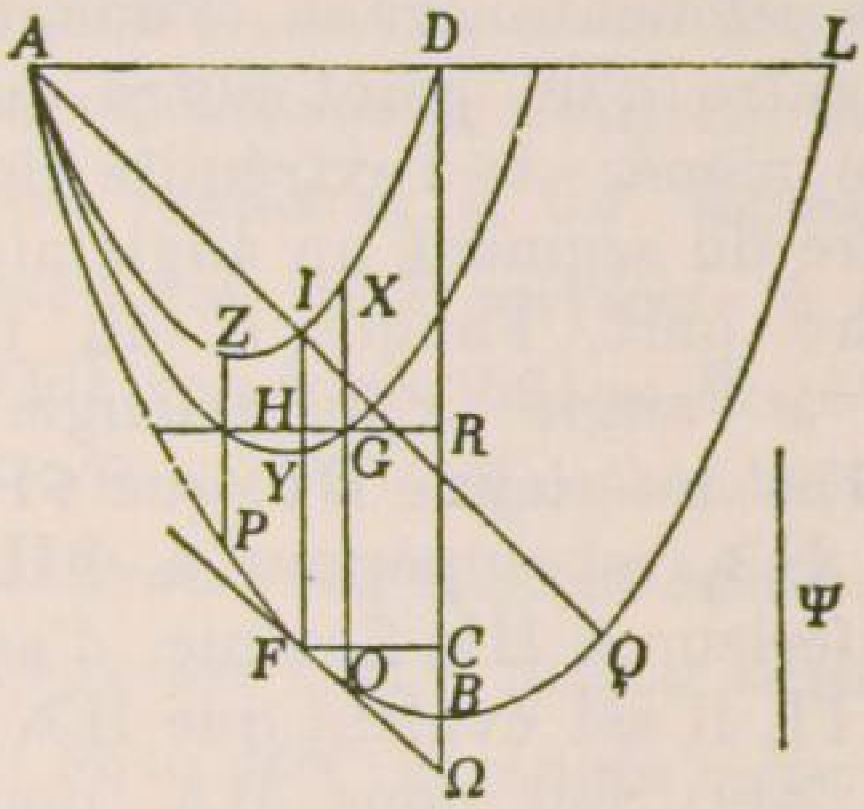

Fig. 115

Ἀφείσθω γὰρ εἰς τὸ ὑγρόν ὡς εἴρηται, καὶ κείσθω τὸ πρῶτον [καὶ] οὕτως κεκλιμένον, ⟨ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν⟩ ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν ἐν μὲν τᾷ τοῦ τμάματος ἐπιφανείᾳ γίνεται τομὰ ἁ ΑΒΓ, ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὑγροῦ ἁ ΕΖ, ἄξων δὲ ἔστω [τῆς τομῆς] καὶ διάμετρος [τοῦ τμήματος] ἁ ΒΔ, καὶ τετμάσθω ἁ ΒΔ κατὰ τὰ Κ, Ρ ὁμοίως τοῖς πρότερον, ἄχθω δὲ καὶ ἁ μὲν ΗΛ παρὰ τὰν ΕΖ ἐφαπτομένα τᾶς [ἀπὸ τῆς] ΑΒΓ τομᾶς κατὰ τὸ Η, ἁ δὲ ΗΘ παρὰ τὰν ΒΔ, ἁ δὲ ΗΣ κάθετος ἐπὶ τὰν ΒΔ. Ἐπεὶ δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει λόγον ἔχει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, δῆλον ὅτι ἁ Ψ ἴσα ἐστὶν τᾷ ΗΘ· δειχθήσεται γὰρ ὁμοίως τοῖς πρότερον· ὥστε καὶ ἁ ΗΘ ἴσα ἐστὶν τᾷ ΦΙ· καὶ τὰ τμάματα ἄρα τὰ ΑΦΧ, ΕΒΖ ἴσα ἐστὶν ἀλλάλοις. Ἐπεὶ δ' ἐν ἴσοις καὶ ὁμοίοις τμαμάτεσσι τοῖς ΑΠΟΛ, ΑΒΓ ἀγμέναι ἐντὶ αἱ ΑΧ, ΕΖ ἴσα τμάματα ἀφαιροῦσαι, καὶ ἁ μὲν ἀπ᾽ ἄκρας τᾶς βάσιος, ἁ δὲ οὐκ ἀπ᾽ ἄκρας, ἐλάσσονα ποιήσει τὰν ὀξεῖαν ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ τμάματος ἁ ἀπ᾽ ἄκρας τᾶς βάσιος ἀχθεῖσα. Καὶ ἐπειδὴ τοῦ ΗΛΣ τριγώνου ἁ Λ μείζων τᾶς Ω γωνίας τοῦ ΦΤΩ τριγώνου, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ Βϛ τᾶς ΒΤ, ἁ δὲ ϛΡ τᾶς ΡΤ μείζων, καὶ ἁ Ηϡ μείζων τᾶς ΦΗ · ἁ ϡΘ ἄρα ἐλάσσων τᾶς ΗΙ. Καὶ ἐπεὶ διπλασία ἐστὶν ἁ ΦΥ τᾶς ΥΙ, δῆλον ὅτι ἁ Ηϡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία τᾶς ⟨ϡΘ. Ἔστω δὴ ἁ ΗΑ′ διπλασία⟩ τᾶς Α′Θ · δῆλον δὴ ἐκ τούτων ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ ἐπικλιθήσεται, ἕως ἂν ἁ βάσις αὐτοῦ θίγῃ καθ᾽ ἓν σαμεῖον τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

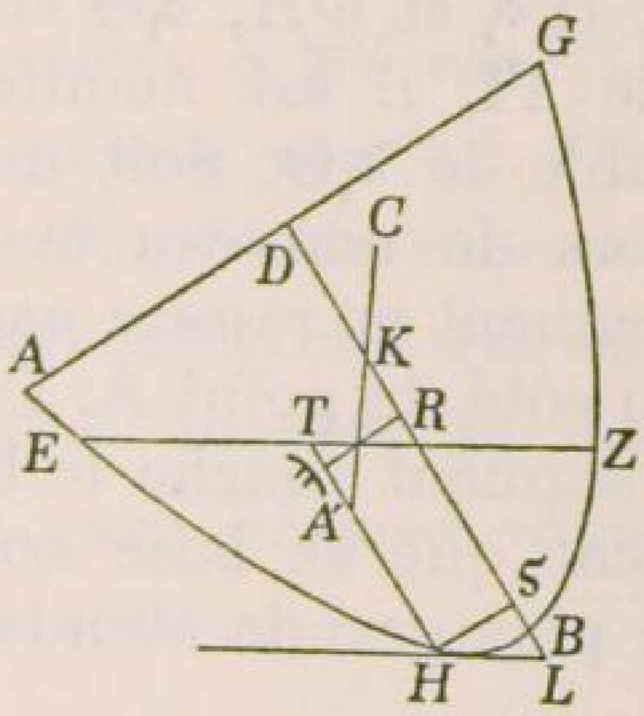

Fig. 116

Ἁπτέσθω δὴ καθ᾽ ἓν σαμεῖον, ὡς ἐν τῷ τρίτῳ σχήματι ἐγράφθη, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω · δειχθήσεται δὴ πάλιν ἅ τε ΘΗ ἴσα ἐοῦσα τᾷ ΦΙ καὶ τὰ ΑΦΧ, ΑΒΖ τμάματα ἴσα ἀλλάλοις. Καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις καὶ ὁμοίοις τμαμάτεσσι τοῖς ΑΠΟΛ, ΑΒΓ ἀγμέναι ἐντὶ αἱ ΑΧ, ΑΖ ἴσα τμάματα ἀφαιροῦσαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας ποτὶ ταῖς διαμέτροις τῶν τμαμάτων· τῶν ἄρα ΛΗΣ, ΦΤΩ αἱ ποτὶ τοῖς Λ, Ω γωνίαι ἴσαι ἐντί, καὶ ἁ ΒΣ εὐθεῖα τᾷ ΒΤ

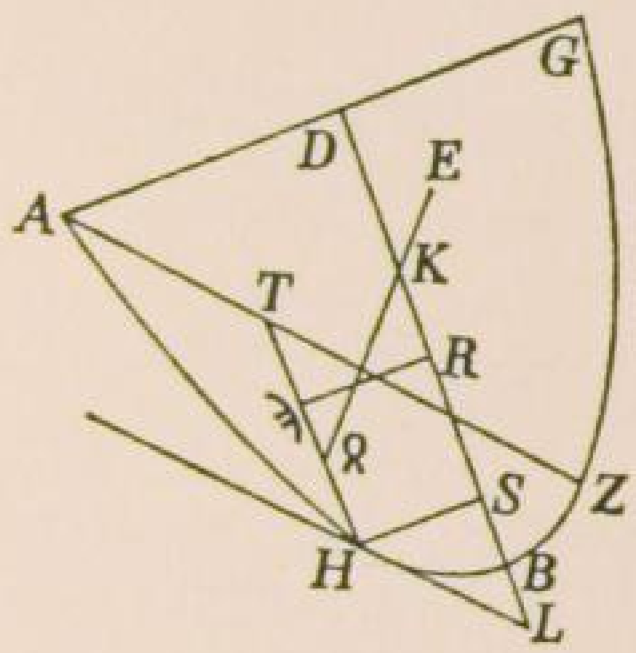

Fig. 117

ἴσα καὶ ἁ ΣΡ τᾷ ΡΤ καὶ ἁ Ηϡ τᾷ ΦΗ καὶ ἁ ϡΘ τᾷ ΗΙ. Ἐπεὶ δὲ διπλασία ἐστὶν ἁ ΦΥ τᾶς ΥΙ, φανερὸν ὅτι ἁ Ηϡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία τᾶς ϡΘ. Ἔστω οὖν ἁ Ηϙ τᾶς ϙΘ διπλασίων· πάλιν δὴ ἐκ τούτων δῆλον ὡς οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλ' ἐπικλιθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α. Ἐπεὶ δὴ καθ' ἓν σαμεῖον ὑπετέθη τὸ τμᾶμα ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, δῆλον ὅτι κατὰ πλείονα τόπον ἁ βάσις ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ καταλαφθήσεται.

STOMACHION

ΣΤΟΜΑΧΙΟΝ

Ἀρχιμήδους Στομάχιον

Τοῦ λεγομένου Στομαχίου ποικίλαν ἔχοντος τᾶς ἐξ ὧν συνέστακε σχημάτων μεταθέσεως θεωρίαν ἀναγκαῖον ἡγησάμην πραττον του ⟨......⟩ ρῶν ἐκθέσθαι, εἴς τε ἃ διαιρεῖται, ἕκαστόν τε αὐτῶν τίνι ἐστὶν ὁμοιούμενον, ἔτι δὲ καὶ ποῖαι γωνίαι σύνδυο λαμβανόμεναι ⟨....⟩ καὶ ⟨...⟩ θάς, εἴρηται πρὸς τὸ τὰς ἐναρμόσεις τῶν ἐξ αὐτῶν γεννωμένων σχαμάτων γιγνώσκεσθαι, εἴτε ἐπ' εὐθείας εἰσὶν αἱ γεννώμεναι ἐν τοῖς σχάμασι πλευραί, εἴτε καὶ μικρῶς λείπουσαι τᾷ θεωρίᾳ λανθάνουσιν · τὰ γὰρ τοιαῦτα φιλότεχνα · καὶ ἐὰν ἐλάχιστον μὲν λείπηται, τᾷ δὲ θεωρίᾳ λανθάνῃ, οὐ παρὰ τοῦτ' ἐστὶν ἔκβλητα ἃ συνίσταται.

Ἔστι μὲν οὖν ἐξ αὐτῶν οὐκ ὀλίγων σχημάτων ....ο.. διὰ τὸ.....ν..τον εἶναι εἰς ἕτερον τόπον τοῦ ἴσου καὶ ἰσογωνίου σχάματος μετατιθεμε... καὶ ἑτέ..... λαμβάνοντας. ⟨Ἐνιό⟩τε δὲ καὶ δύο σχημάτων συνάμφω ἑνὶ σχήματι ἴσων ὄντων καὶ ὁμοίων τῷ ἑνὶ σχήματι ἢ καὶ δύο σχημάτων συνάμφω ἴσων τε καὶ ὁμοίων ὄντων δυσὶ σχήμασι συνάμφω πλείονα σχήματα συνίσταται ἐκ τῆς μεταθέσεως. Προγράφομεν οὖν τι θεώρημα εἰς αὐτὸ συντεῖνον.

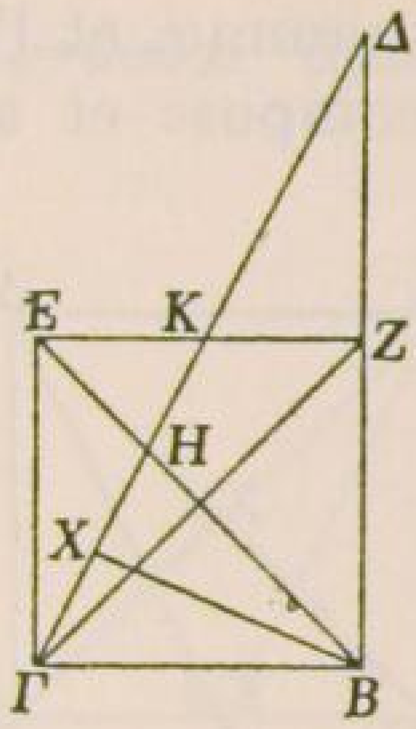

Fig. 118

Ἔστω γὰρ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΓ, καὶ δε. ι.....ω ἡ ΕΖ τῷ Κ, καὶ.. διήχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Β αἱ ΓΚ, ΒΕ. ει..ων... τῶν... Γ .... ἐκ⟨βεβλή⟩σθωσαν αἱ ΓΚ, ΒΖ καὶ συμπιπτέ⟨τωσαν κατὰ τὸ Δ.....⟩ ἡ ΓΗ. Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ, ⟨ἴση⟩ καὶ ἡ ΓΕ, τουτέστιν ἡ ΒΖ, τῇ ΖΔ· ὥ⟨στε⟩ μείζων ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ· καὶ γωνία ⟨ἄρα⟩ ἡ ὑπὸ τῶν ΖΔΓ τῆς ὑπὸ τῶν ΖΓΔ μείζων. Ἴσαι δέ εἰσιν αἱ ὑπὸ ΗΒΔ, ΖΓΒ· ἡμίσεια γὰρ ὀρθῆς ἑκατέρα· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΓΗΒ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΗΒΔ, ΗΔΒ, τῆς ὑπὸ τῶν ΗΓΒ· ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆς ΒΗ. Ἐὰν ἄρα δίχα τμηθῇ ἡ ΓΗ κατὰ Χ, ἔσται ἀμβλεῖα μὲν ἡ ὑπὸ ΓΧΒ· ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ ΓΧ τῇ ΧΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΧΒ, δύο δυσὶν ἴσαι· καὶ βάσις ἡ ΓΒ τῆς ΒΗ μείζων· καὶ ἡ γωνία ἄρα τῆς γωνίας μείζων. Ἀμβλεῖα μὲν ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΧΒ, ὀξεῖα δὲ ἡ ἐφεξῆς. Ἡμίσεια δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΓΒΗ· τοῦτο γάρ ἐστιν ὑποκείμενον τοῦ παραλληλογράμμου· ὀξεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΧΗ. Καὶ.τι δὴ ἴση ἡ λοιπαὶ ΓΒΗ καὶ συνίσταται καὶ διαιρεῖται τοῦτο ἐπ. ον τον.... .... βάσιος..τι....... αστ..α.. ἄρα ο... ΑΒ....αν..ο...τὴν ΓΑ..... νῶν....... ἔχον...τὸ ἐπίλοιπ.................. δύνασθαι ἀρ....ξειν ἐκ....τῶν τομῶν ....τῶν τάξιν ἐχοντ..

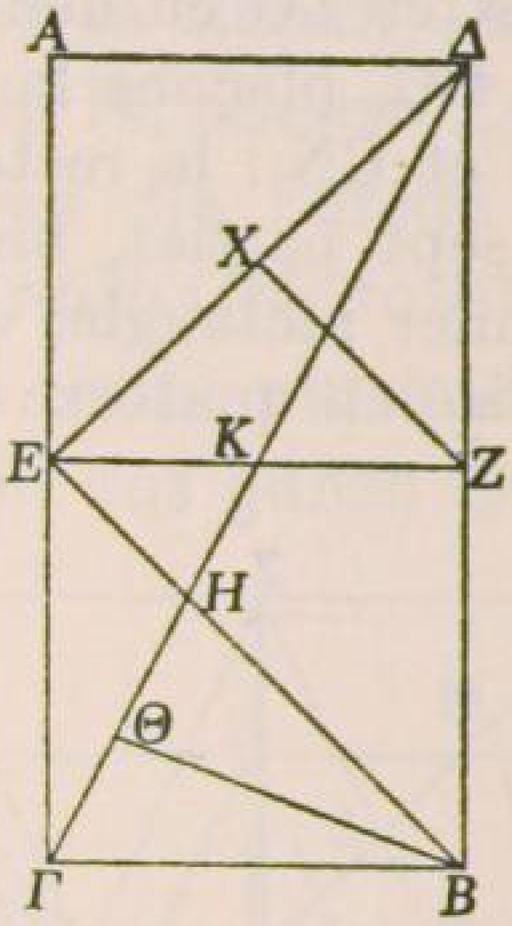

Fig. 119

Τετμήσθω ἡ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· ἔστιν οὖν τετράγωνα τὰ ΓΖ, ΖΑ. Ἤχθωσαν διάμετροι αἱ ΓΔ, ΒΕ, ΕΔ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΓΗ, ΕΔ κατὰ τὰ Θ, Χ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΘ, ΧΖ, καὶ διὰ τῶν..., Κ τῇ ΒΔ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Κ.., ..Ξ. Διὰ τὸ προκείμενον ἄρα θεώρημα τοῦ ΒΓΘ τριγώνου ἡ πρὸς τῷ Θ γωνία ἀμβλεῖα, ἡ δὲ λοιπὴ ὀξεῖα.... νερὸν φανερὸν δὲ...ει...

Das Buch des Archimedes über die Teilung der Figur Stomaschion in vierzehn zu ihr in Verhältnis stehende Figuren.

Wir zeichnen ein Parallelogramm, es sei dies ABGD, halbieren BG in E, errichten EZ senkrecht auf BG, ziehen die Diagonalen AG, BZ und ZG, halbieren ebenfalls BE in H, und errichten HT senkrecht auf BE ; dann legen wir das Lineal an den Punkt H und visieren nach dem Punkt A und ziehen HK, halbieren AL in M und ziehen BM, so ist das Rechteck AE in sieben Teile geteilt. Hierauf halbieren wir GD in N, ebenso ZG in C, ziehen EC, legen das Lineal an die Punkte B und C an und ziehen CO, ziehen noch CN, so ist auch das Rechteck ZG in sieben Teile, aber auf andere Weise als das erste, geteilt, mithin das ganze Quadrat in vierzehn Teile.

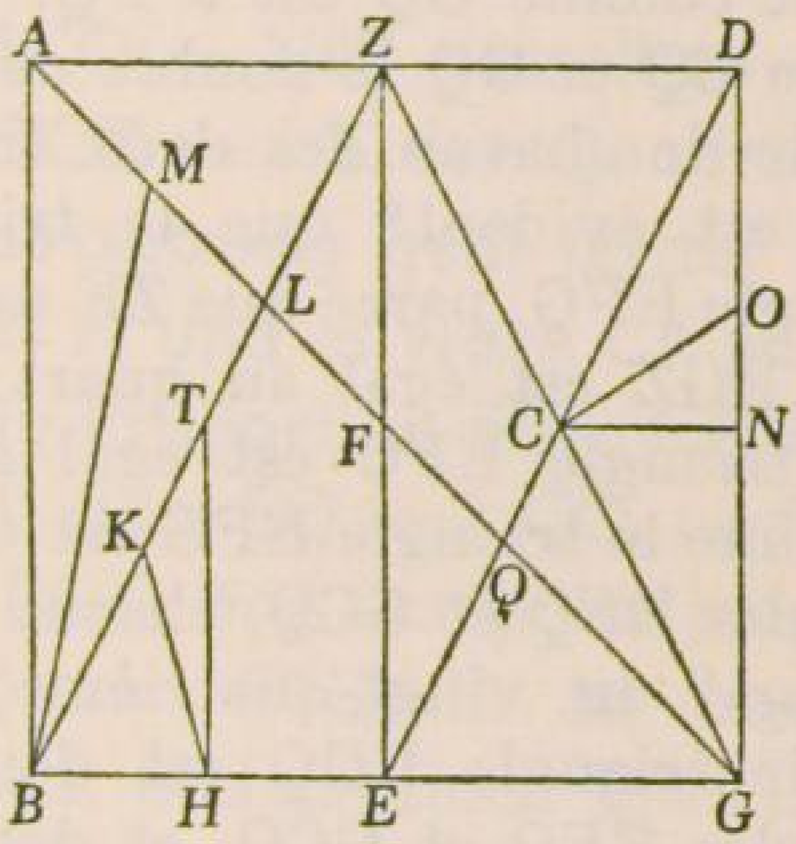

Fig. 120

Wir beweisen nun, dass jeder der vierzehn Teile zum ganzen Quadrat in rationalem Verhältnis stehe.

Weil ZG die Diagonale des Rechtecks ZG ist, so ist Dreieck DZG die Hälfte dieses Rechtecks, also 1/4 des Quadrates. Aber Dreieck GNC ist 1/4 von Dreieck DZG, weil, wenn wir EC verlängern, es in den Punkt D trifft, und dann also Dreieck GDC die Hälfte des Dreiecks DZG und gleich den beiden Dreiecken GNC und DNC zusammen ist ; also ist Dreieck GNC = 1/16 des Quadrats. Wenn wir nun ferner annehmen, die Linie OC sei nach dem Punkte B gerichtet, wie sie in der Tat auch gezeichnet wurde, so ist die Linie NC parallel zur Seite BG des Quadrates, resp. des Dreiecks OBG, also hat man die Proportion

$$BG : NC = GO : NO.$$

Es ist aber BG das Vierfache von NC, also auch GO das Vierfache von NO; deshalb ist nun GN das Dreifache von NO, und Dreieck GNC = 3 ONC. Da aber, wie wir gezeigt haben, Dreieck GNC = 1/16 des Quadrates ist, so ist Dreieck ONC = 1/48 des Quadrates. Weil ferner Dreieck GDZ = 1/4 des Quadrates ist und deshalb GNC = 1/16 desselben und Dreieck NCO = 1/48 desselben, so bleibt für das Viereck DOCZ = 1/6 der Quadratfläche übrig. Nach der Voraussetzung geht ferner die Linie NC durch den Punkt F, und es wäre CF parallel zu GE; also hat man die Proportion EG : CF = EQ : CQ = GQ : FQ. Weil nun EQ = 2 CQ und GQ = 2 FQ, so ist Dreieck EQG das Doppelte jedes der beiden Dreiecke GCQ und EFQ. Es ist aber klar, dass Dreieck EGZ = 2 mal Dreieck EFG ist, weil ZE = 2 FE ist. Das Dreieck EGZ ist aber = 1/4 des Quadrates, also Dreieck EFG = 1/8 desselben. Dieses ist aber das Dreifache jedes der beiden Dreiecke EFQ und GCQ; also ist jedes dieser beiden Dreiecke = 1/24 des Quadrates AG. Und das Dreieck EGQ ist das Doppelte jedes der beiden Dreiecke EFQ und GCQ; also ist es = 1/12 des Quadrates. Weil ferner ZF = EF ist, so ist Dreieck ZFG = Dreieck EFG; wenn wir nun Dreieck GCQ = Dreieck EFQ wegnehmen, so bleibt Viereck FQCZ = Dreieck EGQ; also ist auch Viereck FQCZ = 1/12 des Quadrates AG.

