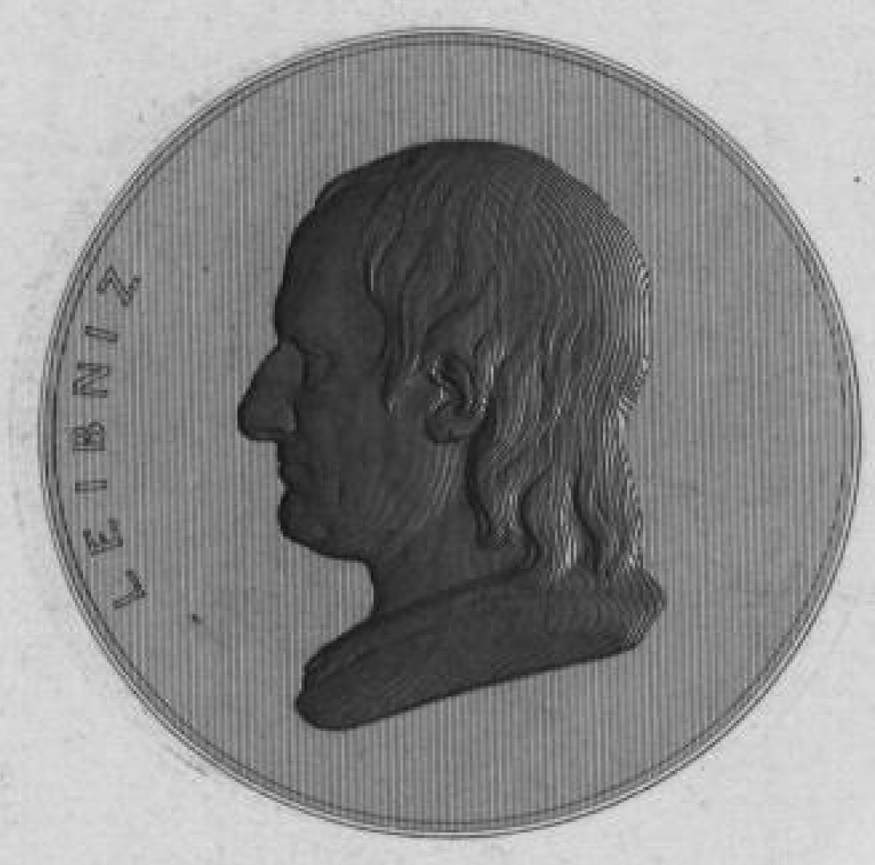
ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



SECHSTER BAND.

MIT NEUNUNDZWANZIG TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1859.

Sächsische Landesbibliothek -
Staats- und Universitätsbibliothek Dresden

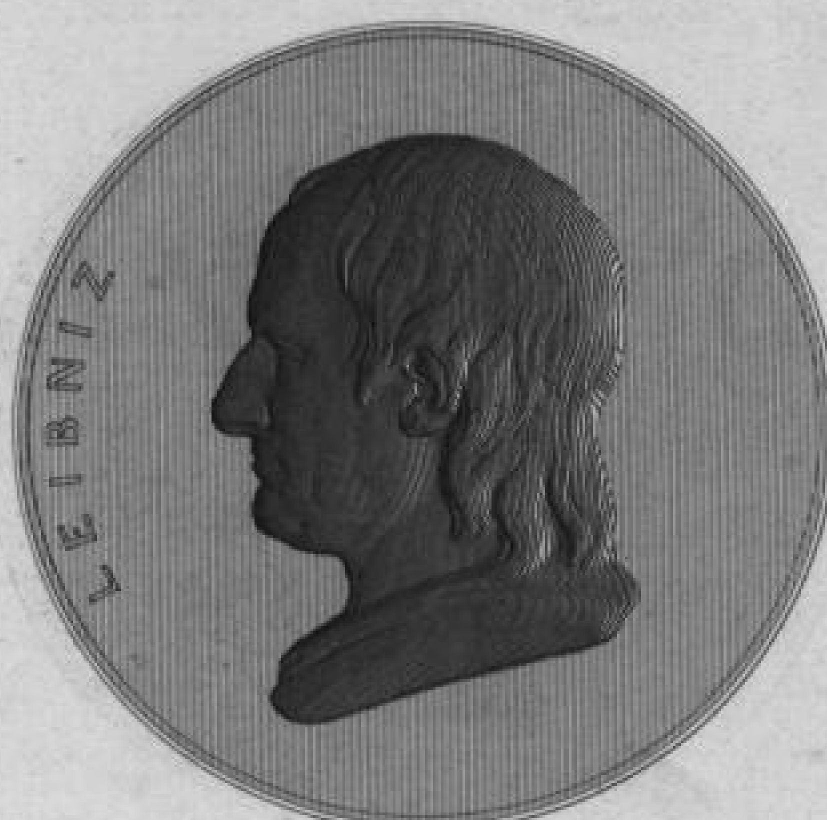
Sächsische Akademie der Wissenschaften

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



VIERTER BAND.

MIT NEUNUNDZWANZIG TAFELN.

BIBLIOTHECA DRESDENSIS

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1859.

63.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden

Sächsische Akademie der Wissenschaften

ABHANDLUNGEN

SECHSTER BAND.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden

Sächsische Akademie der Wissenschaften

Sächsische Landesbibliothek -
Staats- und Universitätsbibliothek Dresden

SMWK

Sächsische Akademie der Wissenschaften

INHALT.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden

Sächsische Akademie der Wissenschaften

Indem die mathematisch-physische Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften den vierten Band ihrer Abhandlungen herausgiebt, ist sie verpflichtet mit Dank der kräftigen Unterstützung der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu gedenken, ohne welche es ihr nicht möglich gewesen sein würde innerhalb des Zeitraums, in welchem es geschehen ist, die erschienenen Bände zu veröffentlichen.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

AUSEINANDERSETZUNG

EINER ZWECKMÄSSIGEN METHODE

ZUR

BERECHNUNG DER ABSOLUTEN STÖRUNGEN

DER

KLEINEN PLANETEN.

VON

P. A. HANSEN.

ZWEITE ABHANDLUNG.

BIBLIOTHECA REGIA DRESDENSIS

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden

Sächsische Akademie der Wissenschaften

Da ich in der Einleitung zur vorhergehenden Abhandlung gleicher Ueberschrift mich über das zu behandelnde Thema ausführlich ausgesprochen habe, und diese zweite Abhandlung sich unmittelbar an die erste anschliesst, so habe ich geglaubt, dass ich mich würde begnügen können, dieser Abhandlung diese wenigen Worte vorzusetzen. Allein ein unterdess eingetretener Zwischenfall veranlasst mich die allgemeinen, einfachen Principien, von welchen ich ausgegangen bin, und von welchen ich sonst glaubte, dass sie jedem Astronomen bekannt seien, hier anzuführen.

Diese Veranlassung giebt der von Neuem über einen Gegenstand, den ich für längst abgemacht halten musste, in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1859 von Herrn Prof. Encke veröffentlichte Aufsatz. Es muss freilich anerkannt werden, dass er darin (auf der ersten Seite) einräumt, dass er nicht im Stande gewesen ist, auf die Sache mit der angemessenen Ruhe einzugehen, wer aber daraus auf den übrigen Inhalt dieses Aufsatzes schliessen wollte, würde sich wahrscheinlich irren, denn von der dritten Zeile an ist derselbe ähnlicher Beschaffenheit wie der der früheren Aufsätze desselben Verfassers. Da eine Widerlegung jetzt gänzlich ausserhalb des Bereichs der Nothwendigkeit liegt, so will ich hier nur auf eine neue Begriffsverwechselung, die darin vorkommt, aufmerksam machen, welche die Quelle von mehreren der andern zu sein scheint, und in der sonderbaren Idee besteht, dass die vorliegende Aufgabe auf bestimmte Integrale führe. Ich brauche um diese Idee zu beleuchten, nur einige einfache Sätze aus den Anfangsgründen der Integralrechnung und der Dynamik anzuführen, deren Aufstellung vor dieser Abhandlung, die im §. 5 den Gegenstand ausführlich behandelt, ich jetzt für passend halten muss.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

1) Jedes Integral muss die durch die Grundsätze der Integralrechnung bestimmte Anzahl von den Constanten enthalten, die man allgemein die willkührlichen nennt, und da die vorliegende Aufgabe von drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung abhängt, so müssen durch die Integrationen, welche sie verlangt, sechs solcher Constanten eingeführt werden.

2) Da diese Aufgabe nur durch mehrere aufeinander folgende Annäherungen gelöst werden kann, und jede dieser Annäherungen die Ausführung von sechs Integrationen verlangt, so müssen auch in jeder Annäherung sechs sogenannte willkührliche Constanten eingeführt werden. Alle diese Constanten bilden aber nicht eine eben so grosse Anzahl von verschiedenen und unabhängigen Constanten, sondern vereinigen sich so mit einander, dass überhaupt nur sechs von einander unabhängige Constanten daraus entstehen. Da man schon in der ersten Annäherung zur Berechnung der Störungen den sechs willkührlichen Constanten der Aufgabe bestimmte Werthe beilegen muss, so dienen die in dieser und den folgenden Annäherungen erscheinenden Constanten um die ursprünglich angenommenen Werthe derselben zu ergänzen und zu berichtigen. Da solchergestalt in der Auflösung dieser Aufgabe mehr wie die sechs uranfänglichen Constanten entstehen, so kann man die übrigen eintretenden allenfalls überzählige Constanten nennen, aber daraus zu schliessen, dass die letzteren willkührlich seien, oder auf Identitäten wie z. B. $g - g = 0$, oder gar auf, nur in besonderen Fällen stattfindenden, Gleichungen wie const. — const. = 0 beruhen, ist ein Fehlschluss.

3) Da die vorliegende Aufgabe die Ermittelung der Curve, die der gestörte Planet beschreibt, in Function der Zeit zum Zweck hat, so können die Integrale, auf welche sie führt, keine bestimmten Integrale sein, wie Herr Prof. Encke in seinem angezogenen Aufsatze im Widerspruch mit Allem, was die Dynamik über diese Gattung von Aufgaben lehrt, annimmt. Denn bestimmte Integrale sind Constanten, aber die Coordinaten einer jeden Curve sind veränderliche Grössen. Bestimmte Integrale können in dieser Aufgabe höchstens im Laufe der Entwickelungen als Ausdrücke für die Coefficienten der veränderlichen Glieder der Integrale eingeführt werden, müssen aber nicht nothwendiger Weise eintreten.

4) Da die von jedem Planeten beschriebene Curve völlig bestimmt

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden · SMWK · Sächsische Akademie der Wissenschaften

ist, so können die Integrale, die in jeder Annäherung zu bilden sind, auch keine allgemeinen Integrale sein, in welchen die Constanten, die man allgemein die willkührlichen nennt, in der That willkührlich sind. Es kann im Gegentheil keine einzige dieser Constanten willkührlich sein, und die Integrale, auf welche die in Rede stehende Aufgabe führt, sind daher particuläre Integrale, nemlich solche in welchen alle durch die Integrationen eingeführten Constanten bestimmte Werthe haben.

5) Den allgemeinen Regeln der Dynamik zufolge müssen diese Constanten jedenfalls so bestimmt werden, dass die Integrale in einem bestimmten Zeitpunkt den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten darstellen, und diese Constanten können auch so bestimmt werden, denn die Bestimmung des Orts und der Geschwindigkeit des Planeten zu einer gegebenen Zeit hängt von sechs Bedingungen ab, und die Zahl der in dieser Aufgabe durch die Integrationen eingeführten Constanten ist ebenfalls sechs.

Mit Zugrundelegung dieser Grundsätze sind in dieser Abhandlung die Entwickelungen und Integrationen ausgeführt, und darauf diese Constanten in zwei verschiedenen Fällen bestimmt worden, nemlich in dem, wo man der Berechnung der Störungscoefficienten mittlere Elemente, und in dem, wo man derselben osculirende Elemente untergelegt hat. Das erste der hier erhaltenen Resultate stimmt mit der in den „*Fundamenta nova* etc." ausgeführten Bestimmung der dort vorkommenden analogen Constanten, und der von Laplace angewandten, überein, und das zweite ist mit der in den Astr. Nachr. Bd. XVIII. Nr. 425 gegebenen Behandlung desselben Falles übereinstimmend.