Wir haben nun das Rechteck ZG in 7 Teile geteilt und gehen nun zur Teilung des andern Rechtecks über.

Weil BZ und EC zwei parallele Diagonalen sind, und ZF = EF ist, so ist Dreieck ZLF = EFQ, mithin Dreieck ZLF = 1/24 des Quadrates AG. Weil BH = HE ist, so ist Dreieck BEZ das Vierfache des Dreiecks BHT ; denn jedes desselben ist rechtwinklig. Da aber Dreieck BEZ = 1/4 des Quadrates ABGD ist, so ist Dreieck BHT = 1/16 desselben. Nach unserer Voraussetzung geht ferner die Linie HK durch den Punkt A ; also hat man die Proportion

$$AB : HT = BK : KT.$$

Es ist aber AB = 2 HT, also auch BK = 2 KT, mithin BT = 3 KT ; also ist Dreieck BHT das Dreifache des Dreiecks KHT. Weil aber Dreieck BHT = 1/16 des ganzen Quadrates ist, so ist Dreieck KHT = 1/48 desselben. Ferner ist Dreieck BKH das Doppelte des Dreiecks KHT, also = 1/24 des Quadrates. Da weiter BL = 2 ZL, und AL = 2 LF ist, so ist Dreieck ABL das Doppelte des Dreiecks ALZ und Dreieck ALZ das Doppelte des Dreiecks ZLF. Weil aber Dreieck ZLF = 1/24 des ganzen Quadrates ist, so ist Dreieck ALZ = 1/12 desselben, also Dreieck ABL = 1/6. Es ist aber Dreieck ABM = Dreieck BML, also jedes dieser beiden Dreiecke = 1/12 des Quadrates. Es bleibt noch übrig das Fünfeck LFEHT = der Hälfte eines Sechstels mehr der Hälfte eines Achtels des ganzen Quadrates.

Wir haben also auch das Quadrat AE in 7 Teile geteilt ; mithin ist die ganze Figur ABGD in 14 Teile geteilt, welche zu ihr in Verhältnis stehen ; und das ist, was wir wollten.

LA MÉTHODE A ÉRATOSTHÈNE

ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ

Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος

Ἀρχιμήδης Ἐρατοσθένει εὖ πράττειν.

Ἀπέστειλά σοι πρότερον τῶν εὑρημένων θεωρημάτων ἀναγράψας αὐτῶν τὰς προτάσεις φάμενος εὑρίσκειν ταύτας τὰς ἀποδείξεις, ἃς οὐκ εἶπον ἐπὶ τοῦ παρόντος· ἦσαν δὲ τῶν ἀπεσταλμένων θεωρημάτων αἱ προτάσεις αἵδε· τοῦ μὲν πρώτου· ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν παραλληλόγραμμον ἔχον βάσιν κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίον παραλληλογράμμοις, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τῶν λοιπῶν τοῦ πρίσματος ἐπιπέδων, καὶ διά τε ⟨τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου,⟩ ὅς ἐστι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέδῳ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἀχθὲν ἐπιπίπεδον ἀποτεμεῖ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, ὅ ἐστι περιεχόμενον ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἑνὸς μὲν τοῦ ἀχθέντος, ἑτέρου δὲ ἐν ᾧ ἡ βάσις ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου, τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων, τὸ δὲ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμῆμα ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὅλου πρίσματος. Τοῦ δὲ ἑτέρου θεωρήματος ἡ πρότασις ἥδε· ἐὰν εἰς κύβον κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων πρὸς τοῖς κατεναντίον παραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, ἐγγραφῇ δὲ καὶ ἄλλος κύλινδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύβον τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν ἄλλοις παραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, τὸ περιληφθὲν σχῆμα ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυλίνδρων, ὅ ἐστιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς κυλίνδροις, δίμοιρόν ἐστι τοῦ ὅλου κύβου. Συμβαίνει δὲ ταῦτα τὰ θεωρήματα διαφέρειν τῶν πρότερον εὑρημένων · ἐκεῖνα μὲν γὰρ τὰ σχήματα, τά τε κωνοειδῆ καὶ σφαιροειδῆ καὶ τὰ τμήματα ⟨αὐτῶν, τῷ μεγέθει σχήμασι⟩ κώνων καὶ κυλίνδρων συνεκρίναμεν, ἐπιπέδοις δὲ περιεχομένῳ στερεῷ σχήματι οὐδὲν αὐτῶν ἴσον ἐὸν εὕρηται, τούτων δὲ τῶν σχημάτων τῶν δυσὶν ἐπιπέδοις καὶ ἐπιφανείαις κυλίνδρων ἕκαστον ἑνὶ τῶν ἐπιπέδοις περιεχομένων στερεῶν σχημάτων ἴσον εὑρίσκεται.

Τούτων δὴ τῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξεις ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀποστελῶ σοι.

Ὁρῶν δέ σε, καθάπερ λέγω, σπουδαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶτα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμασα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιότητα, καθ' ὅν σοι παρεχόμενον ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς τὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν μηχανικῶν. Τοῦτο δὲ πέπεισμαι χρήσιμον εἶναι οὐδὲν ἧσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρημάτων. Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν · ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν. ⟨... Διόπερ καὶ τῶν θεωρη⟩μάτων τούτων, ὧν Εὔδοξος ἐξηύρηκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν βάσιν ἐχόντων τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ μικρὰν ἀπονείμαι ἄν τις Δημοκρίτῳ μερίδα πρώτῳ τὴν ἀπόφασιν τὴν περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀποδείξεως ἀποφηναμένῳ. Ἡμῖν δὲ συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδομένου θεωρήματος τὴν εὕρεσιν ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι· ἠβουλήθην δὲ τὸν τρόπον ἀναγράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα μὲν καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπὲρ αὐτοῦ, μή τισιν δοκῶμεν κενὴν φωνὴν καταβεβλῆσθαι, ἅμα δὲ καὶ πεπεισμένος εἰς τὸ μάθημα οὐ μικρὰν ἂν συμβαλέσθαι χρείαν· ὑπολαμβάνω γάρ τινας ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ ἄλλα θεωρήματα οὔπω ἡμῖν συνπαραπεπτωκότα εὑρήσειν.

Γράφομεν οὖν πρῶτον τὸ καὶ πρῶτον φανὲν διὰ τῶν μηχανικῶν, ὅτι πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστιν τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, μετὰ δὲ τοῦτο ἕκαστον τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου θεωρηθέντων· ἐπὶ τέλει δὲ τοῦ βιβλίου γράφομεν τὰς γεωμετρι⟨κὰς ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν θεωρημάτων, ὧν τὰς προ⟩τάσεις ἀπεστείλαμέν ⟨σοι πρότερον⟩.

ΠΡΟΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους μέγεθος ἀφαιρεθῇ, ⟨τὸ δὲ αὐτὸ σημεῖον κέν⟩τρον τοῦ βάρους ⟨ᾖ τοῦ τε ὅλου⟩ καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου, ⟨τοῦ⟩ λοιποῦ τὸ αὐτὸ σημεῖον ⟨κέντρον⟩ ἐστὶ τοῦ βάρους.

⟨Ἐὰν ἀπὸ μεγέ⟩θους μέγεθο⟨ς ἀφαιρεθῇ, ᾖ δὲ⟩ μὴ τὸ αὐτὸ σημεῖον κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ λοιποῦ μεγέθους ἐπὶ τῆς ⟨εὐθείας⟩ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου ⟨καὶ τοῦ ἀφαιρουμέ⟩νου ἐκβεβλημένης καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπ' αὐτῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν εἰρημένων κέντρων τοῦ βάρους τοῦτον ἐχούσης τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους πρὸς τὸ [λοιπὸν] βάρος τοῦ λοιποῦ μεγέθους.

Ἐὰν ὁποσωνοῦν μεγεθέων τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ᾖ, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθους τὸ κέντρον ἔσται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Πάσης εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἡ διχοτομία τῆς εὐθείας.

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον ἐστὶν ⟨τοῦ βάρους τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν.

Κύκλου⟩ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ὃ καὶ ⟨τοῦ κύκλου⟩ ἐστὶ κέντρον.

Παντὸς κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.

Παντὸς πρίσματος τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.

Παντὸς κώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους ἐπὶ τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆμα τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ.

Χρησόμεθα δὲ καὶ [ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν] τῷδε τῷ θεωρήματι· Ἐὰν ὁποσαοῦν μεγέθη ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τὸ πλῆθος κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον τὰ ὁμοίως τεταγμένα, ᾖ δὲ τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, ἢ τὰ πάντα ἤ τινα αὐτῶν, καὶ τὰ ὕστερον μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις ᾖ, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς πάντα τὰ λεγόμενα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει πάντα τὰ ὕστερον πρὸς πάντα τὰ λεγόμενα.

α′.

Ἔστω τμῆμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς τῆς ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΓ τῷ Δ, καὶ παρὰ τὴν διάμετρον ἤχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ.

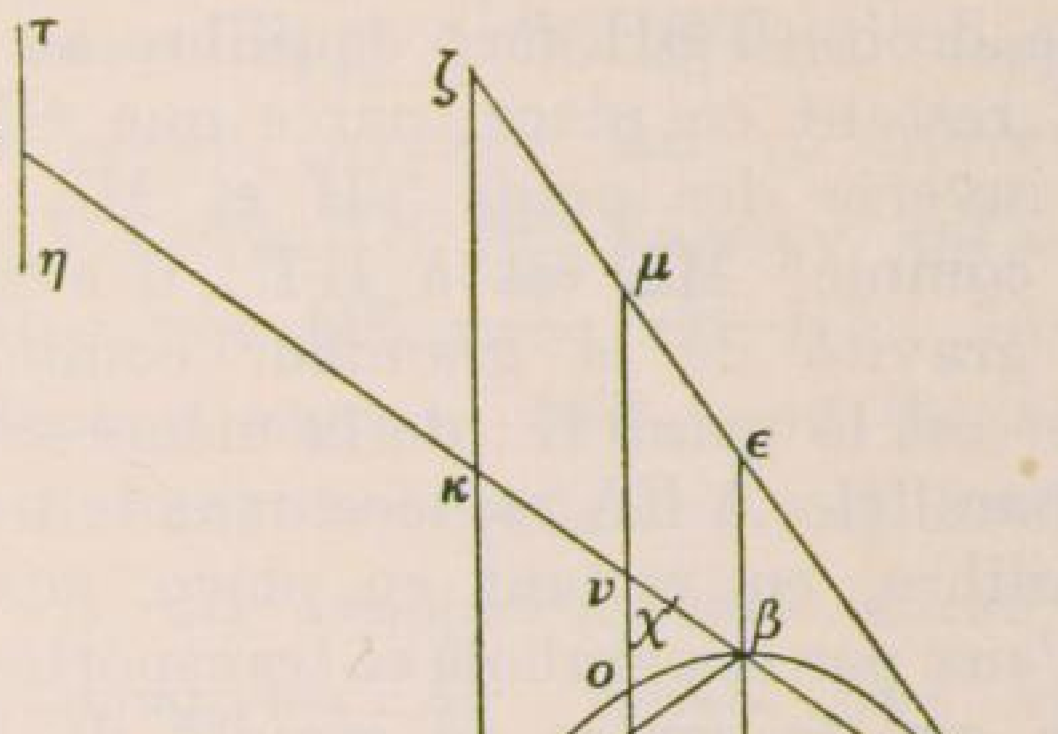

Fig. 121

Λέγω ὅτι ἐπίτριτόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ἡ μὲν ΑΖ παρὰ τὴν ΔΒΕ, ἡ δὲ ΓΖ ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς, καὶ ἐκβεβλήσ⟨θω ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΚΘ⟩. Νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Κ καὶ τῇ ΕΔ παράλληλος τυχοῦσα ἡ ΜΞ.

Ἐπεὶ οὖν παραβολή ἐστιν ἡ ΓΒΑ, καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως ἡ ΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΔ· τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς στοιχείοις δείκνυται· διὰ δὴ τοῦτο, καὶ διότι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΜΞ τῇ ΕΔ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ μὲν ΜΝ τῇ ΝΞ, ἡ δὲ ΖΚ τῇ ΚΑ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ [τοῦτο γὰρ ἐν λήμματι δείκνυται], ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΚΝ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΝ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ν σημεῖον κέντρον τοῦ βάρους τῆς ΜΞ εὐθείας ἐστίν, ἐπείπερ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ, ἐὰν ἄρα τῇ ΞΟ ἴσην θῶμεν τὴν ΤΗ καὶ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῆς τὸ Θ, ὅπως ἴση ᾖ ἡ ΤΘ τῇ ΘΗ, ἰσορροπήσει ἡ ΤΘΗ τῇ ΜΞ αὐτοῦ μενούσῃ διὰ τὸ ἀντιπεπονθότως τετμῆσθαι τὴν ΘΝ τοῖς ΤΗ, ΜΞ βάρεσιν, καὶ ὡς τὴν ΘΚ πρὸς ΚΝ, οὕτως τὴν ΜΞ πρὸς τὴν ΗΤ· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρους κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Κ. Ὁμοίως δὲ καὶ ὅσαι ἂν ἀχθῶσιν ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ παράλληλοι τῇ ΕΔ ἰσορροπήσουσιν αὐτοῦ μένουσαι ταῖς ἀπολαμβανομέναις ἀπ' αὐτῶν ὑπὸ τῆς τομῆς μετενεχθείσαις ἐπὶ τὸ ⟨Θ, ὥστε εἶναι τοῦ ἐξ ἀμφοτέ⟩ρων κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ ΓΖΑ τριγώνῳ τὸ ΓΖΑ τρίγωνον συνέστηκεν, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῇ τομῇ ὁμοίως τῇ ΞΟ λαμβανομένων συνέστηκε τὸ ΑΒΓ τμῆμα, ἰσορροπήσει ἄρα τὸ ΖΑΓ τρίγωνον αὐτοῦ μένον τῷ τμήματι τῆς τομῆς τεθέντι περὶ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ κατὰ τὸ Κ σημεῖον, ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Κ. Τετμήσθω δὴ ἡ ΓΚ τῷ Χ, ὥστε τριπλασίαν εἶναι τὴν ΓΚ τῆς ΚΧ· ἔσται ἄρα τὸ Χ σημεῖον κέντρον βάρους τοῦ ΑΖΓ τριγώνου· δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς. Ἐπεὶ οὖν ἰσόρροπον τὸ ΖΑΓ τρίγωνον αὐτοῦ μένον τῷ ΒΑΓ τμήματι κατὰ τὸ Κ τεθέντι περὶ τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρους, καί ἐστιν τοῦ ΖΑΓ τριγώνου κέντρον βάρους τὸ Χ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα κείμενον περὶ τὸ Θ κέντρον, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΧΚ. Τριπλασία δέ ἐστιν ἡ ΘΚ τῆς ΚΧ· τριπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τμήματος· Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΑΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΖΚ τῇ ΚΑ, τὴν δὲ ΑΔ τῇ ΔΓ· ἐπίτριτον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. [Τοῦτο οὖν φανερόν ἐστιν].

β'.

Τοῦτο δὴ διὰ μὲν τῶν νῦν εἰρημένων οὐκ ἀποδέδεικται, ἔμφασιν δέ τινα πεποίηκε τὸ συμπέρασμα ἀληθὲς εἶναι· διόπερ ἡμεῖς ὁρῶντες μὲν οὐκ ἀποδεδειγμένον, ὑπονοοῦντες δὲ τὸ συμπέρασμα ἀληθὲς εἶναι, τάξομεν τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν ἐξευρόντες αὐτοὶ τὴν ἐκδοθεῖσαν πρότερον.

Ὅτι δὲ πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιος τῆς σφαίρας ἐστίν, ὧδε θεωρεῖται κατὰ τρόπον τόνδε·

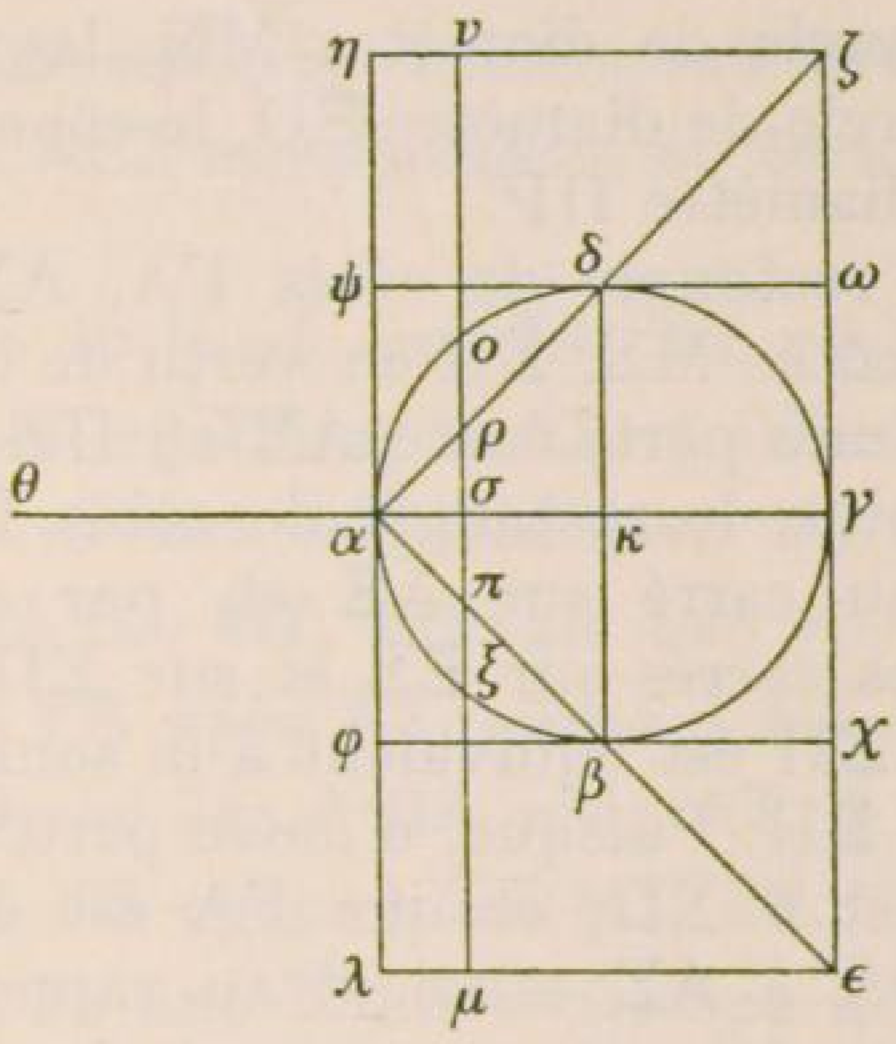

Fig. 122

Ἔστω γάρ τις σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις οὖσαι, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαίρᾳ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Α σημεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· ⟨ποιήσει δὴ κύκλον ὀρθὸν πρὸς⟩ τὴν ΑΓ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΕΖ. Ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἀναγεγράφθω ἄξονα ἔχων τῇ ΑΓ ἴσον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίνδρου αἱ ΕΛ, ΖΗ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις παράλληλος ὑπάρχουσα τῇ ΒΔ ἡ ΜΝ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὸν μὲν ΑΒΓΔ κύκλον κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ διάμετρον κατὰ τὸ Σ, τὴν δὲ ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Π, τὴν δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν ⟨κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῇ ΑΒΓΔ σφαίρᾳ⟩ κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ ΑΕΖ κώνῳ κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ τῷ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ, ἴση γὰρ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΠΣ, τῷ δὲ ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΞ, τουτέστιν τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΣΠ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ. Τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ · ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ⟨ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους τόν τε ἐν τῷ κώνῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ,⟩ καὶ τὸν ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ ἐστιν διάμετρος ἡ ΞΟ · ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τοὺς κύκλους τόν τε ἐν τῇ σφαίρᾳ καὶ τὸν ἐν τῷ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως αὐτὸς ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν εἰσιν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσιν καὶ τεθεῖσιν οὕτως ἐπὶ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ, ἰσορροπήσουσι κατὰ τὸ Α σημεῖον. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη ἀχθῇ ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις τῷ τε ἐν τῇ σφαίρᾳ γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσει ὁ κύλινδρος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων συναμφοτέροις τῇ τε σφαίρᾳ καὶ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὰ εἰρημένα στερεὰ κατὰ τὸ Α σημεῖον τοῦ μὲν κυλίνδρου μένοντος περὶ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, τῆς δὲ σφαίρας καὶ τοῦ κώνου μετενηνεγμένων, ὡς εἴρηται, περὶ κέντρον βάρους τὸ Θ, ἔσται ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κῶνον. Διπλασία δὲ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος συναμφοτέρου τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κώνου. Αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστί· τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ κώνοις τοῖς αὐτοῖς καὶ δυσὶ σφαίραις. Κοινοὶ ἀφῃρήσθωσαν δύο κῶνοι· εἷς ἄρα κῶνος ὁ ἔχων τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ ἴσος ἐστὶ ταῖς εἰρημέναις δυσὶ σφαίραις. Ὁ δὲ κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ, ἴσος ἐστὶν ὀκτὼ κώνοις, ὧν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, διὰ τὸ διπλῆν εἶναι τὴν ΕΖ τῆς ΒΔ. Οἱ ἄρα ὀκτὼ κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ σφαίραις. Τετραπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἤχθωσαν δὴ διὰ τῶν Β, Δ σημείων ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΒΧ, ΨΔΩ, καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ ΑΓ. Ἐπεὶ οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κυλίνδρου, ⟨οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλ⟩ληλόγραμμον τὸ ΦΔ, αὐτὸς δὲ οὗτος τριπλασίων ἐστὶν τοῦ κώνου, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις, ἑξαπλασίων ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κώνου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ. Ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα ἡ σφαῖρα, ἧς μέγιστός ἐστιν κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· ἡμιόλιος ἄρα ὁ κύλινδρος τῆς σφαίρας· ὅπερ ἔδει δειχθῆναι.

Τούτου τεθεωρημένου, διότι πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἔννοια ἐγένετο ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ· ὑπόληψις γὰρ ἦν καὶ διότι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ διότι πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

γ΄.