Der mittlere Werth der mittleren Bewegung ist mit dem wahren Werthe derselben identisch, und es tritt daher im erst genannten Falle der wahre Werth derselben selbstverständlich in die Ausdrücke der Coordinaten ein. Aber auch im zweiten Falle wird durch die richtige Bestimmung der willkührlichen Constanten der osculirende Werth der mittleren Bewegung in den wahren Werth derselben von selbst verwandelt. Es verbindet sich nemlich die Constante, die ein Glied von der Form der mittleren Bewegung hervorbringt, mit dem der Rechnung zu Grunde gelegten Werthe dieser und allen übrigens vorhandenen Gliedern derselben Form, so zu einem Ganzen, dass dieses der wahre Werth der mittleren Bewegung wird. Und dieses Resultat muss sich in jedem Falle ergeben, welche Gattung von mittlerer Bewegung man auch

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

der Rechnung zu Grunde gelegt haben mag, denn es ist an sich klar, dass der wahre Werth der mittleren Bewegung in jedem Falle in den Argumenten aller Ausdrücke ohne Ausnahme eintreten muss, indem Ausdrücke für die Coordinaten der Curve, die der Planet beschreibt, — seien diese Coordinaten gewählt, wie man will, — die auf einem anderen wie dem wahren Werthe der mittleren Bewegung beruhen, auf die Dauer die wahren Werthe dieser Coordinaten nicht geben können, wenn gleich sie für eine kurze Zeit nur geringe Abweichungen von den Beobachtungen zeigen sollten.

Da auch über die Säcularänderung der mittleren Länge in der letzten Zeit von Herrn Prof. Encke Begriffe mit der grössten Zuversicht vorgetragen worden sind, die mit der wahren Beschaffenheit derselben im schneidendsten Contrast stehen, so habe ich in einem besonderen Paragraphen die Beschaffenheit derselben aus einander gesetzt, und die bei der Berechnung derselben vorkommenden eigenthümlichen Umstände entwickelt. Nach der Aufstellung und dem Beweise von fünf sich darauf beziehenden Sätzen konnte ich die Glieder auf eine bestimmte Weise namhaft machen, aus welchen einzig und allein die Säcularänderung der mittleren Länge hervor geht.

Den übrigen Inhalt dieser Abhandlung wird man aus der folgenden Zusammenstellung der Ueberschriften der Paragraphen, in welche sie eingetheilt ist, im Allgemeinen erkennen können.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

§. 8. Integration der in den Breitenstörungen aus der Variation des Factors $\cos i$ entstehenden Glieder. Art. 79 u. 80.

Es ist diesem nur noch hinzuzufügen, dass ich hier die vorhergehende Abhandlung über dasselbe Thema gemeiniglich mit Abhandlung (I) bezeichnet habe, so wie dass ich den Citaten von Artikeln und Gleichungen aus dieser Abhandlung immer das Zeichen (I) hinzugefügt habe, um sie von den Citaten aus der vorliegenden Abhandlung zu unterscheiden.

§. 1. Entwickelung der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten für die vom Saturn bewirkten Störungen der Egeria.

1.

Die Entwickelung der Störungsfunction für die Saturnstörungen der Egeria werde ich durch die Methode ausführen, die ich in der „Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen etc.“ *) betitelten Abhandlung abgeleitet habe, und die Vorschriften zur Anwendung dieser Methode mit der numerischen Berechnung der genannten Störungen verbinden. Die in dieser Rechnung angewandten Elemente der Egeria sind dieselben, die mir für die Jupiterstörungen gedient haben, ich werde sie neben den Saturnelementen wieder anführen.

Egeria für 1851 Dec. 5.0 m. Gr. Z,		Saturn für 1851,0
$c = 19^0\ 31'\ 43''.6$		$m' = \frac{1}{3502}$
$\pi = 119\ \ 12\ \ 12.4$	m. Aeq. 1851,0	$\pi' = 90^0\ 7'\ 19''$
$\theta = 43\ \ 17\ \ \ 9.1$	m. Aeq. 1851,0	$\theta' = 112\ \ 22\ \ 15$
$\varphi = 4\ \ 52\ \ \ 7.4$		$e' = 0.0559925$
$i = 16\ \ 33\ \ \ 6.7$		$i' = 2^0\ 29'\ 28''.0$
$n = 858''.3861$		$n' = 120''.4548$
$\log a = 0.4108826$		$\log a' = 0.9794963$

In Bezug auf den Umstand, dass diese beiden Systeme von Elementen nicht einem und demselben Zeitpunkt angehören, erinnere ich an das, was ich darüber im §. 7 (I) Art. 77 gesagt habe.

Auf dieselbe Art, wie in der Abhandlung (I) erhält man hier

$$J = 15^0\ 49'\ 47''.2$$
$$\Pi = 84\ \ 28\ \ 38.2$$
$$\Pi' = 55\ \ \ 3\ \ 27.3$$

*) Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. IV.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

und das Verhältniss μ der mittleren Bewegungen und die Vielfachen davon wie folgt:

$$\begin{aligned} \mu &= 0{,}1403271 \\ 2\mu &= 0{,}2806542 \\ 3\mu &= 0{,}4209813 \\ 4\mu &= 0{,}5613084 \\ 5\mu &= 0{,}7016355 \end{aligned}$$

In einen Kettenbruch aufgelöst wird

$$\mu = \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

und

$$1 - 7\mu = 0{,}0177$$

dieser kleine Divisor kann hier nur unerhebliche Wirkung äussern, weshalb ich ihn weiter nicht berücksichtigen werde.

2.

Wenn wir wie immer die sich auf den störenden Planeten beziehenden Grössen mit einem Strich versehen, so giebt die genannte Methode, wenn dieser Planet ein oberer ist, zuerst

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} + \frac{r}{r'^2} D_1 + \frac{r^2}{r'^3} D_2 + \frac{r^3}{r'^4} D_3 + \text{etc.}$$

Da in den Differentialgleichungen der Bewegung nur die Differentialquotienten der Störungsfunction in Bezug auf die Coordinaten des gestörten Planeten vorkommen, und das erste Glied des vorstehenden Ausdrucks diese nicht enthält, so können wir in diesem Falle setzen

$$\Omega = \mu \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r'} - \frac{r}{r'^2} H \right\}$$

und da $D_1 = H$ ist, so wird hiemit

$$\Omega = \mu \left\{ \frac{r^2}{r'^3} D_2 + \frac{r^3}{r'^4} D_3 + \frac{r^4}{r'^5} D_4 + \text{etc.} \right\}$$

wo wieder $\mu = m' \, 206265''$ ist. Es fallen mithin die zwei ersten Glieder der Entwickelung von Δ^{-1} in dem Ausdruck der Störungsfunction weg. In der angezogenen Abhandlung wurden die D Coefficienten auf folgende Form gebracht

$$D_n = \Sigma \left\{ A_{i,i'} + \sqrt{-1} \, . \, B_{i,i'} \right\} x^i x'^{i'}$$

wo x und x' die zu den wahren Anomalien gehörigen imaginären Expo-

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

nentialfunctionen sind. In der „Entwickelung des Products einer Potenz etc.“*) betitelten Abhandlung habe ich aber gezeigt, wie

$$\frac{x'^{i'}}{r'^{n+1}} = \Sigma F_{\nu'} z'^{\nu'} \text{ und } r^n x^i = \Sigma G_\nu y^\nu$$

erhalten werden kann, wenn z' die zur mittleren Anomalie des störenden, und y die zur excentrischen Anomalie des gestörten Planeten gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen sind. Die Substitution dieser Ausdrücke giebt zuerst

$$\frac{1}{r'^{n+1}} D_n = \Sigma \left\{ A_{i,i'} + \sqrt{-1}\, B_{i,i'} \right\} F_{\nu'} x^i z'^{\nu'}$$

und hieraus

$$\frac{r^n}{r'^{n+1}} D_n = \Sigma \left\{ A_{i,i'} + \sqrt{-1}\, B_{i,i'} \right\} F_{\nu'} G_\nu y^\nu z'^{\nu'}$$

Durch die Ausdehnung dieser Substitutionen auf alle merklichen Werthe von n erhält man

$$2\Omega = \Sigma \left\{ P_{\nu,\nu'} + \sqrt{-1}\,.\, Q_{\nu,\nu'} \right\} \eta^\nu z'^{\nu'}$$

und nach dem Uebergange zum Reellen

$$\Omega = \Sigma P_{\nu,\nu'} \cos(\nu\varepsilon + \nu' g') - \Sigma Q_{\nu,\nu'} \sin(\nu\varepsilon + \nu' g')$$

die Ausführung dieser Substitutionen ist nun zu erklären.

3.

Ich werde das Product der Störungsfunction mit der halben grossen Achse a erst wie folgt stellen

$$a\Omega = \mu \left\{ \mathfrak{v}^3 D_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 + \mathfrak{v}^4 D_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(\frac{a'}{r'}\right)^4 + \mathfrak{v}^5 D_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(\frac{a'}{r'}\right)^5 + \text{etc.} \right\}$$

wo

$$\mathfrak{v} = \frac{a}{a'}$$

und also immer kleiner wie Eins ist, wenn der störende Planet, wie hier vorausgesetzt wird, ein oberer ist. In der Abhandlung (I) hatte ich $\alpha = \frac{a'}{a}$ gesetzt, und wähle hier um das entgegengesetzte Verhältniss zu bezeichnen, ein umgekehrtes α. In Zeichen der angeführten Abhandlung ist

$$D_n = \Sigma C\Big((n-2f, -(n-2f-2g)\Big)\, u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)}$$

wo u und u' die zu den Argumenten der Breite gehörigen, imaginären

*) Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. IV.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Exponentialfunctionen bezeichnen, und n, f und g ganze und positive Zahlen sind. Ich erinnere hier daran, dass a. a. O. gezeigt worden ist, dass man in D_n nur die C Coefficienten der folgenden Glieder zu berechnen braucht,

$$\begin{aligned} D_n = {} & C(n,-n)\,u^n u'^{-n} + C\Big(n,-(n-2)\Big)\,u^n u'^{-(n-2)} + \text{etc.} \\ & + C\Big((n-2),-(n-2)\Big)\,u^{n-2} u'^{-(n-2)} + C\Big((n-2),-(n-4)\Big)\,u^{n-2}, u'^{-(n-4)} + \text{etc.} \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & + C(1,-1)\,u u'^{-1} + C(1,1)\,u u' \\ \text{oder } & + C(0,0) \end{aligned}$$

je nachdem n ungrade oder grade ist, indem die übrigen Coefficienten des Ausdrucks von D_n den vorstehenden gleich sind. Es wurde ferner gefunden, dass

$$\begin{aligned} & C\big(n-2f,-(n-2f-2g)\big) = \\ & \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\,\mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\,\Big\{a(g,0) - b(g,1)\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}J + a(g,1)\,\mathrm{tg}^4\tfrac{1}{2}J \mp \dots \\ & \qquad \dots - b(g,f-1)\,\mathrm{tg}^{4f-2}\tfrac{1}{2}J + a(g.f)\,\mathrm{tg}^{4f}\tfrac{1}{2}J\Big\} \end{aligned}$$

ist, wo $a(g,0)$, $a(g,1)$, etc. $b(g,1)$, $b(g,2)$, etc. unveränderliche numerische Coefficienten sind, die a. a. O. Tafel IV bis $n = 20$ incl. berechnet sich vorfinden.

Ich werde in Folge dessen hier die folgenden Grössen und Bezeichnungen einführen,

$$(1)\quad \Gamma\Big(n-2f,-(n-2f-2g)\Big) = \gamma_n\,\mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\,\Big\{a(g,0) - b(g,1)\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}J + a(g,1)\,\mathrm{tg}^4\tfrac{1}{2}J \mp \dots\Big\}$$

wo

$$(2)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma_n = 2\mu\nu^{n+1}\cos^{2n}\tfrac{1}{2}J$$

ist, und $m'\,206265''$ für μ gesetzt werden muss, ferner

$$\Delta_n = \Sigma\Gamma\Big(n-2f,-(n-2f-2g)\Big)\,u^{n-2f}\,u'^{-(n-2f-2g)}$$

wo die Glieder, aus welchen die Summe zu bilden ist, dieselben Indices haben, wie oben in dem Ausdruck für D_n, oder mit andern Worten diejenigen sind, deren Indices oder Exponenten von u und u' in der ersten Columne linker Hand der genannten Tafel IV angeführt sind. Hiemit ergiebt sich

$$2a\Omega = \Delta_2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 + \Delta_3\left(\frac{r}{a}\right)^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 + \Delta_4\left(\frac{r}{a}\right)^4\left(\frac{a'}{r'}\right)^5 + \text{etc.}$$

Die Ursache, weshalb ich den Hülfsgrössen γ_n solche Zusammensetzung gegeben habe, dass das Doppelte der mit a multiplicirten Störungsfunction daraus hervorgeht, ist die folgende. Bei dem Uebergange zum Reellen am Schlusse der Entwickelung müssen alle Coefficienten der imaginären Exponentialfunctionen mit 2 multiplicirt werden, indem ich nun gleich den Ausdruck von γ_n damit multiplicirt habe, vermeide ich die umständlichere Multiplication am Ende der Rechnung, und würde dort nur das constante Glied des Ausdrucks von $a\Omega$ mit 2 zu dividiren haben, wenn es nicht, wie schon in Abhandlung (I) angeführt ist, vortheilhafter wäre, davon den doppelten Werth stehen zu lassen.