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου τούτου ⟨καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος ὁ τὴν μὲν βάσιν⟩ ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῷ σφαιροειδεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἄξονι τοῦ σφαιροειδοῦς, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ σφαιροειδοῦς· τούτου δὲ θεωρηθέντος φανερὸν ὅτι παντὸς σφαιροειδοῦς ἐπιπέδῳ τμηθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

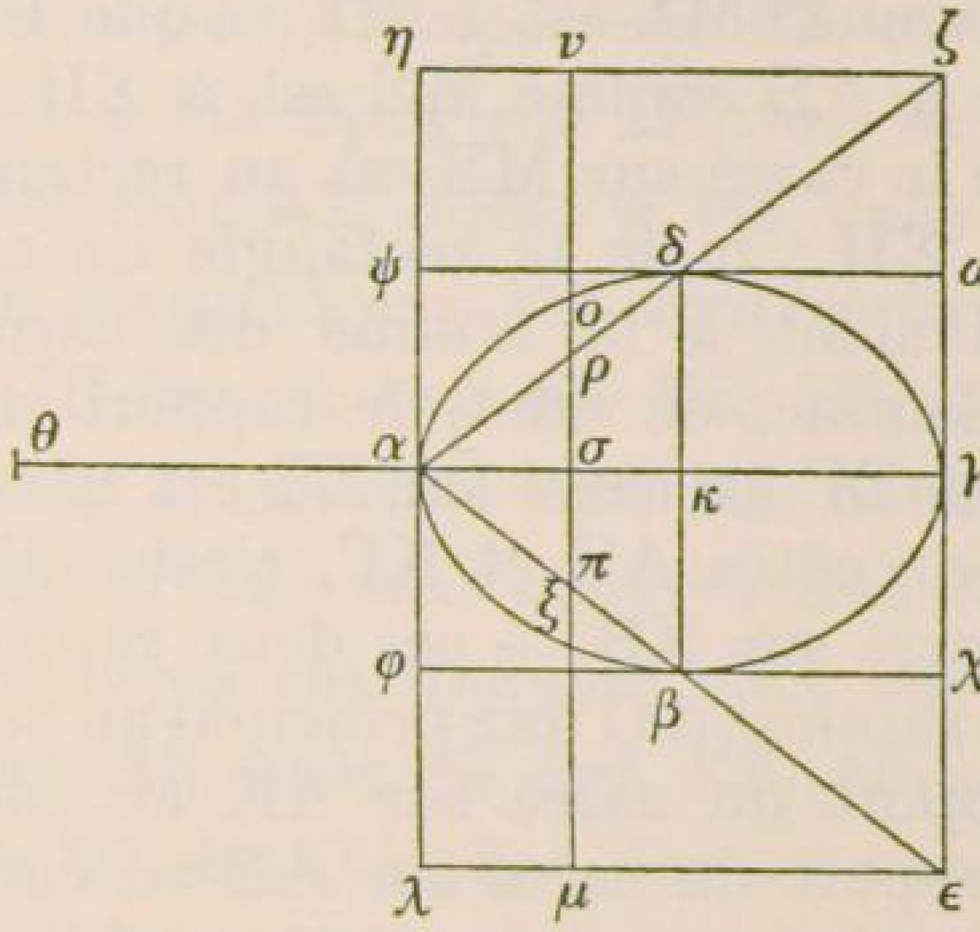

Fig. 123

Ἔστω γάρ τι σφαιροειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ γινέσθω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αὐτῆς ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῷ σφαιροειδεῖ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὴν ΑΓ, νοείσθω δὲ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν εἰρημένον κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· ἔσται δὴ ἡ τομὴ αὐτοῦ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὴν ΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΖ. Ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν αὐτὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΕΖ, ἄξονα δὲ τὴν ΑΓ εὐθεῖαν, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΑ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΘΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἤχθω δέ τις ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ ἡ ΜΝ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρ⟨θὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν⟩ μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ σφαιροειδεῖ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΣ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΠ, τουτέστιν ἡ ΜΣ πρὸς τὴν ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ· τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΠΣ, ΣΞ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΣ, ΣΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ [ἀμφότεροι γὰρ οἱ λόγοι ἐν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν εἰσίν], ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ἐναλλὰξ ἄρα ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΣΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΠ, ΠΜ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΠΣ τῷ ἀπὸ ΞΣ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΠΣ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ ΠΣ, ΣΞ ἴσον. Ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΠΣ, ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΣΞ, ΣΠ, οὕτως ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ· ὥστε ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ.

Συναμφοτέρων δὲ τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενηνεγμένων κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων συναμφοτέροις τοῖς κύκλοις τῷ τε ἐν τῷ σφαιροειδεῖ γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου ἰσόρροπος ὁ κύλινδρος ἔσται περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ τε σφαιροειδεῖ καὶ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, τοῦ δὲ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου συναμφοτέρων, ὡς ἐρρέθη, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ· ἔστιν οὖν ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφότερα τό τε σφαιρο⟨ειδὲς καὶ τὸν κῶνον⟩. Δ⟨ιπλα⟩σία δὲ ἡ ΑΘ τῆς ΑΚ· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος ἀμφοτέρων τοῦ τε σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου· εἷς ἄρα κύλινδρος ἴσος δυσὶν κώνοις καὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν. Εἷς δὲ κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τρισὶ κώνοις τοῖς αὐτοῖς· τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ κώνοις καὶ δυσὶ σφαιροειδέσι. Κοινοὶ ἀφῃρήσθωσαν δύο κῶνοι· λοιπὸς ἄρα εἷς κῶνος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ, ἴσος ἐστὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν. Εἷς δὲ κῶνος ὁ αὐτὸς ἴσος ἐστὶν ὀκτὼ κώνοις, ὧν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ· ὀκτὼ ἄρα κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν· καὶ τέσσαρες ἄρα κῶνοι ἴσοι ἑνὶ σφαιροειδεῖ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ σφαιροειδὲς τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσιόν ἐστι τοῦ εἰρημένου κώνου.

Ἤχθωσαν δὲ διὰ τῶν Β, Δ σημείων ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΧ, ΨΩ, καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΓ εὐθεῖα.

Ἐπεὶ οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κυλίνδρου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΔ, διὰ τὸ ἴσας αὐτῶν εἶναι τὰς βάσεις, τὸν δὲ ἄξονα τοῦ ἄξονος διπλάσιον, αὐτὸς δὲ ὁ κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΔ, τριπλασίων ἐστὶ τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΓ, ἑξαπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ εἰρημένου κώνου. Ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλάσιον τὸ σφαιροειδές· ἡμιόλιος ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ σφαιροειδοῦς· $\overline{\text{οι}}$.

δ′.

Ὅτι δὲ πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἐπιπέδῳ ἀποτεμνόμενον ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ τὸν ἄξονα τὸν αὐτόν, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται.

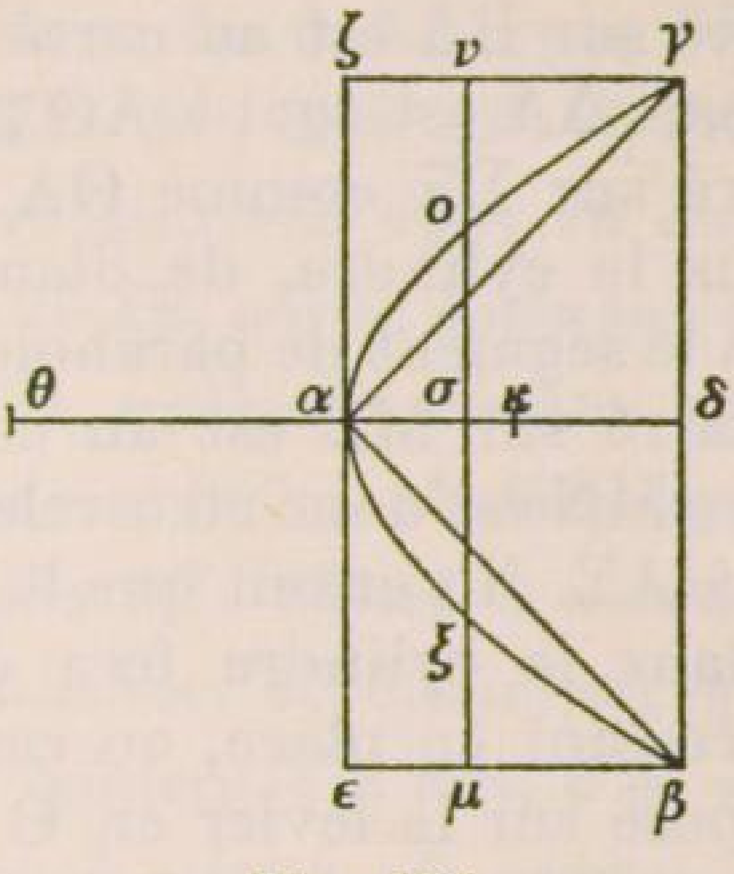

Fig. 124

Ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὀρθογωνίου κώνου τομὴν τὴν ΑΒΓ, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος ἡ ΔΑ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ ἡ τοῦ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς ⟨τὴν ΑΔ, νοείσθω δὲ κῶνος βάσιν⟩ μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, ἄξονα δὲ τὸν ΑΔ, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθογωνίου κώνου τομή ἐστιν ἡ ΒΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ, καὶ τεταγμένως κατηγμέναι εἰσὶν αἱ ΞΣ, ΒΔ, ἔστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ. Ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΘ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ. Ἰσόρροπος ἄρα ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, μετενεχθέντι καὶ τεθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον αὐτοῦ ⟨εἶναι τοῦ βάρους τὸ⟩ Θ· ⟨καί ἐστι τοῦ⟩ μὲν ⟨κύκλου, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ⟩ ΜΝ, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Σ, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΞΟ, μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΕΓ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΘ, ὅτι ἰσορροπήσει πρὸς τῷ Α σημείῳ ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων τῷ γενομένῳ ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Κ σημεῖον δίχα τεμνομένης τῆς ΑΔ κατὰ τὸ Κ σημεῖον, τοῦ δὲ τμήματος μετενηνεγμένου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ, ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ⟨ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὃν ὁ⟩ κύλινδρος πρὸς τὸ τμῆμα. Διπλασία δὲ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ τμήματος. Ὁ δὲ αὐτὸς κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον· δῆλον οὖν ὅτι τὸ τμῆμα ἡμιόλιόν ἐστιν τοῦ αὐτοῦ κώνου.

ϵ′.

Ὅτι δὲ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τοῦ ἀποτεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, τμηθείσης οὕτως τῆς εἰρημένης εὐθείας, ὥστε διπλάσιον εἶναι τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ λοιποῦ τμήματος, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου θεωρεῖται·

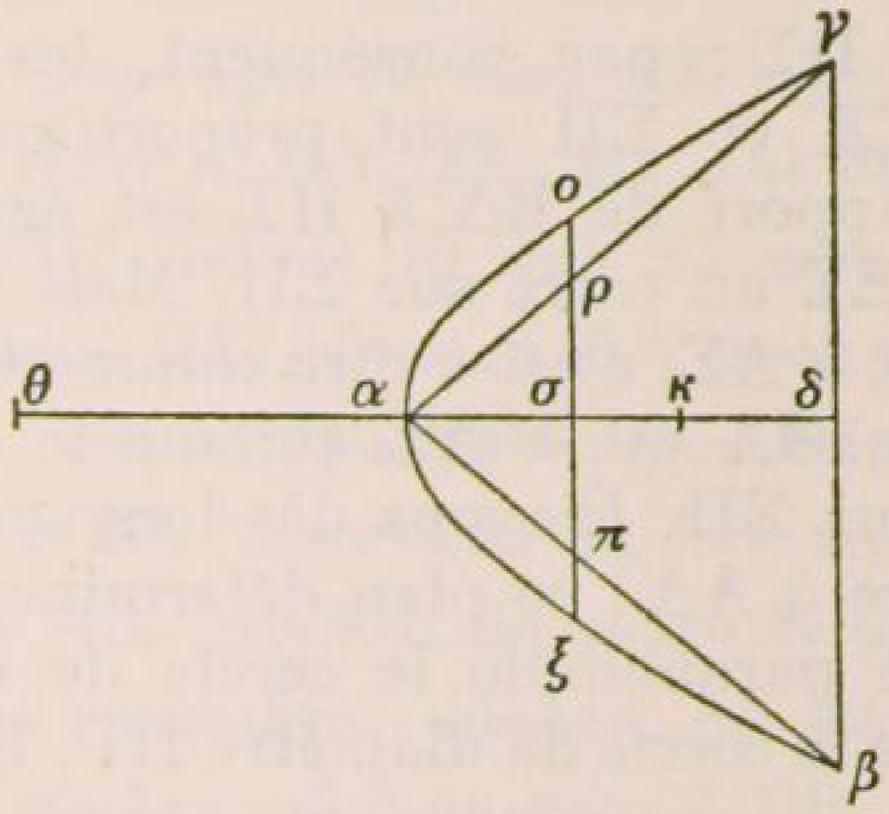

Fig. 125

Ἔστω τμῆμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἀποτεμνόμενον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἑτέρῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομήν, τοῦ δὲ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἐπιπέδου καὶ τοῦ τέμνοντος κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς ΑΒΓ τομῆς ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ τῆς ⟨ΔΑ ἐκβληθείσης ἴση αὐτῇ κείσθω ἡ ΑΘ, καὶ⟩ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ καὶ κῶνος ἐγγεγραμμένος ἐν τῷ τμήματι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ αἱ ΒΑ, ΑΓ, ἤχθω δέ τις ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ ἡ ΞΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΓ, τεμνέτω δὲ αὔτη τὴν μὲν τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομὴν κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὰς δὲ τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ τὰ Π, Ρ σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομῇ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον αἱ ΞΣ, ΒΔ, ἔστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ. Ὡς δὲ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΠΣ · ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ. Ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΣ τῷ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ · ἀνάλογον ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΔ, ΣΞ, ΣΠ, καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ · καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ. Ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τῆς ΞΟ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ · ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμε⟨τρος ἡ ΠΡ. Ἰσορροπήσει ἄρα πε⟩ρὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένων τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένοντος κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Σ, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντος ὡς ἐρρέθη κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ἰσορροπήσουσιν ἄρα πρὸς τῷ Α σημείῳ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος αὐτοῦ μένων ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον τῷ γενομένῳ κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντων οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ τε τμήματος καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον τεθέντες πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ τμήματι αὐτοῦ μένοντες πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ ⟨κατὰ τὸ Θ σημεῖον οὕτως, ὥστε⟩ αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ· ἰσόρροπον οὖν καὶ τὸ τμῆμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένον τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν συναμφοτέρων τῶν μεγεθῶν ὡς ἑνὸς λεγομένων κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Α, αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τοῦ μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ λοιποῦ ἄρα μεγέθους τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΑΘ εὐθείας ἐκβεβλημένης ἐπὶ τὸ Α καὶ ἀποληφθείσης ἀπ' αὐτῆς τῆς ΑΚ τηλικαύτης, ⟨ὥστε τὴν ΑΘ⟩ πρὸς αὐτὴν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον. Ἡμιόλιον δέ ἐστιν τὸ τμῆμα τοῦ κώνου· ἡμιόλιος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ, καί ἐστιν τὸ Κ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τῆς ΑΔ τετμημένης οὕτως, ὥστε διπλάσιον εἶναι τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος τοῦ λοιποῦ τμήματος.

ς'.

Παντὸς ἡμισφαιρίου τὸ κέντρον ⟨τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐστίν, ᾗ⟩ ἐστιν ἄξων αὐτοῦ, τμηθείσης οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ πέντε πρὸς τὰ τρία.

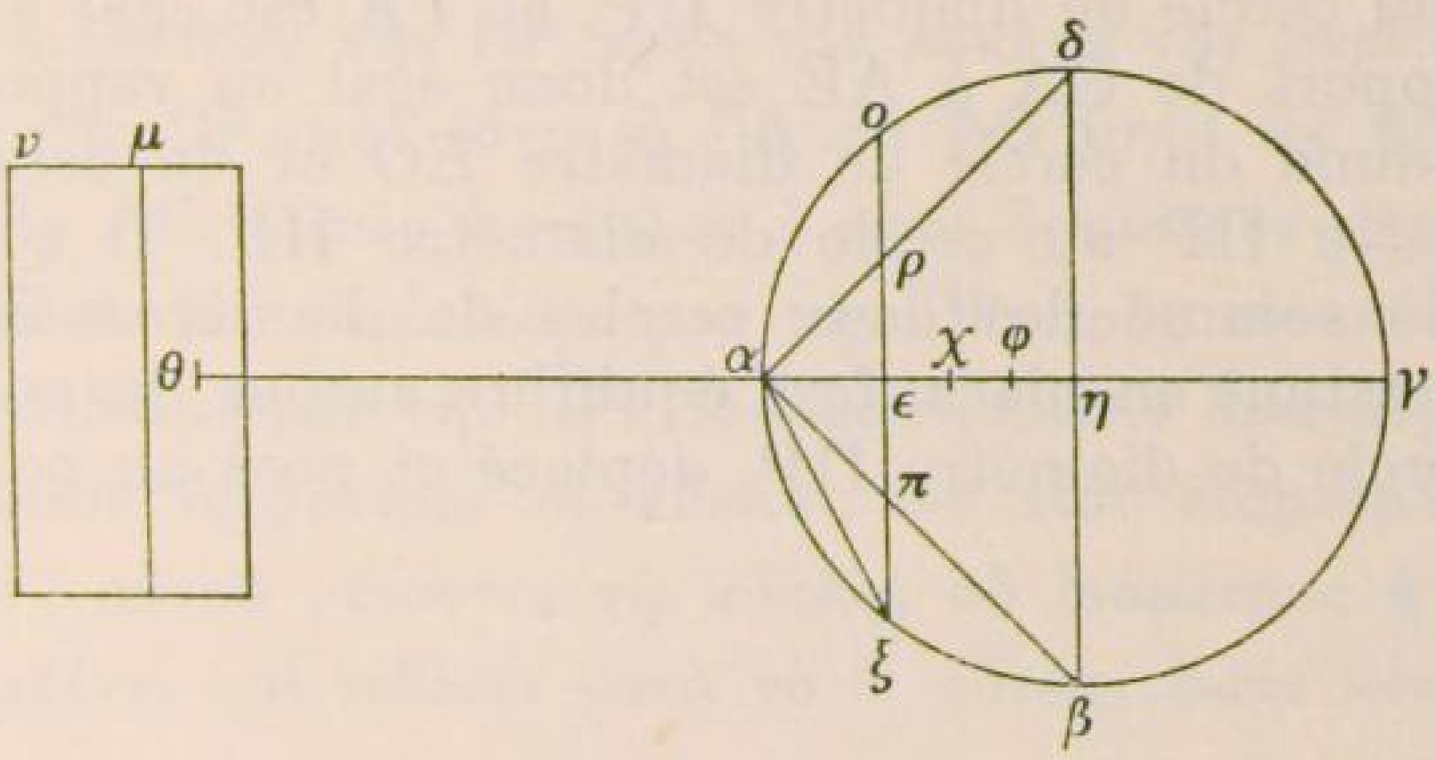

Fig. 126

Ἔστω σφαῖρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ γενέσθω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΒΔ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἔστω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κώνου αἱ ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ἡ ΘΓ εὐθεῖα, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ ΒΑΔ ἡμικυκλίῳ ἡ ΞΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΔ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὰς δὲ τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ τὰ Π, Ρ σημεῖα, τὴν δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τῆς ΞΟ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΕ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ ἡμισφαιρίῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΕ, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τῷ δὲ ἀπὸ ΞΑ ἴσα τὰ ἀπὸ ⟨ΑΕ, ΕΞ, τῇ δὲ ΑΕ ἴση ἡ ΕΠ, ὡς ἄρα ἡ ΑΓ⟩ πρὸς ΑΕ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ, καί ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ ἴση· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ. Ἰσορροπήσουσιν ἄρα περὶ τὸ Α σημεῖον ἀμφότεροι οἱ κύκλοι, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ μένοντες τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντι καὶ τεθέντι κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ἀμφοτέρων μὲν τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ μενόντων κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ⟨τὸ Ε, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντος τὸ Θ, ἔστιν ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, πρὸς τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ⟩ ΞΟ, ⟨ΠΡ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ παράλληλος τῇ⟩ Β⟨Η⟩Δ, καὶ ⟨ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀναστα⟩θῇ ὀρθὸν πρὸς ⟨τὴν ΑΓ⟩, ἰσορροπ⟨ήσουσιν⟩ περὶ τὸ Α ⟨σημεῖον⟩ ἀμφότερ⟨οι οἱ κύκλοι ὅ τε ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ γενό⟩μεν⟨ος⟩ κ⟨αὶ ὁ ἐν τῷ κών⟩ῳ αὐ⟨τοῦ μένοντες τῷ γ⟩ενομένῳ ⟨κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ⟩ μετενεχθέντι ⟨καὶ⟩ τε⟨θέντι τοῦ⟩ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. ⟨Συμπληρωθέντων οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ τε⟩ ἡμισφαιρίου καὶ τοῦ κώ⟨νου⟩ ἰσορ⟨ροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον πάντες οἱ κύκλο οἱ ἐν τῷ ἡμισφαι⟩ρίῳ καὶ οἱ ⟨ἐν τῷ κώνῳ αὐτοῦ⟩ μένοντες ⟨πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν⟩ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον ⟨εἶναι αὐτῶν⟩ τοῦ βάρους τὸ Θ· ⟨ὥστε ἰσορροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον τό τε ἡμισφαίριον καὶ ὁ κῶνος αὐτοῦ⟩ μένοντα τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι ⟨τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ⟩ οὕτως, ὥστε κέν⟨τρον⟩ αὐτοῦ ⟨εἶναι τοῦ βάρους⟩ τὸ Θ σημεῖον . . . . δ . . . . ἔλασσον

. . . .

. . . .

. . . . τῶν δὲ . . . . . ⟨ἰσορροπ⟩ού⟨ντ⟩ων κατὰ τὸ ⟨Α⟩ . . . . τρ . . . . . . τὸ . . . . . ⟨καὶ ἐπεί⟩ ἐστιν, ὡς ἡ Θ⟨Α πρὸς⟩ΑΧ, ... ἄξων ὁ ΑΗ.. τὰ....... μον .... ⟨ση⟩μεῖ⟨ον⟩........ κῶνον τοῖ⟨ς⟩..... τοῦ κώνου .... καὶ ἐπεὶ τετρα⟨πλασία ἐστὶν⟩ ἡ σφαῖρα τοῦ ⟨κώνου, οὗ βάσις ὁ⟩ περὶ ⟨διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, ἄξων δὲ ἡ ΑΗ⟩ ....

ζ'.