4.

Zunächst müssen nun durch den Ausdruck (2) die γ_n und darauf durch (1) die Γ Coefficienten berechnet werden, wozu die in Tafel IV der genannten Abhandlung befindlichen numerischen Werthe der a und b Coefficienten dienen. Der Umstand, dass die Γ Coefficienten mit $\mathrm{tg}^{2g}\frac{1}{2}J$ multiplicirt sind, oder mit andern Worten, dass von jeder Gruppe derselben der zweite mit $\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}J$, der dritte mit $\mathrm{tg}^4\frac{1}{2}J$, etc. multiplicirt wird, verursacht, dass bei den Werthen der Neigungen, die fast alle der bis jetzt bekannten kleinen Planetenbahnen besitzen, nur die ersten Glieder merkliche Werthe bekommen. Mit dem im Art. 1 angegebenen Werthe von J und mit Zuziehung der dort angeführten Elemente a, a' und m' ergab sich

$$
\begin{aligned}
\log \gamma_1 &= 0{,}925596 \\
- \ \gamma_2 &= 0{,}348666 \\
- \ \gamma_3 &= 9{,}771736 \\
- \ \gamma_4 &= 9{,}194806 \\
- \ \gamma_5 &= 8{,}61788 \\
- \ \gamma_6 &= 8{,}04095 \\
- \ \gamma_7 &= 7{,}4640 \\
- \ \gamma_8 &= 6{,}8871
\end{aligned}
$$

und dann die in der folgenden Tafel zusammen gestellten Werthe der Logarithmen der Δ Coefficienten,

Indices	Δ_1		Δ_3	2, −2	8.2772	3, −3	7.5996
1, −1	0.624566	3, −3	9.26659	2, 0	7.6061	3, −1	7.0845
1, +1	8.91076	3, −1	8.02990	2, +2	6.130	3, +1	5.790
	Δ_2	3, +1	6.3161	0, 0	8.1905	1, −1	7.4421
2, −2	9.922697	1, −1	8.97294		Δ_5	1, +1	7.1031
2, 0	8.50992	1, +1	8.0977	5, −5	8.0090		Δ_6
2, +2	6.4951		Δ_4	5, −3	6.9942	6, −6	7.3942
0, 0	9.711836	4, −4	8.63167	5, −1	5.581	6, −4	6.459
		4, −2	7,5199			6, −2	5.143
		4, 0	5.982				

4, −4	6.9306	5, −5	6.265		Δ_8	4, −4	5.145
4, −2	6.547	5, −3	5.999	8, −8	6.180	4, −2	5.458
4, 0	5.382	5, −1	4.936	8, −6	5.370	4, −0	4.573
2, −2	6.698	3, −3	5.941	8, −4	4.199	2, −2	4.649
2, 0	6.569	3, −1	6.019	6, −6	5.600	2, 0	5.458
2, +2	5.442	3, +1	5.027	6, −4	5.445	2, +2	4.605
0, 0	6.617	1, −1	5.741	6, −2	4.465	0, 0	4.292
	Δ_7	1, +1	6.022				
7, −7	6.785						
7, −5	5.916						
7, −3	4.679						

Wie man sieht, habe ich hier die Grösse Δ_1 mit aufgenommen, obgleich sie in der Störungsfunction selbst nicht vorkommt. Die Ursache davon wird weiter unten folgen.

5.

Durch die vorhergehende Rechnung ist die Störungsfunction in Function der durch die bez. Halbachsen dividirten Radii Vectores und der Argumente der Breite ausgedrückt, und um die letzten in wahre Anomalien zu verwandeln, müssen die folgenden Formeln angewandt werden,

$$A(n,-n) = \Gamma(n,-n)\cos(n\Pi - n\Pi')\,;\quad B(n,-n) = \Gamma(n,-n)\sin(n\Pi - n\Pi')$$
$$A(n,-(n-2)) = \Gamma(n,-(n-2))\cos(n\Pi-(n-2)\Pi')\,;\quad B(n,-(n-2)) = \Gamma(n,-(n-2))\sin(n\Pi-(n-2)\Pi')$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$A(n-2,-n) = \Gamma(n,-(n-2))\cos((n-2)\Pi-n\Pi')\,;\quad B(n-2,-n) = \Gamma(n,-(n-2))\sin((n-2)\Pi-n\Pi')$$
$$A(n-2,-(n-2)) = \Gamma(n-2,-(n-2))\cos((n-2)\Pi-(n-2)\Pi')\,;\quad B(n-2,-(n-2)) = \Gamma(n-2,-(n-2))\sin((n-2)\Pi-(n-2)\Pi')$$
$$A(n-2,-(n-4)) = \Gamma(n-2,-(n-4))\cos((n-2)\Pi-(n-4)\Pi')\,;\quad B(n-2,-(n-4)) = \Gamma(n-2,-(n-4))\sin((n-2)\Pi-(n-4)\Pi')$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

die im Art. 36 der genannten Abhandlung erklärt sind. Es wird hiemit

$$\Delta_n = \Sigma A(n-2f, -(n-2f-2g))\, x^{n-2f} x'^{-(n-2f-2g)}$$
$$+ i\Sigma B(n-2f, -(n-2f-2g))\, x^{n-2f} x'^{-(n-2f-2g)}$$

wo wie oben x und x' die zu den wahren Anomalien gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen und

$$i = \sqrt{-1}$$

ist. Aus den Angaben des Art. 1 findet man

$$\Pi - \Pi' = 29^0\ 25'\ 10'',9\,,$$
$$2\Pi' = 110\ \ 6\ \ 54,6$$

und hiemit können leicht durch fortgesetzte Additionen die für die vor-

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

stehenden Formeln erforderlichen Vielfachen der Π und Π' gebildet werden. So ergeben sich die Werthe der vorstehenden A und B Coefficienten, wie die folgende Tafel ausweist.

	A	B
	Δ_1	
1, −1	0.564607	0.315827
1, +1	8.79203*n*	8.72299
	Δ_2	
2, −2	9.636556	9.855028
2, 0	8.50180*n*	7.79229
2, +2	5.6926	6.4896*n*
0, −2	8.04636*n*	8.48259*n*
0, 0	9.711836	—
0, +2	8.04636*n*	8.48259
	Δ_3	
3, −3	7.7492	9.26639
3, −1	8.00717*n*	7.5285*n*
3, +1	6.1101	6.2097*n*
1, −3	7.2385	8.02415*n*
1, −1	8.91298	8.66420
1, +1	7.9790*n*	7.9099
1, +3	5.857*n*	6.2881*n*
	Δ_4	
4, −4	8.29867*n*	8.57889
4, −2	7.3471*n*	7.3896*n*
4, 0	5.949	5.557*n*
2, −4	7.3162	7.4121*n*
2, −2	7.9911	8.2095
2, 0	7.5980*n*	6.8885
2, +2	5.328	6.125*n*
0, −4	5.865*n*	5.792
0, −2	7.1425*n*	7.5788*n*
0, 0	8.1905	—
0, +2	7.1425*n*	7.5788
0, +4	5.865*n*	5.792*n*
	Δ_5	
5, −5	7.9331*n*	7.7440
5, −3	6.3391*n*	6.9833*n*
5, −1	5.577	4.687
3, −5	6.9618	6.5651*n*
3, −3	6.0822	7.5994
3, −1	7.0618*n*	6.583*n*
3, +1	5.584	5.684*n*
1, −5	5.573*n*	4.854
1, −3	6.2932	7.0788*n*
1, −1	7.3821	7.1334
1, +1	6.9844*n*	6.9153
1, +3	6.331*n*	5.762*n*
	Δ_6	
6, −6	7.3934*n*	6.178
6, −4	5.916	6.441*n*
6, −2	5.047	4.920
4, −6	6.455	5.579
4, −4	6.5976*n*	6.8778
4, −2	6.374*n*	6.417*n*
4, 0	5.349	4.957*n*
2, −6	5.120*n*	4.647*n*
2, −4	6.343	6.439*n*
2, −2	6.412	6.630
2, 0	6.561*n*	5.851
2, +2	4.640	5.437*n*
0, −4	5.265*n*	5.192
0, −2	6.105*n*	6.542*n*
0, 0	6.617	—
0, +2	6.105*n*	6.542
0, +4	5.265*n*	5.192*n*
	Δ_7	
7, −7	6.739*n*	6.426*n*
7, −5	5.773	5.757*n*
7, −3	4.640	4.286
5, −7	5.818	5.695
5, −5	6.189*n*	6.000
5, −3	5.344*n*	5.988*n*
5, −1	4.932	4.042
3, −7	4.504*n*	4.550*n*
3, −5	5.967	5.570*n*
3, −3	4.424	5.941
3, −1	5.996*n*	5.518*n*
3, +1	4.821	4.921*n*

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

1,−5	4.928n	4.209	4,−8	3.536n	4.189n
1,−3	5.228	6.013n	4,−6	5.441	4.565
1,−1	5.681	5.432	4,−4	4.812n	5.092
1,+1	5.903n	5.834	4,−2	5.285n	5.328n
1,+3	4.568n	4.999n	4, 0	4.540	4.148n
	Δ_8		2,−6	4.442n	3.969n
8,−8	5.935n	6.095n	2,−4	5.254	5.350n
8,−6	5.356	4.770n	2,−2	4.363	4.581
8,−4	3.187n	4.197	2, 0	5.450n	4.740
6,−8	4.972	5.332	2,+2	3.803	4.600n
6,−6	5.599n	4.383	0,−4	4.456n	4.383
6,−4	4.902	5.426n	0,−2	4.994n	5.431n
6,−2	4.369	4.242	0, 0	4.292	—
			0,+2	4.994n	5.431
			0,+4	4.456n	4.383n

Hiebei ist zu bemerken, dass der vollständige Werth dieser Grösse die doppelte Ausdehnung hat, indem alle vorkommenden Indices sich mit entgegengesetzten Zeichen wiederholen. Da aber in dieser Wiederholung dieselben Coefficienten vorkommen, und zwar die *A* dasselbe Zeichen, die *B* aber das entgegengesetzte Zeichen erhalten, so war es überflüssig diese Glieder besonders anzusetzen. Blos in den Abtheilungen, in welchen der erste Index die Null ist, habe ich davon eine Ausnahme gemacht, und auch die Glieder angeführt, in welchen die Indices entgegengesetzte Zeichen haben.

6.

Die Berechnung der Zahlen der Tafel des vor. Art. kann Fehler enthalten, wenn entweder solche schon in der Tafel des vorvor. Art. enthalten sind, oder wenn man sich in dem Aufschlagen und Addiren der Logarithmen der Sinusse und Cosinusse der Functionen von Π und Π' geirrt hat, und es wird deshalb nöthig eine Controle zuzuziehen. Zu dieser gelangt man durch die Entwickelung, die ich in dem Art. 37 u. f. der genannten Abhandlung ausgeführt habe. Setzt man in dieser Entwickelung $f = 0$, so ist das Resultat derselben folgendes. Man setze

$$\cos J \sin \Pi = g \sin L$$
$$\cos \Pi = g \cos L$$
$$\sin J \sin \Pi = h$$

und rechne daraus g, h und L, wobei die Bedingungsgleichung statt fin-

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

det, dass

$$g^2 + h^2 = 1$$

werden muss. Hierauf rechne man

$$\varepsilon_n = 2m' \varkappa^{n+1} . 206265''$$

$$N(n.\mu) = \varepsilon_n g^{n-2\mu} \Sigma (-1)^n R_u h^{2u}$$

und

$$P(n,\mu) = N(n,\mu) \cos (n-2\mu)(L-\Pi')$$

$$Q(n,\mu) = N(n,\mu) \sin (n-2\mu)(L-\Pi')$$

Setzt man hierauf

$$M_n = \Sigma P(n,\mu)\, x'^{-(n-2\mu)} + i\Sigma Q(n,\mu)\, x'^{-(n-2\mu)}$$

so wird für $f = 0$,

$$2a\Omega = M_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 + M_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(\frac{a'}{r'}\right)^4 + M_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(\frac{a'}{r'}\right)^5 + \text{etc.}$$

Die numerischen Werthe der R Coefficienten findet man in der genannten Abhandlung in Tafel V zusammen gestellt. Zur Anwendung dieser Formeln auf unser Beispiel geben die numerischen Angaben des Art. 1

$$L = 84^0\, 15'\, 39''\!,7$$
$$\log g = 9.983372$$
$$\log h = 9.433793$$
$$\log \varepsilon_1 = 0.933912$$
$$-\varepsilon_2 = 0.365298$$
$$-\varepsilon_3 = 9.796684$$
$$-\varepsilon_4 = 9.22807$$
$$-\varepsilon_5 = 8.65946$$
$$-\varepsilon_6 = 8.0908$$
$$-\varepsilon_7 = 7.5222$$
$$-\varepsilon_8 = 6.9536$$

und hieraus bekam ich die folgenden Werthe der Logarithmen der N und M Coefficienten.