Θεωρεῖται ⟨δὲ⟩ διὰ τοῦ ⟨τρόπου τού⟩του καὶ ὅτι π⟨ᾶν τμῆμα⟩ σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον ⟨τὸν βάσιν⟩ ἔχοντα τὴν αὐ⟨τὴν τῷ τμήματι⟩ καὶ ἄξονα ⟨τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος

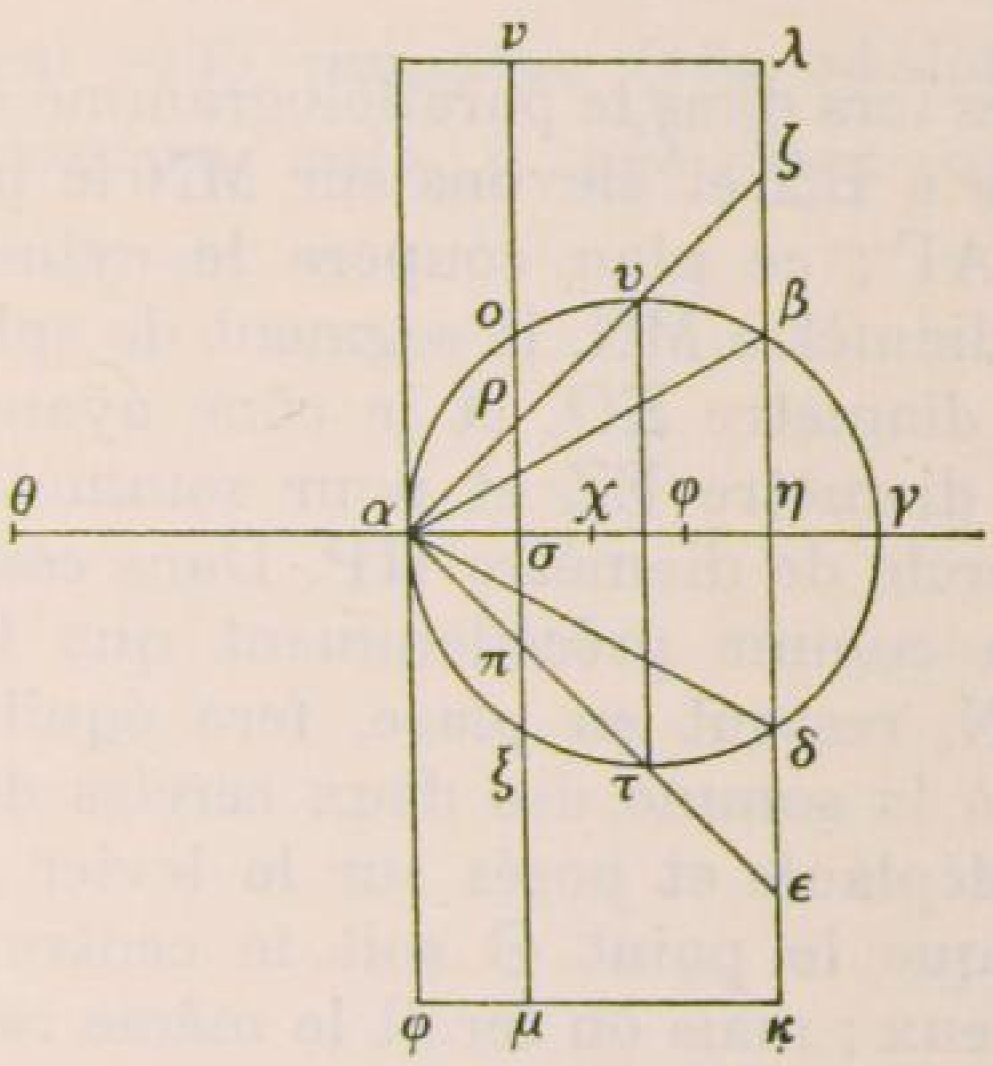

Fig. 127

πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος⟩..................

.... τω ....

.... ὀρθὴ ...... τὸ αὐτὸ ....

....

.... παρὰ ....

.... ⟨καὶ ἀπὸ τῆς⟩ ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, κύκλον, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΠΡ. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἰσόρροπος περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύ⟨κλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετεν⟩εχθεῖσι τοῦ ζυγοῦ ⟨κατὰ τὸ Θ,⟩ ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον ⟨τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ· ὁμοίως⟩ δὲ ⟨ἐπὶ πάντων⟩. Συμπληρωθέντων οὖν καὶ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ⟨κώνου καὶ τοῦ⟩ τμήματος ⟨τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν κύκλων ἰσορροπήσει καὶ⟩ ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων συναμφοτέροις τῷ τε κώνῳ καὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. Τεμνέσθω δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὰ Φ, Χ σημεῖα οὕτως ὥστε τὴν μὲν ΑΧ εἶναι ἴσην τῇ ΧΗ, τὴν δὲ ΗΦ τρίτον μέρος τῆς ΑΗ· ἔσται δὴ τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ διὰ τὸ διχοτομίαν εἶναι τοῦ ΑΗ ἄξονος. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφότερον τόν τε κῶνον, οὗ διάμετρος τῆς βάσεως ἡ ΕΖ, καὶ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ. Καὶ ἐπεὶ ⟨τριπλ⟩ασία ἐστὶν ἡ ΗΑ τῆς ΗΦ, τρίτον μέρος ἐστὶν ⟨τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΦ τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ. Ἴσον δὲ⟩ τῷ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ τὸ ἀπὸ ΗΒ· ἔσται δὴ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΗ τρίτον μέρος τὸ ὑπὸ ΓΗ, ⟨ΗΦ⟩ . . . . ὑπὸ ΗΓ . . . τὸ δὲ ἀπὸ ΑΗ . . . . ὑπὸ ΗΓ . . . . τῆς . . . . ΚΛ . . . . τρον . . . . οὕτως ⟨ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ⟩ διάμετρον ⟨τὴν.. κύκλος⟩ πρὸς τὸν . . . . ⟨ὁ κύλινδρος, οὗ⟩ βάσις ⟨. . . . ὁ περὶ⟩ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος πρὸς τὸν ΑΕΖ κῶνον. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΑ πρὸς . . . . ἄρα ἡ . . . . πρὸς τὸν κῶνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ⟨ὡς ἡ ΘΑ⟩ πρὸς ΑΧ, οὕτως ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρ⟨ον⟩ τὴν ΚΛ κύκλος ⟨πρὸς τὸ⟩ τμῆμα ⟨τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΔ καὶ τὸν⟩ κῶνον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς συναμφοτέρας τὰς . . . . Φ. . . . . τὸ ΑΒΔ ⟨τμῆμα τῆς σ⟩φαίρ⟨ας⟩ . . . τα . . . . καὶ . . . . ὅ τε . . . . ὡς τὸ ΑΒΔ τμῆμα πρὸς τὸν κύλινδρον, οὗ ἐστι βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν . . κύκ⟨λος⟩, ἄξων ⟨δὲ ὁ⟩ α⟨ὐτός, οὕτως⟩

. . . . Χ πρὸς . . . . ὡ⟨ς δὲ ὁ⟩ κύλινδρος, οὗ βάσις ⟨ὁ περὶ διάμετρον⟩ τὴν Κ⟨Λ κύκλος, πρὸς τὸν⟩ ΑΒΔ κῶνον, ⟨οὕτως⟩ . . . . τω . . . . πρὸς . . Β . . . . η . Φ . . . . ὡς ἡ . . . . ἡ Α. Τῇ . . . . καὶ ἡ ΗΓ καὶ . . . . . .

η'.

⟨Ὁμοίως δὲ θεωρεῖτ⟩αι διὰ τοῦ ⟨αὐτοῦ τρόπου καὶ ὅτι⟩ πᾶν τμῆμα ⟨σφαιροειδέος⟩ ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἥ τε ἡμίσεια τοῦ ἄξονος τοῦ ⟨σ⟩φαιρο⟨ειδέος⟩ καὶ ⟨τοῦ ἄξονος⟩ τοῦ ⟨ἀντι⟩κειμένου ⟨τμήματος⟩ πρὸ⟨ς τὸν ἄξονα τοῦ ἀντικειμένου τμήματος⟩.

θ'.

⟨Παντὸς τμήματος σφαίρας τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, διῃρημένης οὕτως ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τετραπλασία τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι πρὸς συναμφότερον τόν τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριεχομένου.⟩ . . . .

. . . . ⟨τοῦ δὲ ἀποτε⟩τμηκότος ⟨τὸ τμῆμα ἐπιπέδου ἡ ΒΔ, ἡ δὲ⟩ ΓΑ εὐθεῖα διά⟨με⟩τρ⟨ος ἔστω ὀρθὴ πρὸς τὴν⟩ ΒΔ καὶ τετμή⟨σθω κ⟩ατ⟨ὰ τὸ Η σημεῖον· ὥ⟩στε τοῦ τμήμ⟨ατος, οὗ κορυ⟩φὴ τὸ Α σημεῖον, ἄξων ⟨ἔσται ἡ ΑΗ,⟩ τ⟨οῦ δ⟩ὲ ἀντικειμέν⟨ου ἄξων ἡ Η⟩Γ. Τετμήσθω δὲ ἡ ΑΗ κατὰ ⟨τὸ Χ, ὥστε⟩ εἶναι ὡς τὴν ⟨Α⟩Χ πρὸς ΧΗ, ⟨οὕτως τήν τε ΑΗ καὶ τὴν⟩ τετρα⟨πλασί⟩αν τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ τὴν διπλασίαν ⟨τῆς ΗΓ. Λ⟩έγω ὅτι ⟨τοῦ τ⟩μ⟨ήματος, οὗ⟩ κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, ⟨κ⟩έντρ⟨ον τοῦ βάρους ἐστὶ τὸ⟩ Χ . . . . φοτέροις . . . . τμημ . . ., οὗ κορυ⟨φὴ⟩ . . . σημεῖον . . . . . . ΗΑ . . ἐχ . . . . τὴν Η. Λόγον . . . . κέντρον . . . . Χ. εἰ . . τμήθη . . . ρ . . . . χηματ . . μει . . . . ω . . . ἐν δὴ . . . τερ . . . . καὶ ἐκβεβλήσθω

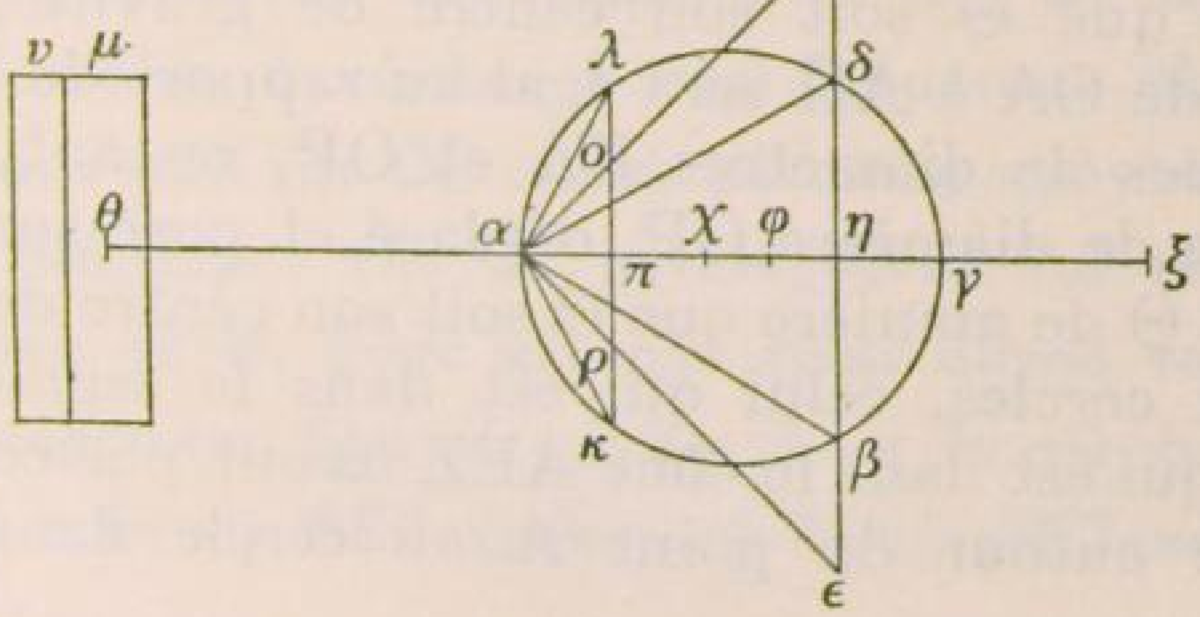

Fig. 128

ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴση ἡ ΓΞ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ἡ ΓΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, γεγράφθω δὲ καὶ κύκλος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀποτέμνοντι τὸ τμῆμα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΑΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου ⟨γεγράφθω κῶνος κορυφὴν ἔχων τὸ Α σημεῖον,⟩ πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κώνου αἱ ΑΕ, ΑΖ, καὶ ἤχθω τις τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΚΛ καὶ συμβαλλέτω τῇ μὲν περιφερείᾳ τοῦ τμήματος κατὰ τὰ Κ, Λ, ταῖς δὲ τοῦ ΑΕΖ κώνου πλευραῖς κατὰ τὰ Ρ, Ο, τῇ δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Π. Ἐπεὶ δή ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΠ, ΠΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΠ τὸ ἀπὸ ΠΟ, ἐπεὶ καὶ τῷ ἀπὸ ΑΗ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστὶν ἴσον, ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΠ. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ΟΡ. Ἐπεὶ οὖν ὡς οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΚΛ, ΟΡ κύκλοι πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΠΑ, μετακείσθω ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ κύκλος καὶ κείσθω τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ αὐτοῦ μένοντες πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ μετενεχθέντα καὶ τεθέντα τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ· ἰσόρροποι ἄρα οἱ κύκλοι ὅ τε ἐν τῷ τμήματι τῷ ΒΑΔ καὶ ὁ ἐν τῷ ΑΕΖ ⟨κώνῳ τῷ ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ περὶ⟩

τὸ Α. Ὁμοίως δὲ καὶ πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι καὶ ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ αὐτοῦ μένοντες κατὰ τὸ Α σημεῖον ἰσόρροποι πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτῶν τοῦ βάρους τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΔ τμῆμα τῆς σφαίρας καὶ ὁ ΑΕΖ κῶνος ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένοντα τῷ ΕΑΖ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἔστω δὲ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ἴσος κύλινδρος ὁ ΜΝ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Φ, ὥστε τετραπλασίαν εἶναι τὴν ΑΗ τῆς ΦΗ· τὸ Φ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ ΕΑΖ κώνου· τοῦτο γὰρ προγράφεται. Καὶ τετμήσθω ἔτι ὁ ΜΝ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέμνοντι πρὸς ὀρθάς, ⟨ὥστε τὸν Μ κύλιν⟩δρον ἰσορροπεῖν τῷ ΕΑΖ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ἰσόρροπος ὁ ΕΑΖ κῶνος καὶ τὸ ΑΒΔ τμῆμα αὐτοῦ μένοντα τῷ ΕΑΖ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ, καί ἐστιν τῷ ΕΑΖ κώνῳ ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος, καὶ κεῖται ἑκάτερος τῶν Μ, Ν κυλίνδρων κατὰ τὸ Θ, καὶ ἰσόρροπος ὁ ΜΝ κύλινδρος ἑκατέροις, ἰσόρροπος καὶ ὁ Ν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Α σημεῖον. Καὶ [ἐπεί] ἐστιν ὡς τὸ ΒΑΔ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΗΓ· τοῦτο γὰρ προγράφεται. Ὡς δὲ ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΒΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ, τῷ δὲ ἀπὸ ΗΕ ἴσον τὸ ἀπὸ ΗΑ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ · ὡς ἄρα ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸ ΒΑΔ τμῆμα, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΞ · δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΧ πρὸς ΧΗ, οὕτως ἡ ΗΑ καὶ ἡ τετραπλασία τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ τὴν διπλασίαν τῆς ΗΓ, ἀνάπαλιν ἔσται ὡς ἡ ΗΧ πρὸς ΧΑ, οὕτως ἡ διπλασία τῆς ΓΗ καὶ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν τετραπλῆν τῆς ΓΗ καὶ τὴν ΗΑ. Συνθέντι ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως ἡ ἑξαπλασία τῆς ΓΗ καὶ διπλασία τῆς ΗΑ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ τετραπλῆν τῆς ΗΓ. Καὶ τῆς μὲν ἑξαπλασίας τῆς ΗΓ καὶ διπλασίας τῆς ΗΑ ἡ ΗΞ, τῆς δὲ τετραπλασίας τῆς ΗΓ καὶ τῆς ΗΑ τέταρτον μέρος ἡ ΓΦ · τοῦτο γὰρ φανερόν · ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΓΦ · ὥστε καὶ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως τὸ τμῆμα, οὗ ἐστι κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἐστι κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλος · ὡς ἄρα τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. Καὶ ἐπεὶ ἰσόρροπος ὁ Μ κύλινδρος τῷ ΕΑΖ κώνῳ κατὰ τὸ Α, καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ ΕΑΖ κώνου τὸ Φ, ἔσται ἄρα ὡς ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν Μ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΦ, τουτέστιν ἡ ΓΑ πρὸς ΑΦ. Καί ἐστι τῷ ΕΑΖ κώνῳ ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος · διελόντι ἄρα ὡς ὁ ΜΝ κύλινδρος πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΦ. Καί ἐστιν ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος τῷ ΕΑΖ κώνῳ· ὡς ἄρα ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΓΦ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΓΦ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ· δι' ἴσου ἄρα ἔσται ὡς τὸ ΑΒΔ τμῆμα πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ. Καὶ ἐδείχθη ἰσόρροπον τὸ ΒΑΔ τμῆμα τῷ Ν κυλίνδρῳ κατὰ τὸ Α, καί ἐστι τοῦ Ν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Θ· καὶ τοῦ ΒΑΔ ἄρα τμήματος κέντρον τὸ Χ σημεῖον. [τὸ σχῆμα].

ιʹ.

Ὁμοίως δὲ τούτοις θεωρεῖται καὶ ὅτι παντὸς τμήματος σφαιροειδέος τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, διῃρημένης τῆς εὐθείας, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τετραπλασία τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι πρὸς συναμφότερον τόν τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριεχομένου.

ιαʹ.

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου ⟨καὶ ὅτι πᾶν τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος⟩ πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ὅ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τριπλασία τῆς προσούσης τῷ ἄξονι πρὸς συναμφότερον τόν τε ἄξονα τοῦ τμήματος τοῦ κωνοειδέος καὶ τὴν διπλασίαν τῆς προσούσης τῷ ἄξονι, κέντρον δὲ τοῦ βάρους τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος τμηθέντος τοῦ ἄξονος, ⟨ὥστε⟩ τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ὅ τε τριπλάσιος τοῦ ἄξονος ⟨καὶ ἡ ὀκταπλασία⟩ τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ τοῦ κωνοειδέος καὶ τὴν τετραπλασίαν αὐτῆς τῆς προσκειμένης πρὸς αὐτόν· καὶ ἄλλων πλειόνων ἁ .... θεωρουμένων τὰ ..... περιλήψομεν ῥη .... τως, ἐπεὶ ὁ τρόπος ὑποδέδεικται διὰ τῶν προειρημένων.

ιβ'.

Ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίον τετραγώνοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν [παραλληλογράμμων] τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, διὰ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευ⟨ρᾶς τοῦ ἀπεναντίον τετραγώνου ἐπίπε⟩δον ἀχθῇ, ὅτι τὸ ἀποτμηθὲν σχῆμα ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου ⟨ἕκτον⟩ ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος, διὰ τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται. Δείξαντες δὲ ἀναχωρήσομεν ἐπὶ τὴν διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

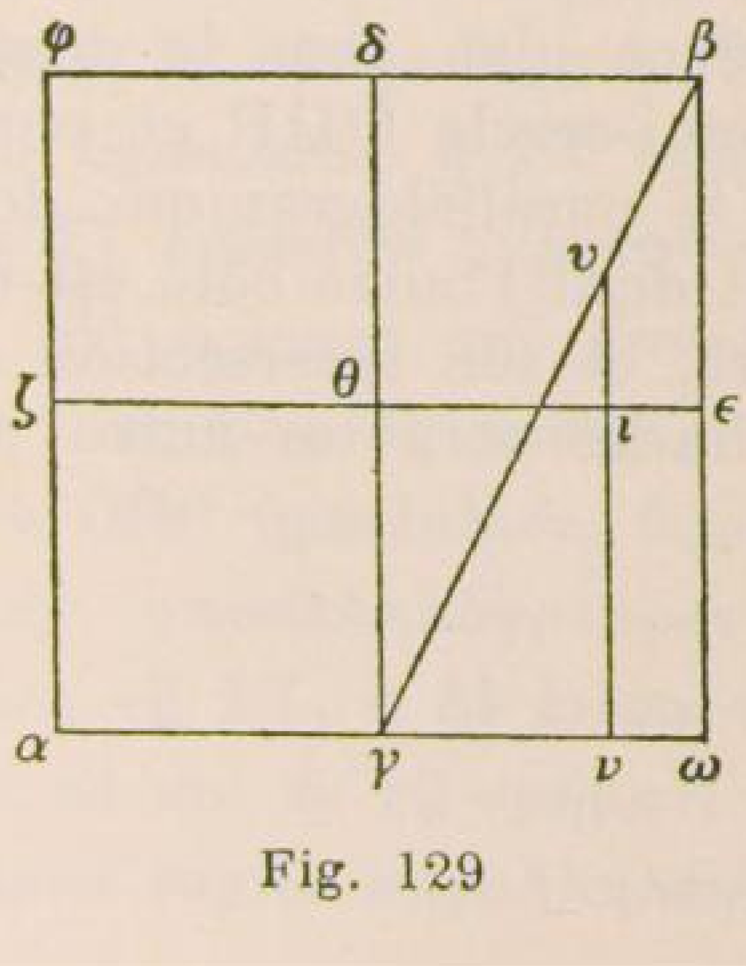

Fig. 129

Νοείσθω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις καὶ ἐν τῷ πρίσματι κύλινδρος ἐγγεγραμμένος ὡς εἴρηται, τμηθέντος δὲ τοῦ πρίσματος διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου τοῦ μὲν πρίσματος τοῦ τὸν κύλινδρον ἔχοντος τομὴ ἔστω τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένου ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμῆμα κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΓΔ εὐθεῖα, καὶ τεμνέτω αὐτὴν ἡ ΕΖ δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς, καὶ διὰ τῆς ΕΖ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΓΔ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ πρίσματι τομὴν τετράγωνον, ἐν δὲ τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον. Ἔστω οὖν τοῦ μὲν πρίσματος τομὴ τὸ ΜΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ κυλίνδρου ὁ ΞΟΠΡ ⟨κύκλος, καὶ ἐφαπτέσθω ὁ κύκλος⟩ τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν κατὰ τὰ Ξ, Ο, Π, Ρ σημεῖα, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ διὰ τῆς ΕΖ ἀχθέντος ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΚΛ εὐθεῖα· τέμνει δὲ αὐτὴν δίχα ἡ ΠΘΞ. Ἤχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ ἡ ΣΤ πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ ΠΧ, καὶ ἀπὸ τῆς ΣΤ ἐπίπεδον ἀνασταθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΞΠ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΞΟΠΡ κύκλος· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν τῷ ἡμικυλίνδρῳ, οὗ ἐστι βάσις τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, ὕψος δὲ ὁ ἄξων τοῦ πρίσματος, τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἔσται μία μὲν πλευρὰ ἡ ἴση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ κυλίνδρου πλευρᾷ, ποιήσει δὲ καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτετμημένῳ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν

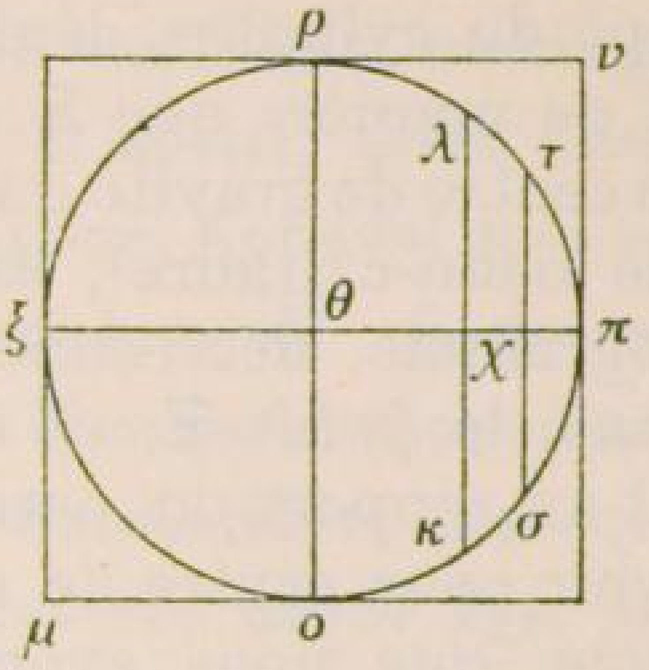

Fig. 130

ἡ μὲν ἑτέρα πλευρὰ ἴση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ ΝΥ · ἔστω δὲ οὕτως ἡ ΝΥ ἠγμένη ἐν τῷ ΔΕ παραλληλογράμμῳ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΩ ἴσην ἀπολαμβάνουσα τὴν ΕΙ τῇ ΠΧ. Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΓ, καὶ παράλληλος ἡ ΝΙ τῇ ΘΓ, καὶ διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΘ, ΓΒ, ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΙ, οὕτως ἡ ΩΓ πρὸς ΓΝ, τουτέστιν ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ. Ὡς δὲ ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον τὸ γενόμενον ⟨ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γε⟩νόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου · ἀμφοτέρων γὰρ τῶν παραλληλογράμμων ἡ αὐτὴ πλευρά ἐστιν ἡ ΣΤ · καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΠ, ἡ δὲ ΙΘ τῇ ΧΘ · καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΠΘ τῇ ΘΞ, ὡς ἄρα ἡ ΘΞ πρὸς ΘΧ, οὕτως τὸ γενόμενον παραλληλόγραμμον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γενόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου.