μ	$N(n,\mu)$	μ	$P(n,\mu)$	$Q(n,\mu)$
	1		**1**	
1	0.616254	−1	0.557215	0.304596
	2		**2**	
2	9.906073	−2	9.625308	9.836405
0	9.654686	0	9.654686	—
	3		**3**	
3	9.24165	−3	7.86175	9.24127
1	8.85333	−1	8.79429	8.54167
	4		**4**	
4	8.5984	−4	8.2527*n*	8.5490
2	8.0734	−2	7.7926	8.0037
0	7.8897	0	7.8897	—
	5		**5**	
5	7.9674	−5	7.8861*n*	7.7148
3	7.2725	−3	5.8926	7.2721
1	6.6261	−1	6.5671	6.3144
	6		**6**	
6	7.3443	−6	7.3428*n*	6.2650
4	6.3911	−4	6.0454*n*	6.3417
2	6.2373*n*	−2	5.9565*n*	6.1676*n*
0	6.4312*n*	0	6.4312*n*	—
	7		**7**	
7	6.7269	−7	6.6862*n*	6.3432*n*
5	5.1103	−5	5.0290*n*	4.8577
3	5.9969*n*	−3	4.6170*n*	5.9965*n*
1	6.1247*n*	−1	6.0657*n*	5.8130*n*
	8		**8**	
8	6.1137	−8	5.8867*n*	6.0196*n*
6	4.9003*n*	−6	4.8988	3.8210*n*
4	5.5653*n*	−4	5.2196	5.5159*n*
2	5.6593*n*	−2	5.3785*n*	5.5896*n*
0	5.6785*n*	0	5.6785*n*	

Die Anwendung der vorstehenden Zahlenwerthe zur Controle der Hauptrechnung beruht auf Folgendem. Die vorstehende Tafel enthält die Werthe der Grössen Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc. für die Annahme, dass die wahre Anomalie $f = 0$ sei, führt man diese Annahme in die Tafel des Art. 5 ein, so müssen die beiderseitigen Zahlenwerthe übereinstimmen. Jene Annahme bedingt aber dass $x = 1$, oder dass jeder Exponent von x gleich Null sei, und man muss daher, ohne Rücksicht auf den ersten der dort angeführten Indices zu nehmen, in jedem $\varDelta$ die Coefficienten addiren für welche der zweite Index, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen derselbe ist. In der ersten Columne werden die Glieder, wo der zweite Index positiv ist, mit dem wahren Zeichen angewandt, in der zweiten Columne mit dem entgegengesetzten. Als Beispiel will ich die Controle für $\varDelta_4$ vollständig ansetzen. Aus Art. 5 findet man

$$\begin{array}{ll}
A(4,-4)=-0{,}01989 & B(4,-4)=+0{,}03792 \\
A(2,-4)=+0{,}00207 & B(2,-4)=-0{,}00258 \\
A(0,-4)=-0{,}00002 & B(0,-4)=+0{,}00006 \\
\text{Summa}=-0{,}01784 & \qquad\qquad +0{,}03540 \\
A(4,-2)=-0.002224 & B(4,-2)=-0.00245 \\
A(2,-2)=+0.009798 & B(2,-2)=+0.01620 \\
A(2,+2)=+0.000021 & -B(2,+2)=+0.00013 \\
A(0,-2)=-0.001388 & B(0,-2)=-0.00379 \\
\text{Summa}=+0.006207 & \qquad\qquad +0.01009 \\
2A(4,0)=+0.00018 & \\
2A(2,0)=-0.00793 & \\
A(0,0)=+0.01551 & \\
\text{Summa}=+0.00776 &
\end{array}$$

und dagegen sind die Zahlen der Logarithmen der vorstehenden Tafel

$$\begin{array}{ll}
P(4,-4)=-0.01789\,; & Q(4,-4)=+0.03540 \\
P(4,-2)=+0.006201; & Q(4,-2)=+0.01009 \\
P(4,\quad 0)=+0.00776 &
\end{array}$$

die mit den vorstehenden Summen hinreichend gut übereinstimmen. Ich bemerke hiezu, dass die Coefficienten $B(2,0)$, $B(4,0)$, etc. sich dieser Controle entziehen, allein die geringe Anzahl dieser kann man leicht durch Nachrechnen controliren, wenn man dieses für nöthig halten sollte.

7.

Die einzelnen Glieder der $\varDelta_n$ sind mit den ganzen Potenzen von x' multiplicirt, und im Ausdruck der Störungsfunction erscheint $\varDelta_n$ mit $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1}$ multiplicirt, diese Functionen von r' und x' müssen nun in Functionen von z' verwandelt werden, und dieses wird durch die Ausdrücke bewirkt, die ich im §. VI der „Entwickelung des Products einer Potenz etc.“ betitelten Abhandlung gegeben habe. Dort wurde

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \Sigma_{-\infty}^{+\infty}\, X_i^{n,m} z^i$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

gesetzt, und unter andern Ausdrücken die folgenden gefunden, die ich zur Anwendung für die Geeignetsten halte.

1) Wenn $i-m$ positiv oder Null ist,

$$X_i^{n,m}=(-1)^{i-m}\cos^{2(n+1)}\tfrac{1}{2}\varphi\Big\{P_{i-m}^{(n-m)}\beta^{i-m}+P_{i-m+1}^{(n-m)}Q_1^{(n+m)}\beta^{i-m+2}+P_{i-m+2}^{(n-m)}Q_2^{(n+m)}\beta^{i-m+4}+\text{etc.}\Big\}$$

2) Wenn $m-i$ positiv oder Null ist,

$$X_i^{n,m}=(-1)^{m-i}\cos^{2(n+1)}\tfrac{1}{2}\varphi\Big\{Q_{m-i}^{(n+m)}\beta^{m-i}+Q_{m-i+1}^{(n+m)}P_1^{(n-m)}\beta^{m-i+2}+Q_{m-i+2}^{(n+m)}P_2^{(n-m)}\beta^{m-i+4}+\text{etc.}\Big\}$$

wo allgemein

$$P_p^{(k)}=\frac{k+1.k..k-p+2}{1.2..p}-\frac{k+1.k..k-p+3}{1.2..p-1}\nu+\frac{k+1.k..k-p+4}{1.2..p-2}\frac{\nu^2}{2}\mp\ldots\pm\frac{k+1}{1}\frac{\nu^{p-1}}{2.3..p-1}\mp\frac{\nu^p}{2.3..p}$$

$$Q_q^{(k)}=\frac{k+1.k..k-q+2}{1.2..q}+\frac{k+1.k..k-q+3}{1.2..q-1}\nu+\frac{k+1.k..k-q+4}{1.2..q-2}\frac{\nu^2}{2}+\ldots+\frac{k+1}{1}\frac{\nu^{q-1}}{2.3..q-1}+\frac{\nu^q}{2.3..q}$$

$$\nu=i\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi;\quad \beta=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$

ist, und φ den Excentricitätswinkel bedeutet. Man kann die verschiedenen P und Q durch blose Additionen und Subtractionen aus den $P^{(-1)}$ und $Q^{(-1)}$ finden. Die vorstehenden Ausdrücke geben

$$\begin{array}{ll}
P_1^{(-1)}=-\nu; & Q_1^{(-1)}=\nu\\
P_2^{(-1)}=\frac{\nu^2}{2}; & Q_2^{(-1)}=\frac{\nu^2}{2}\\
P_3^{(-1)}=-\frac{\nu^3}{6}; & Q_3^{(-1)}=\frac{\nu^3}{6}\\
P_4^{(-1)}=\frac{\nu^4}{24}; & Q_4^{(-1)}=\frac{\nu^4}{24}\\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

und hiemit findet man leicht

$$\begin{array}{lll}
P_1^{(-2)}=P_1^{(-1)}-1; & P_1^{(-3)}=P_1^{(-2)}-1; & P_1^{(-4)}=P_1^{(-3)}-1;\\
P_2^{(-2)}=P_2^{(-1)}-P_1^{(-2)}; & P_2^{(-3)}=P_2^{(-2)}-P_1^{(-3)}; & P_2^{(-4)}=P_2^{(-3)}-P_1^{(-4)};\\
P_3^{(-2)}=P_3^{(-1)}-P_2^{(-2)}; & P_3^{(-3)}=P_3^{(-2)}-P_2^{(-3)}; & P_3^{(-4)}=P_3^{(-3)}-P_2^{(-4)};\quad \text{etc.}\\
P_4^{(-2)}=P_4^{(-1)}-P_3^{(-2)}; & P_4^{(-3)}=P_4^{(-2)}-P_3^{(-3)}; & P_4^{(-4)}=P_4^{(-3)}-P_3^{(-4)};\\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

und zur andern Seite

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\begin{array}{llll}
P_1^{(0)} = P_1^{(-1)} + 1\;; & P_1^{(1)} = P_1^{(0)} + 1\;; & P_1^{(2)} = P_1^{(1)} + 1\;; & \\
P_2^{(0)} = P_2^{(-1)} + P_1^{(-1)}\;; & P_2^{(1)} = P_2^{(0)} + P_1^{(0)}\;; & P_2^{(2)} = P_2^{(1)} + P_1^{(1)}\;; & \\
P_3^{(0)} = P_3^{(-1)} + P_2^{(-1)}\;; & P_3^{(1)} = P_3^{(0)} + P_2^{(0)}\;; & P_3^{(2)} = P_3^{(1)} + P_2^{(1)}\;; & \text{etc.} \\
P_4^{(0)} = P_4^{(-1)} + P_3^{(-1)}\;; & P_4^{(1)} = P_4^{(0)} + P_3^{(0)}\;; & P_4^{(2)} = P_4^{(1)} + P_3^{(1)}\;; & \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}$$

und für die Q finden dieselben Gleichungen statt. Es ist nemlich auch

$$\begin{array}{lll}
Q_1^{(-2)} = Q_1^{(-1)} - 1\;; & Q_1^{(-3)} = Q_1^{(-2)} - 1\;; & \text{etc.} \\
Q_2^{(-2)} = Q_2^{(-1)} - Q_1^{(-2)}\;; & Q_2^{(-3)} = Q_2^{(-2)} - Q_1^{(-3)}\;; & \\
\text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{lll}
Q_1^{(0)} = Q_1^{(-1)} + 1\;; & Q_1^{(1)} = Q_1^{(0)} + 1\;; & \text{etc.} \\
Q_2^{(0)} = Q_2^{(-1)} + Q_1^{(-1)}\;; & Q_2^{(1)} = Q_2^{(0)} + Q_1^{(0)}\;; & \\
\text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}$$

Endlich ist zu bemerken, dass für jeden Werth des oberen Index

$$P_0^{(k)} = 1\;;\quad Q_0^{(k)} = 1$$

ist.

Mit der im Art. 1 angegebenen Excentricität des Saturns sind nun die X Coefficienten berechnet worden, deren Logarithmen die folgende Tafel enthält.

n,m	z'^{0}	z'^{-1}	z'^{-2}	z'^{-3}	z'^{-4}	z'^{-5}
—1, 0	0.00000	8.4469	7.1948	5.994	—	—
—2,—1	—∞	9.99931	9.04812	8.0231	6.970	5.901
—2,+1	—∞	6.5936	5.466	4.32	—	—
—3,—2	—∞	8.44693n	9.99658	9.28920	8.4226	7.4867
—3, 0	0.00205	8.92576	7.8495	6.765	5.675	4.58
—3,+2	—∞	4.564	—	—	—	—
—4,—3	—∞	6.5934	8.74672n	9.99178	9.44109	8.6915
—4,—1	8.75154	0.00273	9.22650	8.3180	7.3527	6.356
—4,+1	8.75154	7.6376	6.530	5.421	—	—
—4,+3	—∞	—	—	—	—	—
—5,—4	—∞	4.564n	7.1943	8.9200n	9.98487	9.5510
—5,—2	7.3761	8.45272	0.00137	9.40128	8.6177	7.750
—5, 0	0.00681	9.45068	8.1988	7.2044	6.185	5.15
—5,+2	7.3761	6.257	5.141	4.02	—	—

−6, −5	−∞	—	5.468n	7.5447	9.0415n	9.9757
−6, −3	5.950	7.0766	6.4242	9.99797	9.5239	8.8384
−6, −1	9.0563	0.00884	9.3551	8.5361	7.642	6.704
−6, +1	9.0563	8.0616	7.0396	6.001	—	—
−6, +3	5.950	—	—	—	—	—
−7, −6	−∞	—	—	5.993n	7.792	9.1336n
−7, −4	—	5.613	6.900	8.4417n	9.9925	9.6173
−7, −2	7.9024	8.9333	0.0088	9.4928	8.7775	7.967
−7, 0	0.0143	9.3011	8.4451	7.525	6.566	5.58
−7, +2	7.9024	6.856	5.80	—	—	—
−8, −7	−∞	—	—	—	6.365n	7.982
−8, −5	—	—	5.17	7.071	8.7419n	9.9849
−8, −3	6.652	7.717	8.7593	0.0068	9.5959	8.9652
−8, −1	9.2376	0.0177	9.4571	8.7109	7.872	6.989
−8, +1	9.2376	8.343	7.397	6.418	—	—
−8, +3	6.652	—	—	—	—	—
−9, −8	−∞	—	—	—	—	6.654n
−9, −6	—	—	—	—	7.368	8.9148n
−9, −4	5.347	6.426	7.508	8.464	0.0028	9.6775
−9, −2	8.229	9.1607	0.0190	9.5710	8.914	8.153
−9, 0	0.024	9.4159	8.638	7.779	6.873	5.94
−9, +2	8.229	7.256	6.258	—	—	—
−9, +4	5.347	—	—	—	—	—

Diese Werthe kann man in allen Fällen für die kleinen Planeten brauchen, da es ohne merklichen Einfluss ist, wenn die Excentricität des Saturns nicht für denselben Zeitpunkt gilt, für welchen die des gestörten Planeten statt findet.

8.

Die Anwendung der im vor. Art. gegebenen Zahlenwerthe ist einfach und regelmässig, man wird sie am Leichtesten dadurch erkennen, dass ich die Formeln, auf welche sie sich gründet, für ein paar Werthe von Δ_n hinschreibe. Für Δ_2 braucht man

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-3} x'^{-2} = X_0^{-3,-2} z'^0 + X_{-1}^{-3,-2} z'^{-1} + \ldots$$

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-3} x'^0 = X_0^{-3,0} z'^0 + X_{-1}^{-3,0} z'^{-1} + \ldots$$

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-3} x'^2 = X_0^{-3,2} z'^0 + X_{-1}^{-3,2} z'^{-1} + \ldots$$

und für Δ_3

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-4} x'^{-3} = X_0^{-4,-3} z'^0 + X_{-1}^{-4,-3} z'^{-1} + \ldots$$
$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-4} x'^{-1} = X_0^{-4,-1} z'^0 + X_{-1}^{-4,-1} z'^{-1} + \ldots$$
$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-4} x' = X_0^{-4,1} z'^0 + X_{-1}^{-4,1} z'^{-1} + \ldots$$
$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-4} x'^3 = X_0^{-4,3} z'^0 + X_{-1}^{-4,3} z'^{-1} + \ldots$$

woraus leicht zu erkennen ist, welche Werthe für die übrigen Δ_n angewandt werden müssen. Durch die Substitution der vorstehenden Ausdrücke in die für Δ_2 und Δ_3 erhält man nun, wenn wieder $i = \sqrt{-1}$ ist,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \Delta_2 = x^2 &\left\{\left[E_0^{2,2} + iF_0^{2,2}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{2,2} + iF_{-1}^{2,2}\right] z'^{-1} + \ldots\right\}\\
+ x^0 &\left\{\left[E_0^{2,0} + iF_0^{2,0}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{2,0} + iF_{-1}^{2,0}\right] z'^{-1} + \ldots\right\}\\
+ x^{-2} &\left\{\left[E_0^{2,-2} + iF_0^{2,-2}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{2,-2} + iF_{-1}^{2,-2}\right] z'^{-1} + \ldots\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \Delta_3 = x^3 &\left\{\left[E_0^{3,3} + iF_0^{3,3}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{3,3} + iF_{-1}^{3,3}\right] z'^{-1} + \ldots\right\}\\
+ x &\left\{\left[E_0^{3,1} + iF_0^{3,1}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{3,1} + iF_{-1}^{3,1}\right] z'^{-1} + \ldots\right\}\\
+ x^{-1} &\left\{\left[E_0^{3,-1} + iF_0^{3,-1}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{3,-1} + iF_{-1}^{3,-1}\right] z'^{-1} + \ldots\right\}\\
+ x^{-3} &\left\{\left[E_0^{3,-3} + iF_0^{3,-3}\right] z'^0 + \left[E_{-1}^{3,-3} + iF_{-1}^{3,-3}\right] z'^{-1} + \ldots\right\}\end{aligned}$$

wo die Coefficienten folgender Maassen zusammen gesetzt sind

$$E_0^{2,2} = A(2,-2)\, X_0^{-3,-2} + A(2,0)\, X_0^{-3,0} + A(2,2)\, X_0^{-3,2}$$
$$F_0^{2,2} = B(2,-2)\, X_0^{-3,-2} + B(2,0)\, X_0^{-3,0} + B(2,2)\, X_0^{-3,2}$$
$$E_0^{2,0} = A(0,-2)\, X_0^{-3,-2} + A(0,0)\, X_0^{-3,0} + A(0,2)\, X_0^{-3,2}$$
$$F_0^{2,0} = 0$$
$$E_0^{2,-2} = E_0^{2,2}$$
$$F_0^{2,-2} = -F_0^{2,2}$$

$$E_0^{3,3} = A(3,-3)\, X_0^{-4,-3} + A(3,-1)\, X_0^{-4,-1} + A(3,1)\, X_0^{-4,1} + A(3,3)\, X_0^{-4,3}$$
$$F_0^{3,3} = B(3,-3)\, X_0^{-4,-3} + B(3,-1)\, X_0^{-4,-1} + B(3,1)\, X_0^{-4,1} + B(3,3)\, X_0^{-4,3}$$
$$E_0^{3,1} = A(1,-3)\, X_0^{-4,-3} + A(1,-1)\, X_0^{-4,-1} + A(1,1)\, X_0^{-4,1} + A(1,3)\, X_0^{-4,3}$$
$$F_0^{3,1} = B(1,-3)\, X_0^{-4,-3} + B(1,-1)\, X_0^{-4,-1} + B(1,1)\, X_0^{-4,1} + B(1,3)\, X_0^{-4,3}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$E_0^{3,-1} = E_0^{3,1}$$
$$F_0^{3,-1} = -F_0^{3,1}$$
$$E_0^{3,-3} = E_0^{3,3}$$
$$F_0^{3,-3} = -F_0^{3,3}$$

$$E_{-1}^{2,2} = A(2,-2)\,X_{-1}^{-3,-2} + A(2,0)\,X_{-1}^{-3,0} + A(2,2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$F_{-1}^{2,2} = B(2,-2)\,X_{-1}^{-3,-2} + B(2,0)\,X_{-1}^{-3,0} + B(2,2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$E_{-1}^{2,0} = A(0,-2)\,X_{-1}^{-3,-2} + A(0,0)\,X_{-1}^{-3,0} + A(0,2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$F_{-1}^{2,0} = B(0,-2)\,X_{-1}^{-3,-2} + B(0,2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$E_{-1}^{2,-2} = A(2,2)\,X_{-1}^{-3,-2} + A(2,0)\,X_{-1}^{-3,0} + A(2,-2)\,X_{-1}^{-3,2}$$
$$F_{-1}^{2,-2} = -\left\{B(2,2)\,X_{-1}^{-3,-2} + B(2,0)\,X_{-1}^{-3,0} + B(2,-2)\,X_{-1}^{-3,2}\right\}$$

$$E_{-1}^{3,3} = A(3,-3)\,X_{-1}^{-4,-3} + A(3,-1)\,X_{-1}^{-4,-1} + A(3,1)\,X_{-1}^{-4,1} + A(3,3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$F_{-1}^{3,3} = B(3,-3)\,X_{-1}^{-4,-3} + B(3,-1)\,X_{-1}^{-4,-1} + B(3,1)\,X_{-1}^{-4,1} + B(3,3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$E_{-1}^{3,1} = A(1,-3)\,X_{-1}^{-4,-3} + A(1,-1)\,X_{-1}^{-4,-1} + A(1,1)\,X_{-1}^{-4,1} + A(1.3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$F_{-1}^{3,1} = B(1,-3)\,X_{-1}^{-4,-3} + B(1,-1)\,X_{-1}^{-4,-1} + B(1,1)\,X_{-1}^{-4,1} + B(1,3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$E_{-1}^{3,-1} = A(1,3)\,X_{-1}^{-4,-3} + A(1,1)\,X_{-1}^{-4,-1} + A(1,-1)\,X_{-1}^{-4,1} + A(1,-3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$F_{-1}^{3,-1} = -\left\{B(1,3)\,X_{-1}^{-4,-3} + B(1,1)\,X_{-1}^{-4,-1} + B(1,-1)\,X_{-1}^{-4,1} + B(1,-3)\,X_{-1}^{-4,3}\right\}$$
$$E_{-1}^{3,-3} = A(3,3)\,X_{-1}^{-4,-3} + A(3,1)\,X_{-1}^{-4,-1} + A(3,-1)\,X_{-1}^{-4,1} + A(3,-3)\,X_{-1}^{-4,3}$$
$$F_{-1}^{3,-3} = -\left\{B(3,3)\,X_{-1}^{-4,-3} + B(3,1)\,X_{-1}^{-4,-1} + B(3,-1)\,X_{-1}^{-4,1} + B(3,-3)\,X_{-1}^{-4,3}\right\}$$

Es ist hieraus ohne Weiteres ersichtlich wie die Coefficienten der übrigen $\varDelta_n$ und die von z'^{-2}, z'^{-3}, etc. berechnet werden müssen. Aus der Tafel des vor. Art. sieht man, dass hier

$$X_0^{-n,\pm(n-1)} = 0$$

ist, und ich hätte daher in Bezug auf das vorliegende Beispiel in den vorstehenden Formeln die betreffenden Glieder, die Null sind, weglassen können. Aber da die eben angeführte Gleichung nicht vorhanden ist, wenn der störende Planet ein unterer ist, in welchem Falle der erste obere Index der X Coefficienten positiv ist, so habe ich diese Glieder in den Formeln nicht ausstreichen wollen. Alle E und F Coefficienten be-

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

stehen, wie die vorstehenden Formeln zu erkennen geben, aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, und wegen der Kleinheit der Excentricitäten der störenden Planeten werden von diesen viele unmerklich.

Die Ausführung der Multiplicationen, die die obigen Formeln erfordern, wird vorzüglich leicht und geht sehr schnell von statten, wenn man sich die Logarithmen der *X* Coefficienten columnenweise mit zugefügten Indices auf den untern Rand verschiedener Streifen Papier ausschreibt; die zu z'^0 gehörigen auf einen Streifen, die zu z'^{-1} gehörigen auf einen andern u. s. w. Um nun keine unrichtigen Logarithmen zu addiren hat man nur darauf zu sehen, dass der erste Index des *X* Coefficienten absolut genommen um Eins grösser sei wie der Index n von Δ_n, und dass der zweite Index von X mit dem zweiten Index der A und B Coefficienten übereinstimme, und zwar einmal mit demselben algebraischen Zeichen, und einmal mit dem entgegengesetzten. Im letztgenannten Falle kehren die *F* Coefficienten ihr Zeichen um. Auf diese Art ist die folgende Tafel berechnet worden, die ich bis z'^{-5} incl. ausgedehnt habe, da sich vorhersehen liess, dass ungefähr bis dahin merkliche Glieder entstehen könnten. Die Columne der Indices giebt hier die Exponenten von x.

	z'^0 E	z'^0 F		z'^{-1} E	z'^{-1} F		z'^{-2} E	z'^{-2} F
	Δ_1			Δ_1			Δ_1	
	$-\infty$	$-\infty$	1	0.56392	0.31514	1	9.61273	9.36397
	Δ_2		−1	8.7811n	8.7290n	−1	7.8332n	7.7754n
2	8.50385n	7.7943		Δ_2			Δ_2	
0	9.71389	—	2	8.17017n	8.29041n	2	9.63291	9.85164
−2	8.50385n	7.7943n	0	8.64070	6.929	0	7.8691n	8.47917n
	Δ_3		−2	7.4275n	6.728n	−2	6.243n	6.418
3	6.7536n	6.301n		Δ_3			Δ_3	
1	7.6107	7.4860	3	8.00980n	7.5221n	3	7.3067n	8.03615n
−1	7.6107	7.4860n	1	8.91550	8.66722	1	8.13631	7.92257
−3	6.7536n	6.301	−1	7.96534n	7.92309n	−1	7.1967n	7.1449n
	Δ_4		−3	5.935	6.250	−3	5.279	5.447
4	5.929	5.633n		Δ_4			Δ_4	
2	7.6024n	6.9165	4	5.700n	5.875n	4	7.3543n	7.3804n
0	8.1972	—	2	6.452n	6.755	2	7.9898	8.2111
−2	7.6024n	6.9165n	0	7.3334	6.031n	0	7.0600n	7.5802n
−4	5.929	5.633	−2	6.747n	6.039n	−2	5.623n	6.086
			−4	5.100	4.708	−4	4.14	—