Νοείσθω μετακείμενον τὸ ἐν τῷ τμήματι παραλληλόγραμμον καὶ κείμενον κατὰ τὸ Ξ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ, καὶ ἔτι νοείσθω ζυγὸς ἡ ΠΞ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Θ · ἰσορροπεῖ δὴ περὶ τὸ Θ σημεῖον τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ μένον τῷ παραλληλογράμμῳ τῷ γενομένῳ ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον. Καὶ ἐπεί ἐστι τοῦ μὲν παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, τοῦ δὲ παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ, καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΞΘ πρὸς ΘΧ, ὃν τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ εἴπομεν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Χ, πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ εἴπομεν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Ξ, ἰσορροπήσει ἄρα περὶ τὸ Θ τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, τῷ παραλληλογράμμῳ, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ὅταν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΠΘ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΠΘ καὶ ἐκβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΞΟΠΡ κύκλος, [ὅτι] τὸ γινόμενον παραλληλόγραμμον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ ἰσόρροπον περὶ τὸ Θ σημεῖον αὐτοῦ μένον τῷ παραλληλογράμμῳ τῷ γενομένῳ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μενενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον. Καὶ πάντα ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ γενόμενα ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ μένοντα ἰσορροπήσει περὶ τὸ Θ σημεῖον πᾶσι τοῖς παραλληλογράμμοις τοῖς γενομένοις ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον· ὥστε ἰσορροπεῖν καὶ τὸ ἡμικυλίνδριον αὐτοῦ μένον περὶ τὸ Θ σημεῖον τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον.

ιγ΄.

Ἔστω δὴ πάλιν τὸ ⟨ὀρθὸν πρὸς⟩ τὸν ἄξονα παραλληλόγραμμον τὸ ΜΝ καὶ ὁ κύκλος ⟨ὁ⟩ ΞΟ⟨ΠΡ⟩, καὶ ἐπεζ⟨εύχθω⟩σαν αἱ ΘΜ, ΘΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστι τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ εἰρημένα ἐπίπεδα·

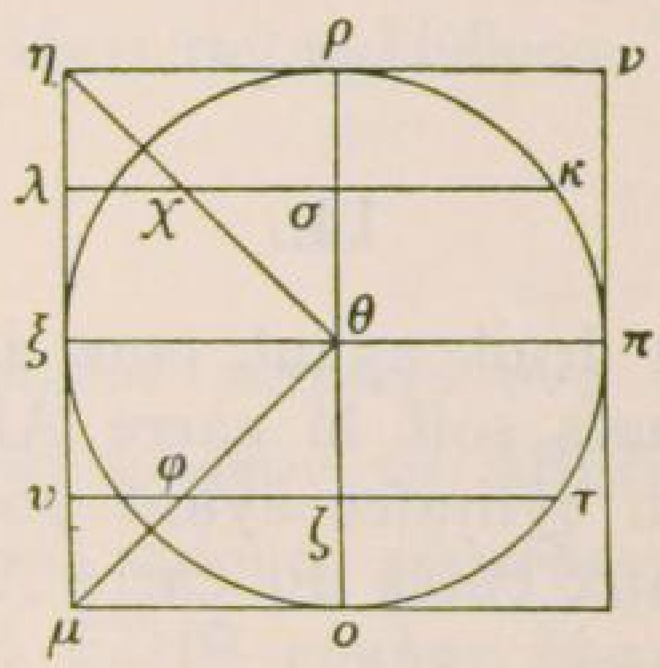

Fig. 131

ἔσται δή τι πρίσμα βάσιν μὲν ἔχον τηλικαύτην, ἡλίκη ἐστὶ τὸ ΘΜΗ τρίγωνον, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, καί ἐστι τὸ πρίσμα τοῦτο τέταρτον μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος τοῦ περιέχοντος τὸν κύλινδρον. Ἤχθωσαν δέ τινες εὐθεῖαι ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ καὶ ἐν τῷ ΜΝ τετραγώνῳ αἱ ΚΛ, ΤΥ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΠΞ· τέμνουσιν δὴ αὗται τὴν μὲν τοῦ ΟΠΡ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὰ Κ, Τ σημεῖα, τὴν δὲ ΟΡ διάμετρον κατὰ τὰ Σ, Ζ, τὰς δὲ ΘΗ, ΘΜ κατὰ τὰ Φ, Χ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῶν ΚΛ, ΤΥ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὴν ΟΡ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ⟨ΞΟΠΡ κύκλος· ποιήσει δὴ τὸ ἕτερον ἐν⟩ μὲν τῷ ἡμικυλινδρίῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν μία μὲν πλευρὰ ἴση τῇ ΚΣ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ πρίσματι τῷ ΘΗΜ ὁμοίως παραλληλόγραμμον, οὗ ἔσται μία μὲν ἴση τῇ ΛΧ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι· διὰ δὲ τὰ αὐτὰ ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυλινδρίῳ ἔσται τι παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστι μία μὲν πλευρὰ ἴση τῇ ΤΖ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι ⟨τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ πρίσματι παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν ἡ μὲν μία⟩ πλευρὰ ἴση τῇ ΥΦ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου . . . . . .

ιδ'.

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις, καὶ ἔστω αὐτοῦ μία τῶν βάσεων τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, καὶ ἔστω τοῦ κυλίνδρου βάσις ὁ ΕΖΗΘ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τοῦ

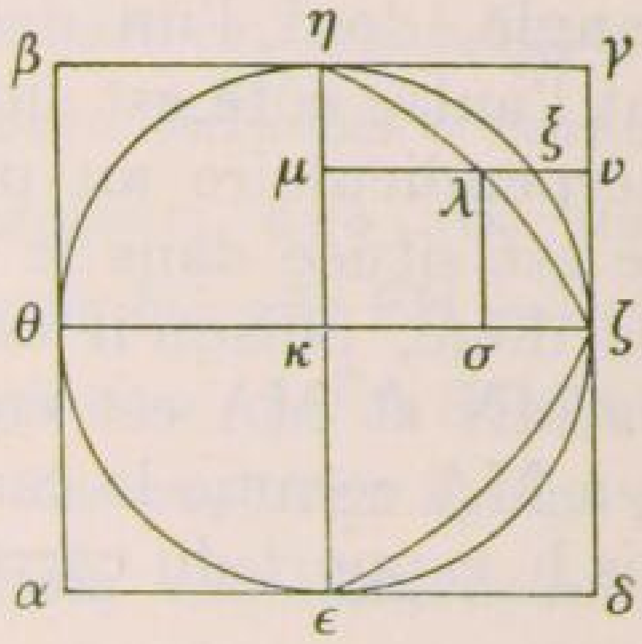

Fig. 132

ΑΒΓΔ πλευρῶν κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τῆς ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓΔ τῆς κατὰ τὴν ΓΔ ἐπίπεδον ἤχθω· ἀποτεμεῖ δὴ τοῦτο ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος ἄλλο πρίσμα, ὃ ἔσται τέταρτον μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος, αὐτὸ δὲ τοῦτο ἔσται περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν παραλληλογράμμων καὶ δύο τριγώνων κατεναντίον ἀλλήλοις. Γεγράφθω δὴ ἐν τῷ ΕΖΗ ἡμικυκλίῳ ὀρθογωνίου κώνου τομή, ἔστω ⟨δὲ⟩ . . . . ἐν τῇ τομῇ . . τῆς ἡ ΖΚ, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ παράλληλος οὖσα τῇ ΚΖ· τεμεῖ δὴ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ξ, τὴν δὲ τοῦ κώνου τομὴν κατὰ τὸ Λ. Καί ἐστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΜΝΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΖ· τοῦτο γάρ ἐστι σαφές· διὰ τοῦτο δὴ ἔσται ὡς ἡ ΜΝ πρὸς ΝΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΣ. Καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΕΗ· ποιήσει δὴ τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ πρίσματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος τομὴν τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ ΜΝ, ἡ δὲ ἑτέρα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΓΔ ἀναγομένη ἀπὸ τοῦ Ν ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἐν αὐτῷ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ· ποιήσει δὲ καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς ΕΗ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τῆς κατεναντίον τῇ ΓΔ τομὴν τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ ΜΞ, ἡ δὲ ἑτέρα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου ⟨ἀν⟩ηγμένη ⟨ἀπὸ τοῦ Ξ⟩ ὀρθὴ πρὸς τὸ ΚΝ ἐπίπεδον, ⟨ἡ δὲ⟩ ὑποτείνουσα ἐν ⟨τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ⟩. Ὁμοίως οὖν, ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΜΝ, ΜΛ τῷ ἀπὸ ΜΞ· ⟨τοῦτο γὰρ φανε⟩ρόν ⟨ἐστιν⟩· ἔσται ὡς ἡ ⟨ΜΝ⟩ πρὸς τὴν ⟨ΜΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ⟩ πρὸς τὸ ⟨ἀπὸ ΜΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ⟩ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ⟨ΜΞ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς⟩ ΜΝ τρίγω⟨νον τὸ ἐν τῷ πρίσμα⟩τι γε⟨νόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΞ τρίγω⟩νον τὸ ἐν τῷ ⟨τμήματι ἀφῃρημένον⟩ ὑπὸ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ὡς ἄρα ἡ ΜΝ πρὸς ΜΛ, ⟨οὕτως τὸ τρίγωνον⟩ πρὸς τὸ τρίγωνον. Ὁμοίως δὲ ⟨δ⟩εί⟨ξομεν καί⟩, ἐὰν ⟨ἄλλ⟩η τ⟨ις ἀχθῇ ἐν τῷ περὶ τὴν τομὴν πε⟩ριγραφ⟨έντι⟩ παραλληλογράμμῳ ⟨παρὰ⟩ τὴν ΚΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπί⟨πεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν⟩ πρὸς τὴν ΕΗ, ὅτι ἔσται ὡς τὸ τρίγωνον τὸ γενόμενον ἐν τῷ πρίσματι πρὸς τὸ . . . . τμήματι . . . . . ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως ἡ ἀχθεῖσα ⟨ἐν⟩ τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ παράλληλος τῇ ΚΖ ⟨πρὸς τὴν⟩ ἀποληφθεῖσαν ὑπὸ τῆς ΕΗΖ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ διαμέτρου. Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ ΔΗ παραλληλογράμμου ὑπὸ τῶν ἠγμένων παρὰ τὴν ΚΖ καὶ τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς διαμέτρου ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ἐν τῷ τμήματι συμπληρω . . . . τοῦ τμήματος τοῦ . . . . . ἐν τῷ ἀπὸ τοῦ . . . . . γινομ . . . . . πων . . . . τὰ γ . . . . α καὶ . . . . . τῷ ΔΗ . . . . δὲ ετι . . . . μα . . . . η ετι . . . . ἀπ . . . . ἀγομένων παρὰ τὴν ΚΖ . . . . .τομῆς καὶ . . . . ει ταῖς ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ ἠγμέναις παρὰ τὴν ΚΖ, καὶ ἔσται ὡς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἐν τῷ πρίσματι πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἐν τῷ ἀποτμηθέντι τμήματι τοῦ κυλίνδρου ἀφῃρημένα, οὕτως πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς μεταξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας. Καὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ πρίσματι τριγώνων σύγκειται τὸ πρίσμα, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ⟨ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τὸ ἀπότμημα, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ παραλλήλων τῇ ΚΖ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, ἐκ δὲ τῶν . . . . . μεταξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ ⟨τὸ τμῆμα⟩ [τῆς παραβολῆς]· ὡς ἄρα τὸ πρίσμα πρὸς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖΗ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας. Ἡμιόλιον δὲ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ πρίσμα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ ἀφῃρημένου ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου· οἵων ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ πρίσμα τριῶν. Οἵων δὲ τὸ πρίσμα τριῶν, τοιούτων ἐστὶν τὸ ὅλον πρίσμα τὸ περιέχον τὸν κύλινδρον $\overline{\iota\beta}$ διὰ τὸ δ' εἶναι τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου· οἵων ἄρα τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστὶν τὸ ὅλον πρίσμα $\overline{\iota\beta}$· ὥστε τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος.

ιε'.

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις, ὧν μία ἔστω τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, οὗ βάσις ἔστω ὁ ΕΖΗ κύκλος· ⟨ἐφάπτεται⟩ δὴ οὗτος τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα· κέντρον δὲ ⟨ἔστω τὸ Κ, καὶ διὰ τῆς⟩ ΕΗ διαμέτρου ⟨καὶ μιᾶς πλευρᾶς⟩ . . . . ⟨ἐπίπεδον ἤχθω⟩· τοῦτο δὴ τὸ ἐπίπεδον ἀποτέμνει πρίσμα ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος καὶ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα κυλίνδρου. ⟨Λέγω δὴ ὅτι τοῦ⟩το ⟨τὸ⟩ τμῆμα τὸ ἀποτετμημένον ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου ἕκτον μέρος ὂν δειχθήσεται τοῦ ὅλου πρίσματος.

Πρῶτον δὲ δείξομεν ὅτι δυνατὸν ἔσται εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα στερεὸν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ πρισμάτων συγκείμενον ἴσον ὕψος ἐχόντων καὶ βάσεις τριγώνους ἐχόντων ὁμοίας, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος μεγέθους . . . . . γὰρ τοῦ πρίσματος τοῦ κατὰ τὸ ΒΔ παραλληλογράμμου . . . . καὶ . . . ω . . . . γραμμένου. ω . . το . . Ξ. ἐπιπέδῳ . . ⟨σ⟩ημεῖα τοῦ . . . . . ατος . . . η . . . ρετό . πω . . . . νομεν . . . . . εστ . . σων . . . . . . .ἔστω . . . . το . . λειπόμενον . . νι . μια ἐλασ . . . . ν . . τοῦ λείμματος. στ . . . . ε . . ει . . . καὶ . . . ει . . . α τω . ει . . . . το . . ατα . . . . τω ἐκ . . . . τμῆμα τὸν το . . . . . . ἀπο⟨τ⟩μ⟨η⟩θ . . . . ἀπὸ . . . . δι . . . . ε . . . μάτων . . . . μεν . . . . ων . . . . ται καὶ τῶν . . . . . ἐγγεγραμμένω . . . δι . . . . των κει . . . . . τα . . . ΚΩ παραλληλόγραμμον . . . . αμμον . . . . σχήματι πρίσμα . . . . . . ησ . . . . τὸ ἀπὸ . . . . δρου . ἐγγεγράφθω . . . . . . μια . . . . σχῆμα, τὸ εἰρ⟨ημένον⟩ σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου . . . . ἔχει . . . τοῦ δοθέντος . . . . . . ἐχέτω . . . . . . οσ . . . . . τῶν πρισμάτων . . . . ἴσον αὐ . . . ⟨ση-⟩μεῖα . . . . ἐγγεγρά⟨φθω⟩ . . . . ν ἐσ . . . . . .

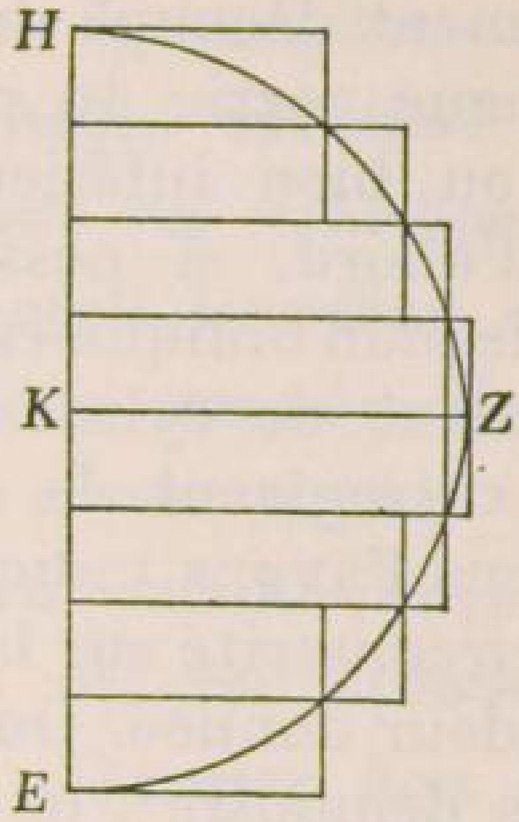

Fig. 133

δευτέρῳ . . . . γεγρ . . . . γει . . . . . η . . . . . . ⟨τέ-⟩ τμηται κατὰ τὸ αὐτὸ . . . . ⟨ἐγγεγρ⟩αμμένον ἐν . . . . . . κύκλ . . . το⟨ῦ⟩ τμήματος τη συνθε . τ . . . . ἀπο . . . . μείζων ἐστὶν τοῦ ἐγγεγραμμένου . . . . . . ⟨τμ⟩ήματος ἐν τῷ πρίσματι τῷ κατὰ τὸ . . . . ω

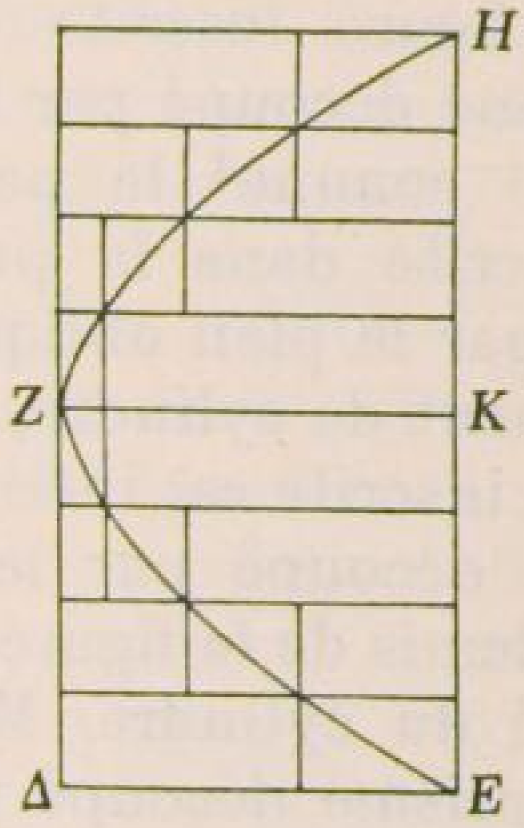

Fig. 134

⟨. . . . . ἔλασσον ἄρα ἢ ἡμιό⟩λιον τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου στερεοῦ. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἀφῃρημένον πρίσμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὰ ἐγγεγραμμένα παραλληλόγραμμα εἰς τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας· ἔλασσον ἄρα ἢ ἡμιόλιον τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐν τῷ τμήματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας ἡμιόλιον δέδεικται τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον ἐν ἑτέροις. Οὐκ ἄρα μεῖ⟨ζον⟩

.... ⟨στε-⟩ρεὸν ἐτ..... ⟨ἀ⟩ποτεμν.........σχῆμ⟨α⟩....... τα ὀρθο......... περιγραφ...... ⟨τοῦ ἐγγρα-⟩φέντος ἐν........ ἐπεὶ........ τμήματ...... .... ἐγγεγράφ⟨θω.... ἐν τῷ τμή⟩ματι τῷ ⟨περιεχο-μένῳ ὑπό τε⟩ τῆς τοῦ ὀρθ⟨ογωνίου κώνου τομῆς⟩ καὶ τῆς ⟨ΕΗ εὐθείας⟩.......γεγράφθ⟨ω⟩...... τοῦ ὀρθ⟨ογω-νίου κώνου⟩.... φὲν περι...... ⟨ἐγγεγραμ⟩μένον ἐν τ⟨ῷ⟩..... τοῦ κυλίνδρ⟨ου⟩..... τοῦ στερε⟨οῦ⟩ ......τοῦ κυλίν⟨δρου⟩..... τμῆματ........ ἐστὶν καὶ....... γραμμέν........................ ....εχομεν................νη .... Η .... τιν .... πρὸς τὸ .... τὸ ἐν τ⟨ῷ⟩ .... ⟨πε⟩ριεχομε........ γο ... τῆς ΕΗ καὶ .... τοῖς λόγ⟨οις⟩ ...... αμμέν....... .... τμήματος........ δρ .... νον ἀπὸ τῆς .... ⟨τ⟩ῆς πλευρ⟨ᾶς⟩............... .... ἐν τῷ....... τετμή⟨σθω⟩............. .... ἐχθήσ....... τὸ μεῖ⟨ζον⟩............ .... ⟨εὐθ⟩είας καὶ πάντα τὰ πρίσματα τὰ ἐν τῷ πρίσματι τῷ ἀποτετμημένῳ ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς πάντα τὰ πρίσματα τὰ ἐν τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν πάντα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ πρὸς πάντα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐν τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας, τουτέστιν τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας. Μεῖζον δέ ἐστι τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἢ ἡμιόλιον τοῦ στερεοῦ σχήματος τοῦ περιγε⟨γραμμένου περὶ τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου⟩ . . . .

LE LIVRE DES LEMMES

LIBER ASSUMPTORUM

I.

Si mutuo se tangant duo circuli, ut duo circuli AEB, CED in E, fuerintque eorum diametri parallelae, ut sunt duae diametri AB, CD, et iungantur duo puncta B, D et contactus E <rectis> DE, BD, erit linea BE recta.

α′.

Εἴ κα ἦ δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐντός, διάμετροι δὲ αὐτῶν παράλληλοι, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφῆς καὶ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων δύο εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας.

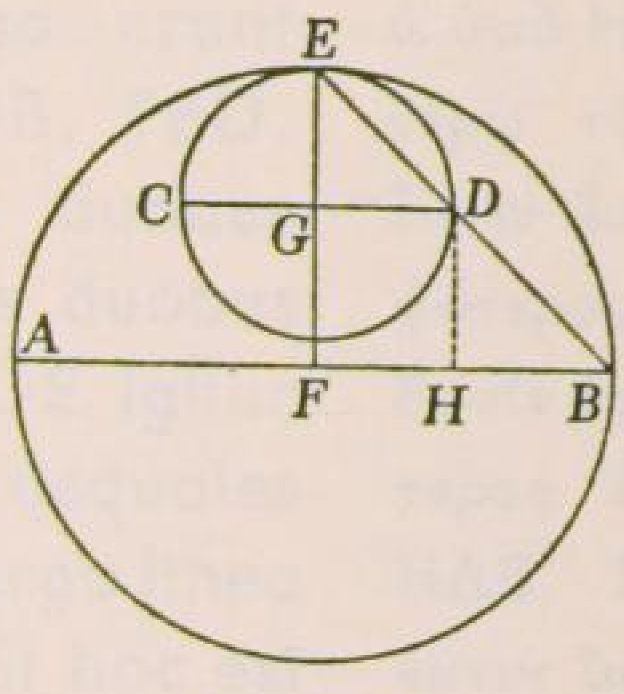

Fig. 135

Sint duo centra G, F, et iungatur GF, et producamus ad E, et educamus DH parallelam ipsi GF.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι, ὧν κέντρα τὰ Ζ, Η, ἐπιψαύοντες ἀλλάλων κατὰ τὸ Ε σαμεῖον, διάμετρος δὲ ἁ ΑΒ παρὰ

Et quia HF aequalis est ipsi GD, suntque GD, EG aequales, ergo ex aequalibus FB, FE remanebunt GF, nempe DH et HB, quae erunt aequales, atque duo anguli HDB, HBD aequales. Et quia duo anguli EGD, EFB sunt recti, atque duo anguli EGD, DHB sunt aequales, remanebunt duo anguli GED, GDE, qui inter se et duobus angulis HDB, HBD aequales erunt ; ergo angulus EDG aequalis est angulo DBF. Et comprehensus angulus GDB est communis ; ergo erunt duo anguli GDB, FBD, (qui sunt pares duobus rectis), aequales duobus angulis GDB, GDE. Igitur ipsi quoque sunt aequales duobus rectis ; ergo linea EDB est recta. Et hoc est quod uoluimus.

διάμετρον τὰν ΓΔ · φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΔΒ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ᾽ εὐθείας.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΖΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ποτὶ τὸ Ε, ἄχθω δὲ ἁ ΔΘ παρὰ τὰν ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΕ ἴσαι ἐντὶ καὶ ἁ ΗΔ τᾷ ΖΘ, κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ΖΘ, τουτέστιν ἁ ΗΕ · λοιπαὶ ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΘΔ, ΘΒ ἴσαι ἀλλαλαις ἐντί · γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΘΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΘΒΔ, τουτέστιν τᾷ ὑπὸ ΗΔΕ, ἐστὶν ἴσα · κοινὰ ποτικείσθω γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ · συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ ἐστὶν ἴσα · ἔστι δὲ συναμφότερος ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα · συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἐστιν ἴσα · ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐντὶ εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΒ · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

2.

Sit CBA semicirculus, quem DC, DB tangant, et

β′.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι

BE perpendicularis super AC, et iungamus AD ; erit BF aequalis ipsi FE.

αὐτοῦ αἱ ΔΒ, ΔΓ, ἁ δὲ ΒΕ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ, ἐπεζεύχθω δὲ ἁ ΑΔ · φαμὶ δὴ τὰν ΒΖ ἴσαν εἶμεν τᾷ ΖΕ.

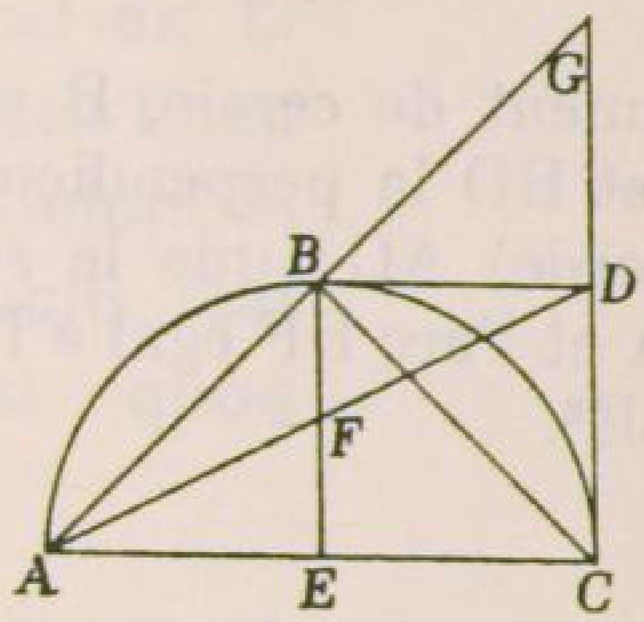

Fig. 136

Demonstratio. Iungamus AB eamque producamus in directum et educamus CD quousque illi occurrat in G, et iungamus CB. Et quia angulus CBA est in semicirculo, erit rectus ; remanet CBG rectus, et DBEC est parallelogrammum rectangulum. Ergo in triangulo GBC rectangulo educitur perpendicularis BD ex B erecta super basim, et BD, DC erunt aequales eo quod tangunt circulum ; ergo CD est etiam aequalis

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΒ καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η σαμεῖον καὶ ἄχθω ἁ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΑ ὀρθά ἐστιν, ἐσσεῖται καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΗ ὀρθά · ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα ἁ ΒΔ τᾷ ΔΓ ἴσα · ἐσσεῖται ἄρα καὶ εὐθεῖα ἁ ΔΗ τᾷ ΔΒ, ipsi DG, quemadmodum ostendimus in propositionibus, quas confecimus de rectangulis. Et quia in triangulo GAC linea BE educta est parallela basi, et iam educta est ex D semipartitione basis linea DA secans parallelam in F, erit BF aequalis ipsi FE. Et hoc est quod uoluimus.

τουτέστι τᾷ ΔΓ ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἁ ΒΕ παρὰ τὰν ΗΓ ἐστίν, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἁ ΒΖ τᾷ ΖΕ ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

3.

Sit CA segmentum circuli et B punctum super illud ubicunque et BD perpendicularis super AC et segmentum DE aequale DA et arcus BF aequalis arcui BA ; utique iuncta CF erit aequalis ipsi CE.

γ'.

Ἔστω τμᾶμα κύκλου τὸ ΑΓ καὶ ἀπὸ σαμείου τινος Β τᾶς περιφερείας ἄχθω τᾷ ΑΓ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΒΔ, λελάφθω δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΕ εὐθείᾳ τᾷ ΔΑ ἴσα καὶ περιφέρεια ἁ ΒΖ τᾷ ΑΒ· φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΓΖ εὐθεῖα τᾷ ΓΕ ἐστὶν ἴσα.

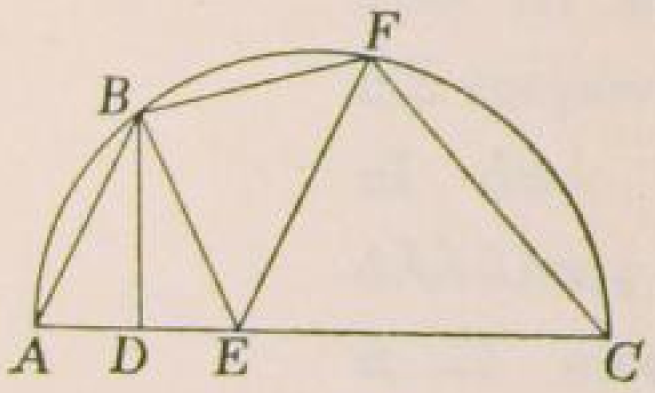

Fig. 137

Demonstratio. Iungamus lineas AB, BF, FE,

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΖ, ΖΕ, ΕΒ εὐθεῖαι·

EB. Et quia arcus BA aequalis est arcui BF, erit AB aequalis BF. Et quia AD aequalis est ED, et duo anguli D sunt recti, et DB communis, ergo AB aequalis est BE, et propterea BF, BE sunt aequales, et duo anguli BFE, BEF sunt aequales. Et quia quadrilaterum CFBA est in circulo, erit angulus CFB cum angulo CAB ipsi opposito, immo cum angulo BEA, aequalis duobus rectis. Sed angulus CEB cum angulo BEA aequales sunt duobus rectis ; ergo duo anguli CFB, CEB sunt aequales. Et remanent CFE, CEF aequales ; ergo CE aequalis est CF. Et hoc est quod uoluimus.

καὶ ἐπεὶ ἁ ΑΔ τᾳ̂ ΔΕ ἐστὶν ἴσα, κοινὰ δὲ ἁ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΒ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί · ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ γωνίᾳ τᾳ̂ ὑπὸ ΕΔΒ ἴσα · βάσις ἄρα ἁ ΕΒ βάσει τᾳ̂ ΑΒ, τουτέστι τᾳ̂ ΒΖ, ἐστὶν ἴσα · γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίᾳ τᾳ̂ ὑπὸ ΒΖΕ ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον τὸ ΑΒΖΓ ἐν κύκλῳ ἐστίν, γωνίαι αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΖΒ, ΓΑΒ, τουτέστιν αἱ ὑπὸ ΓΖΒ, ΒΕΑ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί. Ἔστι δὲ καὶ συναμφότερος ἁ ὑπὸ ΓΕΒ, ΒΕΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα · κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ ΒΕΑ · γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΓΖΒ γωνίᾳ τᾳ̂ ὑπὸ ΓΕΒ ἐστὶν ἴσα · κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ ΒΖΕ, τουτέστιν ἁ ὑπὸ ΒΕΖ · λοιπαὶ ἄρα αἱ ποτὶ τᾳ̂ βάσει τᾳ̂ ΕΖ τριγώνου τοῦ ΕΓΖ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΖΕ, ΖΕΓ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί · πλευρὰ ἄρα ἁ ΖΓ πλευρᾳ̂ τᾳ̂ ΕΓ ἐστὶν ἴσα · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

4.

Sit ABC semicirculus, et fiant super AC diametrum duo semicirculi, quorum unus AD, alter uero DC, et DB perpendicularis ; utique figura proueniens, quam uocat Archimedes Arbelon (est figura comprehensa ab arcu semicirculi maioris et duabus circumferentiis semiculorum minorum) est aequalis circulo, cuius diameter est perpendicularis DB.

δ′.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, γραφέωντι δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀνασταϰῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σαμείου εὐθεῖα ποτὶ τᾷ περιφερείᾳ τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, σχῆμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ἀνασταϰεῖσα κάθετος.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ σαμεῖόν τι ἐπὶ διαμέτρου τᾶς ΑΓ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ διαμέτρων τῶν ΓΔ, ΔΑ ἁμικύκλια ἀναγεγράφθων ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σαμείου ἀνεσταϰέτω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ ἁ ΔΒ · φαμὶ δή, σχῆμα

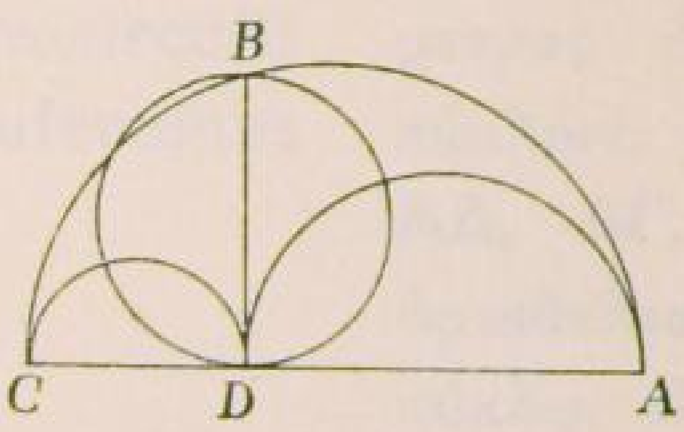

Fig. 138

Demonstratio. Quia linea DB media propor-

τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον, tionalis est inter duas lineas DA, DC, erit planum AD in DC aequale quadrato DB. Et ponamus AD in DC cum duobus quadratis AD, DC communiter ; fiet planum AD in DC bis cum duobus quadratis AD, DC, nempe quadratum AC, aequale duplo quadrati DB cum duobus quadratis AD, DC. Et proportio circulorum eadem est ac proportio quadratorum ; ergo circulus, cuius diameter est AC, aequalis est duplo circuli, cuius diameter est DB, cum duobus circulis, quorum diametri sunt AD, DC, et semicirculus AC aequalis est circulo, cuius diameter est DB, cum duobus semicirculis AD, DC. Et auferamus

τουτέστι τοῦ μείζονος ἁμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντός, ὅπερ ἄρβηλος καλείσθω, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, ἴσον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἴσον· κοινὸν ποτικείσθω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τᾶς ὅλας τετράγωνον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ, τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλάλους ὡς τὰ ἀπὸ τᾶν διαμέτρων τετράγωνά ἐντι, ἐσσεῖται δὴ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετρος ἁ ΔΒ, καὶ δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΑΔ, ΔΓ, ἴσος, τουτέστιν ἁμικύκλιον τὸ ΑΓ ἴσον κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, καὶ δυσὶν ἁμικυκλίοις, ὧν διάμετροι αἱ ΑΔ, ΔΓ· κοινὸν ἀφαιρήσθω ἁμικύκλια τὰ ΑΔ, ΔΓ· λοιπὸν ἄρα duos semicirculos AD, DC communiter; remanet figura, quam continent semiculi AC, AD, DC (et est figura quam uocavit Archimedes Arbelos), aequalis circulo, cuius diameter est DB. Et hoc est quod uoluimus.

χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ περιφερειῶν τᾶν ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ, ὅπερ ἄρβηλος καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, ἐστὶν ἴσον· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

5.

Si fuerit semicirculus AB, et signatum fuerit in eius diametro punctum C ubicunque, et fiant super diametrum duo semicirculi AC, CB, et educatur ex C perpendicularis CD super AB, et describantur ad utrasque partes duo circuli tangentes illam et tangentes semicirculos, utique illi duo circuli sunt aequales.

ε'.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀνασταθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου εὐθεῖα τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, καὶ δύο κύκλοι γραφέωντι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεσταθούσας ἐπιψαύοντες αὐτᾶς καὶ τῶν ἁμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι ἐσσοῦνται ἀλλάλοις ἴσοι.

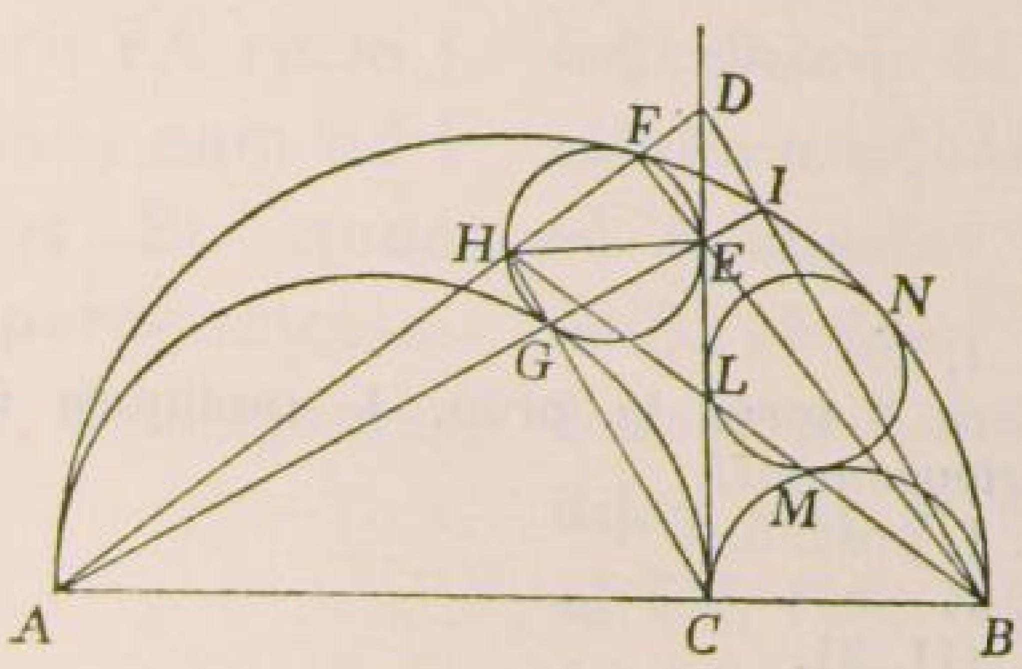

Fig. 139

Demonstratio. Sit alter circulorum tangens DC in E et semicirculum AB in F et semicirculum AC in G, et educamus diametrum HE ; erit parallela diametro AB, eo quod duo anguli HEC, ACE sunt recti. Et iungamus FH, HA ; ergo linea AF est recta, uti dictum est in propositione I. Et occurrent AF, CE in D, eo quod egrediuntur ab angulis A, C, minoribus duobus rectis.

Et iungamus etiam FE, EB ; ergo EFB est etiam recta, ut diximus, et perpendicularis super AD, eo quod angulus AFB est rectus, quia cadit in semicirculum AB. Et iungamus HG, GC ; erit HC etiam recta. Et iungamus EG, GA ; erit EA recta ; et producamus eam ad I et iungamus BI, quae erit etiam perpendicularis super AI, et iungamus

Ἔστω ἁμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ AB, σαμεῖον δέ τι ἐπ' αὐτᾶς τὸ Γ· ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τμαμάτων τῶν AΓ, ΓΒ ἁμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τᾷ AB ἁ ΓΔ, γεγράφθων δὲ δύο κύκλοι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας ἐπιψαύοντες τᾶς τε ἀνεστακούσας καὶ τῶν ἁμικυκλίων· φαμὶ δή, οἱ γραφέντες κύκλοι ἴσοι ἀλλάλοις ἐντί.

Ἔστω γὰρ πρότερον κύκλος ὁ ἐπιψαύων τᾶς ΓΔ κατὰ τὸ Ε σαμεῖον καὶ ἁμικυκλίου μὲν τοῦ AΓ κατὰ τὸ Η, ἁμικυκλίου δὲ τοῦ AB κατὰ τὸ Ζ, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΘΕ· ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ AΘ, ΘΖ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ AZ, ΓΕ εὐθεῖαι συμβαλέτωσαν κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· ὁμοίως δὴ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ZE, EB ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, καὶ αἱ ΘΗ, ΗΓ, καὶ αἱ EH, HA, ἐκβεβλήσθω δὲ ἁ AE ἐπὶ τὸ Ι σαμεῖον, DI. Et quia AD, AB sunt duae rectae et educta ex D ad lineam AB perpendicularis DC et ex B ad DA perpendicularis BF, quae se mutuo secant in E, et educta AE ad I est perpendicularis super BI, erunt BID rectae, quemadmodum ostendimus in propositionibus, quas confecimus in expositione tractatus de triangulis rectangulis. Et quia duo anguli AGC, AIB sunt recti, utique BD, CG sunt parallelae, et proportio AD ad DH, quae est ut AC ad HE, est ut proportio AB ad BC ; ergo rectangulum AC in CB aequale est rectangulo AB in HE. Et similiter demonstratur in circulo LMN quod rectangulum AC in CB aequale sit rectangulo AB in suam diametrum, et demonstratur inde etiam quod duae diametri circulorum EFG, LMN sint aequales ; ergo illi duo circuli sunt aequales. Et hoc est quod uoluimus.

ἄχθω δὲ ἁ BI εὐθεῖα καὶ ἁ ΖΔ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΔ, ΑΒ εὐθεῖαί ἐντι καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου τᾷ ΑΒ ἆκται ποτ' ὀρθὰς ἁ ΔΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΔΑ ἁ ΒΖ τέμνουσα τὰν ΔΓ κατὰ τὸ Ε, εὐθεῖα δὲ ἁ ΑΕΙ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΙ ἐστίν, ἐσσοῦνται ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΙ, ΙΔ ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων δέδεικται. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ ΒΔ παρὰ τὰν ΓΗ ἐστίν, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΘ, ὃν ἔχει ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΘΕ, τουτέστιν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΒ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΘΕ ἐστὶν ἴσον· ὁμοίως δὴ δείξομες ὅτι ἐν κύκλῳ τῷ ΛΜΝ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΒ τῷ ὑπὸ ΑΒ καὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἴσον ἐστίν· αἱ διάμετροι ἄρα κύκλων τῶν ΕΖΗ, ΛΜΝ ἴσαι ἐντί, τουτέστιν οἱ δύο κύκλοι ἴσοι ἐντί· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

6.

Si fuerit semicirculus ABC, et in eius diametro sumatur punctum D, et fuerit AD ipsius DC sesquialtera, et describantur super AD, DC duo semicirculi, et ponatur circulus EF inter tres semicirculos tangens eos, et educatur diameter EF in illo parallela diametro AC, reperiri debet proportio diametri AC ad diametrum EF.

ϛ'.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυκλίων, τὸν λόγον τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εὑρεῖν.