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

	Δ_5	
5	4.643	3.74
3	6.104n	5.699n
1	6.215	6.396
−1	6.215	6.396n
−3	6.104n	5.699
−5	4.643	3.74n
	Δ_6	
4	5.322	5.041n
2	6.573n	5.881
0	6.6294	—
−2	6.573n	5.881n
−4	5.322	5.041
	Δ_7	
5	4.170	—
3	5.204n	4.845n
1	4.778n	5.230
−1	4.778n	5.230n
−3	5.204n	4.845
−5	4.170	—
	Δ_8	
4	4.564	4.172n
2	5.474n	4.764
0	4.316	—
−2	5.474n	4.764n
−4	4.564	4.172

	Δ_5	
5	5.586	4.602
3	7.0706n	6.587n
1	7.3890	7.1445
−1	6.9805n	6.9325n
−3	5.415	5.724
	Δ_6	
4	5.204n	5.380n
2	5.708n	5.708
0	5.857	5.475n
−2	5.862n	5.079n
−4	4.650	4.258
	Δ_7	
5	4.950	4.060
3	6.014n	5.536n
1	5.681	5.477
−1	5.914n	5.852n
−3	4.70	5.000
	Δ_8	
4	4.446n	4.489n
2	4.866n	4.155
0	4.154n	4.592n
−2	4.866n	4.155n

	Δ_5	
5	4.932	4.04
3	6.417n	5.935n
1	6.736	6.490
−1	6.332n	6.272n
−3	4.903	5.039
	Δ_6	
6	5.056	4.929
4	6.383n	6.426n
2	6.405	6.641
0	6.072n	6.551n
−2	4.78n	5.415
	Δ_7	
5	4.00	4.747n
3	5.453n	4.602n
1	5.176	4.30
−1	5.360n	5.291n
−3	4.28	4.38
	Δ_8	
6	4.39	4.26
4	5.304n	5.347n
2	4.00	4.60
0	5.013n	5.450n
−2	4.09n	4.62

	E z'^{-3}	F
	Δ_1	
1	8.5877	8.3389
−1	6.810n	6.749n
	Δ_2	
2	8.92566	9.14423
0	7.2706n	7.718n
−2	4.903n	5.748
	Δ_3	
3	7.7240	9.25799
1	7.5318	7.9738n
−1	6.427n	5.322
−3	4.43	4.53
	Δ_4	
4	7.0394	7.5765n
2	7.3598	7.6332
0	6.504n	6.982n
−2	4.00n	5.505

	E z'^{-4}	F
	Δ_1	
1	7.534	7.286
−1	5.762n	5.693n
	Δ_2	
2	8.05920	8.27763
0	6.431n	6.905n
−2	4.00n	4.912
	Δ_3	
3	7.1838	8.70741
1	6.821	7.4495n
−1	5.623n	5.556
	Δ_4	
4	8.28560n	8.56254
2	7.3813	7.2611n
0	6.104n	5.987n
−2	3.9	4.74

	E z'^{-5}	F
	Δ_1	
1	6.466	6.217
−1	4.69n	4.62n
	Δ_2	
2	7.1233	7.3417
0	5.505n	5.969n
−2	—	3.9
	Δ_3	
3	6.438	7.9578
1	6.017	6.708n
−1	4.78n	4.90
	Δ_4	
4	7.8505n	8.1293
2	6.898	6.918n
0	5.532n	4.00

	Δ_5			Δ_5			Δ_5	
5	6.391n	6.9727n	5	6.940	6.969n	5	7.9097n	7.7142
3	5.919	7.5958	3	5.820n	7.1357	3	6.942	5.863n
1	6.446	7.0592n	1	5.909	6.597n	1	5.301n	5.875n
−1	5.732n	5.477	−1	5.041n	5.176	−1	4.16n	4.60
−3	4.12	4.22		Δ_6			Δ_6	
	Δ_6		6	5.820	6.433n	6	6.569	6.130n
6	4.00	5.041	4	6.603n	6.861	4	6.312n	6.486
4	5.799n	6.008n	2	6.367	6.387n	2	5.978	6.041n
2	5.863	6.149	0	5.415n	4.78n	0	4.95n	4.48
0	5.591n	6.035n	−2	—	4.20		Δ_7	
−2	—	4.930		Δ_7		7	5.716	5.763n
	Δ_7		7	4.00n	4.50	5	6.179n	5.945
7	4.647	4.293	5	—	5.643n	3	5.952	5.447n
5	5.351n	5.995n	3	4.60n	5.556	1	4.78n	4.90n
3	4.301n	5.940	1	4.82	5.609n		Δ_8	
1	5.279	6.017n	−1	4.16n	4.60	8	4.27n	—
−1	4.903n	4.78		Δ_8		6	4.85	5.104n
	Δ_8		8	—	4.20	4	4.70n	4.77
6	3.9	—	6	4.905	5.429n	2	4.932	5.028n
4	4.856n	4.900n	4	4.954n	5.000	0	4.13n	4.06
2	3.9	4.15	2	5.257	5.353n			
0	4.565n	5.002n	0	4.60n	—			
−2	—	4.17						

Um diese Rechnung auch durch Beispiele zu erläutern, will ich zuerst die Rechnung für $E_0^{4,2}$ und $F_0^{4,2}$ hersetzen. Durch Anlegen des Papierstreifen für die mit z'^0 multiplicirten Glieder an die betreffenden Logarithmen von Δ_4 der Tafel des Art. 5 fanden sich

$$\log A(2,-2)\,X_0^{-5,-2} = 5.367 \qquad \log B(2,-2)\,X_0^{-5,-2} = 5.586$$
$$\log A(2,0)\quad X_0^{-5,0} = 7.6048n \quad \log B(2,0)\quad X_0^{-5,0} = 6.8953$$

die übrigen Glieder sind unmerklich. Die zu diesen Logarithmen gehörigen Zahlen sind:

$$E_0^{4,2} = \begin{Bmatrix} +0.000023 \\ -0.004026 \end{Bmatrix} \qquad F_0^{4,2} = \begin{Bmatrix} +0.000039 \\ +0.000786 \end{Bmatrix}$$
$$= -0.004003 \qquad\qquad = +0.000825$$
$$\log = 7.6024n \qquad\qquad \log = 6.9165$$

wie oben angeführt. Für $E_{-2}^{3,-1}$ und $F_{-2}^{3,-1}$ fand sich

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$\log A(1,3)\ X_{-2}^{-4,-3} = 4.603 \qquad \log B(1,3)\ X_{-2}^{-4,-3} = 5.034$

$\log A(1,1)\ X_{-2}^{-4,-1} = 7.2055n \qquad \log B(1,1)\ X_{-2}^{-4,-1} = 7.1364$

$\log A(1,-1)\ X_{-2}^{-4,1} = 5.443 \qquad \log B(1,-1)\ X_{-2}^{-4,1} = 5.194$

$$E_{-2}^{3,-1} = \begin{Bmatrix} +0.000004 \\ -0.001605 \\ +0.000028 \end{Bmatrix} \qquad F_{-2}^{3,-1} = -\begin{Bmatrix} +0.000011 \\ +0.001369 \\ +0.000016 \end{Bmatrix}$$

$$= -0.001573 \qquad\qquad = -0.001396$$

$$\log = 7.1967n \qquad\qquad \log = 7.1449n$$

wie oben in der Tafel. Nie wurden mehr wie drei Glieder merklich, häufig nur zwei oder Ein Glied. Ich hätte auch manchmal noch mehr abkürzen können, da ich in den meisten Gliedern mehr Decimalstellen berechnet habe, wie unumgänglich nöthig war.

9.

Die im vor. Art. erklärten Rechnungen lassen sich wieder mit geringer Mühe durch die obige abgekürzte für $f = 0$ geltende Entwickelung controliren. Die Elimination von r' und x' aus dieser führt auf folgende Ausdrücke

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \Delta_2 = \left[R_0^{(2)} + iS_0^{(2)}\right] z'^0 + \left[R_{-1}^{(2)} + iS_{-1}^{(2)}\right] z'^{-1} + \ldots$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \Delta_3 = \left[R_0^{(3)} + iS_0^{(3)}\right] z'^0 + \left[R_{-1}^{(3)} + iS_{-1}^{(3)}\right] z'^{-1} + \ldots$$

etc.

wo

$$R_0^{(2)} = 2P(2,-2)\, X_0^{-3,-2} + P(2,0)\, X_0^{-3,0}$$

$$S_0^{(2)} = 0$$

$$\tfrac{1}{2} R_0^{(3)} = P(3,-3)\, X_0^{-4,-3} + P(3,-1)\, X_0^{-4,-1}$$

$$S_0^{(3)} = 0$$

$$R_{-1}^{(2)} = P(2,-2)\, X_{-1}^{-3,-2} + P(2,0)\, X_{-1}^{-3,0} + P(2,-2)\, X_{-1}^{-3,2}$$

$$S_{-1}^{(2)} = Q(2,-2)\, X_{-1}^{-3,-2} - Q(2,-2)\, X_{-1}^{-3,2}$$

$$R_{-1}^{(3)} = P(3,-3) X_{-1}^{-4,-3} + P(3,-1) X_{-1}^{-4,-1} + P(3,-1) X_{-1}^{-4,1} + P(3,-3) X_{-1}^{-4,3}$$

$$S_{-1}^{(3)} = Q(3,-3) X_{-1}^{-4,-3} + Q(3,-1) X_{-1}^{-4,-1} - Q(3,-1) X_{-1}^{-4,1} - Q(3,-3) X_{-1}^{-4,3}$$

etc.

Macht man aber in den Ausdrücken des vor. Art. alle Exponenten von x gleich Null, so muss man die vorstehenden Coefficienten wieder bekommen, es wird also auch

$$R_0^{(2)} = 2E_0^{2,2} + E_0^{2,0}$$

$$\tfrac{1}{2}R_0^{(3)} = E_0^{3,3} + E_0^{3,1}$$

$$R_{-1}^{(2)} = E_{-1}^{2,2} + E_{-1}^{2,0} + E_{-1}^{2,-2}$$

$$S_{-1}^{(2)} = F_{-1}^{2,2} + F_{-1}^{2,0} + F_{-1}^{2,-2}$$

$$R_{-}^{(3)} = E_{-1}^{3,3} + E_{-1}^{3,1} + E_{-1}^{3,-1} + E_{-1}^{3,-3}$$

$$S_{-1}^{(3)} = F_{-1}^{3,3} + F_{-1}^{3,1} + F_{-1}^{3,-1} + F_{-1}^{3,-3}$$

etc.

welche die Controle bilden. Die einzigen Coefficienten, die hier uncontrolirt bleiben, sind die mit iz'^0 multiplicirten, nemlich $F_0^{2,2}$, $F_0^{2,0}$, $F_0^{2,-2}$, $F_0^{3,3}$, etc. Man kann aber leicht die directe Berechnung dieser wiederholen, wenn man es für nöthig halten sollte.

10.

Es ist nun nur noch die dritte und letzte Operation übrig, nemlich die durch welche die Functionen von r und x, die in den Producten $\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} \varDelta_n$ enthalten sind, in Function der zur excentrischen Anomalie des gestörten Planeten gehörigen, imaginären Exponentialfunction ausgedrückt werden, welche Function ich mit y bezeichnen werde.

Die Aufgabe das Product $r^n x^m$ in eine nach den ganzen Potenzen von y fortschreitende Reihe zu verwandeln, habe ich in §. III meiner zuletzt angezogenen Abhandlung gelöst, und ich brauche daher auch diese Formeln hier nur zu recapituliren. Ich bemerke hiebei, dass in der Störungsfunction nur solche Werthe von n und m mit einander verbunden vorkommen, die sich durch endliche Reihen in y darstellen lassen. Es sind dieses die Functionen

$$r^n x^n;\; r^n x^{n-2};\; r^n x^{n-4};\; \ldots\; r^n x^{-n}$$

in welchen n immer eine ganze und positive Zahl ist. Setzt man nun wie a. a. O.

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \Sigma_{-n}^{+n} W_i^{n,m} y^i$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

so bekommt man zuerst für $m = n$

$$W^{n,n}_{n} = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\,;\quad W^{n,n}_{n-1} = -\frac{2n}{1}\beta W^{n,n}_{n}\,;\quad W^{n,n}_{n-2} = -\frac{2n-1}{2}\beta W^{n,n}_{n-1}\,;$$

$$W^{n,n}_{n-3} = -\frac{2n-2}{3}\beta W^{n,n}_{n-2}\,;\ \text{etc.}$$

Man braucht nur die Coefficienten für die positiven Potenzen (die 0te eingeschlossen) von y anzusetzen, und bekommt durch Fortsetzung der vorstehenden Gleichungen, und wegen der Gleichung

$$W^{n,-m}_{-i} = W^{n,m}_{i}$$

ohne Weiteres auch die erforderlichen Coefficienten von $\left(\frac{r}{a}\right)^n x^{-n}$. Durch Anwendung des allgemeinen Ausdrucks dieser Coefficienten, nemlich durch

$$W^{n,n}_{n-k} = (-1)^{n-k}\frac{2n.\,2n-1\ldots 2n-k+1}{1.\,2\ldots k}\beta^k \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi$$

kann man jede durch die vorstehenden Formeln berechnete Gruppe derselben controliren. Hat man nun auf diese Art die Coefficienten für $m=n$ berechnet, so ergeben sich die für alle anderen, hier anzuwendenden Werthe von m, das ist von $n-2$, $n-4$, etc. durch eine der beiden folgenden Formeln mit Leichtigkeit und Sicherheit,

$$W^{n+1,m-1}_{i} = \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i-1} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i} + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i+1}$$

$$W^{n+1,m+1}_{i} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i-1} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,W^{n,m}_{i+1}$$

Zur Controle kann man schliesslich, wenn man es für nöthig hält, einige Reihen der W Coefficienten durch die a. a. O. gegebenen Kettenbrüche berechnen, übrigens lässt sich die Richtigkeit dieser Coefficienten auch oft durch die Differenzen zwischen den Logarithmen derselben prüfen.

Es ist noch anzuführen, dass hier unter φ der Excentricitätswinkel des gestörten Planeten verstanden werden muss, so wie dass wieder

$$\beta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$

ist. Mit dem im Art. 1 angegebenen Excentricitätswinkel der Egeriabahn fanden sich nun die folgenden Werthe der W Coefficienten.

n,m	y^0	y	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6
1, 1	8.92877*n*	9.999216					
1,−1	8.92877*n*	7.2563					
2, 2	8.03363	9.22902*n*	9.998432				
2, 0	0.001561	8.92877*n*	7.2555				
2,−2	8.03363	6.4861*n*	4.513				
3, 3	7.1843*n*	8.43079	9.40432*n*	9.99765			
3, 1	9.23058*n*	0.003890	8.92878*n*	7.2547			
3,−1	9.23058*n*	8.03389	6.4857*n*	4.512			
3,−3	7.1843*n*	5.688	3.9*n*	—			
4, 4	6.3561	7.6306*n*	8.70107	9.52848*n*	9.99686		
4, 2	8.43210	9.40744*n*	0.00620	8.92877*n*	7.2539		
4, 0	0.00929	9.23214*n*	8.0342	6.4853*n*	4.511		
4,−2	8.43210	7.1847*n*	5.688	3.9*n*	—		
4,−4	6.3561	4.888*n*	—	—	—		
5, 5	5.540*n*	6.8324	7.9608*n*	8.9063	9.6246*n*	9.9961	
5, 3	7.6318*n*	8.7034	9.5332*n*	0.0085	8.9288*n*	7.253	
5, 1	9.4106*n*	0.0147	9.2337*n*	8.0344	6.485*n*	4.510	
5,−1	9.4106*n*	8.4334	7.1851*n*	5.688	3.9*n*	—	
5,−3	7.6318*n*	6.357	4.888*n*	—	—	—	
5,−5	5.540*n*	4.1	—	—	—	—	
6, 6	4.73	6.037*n*	7.2040	8.2233*n*	9.0719	9.7030*n*	9.9953
6, 4	6.834	7.9628*n*	8.9097	9.6309*n*	0.0108	8.9288*n*	7,2523
6, 2	8.7058	9.5378*n*	0.0199	9.2353*n*	8.0347	6.484*n*	4.51
6, 0	0.0230	9.4136*n*	8.4347	7.1855*n*	5.688	3.9*n*	—
6,−2	8.7058	7.6330*n*	6.357	4.89*n*	—	—	—
6,−4	6.834	5,540*n*	4.1	—	—	—	—
6,−6	4.73	—	—	—	—	—	—
7, 7	—	5.243	6.439*n*	7.5090	8.4412*n*	9.2106	9.7692*n*
7, 5	6.038*n*	7.2057	8.2260*n*	9.0763	9.7108*n*	0 0130	8.9287*n*
7, 3	7.9647*n*	8.9131	9.6371*n*	0.0252	9.2368*n*	8.0349	6.484*n*
7, 1	9.5425*n*	0.0312	9.4167*n*	8.4360	7.1859*n*	5.688	—
7,−1	9.5425*n*	8.7081	7.634*n*	6.358	4.9*n*	—	—
7,−3	7.9647*n*	6.835	5.540*n*	—	—	—	—
7,−5	6.038*n*	—	—	—	—	—	—
8, 8	—	—	5.668	6.777*n*	7.768	8.627*n*	9.330
8, 6	—	6.440*n*	7.511	8.445*n*	9.216	9.779*n*	0.015
8, 4	7.207	8.229*n*	9.081	9.719*n*	0.030	9.238*n*	8.035
8, 2	8.916	9.643*n*	0.039	9.420*n*	8.437	7.186*n*	5.69
8, 0	0.042	9.547*n*	8.710	7.635*n*	6.358	—	—
8,−2	8.916	7.967*n*	6.836	5.54*n*	—	—	—
8,−4	7.207	6.039*n*	—	—	—	—	—

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

11.

Die Anwendung der *W*Coefficienten ist der der *X*Coefficienten ganz analog. Die bis jetzt erlangten, im Art. 8 angeführten Ausdrücke will ich jetzt so schreiben,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \varDelta_2 = {} & x^2\, \Sigma\left\{E^{2,2}_{-i'} + \sqrt{-1}\,.\,F^{2,2}_{-i'}\right\} z'^{-i'}\\ & + x^0\, \Sigma\left\{E^{2,0}_{-i'} + \sqrt{-1}\,.\,F^{2,0}_{-i'}\right\} z'^{-i'}\\ & + x^{-2}\Sigma\left\{E^{2,-2}_{-i'} + \sqrt{-1}\,.\,F^{2,-2}_{-i'}\right\} z'^{-i'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \varDelta_3 = {} & x^3\, \Sigma\left\{E^{3,3}_{-i'} + \sqrt{-1}\,.\,F^{3,3}_{-i'}\right\} z'^{-i'}\\ & + x\, \Sigma\left\{E^{3,1}_{-i'} + \sqrt{-1}\,.\,F^{3,1}_{-i'}\right\} z'^{-i'}\\ & + x^{-1}\Sigma\left\{E^{3,-1}_{-i'} + \sqrt{-1}\,.\,F^{3,-1}_{-i'}\right\} z'^{-i'}\\ & + x^{-3}\Sigma\left\{E^{3,-3}_{-i'} + \sqrt{-1}\,.\,F^{3,-3}_{-i'}\right\} z'^{-i'}\end{aligned}$$

etc.

wo i' eine ganze und positive Zahl, die Null eingeschlossen, bedeutet, und weil i auch in dieser Bedeutung hier angewandt werden wird, nicht mehr i für $\sqrt{-1}$ geschrieben worden ist. Nach der Substitution der im vor. Art. entwickelten Ausdrücke für $\left(\frac{r}{a}\right)^2 x^2$, $\left(\frac{r}{a}\right)^2$, etc. nehmen die vorstehenden Grössen folgende Form an:

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \varDelta_2 = {} & \Sigma\Sigma\left\{G^{(2)}_{i,-i'} + \sqrt{-1}\,.\,H^{(2)}_{i,-i'}\right\} y^i z'^{-i'}\\ & + \Sigma\Sigma\left\{G^{(2)}_{-i,-i'} + \sqrt{-1}\,.\,H^{(2)}_{-i,-i'}\right\} y^{-i} z'^{-i'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \varDelta_3 = {} & \Sigma\Sigma\left\{G^{(3)}_{i,-i'} + \sqrt{-1}\,.\,H^{(3)}_{i,-i'}\right\} y^i z'^{-i'}\\ & + \Sigma\Sigma\left\{G^{(3)}_{-i,-i'} + \sqrt{-1}\,.\,H^{(3)}_{-i,-i'}\right\} y^{-i} z'^{-i'}\end{aligned}$$

etc.

wo auch i eine ganze und positive Zahl, die Null eingeschlossen, bedeutet. Man darf aber den Werth $i = 0$ immer nur auf die eine Zeile, gleichviel welche, der vorstehenden Ausdrücke anwenden. Substituirt man nun die Ausdrücke des vor. Art., so findet man

$$G^{(2)}_{i,-i'} = E^{2,2}_{-i'}\, W^{2,2}_i + E^{2,0}_{-i'}\, W^{2,0}_i + E^{2,-2}_{-i'}\, W^{2,-2}_i$$

$$H^{(2)}_{i,-i'} = F^{2,2}_{-i'}\, W^{2,2}_i + F^{2,0}_{-i'}\, W^{2,0}_i + F^{2,-2}_{-i'}\, W^{2,-2}_i$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$G^{(2)}_{-i,-i'} = E^{2,-2}_{-i'} W^{2,2}_{i} + E^{2,0}_{-i'} W^{2,0}_{i} + E^{2,2}_{-i'} W^{2,-2}_{i}$$
$$H^{(2)}_{-i,-i'} = F^{2,-2}_{-i'} W^{2,2}_{i} + F^{2,0}_{-i'} W^{2,0}_{i} + F^{2,2}_{-i'} W^{2,-2}_{i}$$

$$G^{(3)}_{i,-i'} = E^{3,3}_{-i'} W^{3,3}_{i} + E^{3,1}_{-i'} W^{3,1}_{i} + E^{3,-1}_{-i'} W^{3,-1}_{i} + E^{3,-3}_{-i'} W^{3,-3}_{i}$$
$$H^{(3)}_{i,-i'} = F^{3,3}_{-i'} W^{3,3}_{i} + F^{3,1}_{-i'} W^{3,1}_{i} + F^{3,-1}_{-i'} W^{3,-1}_{i} + F^{3,-3}_{-i'} W^{3,-3}_{i}$$
$$G^{(3)}_{-i,-i'} = E^{3,-3}_{-i'} W^{3,3}_{i} + E^{3,-1}_{-i'} W^{3,1}_{i} + E^{3,1}_{-i'} W^{3,-1}_{i} + E^{3,3}_{-i'} W^{3,-3}_{i}$$
$$H^{(3)}_{-i,-i} = F^{3,-3}_{-i'} W^{3,3}_{i} + F^{3,-1}_{-i'} W^{3,1}_{i} + F^{3,1}_{-i'} W^{3,-1}_{i} + F^{3,3}_{-i'} W^{3,-3}_{i}$$

---

und eben so für die übrigen $\varDelta_n$. Für $i = 0$ ist es gleichgültig ob man sich der Ausdrücke bedient, die linker Hand $+i$, oder derer die $-i$ haben. Die Rechnung wird am besten eben so ausgeführt, wie die im Art. 8 für die Anwendung der XCoefficienten beschriebene. Man muss nemlich auch die WCoefficienten columnenweise auf verschiedene Streifen Papier auf den unteren Rand schreiben, nemlich erst die zu y^0 gehörigen der Reihe nach, dann die zu y gehörigen, dann die zu y^2 gehörigen u. s. w.

12.

Nach der Ausführung der eben beschriebenen Berechnung der G und HCoefficienten werden die betreffenden Glieder addirt, wodurch man die Entwickelungscoefficienten der Störungsfunction erhält. Setzt man nemlich

$$2a\Omega = \Sigma\Sigma\{K(i,-i') + \sqrt{-1}\,.\,L(i,-i')\}\, y^i z'^{-i'}$$

wo i sowohl wie i' ganze, positive und negative Zahlen sind, die negativen Werthe von i' aber unberücksichtigt gelassen werden dürfen, weil nothwendig

$$K(-i,i') = K(i,-i')$$
$$L(-i,i') = -L(i,-i')$$

wird, so wird allgemein

$$\left.\begin{aligned} K(i,-i') &= G^{(2)}_{i,-i'} + G^{(3)}_{i,-i} + G^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \\ L(i,-i') &= H^{(2)}_{i,-i'} + H^{(3)}_{i,-i'} + H^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Hiebei ist zu bemerken, dass wenn ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$i > 2$$

ist, die ersten Glieder dieser Ausdrücke Null werden, und die Aus-

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

drücke selbst mit $G^{(i)}_{i,-i'}$ und bez. $H^{(i)}_{i,-i'}$ anfangen. Der Grund davon liegt in dem Umstande, dass in der Entwickelung von $\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m$ nach y^i der Exponent i nie grösser werden kann wie n, und hierin hat die grössere Convergenz der nach den Potenzen von y entwickelten Störungsfunction ihren Grund, indem die solcher Gestalt wegfallenden Glieder grade zu den grösseren der überhaupt vorhandenen gehören.