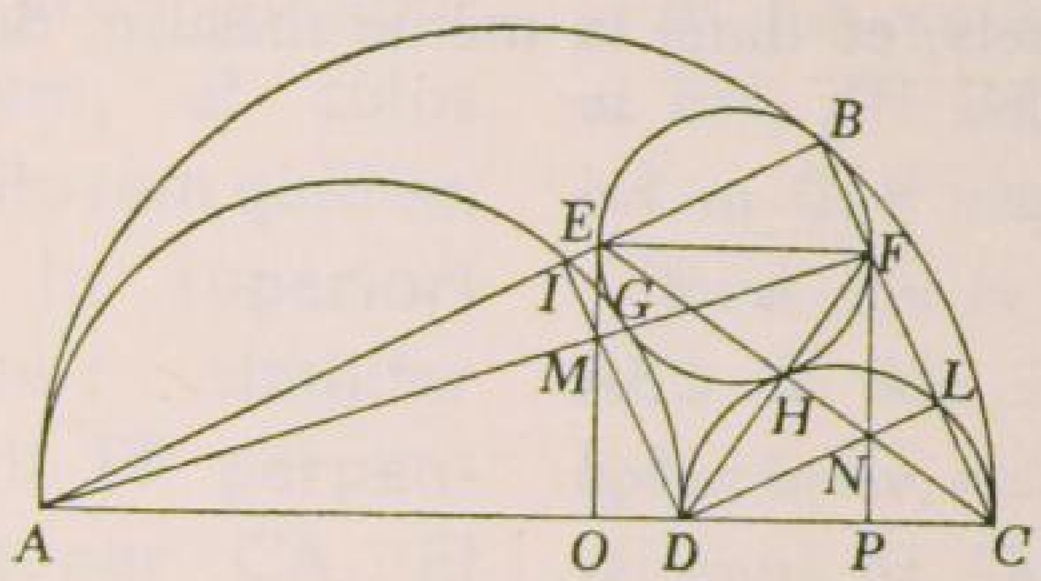

Fig. 140

Iungamus enim duas lineas AE, EB et duas lineas CF, FB ; erunt CB, AB rectae, ut dictum est in prima propositione. Describamus etiam duas

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, σαμεῖον δέ τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου τὸ Δ καὶ πεποιήσθω οὕτως, ὥστε τὸ μεῖζον τμᾶμα τὸ ΑΔ ἐλάσσονος τοῦ ΔΓ ἁμιόλιον εἶμεν, καὶ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀναγεγράφθων ἁμικύlineas FGA, EHC, ostenderturque esse quoque rectas; similiter duas lineas DE, DF, et iungamus DI, DL et EM, FN et producamus eas ad O, P. Et quia in triangulo AED AG est perpendicularis ad ED, et DI est quoque perpendicularis ad AE, et iam se mutuo secuerunt in M, ergo EMO erit etiam perpendicularis, quemadmodum ostendimus in expositione, quam confecimus de proprietatibus triangulorum, et cuius demonstratio iam quidem praecessit in superiori propositione; similiter quoque erit FP perpendicularis super CA. Et quia duo anguli, qui sunt apud L et B, sunt recti, erit DL parallela ipsi AB, et pariter DI ipsi CB; igitur proportio AD ad

κλια, γεγράφθω δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ὁ ΕΖ ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυκλίων, καὶ ἄχθω διάμετρος αὐτοῦ παρὰ τὰν ΑΓ ἁ ΕΖ. Εὑρεῖν τὸν λόγον διαμέτρου τᾶς ΑΓ ποτὶ διάμετρον τὰν ΕΖ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ εὐθεῖαι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΒ· εὐθεῖαι δή ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΒ, ὡς ἐν τοῖς πρότερον ἐδείχθη. Ἐπεζεύχθωσαν ἔτι αἱ ΖΗΑ, ΕΘΓ· δείκνυνται δὴ αὗται εὐθεῖαι οὖσαι· ἔτι δὲ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ αἱ ΔΙ, ΔΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΜ, ΖΝ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ο, Ρ σαμεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΕΔ ἁ ΑΗ τᾷ ΕΔ ποτ' ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἁ ΔΙ τᾷ ΑΕ, τέμνοντι δὲ ἀλλάλας κατὰ τὸ Μ σαμεῖον, ἁ ΕΜΟ τᾷ ΑΓ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τριγώνων ἐδείχθη καὶ τῷ πρότερον ὑπέκειτο· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ΖΝΡ τᾷ ΓΑ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς· ἔστι δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΛ παρὰ τὰν ΑΒ καὶ ἁ ΔΙ παρὰ τὰν ΓΒ· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει

DC est, ut proportio AM ad FM, immo ut proportio AO ad OP, et proportio CD ad DA, ut proportio CN ad NE, immo ut proportio CP ad PO. Et erat AD sesquialtera DC; ergo AO est sesquialtera OP et OP sesquialtera CP. Ergo tres lineae AO, OP, PC sunt proportionales, et in eadem mensura, in qua est PC quattuor, erit OP sex et AO nouem et CA nouendecim. Et quia PO aequalis est EF, erit proportio AC ad EF ut nouendecim ad sex. Igitur reperimus dictam proportionem. Etiam si fuerit AD ad DC qualiscunque, ut sesquitertia aut sesquiquarta aut alia, erit iudicium et ratio uti dictum est. Et hoc est quod uoluimus.

ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἔχει ἁ ΑΜ ποτὶ τὰν ΜΖ, τουτέστιν ἁ ΑΟ ποτὶ τὰν ΟΡ, καὶ ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΑ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἔχει ἁ ΓΝ ποτὶ τὰν ΝΕ, τουτέστιν ἁ ΓΡ ποτὶ τὰν ΡΟ· ἦν δὲ ἁ ΑΔ ἁμιόλιος τᾶς ΔΓ· καὶ ἁ ΑΟ ἄρα τᾶς ΟΡ ἐστὶν ἁμιόλιος, καὶ ἁ ΟΡ τᾶς ΓΡ· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΑΟ, ΟΡ, ΡΓ ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἃν ἁ μὲν ΡΓ ἴσα γίνεται τέσσαρα, ἁ δὲ ΟΡ ἕξ, ἁ δὲ ΑΟ ἐννέα, ἁ δὲ ΓΑ ἐννεακαίδεκα. Ἔστι δὲ ἁ ΡΟ τᾷ ΕΖ ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΕΖ, ὃν ἔχει τὰ ἐννεακαίδεκα ποτὶ τὰ ἕξ· καί ἐστιν ἁ ΑΓ διάμετρος ἁμικυκλίου τοῦ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΕΖ κύκλου τοῦ ΕΒΖ· εὑρέθη ἄρα ὁ αἰτούμενος λόγος. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται εἴ κα ὁ λόγος τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου ἐπιμόριος ᾖ.

7.

Si circulus circa quadratum descriptus fuerit, et alius intra illum, utique erit circumscriptus duplus inscripti.

ζ′.

Ὁ τετραγώνῳ περιγεγραμμένος κύκλος διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστίν.

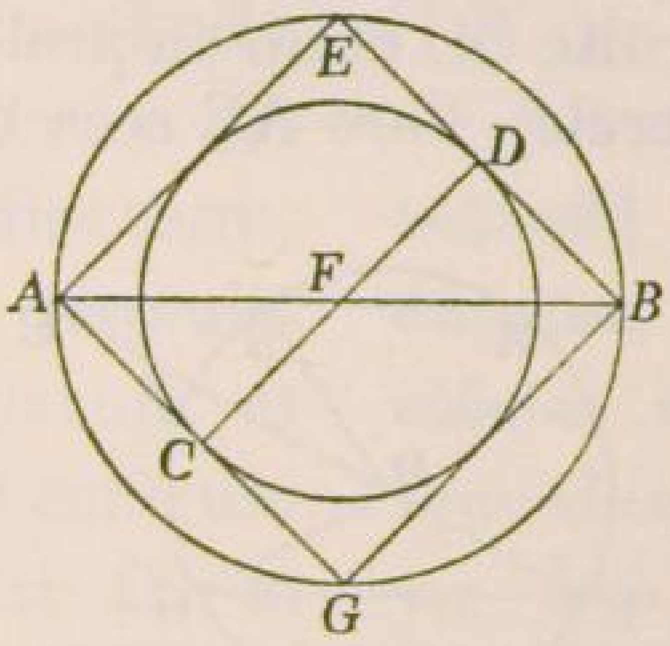

Fig. 141

Sit itaque circulus comprehendens quadratum AB circulus AB et inscriptus CD, et sit diameter quadrati AB, et est diameter circuli circumscripti, et educamus CD diametrum circuli inscripti parallelam ipsi AE, quae est ei aequalis. Et quia quadratum AB duplum est quadrati AE siue DC, et proportio quadratorum ex diametris circulorum est

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ AB περὶ τετράγωνον τὸ AB καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένος κύκλος ὁ ΓΔ, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου ἁ AB, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἁ ΓΔ παρὰ τὰν AE· φαμὶ δή, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ διπλασίων.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τᾶς AB διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τᾶς AE, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ, οἱ κύκλοι δέ ἐντι ὡς τὰ eadem proportioni circuli ad circulum, igitur circulus AB duplus est circuli CD. Et hoc est quod uoluimus.

ἀπὸ τᾶν διαμέτρων αὐτῶν τετράγωνα, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίων· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

8.

Si egrediatur in circulo linea AB ubicunque et producatur in directum, et ponatur BC aequalis semidiametro circuli, et iungatur ex C ad centrum circuli, quod est D, et producatur ad E, erit arcus AE triplus arcus BF.

η′.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις AB προσαρμοσμένα ᾖ, ἐκβληθῇ δὲ κατὰ τὸ Γ σαμεῖον, ὥστε τὰν ΒΓ εὐθεῖαν τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν εἶμεν, διαχθῇ δὲ εὐθεῖά τις ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ E σαμεῖον, ἐσσεῖται περιφέρεια ἁ AE περιφερείας τᾶς BZ τριπλασίων.

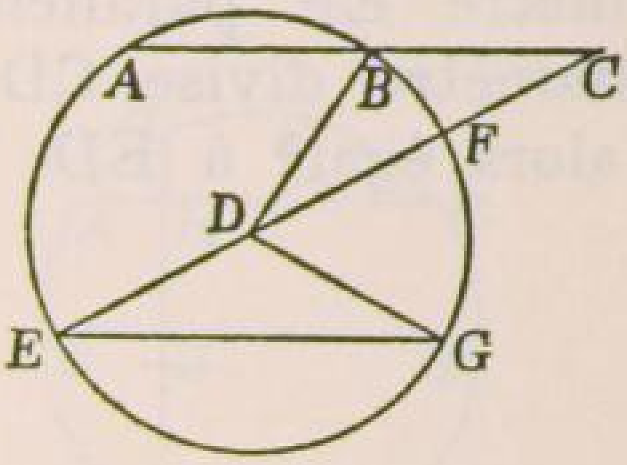

Fig. 142

Educamus igitur EG parallelam ipsi AB, et iungamus DB, DG, et quia duo anguli DEG, DGE sunt aequales, erit angulus GDC duplus anguli DEG. Et quia angulus

Ἄχθω γὰρ ἁ EH παρὰ τὰν AB καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΔB, ΔH. Ἐπεὶ οὖν γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΔΓ, ΔEH, ΔHE ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ ΓΔH γωνίας τᾶς ὑπὸ ΔEH ἐστὶ διπλα-

BDC aequalis est angulo BCD, et angulus CEG aequalis est angulo ACE, erit angulus GDC duplus anguli CDB et totus angulus BDG triplus anguli BDC, et arcus BG aequalis arcui AE triplus est arcus BF. Et hoc est quod uoluimus.

σίων, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΒΔΗ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΒΔΓ τριπλασίων. Ἐσσεῖται ἄρα περιφέρεια ἁ ΒΗ, τουτέστιν ἁ ΑΕ, περιφερείας τᾶς ΒΖ τριπλασίων· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

9.

Si mutuo se secuerint in circulo duae lineae AB, CD (sed non in centro) ad angulos rectos, utique duo arcus AD, CB sunt aequales duobus arcubus AC, DB.

θ'.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωντι ἀλλάλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

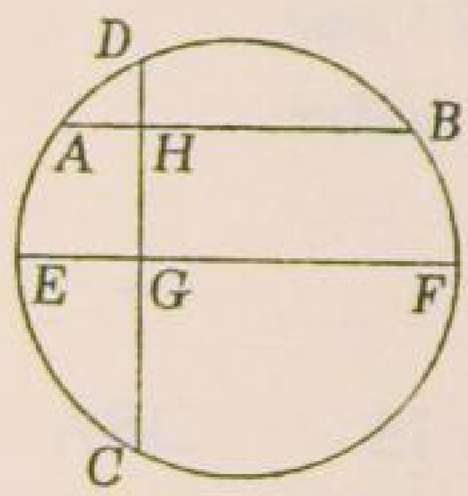

Fig. 143

Educamus diametrum EF parallelam ipsi AB, quae secet CD bifariam in G ; erit EC aequalis ipsi ED. Et quia tam

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσαι ἀλλάλας ποτ' ὀρθάς, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· φαμὶ δή, δύο αἱ arcus EDF quam ECF est semicirculus, et arcus ED aequalis arcui EA cum arcu AD, erit arcus CF cum duobus arcubus EA, AD aequalis semicirculo. Et arcus EA aequalis arcui BF ; ergo arcus CB cum arcu AD aequalis est semicirculo. Et remanent duo arcus EC, EA, nempe arcus AC, cum arcu DB aequales illi. Et hoc est quod uoluimus.

ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΑΔ, ΓΒ δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ταῖς ΑΓ, ΒΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Τετμάσθω γὰρ δίχα ἁ ΓΔ κατὰ τὸ Η σαμεῖον καὶ διὰ τοῦ Η διάχθω διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΕΖ παρὰ τὰν ΑΒ.

Ἐπεὶ οὖν περιφέρεια ἁ ΕΓ περιφερείαις ταῖς ΕΑ, ΑΔ ἴσα ἐστίν, ἐσσοῦνται ἄρα περιφέρειαι αἱ ΓΖ, ΕΑ, ΑΔ ἁμικυκλίῳ ἴσαι · ἔστι δὲ περιφέρεια ἁ ΕΑ περιφερείᾳ τᾷ ΒΖ ἴσα · συναμφότερος ἄρα περιφέρεια ἁ ΓΒ, ΑΔ ἁμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα · λοιπὴ ἄρα περιφέρεια ἁ ΑΓ, ΔΒ ἁμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

10.

Si fuerit circulus ABC et DA tangens illum et DB secans illum et DC etiam tangens, et educta fuerit CE parallela ipsi DB, et iuncta fuerit EA secans DB in F, et educta fuerit ex F perpendicula-

ι′.

Εἴ κα ᾖ κύκλος καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΓ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Α, Γ σαμεῖα, τέμνουσα δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΒ, ἀχθῇ δὲ ἁ ΕΓ παρὰ τὰν ΒΔ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἁ ΕΑ τέμνουσα τὰν ΔΒ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ποτ’ ris FG super CE, utique bifariam secabit illam in G.

ὀρθὰς τᾷ ΕΓ ἀχθῇ ἁ ΖΗ, ἁ ἀγμένα τὰν ΕΓ δίχα τέμνει.

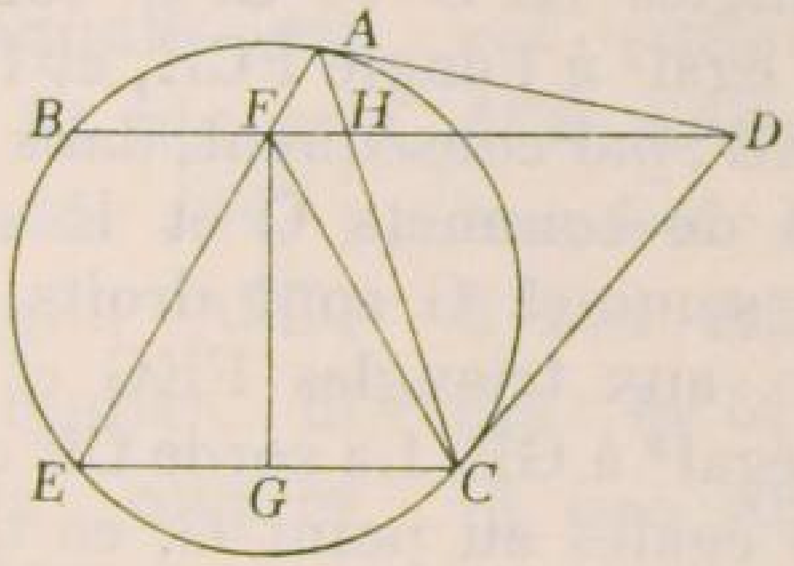

Fig. 144

lungamus AC. Et quia DA est tangens et AC secans circulum, erit angulus DAC aequalis angulo cadenti in alterno segmento AC, nempe angulo AEC. Et est aequalis angulo AFD, eo quod CE, BD sunt parallelae ; ergo anguli DAC, AFD sunt aequales. Et in duobus triangulis DAF, AHD sunt duo anguli AFD, HAD aequales, et angulus D communis ; propterea erit rectangulum FD in DH aequale quadrato DA, immo quadrato DC. Et quia proportio FD ad DC est eadem proportioni CD ad DH, et angulus D

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΓ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ ΔΑ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστίν, ἁ δὲ ΑΓ τέμνουσα αὐτόν, γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΓ τᾷ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμάματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΕΓ, τουτέστι τᾷ ὑπὸ ΑΖΔ, ἐστὶν ἴσα. Ἔστι γὰρ ἁ ΓΕ παρὰ τὰν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΔΑΖ, ΑΘΔ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΖΔ, ΘΑΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἁ πρὸς τῷ Δ κοινά, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΔΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΑ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνῳ, ἐστὶν ἴσον · ἐπεὶ οὖν ὃν λόγον ἔχει ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, τοῦτον ἔχει καὶ ἁ ΔΓ ποτὶ τὰν ΔΘ, γωνία communis, erunt triangula DFC, DCA similia, et angulus DFC aequalis DCH, qui aequalis est angulo DAH. Et hic est aequalis angulo AFD; ergo duo anguli AFD, CFD sunt aequales. Et DFC aequalis angulo FCE; et erat DFA aequalis angulo AEC; ergo in triangulo FEC sunt duo anguli C, E aequales et duo anguli G recti et latus GF commune; propterea erit CG aequalis ipsi GE. Ergo CE bifariam secatur in G. Et hoc est quod uoluimus.

δὲ ἁ ποτὶ τὸ Δ σαμεῖον κοινά ἐστιν, τρίγωνα ἄρα τὰ ΔΖΓ, ΔΓΘ ἐστὶν ὅμοια καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΖΓ, ΔΓΘ, ΔΑΘ, ΑΖΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί · ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΖΓ τᾷ ὑπὸ ΖΓΕ ἴσα · ἦν δὲ καὶ ἁ ὑπὸ ΔΖΑ τᾷ ὑπὸ ΑΕΓ ἴσα · ἐν δυσὶ τριγώνοις ἄρα τοῖς ΕΗΖ, ΓΗΖ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΕΖ, ΗΓΖ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ καὶ αἱ ποτὶ τῷ Η σαμείῳ γωνίαι ὀρθαί · ἔστι δὲ πλευρὰ ἁ ΗΖ κοινά · ἔστιν ἄρα ἁ ΕΗ τᾷ ΗΓ ἴσα · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

11.

Si mutuo se secuerint in circulo duae lineae AB, CD ad angulos rectos in E, quod non sit in centro, utique omnia quadrata AE, BE, EC, ED aequalia sunt quadrato diametri.

Educamus diametrum AF, et iungamus lineas

ια′.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωντι ἀλλάλας ποτ᾽ ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν εὐθειῶν τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐντί.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τετμάσθων ποτ᾽ ὀρθὰς κατὰ

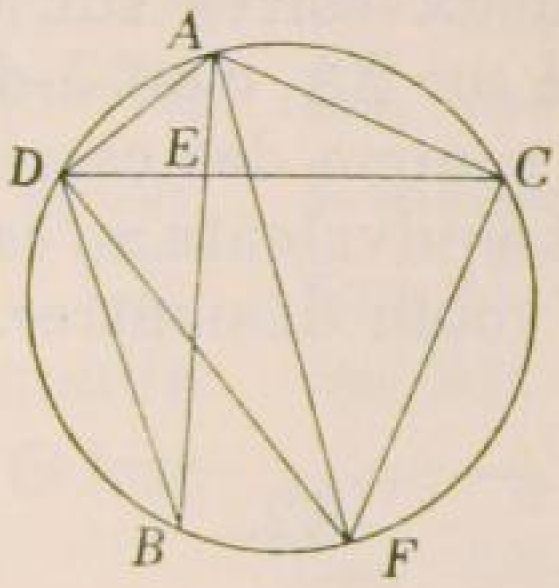

Fig. 145

AC, AD, CF, DB. Et quia angulus AED est rectus, erit aequalis angulo ACF. Et angulus ADC aequalis AFC, eo quod sunt super arcum AC ; et remanent in duobus triangulis ADE, AFC duo anguli CAF, DAE aequales ; erunt pariter duo arcus CF, DB aequales, immo et duae chordeae eorum aequales. Et duo quadrata DE, EB aequantur quadrato BD, nempe CF, et duo quadrata AE, EC aequantur quadrato CA,

τὸ Ε σαμεῖον · φαμὶ δή, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστίν.

Ἄχθω γὰρ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΑΖ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΓΖ, ΔΒ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΑΔΕ, ΑΖΓ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΔΕ, καὶ ΑΓΖ, ΑΖΓ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΖ, ΔΑΕ ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἴσαι · περιφέρειαι ἄρα αἱ ΓΖ, ΔΒ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, καὶ αἱ ταύτας ὑποτείνουσαι εὐθεῖαι αἱ ΓΖ, ΔΒ · ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΖ, ἴσον, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΑ, καὶ τὰ ἀπὸ et duo quadrata CF, CA aequantur quadrato FA, nempe diametri ; igitur quadrata AE, EB, CE, ED omnia sunt aequalia quadrato diametri. Et hoc est quod uoluimus.

τῶν ΓΖ, ΓΑ τῷ ἀπὸ τᾶς ΖΑ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου, ἴσα · ἐσσοῦνται ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ἴσα · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

12.

Si fuerit semicirculus super diametrum AB, et eductae fuerint ex C duae lineae tangentes illum in duobus punctis D, E, et iunctae fuerint EA, DB se mutuo secantes in F, et iuncta fuerit CF et producatur ad G, erit CG perpendicularis ad AB.

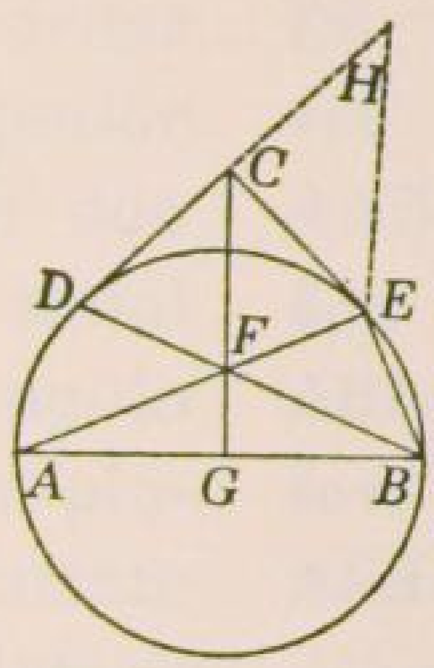

Fig. 146

ιβ'.

Εἴ κα ἐκ σαμείου ἐκτὸς ἁμικυκλίου δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ, ἀχθέωντι δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφᾶς δύο εὐθεῖαι ποτὶ τὰ ἀπεναντίον πέρατα τᾶς διαμέτρου τέμνουσαι ἀλλάλας, ἁ ἐκ τοῦ ἐκτὸς σαμείου ποτὶ τὸ σαμεῖον τομᾶς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα ποτὶ τὰν διάμετρον ἐσσεῖται ταύτᾳ ποτ' ὀρθάς.

Iungamus DA, EB. Et quia angulus BDA est rectus, erunt duo anguli DAB, DBA reliqui in triangulo DAB aequales uni recto. Et angulus AEB rectus ; igitur sunt aequales ei. Et ponamus angulum FBE communem ; ambo anguli DAB, ABE sunt aequales FBE, FEB, immo angulo DFE externo in FBE. Et quia CD est tangens circulum et DB secans illum, angulus CDB aequatur angulo DAB, et pariter angulus CEF aequatur angulo EBA ; ergo duo anguli CEF, CDF simul aequales sunt angulo DFE. Et iam quidem planum fit ex nostro tractatu de figuris quadrilateris quod, si educantur inter duas lineas aequales sibi occurrentes in aliquo

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ AB, σαμεῖον δέ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ Γ, καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄχθων δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Δ, Ε σαμεῖα, ἐπεζεύχθων δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφᾶς ποτὶ τὰ ἀπεναντίον πέρατα τᾶς διαμέτρου τὰ Α, Β εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΔΒ τέμνουσαι ἀλλάλας κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀχθεῖσα ἁ ΓΖ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον · φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ ΓΗ διαμέτρῳ τᾷ AB ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς.

Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΑΔ, ΕΒ. Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΑΒ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ ὀρθά ἐστιν, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΒΑ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσαι ἐντί · ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΕΒ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα · κοινὰ ποτικείσθω ἁ ὑπὸ ΖΒΕ · συναμφότερος ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΑΒ, ΑΒΕ συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΖΒΕ, ΖΕΒ, τουτέστιν ἐξωτερικᾷ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΖΕ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστίν, διᾶκται δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφᾶς τοῦ Δ ἁ puncto, uti sunt duae lineae CD, CE, duae lineae se mutuo secantes, uti sunt duae lineae DF, EF, et fuerit angulus ab illis contentus, ut est angulus F, aequalis duobus angulis, qui occurrunt duabus lineis se inuicem secantibus, uti sunt duo anguli E, D, simul, erit linea egrediens a puncto concursus ad punctum sectionis, uti est linea CF, aequalis cuilibet linearum sibi occurrentium, ut CD uel CE ; propterea erit CF aequalis ipsi CD ; ergo angulus CFD est aequalis angulo CDF, nempe angulo DAG. Sed angulus CFD cum angulo DFG est aequalis duobus rectis ; ergo angulus DAG cum angulo DFG aequa-

ΔΒ τέμνουσα τὸν κύκλον, ἐσσεῖται γωνία ἁ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΑΒ ἴσα· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΕΖ τᾷ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴσα· καὶ συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΓΕΖ, ΓΔΖ τᾷ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴσα· καὶ δέδεικται παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τετραπλεύρων ὅτι εἴ κα μεταξὺ δύο ἰσᾶν εὐθειᾶν τεμνομενᾶν, οἷον τᾶν ΓΔ, ΓΕ, δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι τεμνόμεναι, οἷον αἱ ΔΖ, ΕΖ, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ τούτων περιεχομένα, ὡς ἁ ποτὶ τῷ Ζ, συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ τῶν δύο τεμνομενᾶν εὐθειᾶν περιεχομένᾳ, ὡς αἱ ποτὶ τοῖς Ε, Δ σαμείοις, ἴσα ἐστίν, ἁ ἐπιζευγνυμένα ἐκ τοῦ σαμείου καθ' ὃ αἱ δύο εὐθεῖαι συμβάλλοντι ἐπὶ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ αὗται τέμνοντι ἀλλάλας, ὡς ἁ ΓΖ εὐθεῖα, ἑκατέρᾳ τᾶν τεμνομενᾶν εὐθειᾶν, ὡς αἱ ΓΔ, ΓΕ, ἐστὶν ἴσα· ἁ ΓΖ εὐθεῖα ἄρα τᾷ ΓΔ ἐστὶν ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΖΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΔΖ, τουτέστι τᾷ ὑπὸ ΔΑΗ· γωνίαι δὲ αἱ ὑπὸ lis est duobus rectis ; et remanent in quadrilatero ADFG duo anguli ADF, AGF aequales duobus rectis. Set angulus ADB rectus est ; ergo angulus AGC est rectus et CG perpendicularis ad AB. Et hoc est quod uoluimus.

ΓΖΔ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΗ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα ἐστίν· λοιπαὶ ἄρα γωνίαι τετραπλεύρου τοῦ ΑΔΖΗ αἱ ὑπὸ ΑΔΖ, ΑΗΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΑΗΓ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα ἐστίν· ἔστιν ἄρα εὐθεῖα ἁ ΔΗ διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ ποτ' ὀρθάς· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

13.

Si mutuo se secent duae lineae AB, CD in circulo, et fuerit AB diameter illius, at non CD, et educantur ex duobus punctis A, B duae perpendiculares ad CD, quae sint AE, BF, utique abscindent ex illa CF, DE aequales.

Iungamus EB et educamus ex I, quod est centrum, perpendicularem IG super CD et producamus eam ad H in EB. Et quia IG est

ιγ'.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ' ὀρθὰς ὦσιν, ἁ μὲν διάμετρος ἁ δὲ οὔ, ἀχθέωντι δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἄλλᾳ εὐθείᾳ, αἱ ἀπολαφθεῖσαι ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ' ὀρθὰς αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἂν ἁ ΑΒ διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου

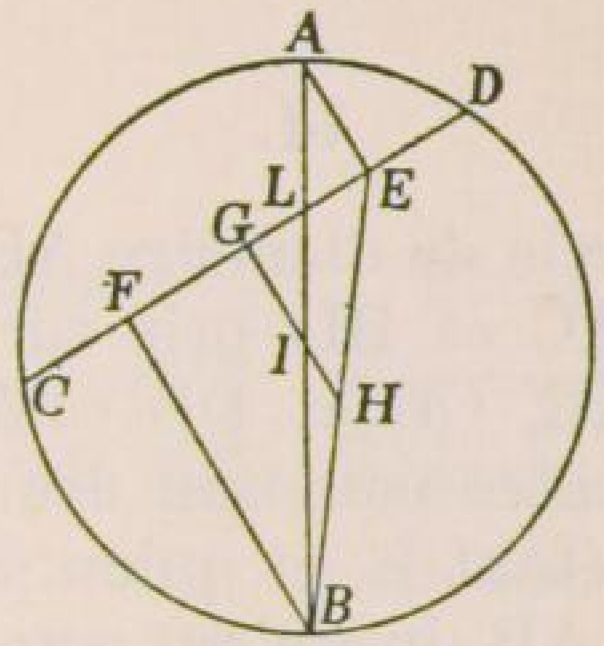

Fig. 147

perpendicularis ex centro ad CD, illam bifariam diuidet in G ; et quia IG, AE sunt duae perpendiculares super illam, erunt parallelae. Et quia BI aequalis est IA, erit BH aequalis ipsi HE ; et propter earum aequalitatem, et quia BF est parallela ipsi HG, erit FG aequalis ipsi GE, et ex GC, GD aequalibus remanent FC, ED aequales. Et hoc est quod uoluimus.

τῶν Α, Β ἄχθωσαν τᾷ ΓΔ ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ· φαμὶ δή, αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου ἀπολαφθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΓΖ, ΔΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΕΒ καὶ ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ Ι τᾷ ΓΔ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ ΙΗ καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τᾷ ΕΒ κατὰ τὸ Θ σαμεῖον.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ ΙΗ παρὰ τὰν ΑΕ ἐστίν, ἁ δὲ ΒΙ τᾷ ΙΑ ἴσα, εὐθεῖα ἄρα ἁ ΒΘ τᾷ ΘΕ ἐστὶν ἴσα. Πάλιν, ἐπεὶ ἁ ΒΖ παρὰ τὰν ΘΗ ᾖ, ἐστίν εὐθεῖα ἄρα ἁ ΖΗ εὐθείᾳ τᾷ ΗΕ ἐστὶν ἴσα· ἔστι δὲ καὶ ἁ ΗΓ τᾷ ΗΔ ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ΖΗ, τουτέστιν ἁ ΗΕ· λοιπὰ ἄρα ἁ ΖΓ λοιπᾷ τᾷ ΕΔ ἐστὶν ἴσα· φανερὸν οὖν ὃ ἔδει δεῖξαι.

14.

Si fuerit AB semicirculus, et ex eius diametro AB dissectae sint AC, BD aequales, et efficiantur super lineas AC, CD, DB semicirculi, et sit centrum duorum semicirculorum AB, CD punctum E, et sit EF perpendicularis super AB et producatur ad G, utique circulus, cuius diameter est FG, aequalis est superficiei contentae a semicirculo maiori et a duobus semicirculis, qui sunt intra illum, et a semicirculo medio, qui est extra illum. Et est figura, quam uocat Archimedes Salinon.

Quia DC bifariam secatur in E, et addita est illi CA, erunt duo quadrata DA, CA dupla duorum quadratorum DE, EA. Sed FG aequalis est ipsi DA ; ergo duo quadrata FG, AC dupla

ιδʹ.

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἴσα τμάματα λαφθέωντι καὶ ἀπὸ τούτων ἁμικύκλια ἐντὸς γραφέωντι, γραφῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τᾶς διαμέτρου ἁμικύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος συναμφότερος ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἁμικυκλίου καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐκτός, χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστίν.

Ἔστω ἁμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ AB, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου τῶν A, B δύο τμάματα ἴσα ἀλλάλοις λελάφθω τὰ AΓ, BΔ, γεγράφθω δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων δύο ἁμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τοῦ ΓΔ γεγράφθω ἁμικύκλιον ἐκτός, διὰ κέντρου δὲ τοῦ ἁμικυκλίου τοῦ E διαμέτρῳ τᾷ AB ἄχθω ποτʼ ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ EZ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ H σαμεῖον · φαμὶ δή, ὁ κύκλος, sunt duorum quadratorum DE, EA. Et quia AB dupla est AE, et CD dupla quoque ED, erunt duo quadrata AB, DC

οὗ διάμετρος ἁ ΖΗ, χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστίν.

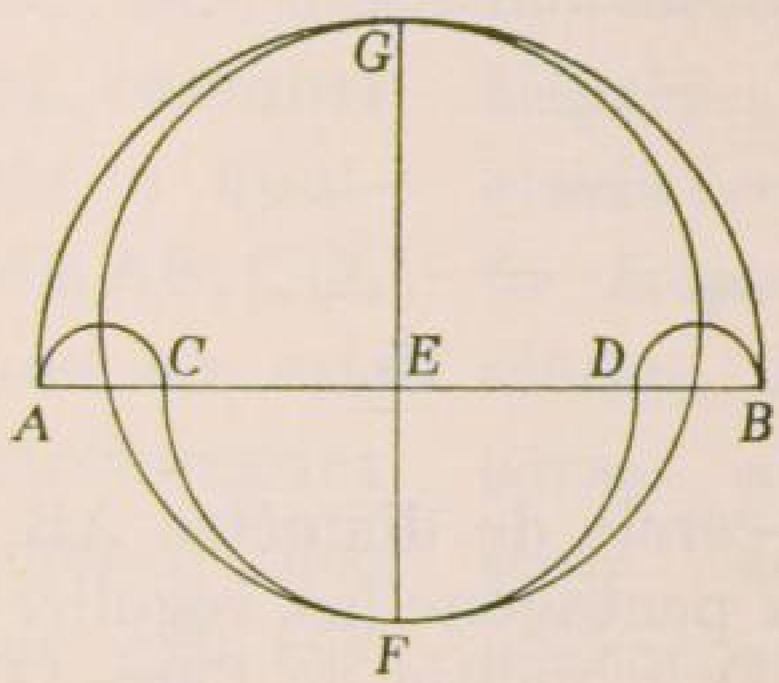

Fig. 148

quadrupla duorum quadratorum DE, EA, immo dupla duorum quadratorum GF, AC. Similiter etiam duo circuli, quorum diametri sunt AB, DC, dupli sunt eorum, quorum diametri sunt GF, AC, et dimidii eorum, quorum diametri sunt AB, CD, aequales duobus

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὰ ἁ ΔΓ δίχα τέτμαται κατὰ τὸ Ε σαμεῖον, ποτίκειται δὲ αὐτᾷ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἁ ΓΑ, τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΑ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ποτικειμένας τᾶς ΓΑ τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλασίονά ἐντι τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ἁμισείας τᾶς ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου. Ἔστι δὲ ἁ ΖΗ τᾷ ΔΑ ἴσα· ἔστιν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΓΑ διπλασίονα τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ. Καὶ ἐπεὶ ἁ ΑΒ τᾶς ΑΕ διπλασίων ἐστὶ καὶ ἁ ΓΔ circulis, quorum diametri sunt GF, AC. Sed circulus, cuius diameter AC, est aequalis duobus semicirculis AC, BD ; ergo, si auferamus ex illis duos semicirculos AC, BD, qui sunt communes, remanet figura contenta a quattuor semicirculis AB, CD, DB, AC, (quae ea est, quam uocat Archimedes Salinon) aequalis circulo, cuius diameter est FG. Et hoc est quod uoluimus.

τᾶς ΔΕ, ἐσσεῖται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ τετραπλασίονα, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΓΑ διπλασίονα· κύκλοι ἄρα, ὧν διάμετροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι, κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ ΖΗ, ΓΑ, διπλασίονές ἐντι· ἁμικύκλια ἄρα, ὧν διάμετροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι, κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΖΗ, ΓΑ, ἴσα ἐστίν· κοινὸν ἀφαιρήσθω κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, τουτέστι δύο ἁμικύκλια, ὧν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΔΒ· λοιπὸν ἄρα χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων περιεχόμενον, ὅπερ σελήνιον καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΖΗ, ἴσον ἐστίν· δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

15.

Si fuerit AB semicirculus et AC chorda pentagoni, et semissis arcus AC sit AD, iungatur CD et producatur, ut cadat super E, et

ιε'.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒ καὶ ἁ ΑΓ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου, τετμάσθω δὲ περιφέρεια ἁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ iungatur DB, quae secet CA in F, et ducatur ex F perpendicularis FG super AB, erit linea EG aequalis semidiametro circuli.

ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου διάχθω ἁ ΔΒ τέμνουσα πλευρὰν τὰν ΑΓ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄχθω τᾷ ΑΒ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΖΗ· φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ ΕΗ τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστίν.

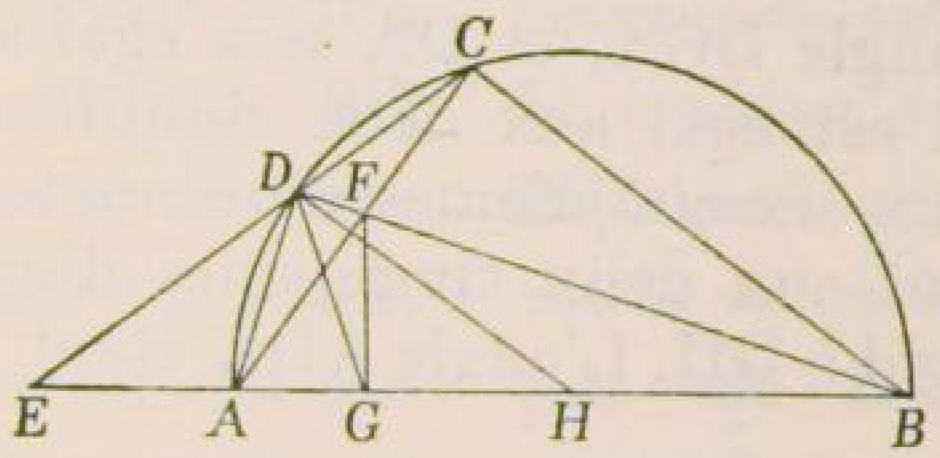

Fig. 149

Iungamus itaque lineam CB, et sit centrum H, et iungamus HD, DG et AD. Et quia angulus ABC, cuius basis est latus pentagoni, est duae quintae partes recti, quilibet duorum angulorum CBD, DBA est quinta pars recti. Et angulus DHA duplus est anguli DBH ; ergo angulus DHA est duae

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΓΒ, καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἄχθωσαν αἱ ΘΔ, ΔΗ, ΑΔ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΓ δύο πέμπτα ὀρθᾶς ἐστιν, γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΔ, τουτέστι ἁ ὑπὸ ΔΒΑ, ἓν πεμπταμόριον ὀρθᾶς ἐστιν· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΘΑ δύο πέμπτα ὀρθᾶς ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΓΒΖ, ΗΒΖ δύο γωνίαι αἱ ποτὶ τῷ Β ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ὀρθαὶ δὲ αἱ ποτὶ τὰ Η, Γ σαμεῖα, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ ΒΖ, ἐσσεῖται ἄρα καὶ quintae partes recti. Et quia in duobus triangulis CBF, GBF duo anguli B sunt aequales et G, C recti et latus FB commune, erit BC aequale ipsi BG. Et quia in duobus triangulis CBD, GBD duo latera CB, BG sunt aequalia et similiter duo anguli ad B, et latus BD commune, erunt duo anguli BCD, BGD aequales. Et quilibet eorum est sex quintae partes recti, et est aequalis angulo DAE externo quadrilateri BADC, quod est in circulo; ergo remanet angulus DAB aequalis angulo DGA, et erit DA aequalis ipsi DG. Et quia angulus DHG est duae quintae partes recti et angulus DGH sex quintae partes recti, remanet angulus HDG duae quintae partes recti, et erit DG aequalis GH. Et quia ADE externus quadrila-

βάσις ἁ ΒΓ βάσει τᾷ ΒΗ ἴσα. Πάλιν ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΓΒΔ, ΗΒΔ δύο πλευραὶ αἱ ΓΒ, ΒΗ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνίαι δὲ αἱ ποτὶ τῷ Β ἴσαι, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ ΒΔ, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΒΓΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΗΔ, τουτέστιν ἐπιπέμπτῳ ὀρθᾶς, ἴσα· ἔστι δὲ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΗΔ γωνιῶν γωνίᾳ τᾷ ἐκτὸς τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ ΒΑΔΓ, τουτέστι τᾷ ΔΑΕ, ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΗΑ ἔστιν ἴσα, καὶ πλευρὰ ἁ ΔΑ τᾷ ΔΗ. Καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΘΗ $\overline{\beta}\epsilon'$ ὀρθᾶς ἐστι καὶ ἁ ὑπὸ ΔΗΘ ἐπίπεμπτος ὀρθᾶς, γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΘΔΗ $\overline{\beta}\epsilon'$ ὀρθᾶς ἐστιν· πλευρὰ ἄρα ἁ ΔΗ πλευρᾷ τᾷ ΗΘ ἐστὶν ἴσα. Πάλιν, ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΕ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ ΑΔΓΒ ἐκτός ἐστιν, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσα· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΓ $\overline{\beta}\gamma'$ ὀρθᾶς· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΗΔΘ teri ADCB, quod est in circulo, est aequalis angulo CBA, et est duae quintae partes recti et aequalis angulo GDH. Et quia in duobus triangulis EDA, HDG sunt duo anguli EDA, HDG aequales et pariter duo anguli DGH, DAE et duo latera DA, DG, erit EA aequale HG. Et ponamus AG commune ; erit EG aequale AH. Et hoc est quod uoluimus.

Et hinc patet quod linea DE aequalis sit semidiametro circuli ; quia angulus A aequalis est angulo DGH, ideo erit linea DH aequalis lineae DE.

Et dico quod EC diuiditur media et extrema proportione in D, et maius segmentum est DE ; et hoc, quia ED est chorda hexagoni et DC decagoni, et hoc iam demonstratum est in libro Elementorum. Et hoc est quod uoluimus.

ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΕΔΑ, ΘΔΗ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΔΑ, ΔΑΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΘΔΗ, ΔΗΘ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί, βάσις δὲ ἁ ΔΑ βάσει τᾷ ΔΗ ἴσα, πλευρὰ ἄρα ἁ ΕΑ πλευρᾷ τᾷ ΘΗ ἴσα ἐστίν. Κοινὰ ποτικείσθω ἁ ΑΗ· εὐθεῖα ἄρα ἁ ΕΗ εὐθείᾳ τᾷ ΑΘ, τουτέστι τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἴσα ἐστίν· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὴ φανερὸν ὅτι εὐθεῖα ἁ ΔΕ τᾷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἴσα. Ἐπεὶ γὰρ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΗΘ ἴσα ἐστίν, ἐσσεῖται καὶ πλευρὰ ἁ ΔΘ πλευρᾷ τᾷ ΔΕ, τουτέστι τᾷ ΑΘ, ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ ἔτι δῆλον ὅτι εὐθεῖα ἁ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον τέτμαται κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· τμᾶμα δὲ τὸ ΔΕ τὸ μεῖζόν ἐστιν, ἐπεὶ ἁ ΕΔ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, ἁ δὲ ΔΓ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων.

LE PROBLÈME DES BŒUFS

PROBLEMA BOVINUM

Πρόβλημα,

ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένη
χροιὴν ἀλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἐν δὲ ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι·

αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
Ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῇ.
Ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
Ξεῖνε, σὺ δ' Ἠελίοιο βόες πόσαι ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,
οὐκ ἄιδρίς κα λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. Ἀλλ' ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Σχόλιον

Τὸ μὲν οὖν πρόβλημα διὰ τοῦ ποιήματος ὁ Ἀρχιμήδης ἐδήλωσε σαφῶς· ἰστέον δὲ λεγόμενον, ὅτι τέσσαρας ἀγέλας εἶναι δεῖ βοῶν, λευκοτρίχων μὲν μίαν ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος ὁμοῦ συνάγει μυριάδας διπλᾶς ιδ' καὶ ἁπλᾶς φπβ' καὶ μονάδας ,ζτξ', κυανοχρόων δ' ἄλλην ὁμοῦ ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν ἐννέα καὶ ἁπλῶν ,ηωλ' καὶ μονάδων ω', μιξοτρίχων δ' ἄλλην ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν η' καὶ ἁπλῶν ,ςϡϙα' καὶ μονάδων υ' · τῆς δὲ λοιπῆς ἀγέλης ξανθοχρόων συνάγει τὸ πλῆθος διπλᾶς μυριάδας ζ' καὶ ἁπλᾶς ,ςψη', μονάδας δὲ ,η · ὥστε συνάγεσθαι ὁμοῦ τὸ πλῆθος τῶν δ' ἀγελῶν μυριάδας διπλᾶς μ' καὶ ἁπλᾶς ,γριβ' καὶ μονάδας ,ςφξ'. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἔχει μυριάδας διπλᾶς η' καὶ ἁπλᾶς ,βϡλα' καὶ μονάδας ,ηφξ', θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς ε' καὶ ἁπλᾶς ,ζχν' καὶ μονάδας ,ηω', ἡ δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς ε' καὶ ἁπλᾶς ,θχπδ' καὶ μονάδας ,αρκ', θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς γ' καὶ ἁπλᾶς ,θρμε' καὶ μονάδας ,θχπ', ἡ δ' ἀγέλη τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς ε' καὶ ἁπλᾶς ,ηωξδ' καὶ μονάδας ,δω', θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς β' καὶ ἁπλᾶς ,ηρκς' καὶ μονάδας ,εχ', ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς γ' καὶ ἁπλᾶς ,γρϙε' καὶ μονάδας ϡξ', θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς δ' καὶ ἁπλᾶς ,γφιγ' καὶ μονάδας ,ζμ'. Καί ἐστι τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἡμίσει καὶ τρίτῳ μέρει τοῦ πλήθους τῶν κυανοχρόων ταύρων καὶ ἔτι ὅλῃ τῇ τῶν ξανθοχρωμάτων ἀγέλῃ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρωμάτων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων καὶ ὅλῳ τῷ πλήθει τῶν ξανθοχρωμάτων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἕκτῳ καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἔτι τῷ πλήθει ὅλῳ τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων, καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν θηλειῶν ἴσον τῷ τρίτῳ καὶ τετάρτῳ μέρει ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων, τὸ δὲ τῶν κυανοχρόων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν ποικιλοτρίχων, τὸ δὲ τῶν ποικιλοτρίχων ἴσον τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ μέρει τῆς ὅλης τῶν ξανθῶν βοῶν. Πάλιν δὲ τὸ τῶν ξανθῶν θηλειῶν πλῆθος ἦν ἴσον τῷ ἕκτῳ τε καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ τῶν κυανοχρόων ταύρων συντεθεῖσα ποιεῖ τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων μετὰ τῆς ἀγέλης τῶν ποικιλοχρόων συντεθεῖσα ποιεῖ τρίγωνον, ὡς ἔχει τὰ τῶν ὑποκειμένων κανόνων καθ' ἕκαστον χρῶμα.