Setzt man ferner

$$2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \Sigma\Sigma\left\{M(i,-i') + \sqrt{-1}.N(i,-i')\right\} y^i z'^{-i'}$$

so bekommt man sogleich

$$(4)\quad .\ .\ .\ \begin{cases} M(i,-i') = 2G^{(2)}_{i,-i'} + 3G^{(3)}_{i,-i'} + 4G^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \\ N(i,-i') = 2H^{(2)}_{i,-i} + 3H^{(3)}_{i,-i'} + 4H^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.} \end{cases}$$

Sei ferner

$$2a\left\{r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\} = \Sigma\Sigma\left\{R(i,-i') + \sqrt{-1}.S(i,-i')\right\} y^i z'^{-i'}$$

so wird

$$R(i,-i') = 2.2\,G^{(2)}_{i,-i'} + 3.3G^{(3)}_{i,-i'} + 4.4G^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.}$$

$$S(i,-i') = 2.2H^{(2)}_{i,-i'} + 3.3H^{(3)}_{i,-i'} + 4.4H^{(4)}_{i,-i'} + \text{etc.}$$

wodurch diese Differentialquotienten der Störungsfunction auf die einfachste Art erhalten werden. Geht man nun zum Reellen über, so wird sogleich

$$a\Omega = \Sigma\Sigma K(i,-i')\cos(i\varepsilon - i'g') - \Sigma\Sigma L(i,-i')\sin(i\varepsilon - i'g')$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \Sigma\Sigma M(i,-i')\cos(i\varepsilon - i'g') - \Sigma\Sigma N(i,-i')\sin(i\varepsilon - i'g')$$

$$ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \Sigma\Sigma R(i,-i')\cos(i\varepsilon - i'g') - \Sigma\Sigma S(i,-i')\sin(i\varepsilon - i'g')$$

wo ε die excentrische Anomalie des gestörten, und g' die mittlere Anomalie des störenden Planeten ist. Hier darf der Index i' nur auf positive Werthe, die Null eingeschlossen, ausgedehnt werden, und statt des constanten Gliedes erhält man das doppelte desselben; es sind mit andern Worten

$$K(0,0),\ M(0,0) \text{ und } R(0,0)$$

die doppelten Werthe der bez. constanten Glieder. Zwischen den verschiedenen Gliedern, aus welchen zufolge (3) die K und L Coefficienten bestehen, findet eine merkwürdige Relation statt, die namentlich in den

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Fällen, in welchen ν nicht ganz klein ist, wesentlich zur Abkürzung der Berechnung der höheren Glieder dieser Coefficienten beiträgt. Diese Relation, die ich hier blos anführen werde, lässt sich so aussprechen:

,,Wenn n eine grosse Zahl ist, so bilden einerseits die $G_{i,-i'}^{(n)}$ und ,,$H_{i,-i'}^{(n)}$ deren oberer Index eine grade Zahl ist, und andern Theils ,,diejenigen deren oberer Index eine ungrade Zahl ist, unter ein- ,,ander eine geometrische Progression.''

Die Logarithmen dieser Grössen bilden also eine arithmetische Reihe ersten Ranges, und man kann, wenn der grösste für n in den vorhergehenden Rechnungen angenommene Werth nicht hinreichend gross ist, um die gewünschte Anzahl von Decimalen sicher zu erhalten, durch einfache Interpolation der Logarithmen, oder Fortsetzung der arithmetischen Reihe, die sie bilden, die noch nöthigen Glieder hinzufügen. Wenn n nicht so gross ist, dass sich in der angegebenen Anzahl von Decimalstellen die geometrische Reihe vollständig ausspricht, so werden die Logarithmen eine arithmetische Reihe zweiten Ranges bilden, und man kann durch Zuziehung der zweiten Differenzen derselben die Zahl der G und H Grössen vermehren.

13.

Durch die im vor. Art. erklärten Rechnungen ergaben sich aus den Angaben der Tafel des Art. 8 die folgenden Coefficienten der Störungsfunction und des mit r multiplicirten Differentialquotienten derselben nach r, die ich in reeller Form ansetze.

	$a\Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$	
ε g	cos	sin	cos	sin
0, 0	+0″5335		+1″0987	
1, 0	−0.03583	−0″00202	−0.07022	−0″00737
2, 0	−0.0353	−0.0069	−0.0803	−0.0155
3, 0	−0.0003	+0.0003	−0.0008	+0.0001
4, 0	+0.0001	+0.0001	+0.0005	+0.0002
−3, −1	+0.0001	−0.0002	+0.001	−0.001
−2, −1	−0.0023	−0.0001	−0.005	−0.001
−1, −1	−0.0129	+0.0088	−0.038	+0.028
0, −1	+0.0332	+0.0061	+0.057	+0.019
1, −1	+0.0837	−0.0512	+0.257	−0.153
2, −1	−0.0194	+0.0220	−0.044	+0.046
3, −1	−0.0112	+0.0037	−0.036	+0.012
4, −1	0.0000	+0.0001	0.000	0.000

−2, −2	−0.0001	−0.0005	0.000	−0.001
−1, −2	−0.0009	−0.0015	−0.004	−0.003
0, −2	−0.0059	+0.0278	−0.017	+0.065
1, −2	−0.0602	+0.1130	−0.110	+0.224
2, −2	+0.4373	−0.7268	+0.894	−1.490
3, −2	−0.0023	+0.0114	−0.007	+0.035
4, −2	−0.0025	+0.0026	−0.010	+0.011
−1, −3	−0.0001	−0.0005	−0.001	−0.001
0, −3	−0.0019	+0.0037	−0.005	+0.007
1, −3	−0.0108	+0.0298	−0.018	+0.070
2, −3	+0.0847	−0.0969	+0.173	−0.154
3, −3	+0.0048	−0.1851	+0.014	−0.564
4, −3	+0.0011	+0.0037	+0.004	+0.015
5, −3	−0.0003	+0.0010	−0.001	+0.005
0, −4	−0.0004	+0.0003	−0.001	0.000
1, −4	−0.0019	+0 0046	−0.005	+0.011
2, −4	+0.0127	−0.0056	+0.029	+0.004
3, −4	+0.0080	−0.0396	+0.034	−0.109
4, −4	−0.0199	−0.0373	−0.081	−0.151
5, −4	+0.0009	+0.0009	+0.004	+0.004
6, −4	+0.0001	+0.0003	+0.001	+0.002
1, −5	−0.0003	+0.0005	−0.001	+0.001
2, −5	+0.0015	+0.0003	+0.003	+0.004
3, −5	+0.0030	−0 0048	+0.012	−0.010
4, −5	−0.0038	−0.0115	−0.012	−0.044
5, −5	−0.0084	−0.0053	−0.042	−0.027
6, −5	+0.0004	+0.0001	+0.002	+0.001

Vom zweiten Differentialquotienten der Störungsfunction nach r habe ich nur die von $i' = 0$ abhängigen Glieder berechnet, die ich unten angeben werde, da bei dem geringen Betrage der Saturnstörungen die vom Quadrate der störenden Kraft abhängigen Glieder wohl unmerklich sein werden.

14.

Um die zur Erlangung dieses Resultats erforderliche letzte Rechnungsabtheilung näher zu erläutern, will ich die für das grösste Paar von Coefficienten erforderliche Rechnung ausführlich hieher setzen.

	2, −2			
		$\sqrt{-1}$		$\sqrt{-1}$
	Δ_2			
2	9.63134	9.85007	+0.42790	+0.70807
0	5.125n	5.735n	−1	−5
	Δ_3			
3	6.711	7.4405	+51.4	+275.7
1	7.0651n	6.8513n	−116.2	−71.0
	Δ_4			
4	6.055n	6.081n	−11.4	−12.0
2	7.9960	8.2163	+990.8	+1645.5
0	5.094n	5.614n	−1.2	−4.1
	Δ_5			
3	5.950	5.468	+8.9	+2.9
1	5.970n	5.724n	−9.3	−5.3
	Δ_6			
4	5.293n	5.336n	−2.9	−2.2
2	6.425	6.661	+26.6	+45.8
0	4.507n	4.986n	−0.3	−1.0
	Δ_7			
3	5.090	4.239	+1.2	+0.2
1	4.592n	—	−0.4	—
	Δ_8			
4	4.385n	4.428n	−0.2	−0.3
2	4.03	4.64	+0.1	+0.4
0	—	4.16n	—	−0.1

Die Indices, die in der ersten Columne dieser Tafel angesetzt sind, haben keinen andern Zweck als anzuzeigen, aus welchen Gliedern der Tafel des Art. 8 die nebenstehenden Logarithmen der Producte der W Coefficienten und der bez. Glieder dieser Tafel entstanden sind. Die beiden letzten Columnen geben die Zahlen der nebenstehenden Logarithmen, und die Summe jeder Abtheilung ist der betreffende G und H Coefficient. Durch Addition dieser Zahlen bekommt man also die Coefficienten für das Argument 2, −2. Von Δ_3 an habe ich, um das Hinschreiben der Nullen zu vermeiden, die fünfte Decimale als Einheit betrachtet. Es wird demzufolge

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\begin{array}{llll}
G^{(2)}_{2,-2} = +0.42789\,, & G^{(3)}_{2,-2} = -64.8, & H^{(2)}_{2,-2} = +0.70802\,, & H^{(3)}_{2,-2} = +204.7 \\
G^{(4)}_{2,-2} = +978.2, & G^{(5)}_{2,-2} = -0.4, & H^{(4)}_{2,-2} = +1629.4, & H^{(5)}_{2,-2} = -2.4 \\
G^{(6)}_{2,-2} = +23.4, & G^{(7)}_{2,-2} = +0.8, & H^{(6)}_{2,-2} = +42.6, & H^{(7)}_{2,-2} = +0.2 \\
G^{(8)}_{2,-2} = -0.1, & \phantom{G^{(7)}_{2,-2} =}-64 & H^{(8)}_{2,-2} = 0.0, & \phantom{H^{(7)}_{2,-2} =}+202 \\
\phantom{G^{(8)}_{2,-2} =}+0.43791 & & \phantom{H^{(8)}_{2,-2} =}+0.72474 & \\
\phantom{G^{(8)}_{2,-2} =}-64 & & \phantom{H^{(8)}_{2,-2} =}+202 & \\
K(2,-2) = +0.4373 & & L(2,-2) = +0.7268 &
\end{array}$$

Durch Multiplication mit den Zahlen 2, 3, 4, etc. erhält man hieraus

	+0.85578	−194	+1.41604	+614
	+3913	−2	+6518	−12
	+140	+6	+256	+1
	−1	−190	0	+603
	+0.89630		+1.48378	
	−190		+603	
$M(2,-2)=$	+0.894	$L(2,-2)=$	+1.490	

wie in der Tafel des vor. Art angegeben ist.

15.

Die Controle der eben beschriebenen Rechnungen wird wieder durch die für $f=0$ geltende Entwickelung erlangt. Macht man diese Annahme in der allgemeinen Entwickelung, so wird

$$\begin{aligned}
2a\Omega = & \left\{ K(0,0) + 2K(1,0) + 2K(2,0) + \text{etc.} \right\} z'^0 \\
& + \Sigma \left\{ \begin{array}{l} K(0,-i') + K(1,-i') + K(2,-i') + \text{etc.} \\ \qquad +K(-1,-i') + K(-2,-i') + \text{etc.} \end{array} \right\} z'^{-i'} \\
& + \sqrt{-1}\,.\,\Sigma \left\{ \begin{array}{l} L(0,-i') + L(1,-i') + L(2,-i') + \text{etc.} \\ \qquad +L(-1,-i') + L(-2,-i') + \text{etc.} \end{array} \right\} z'^{-i'}
\end{aligned}$$

Andernseits ist aber zufolge des Art. 9 in der speciellen Entwickelung

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} \Delta_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n \Sigma \left\{ R^{(n)}_{-i'} + \sqrt{-1}\,.\,S^{(n)}_{-i'} \right\} z'^{-i'}$$

wo die Summation von $i=0$ anfangen muss, und es wird hier

$$r = 1 - \sin\varphi = \Phi$$

Rechnet man daher die Grössen

$$T_{-i'} = \Phi^2 R^{(2)}_{-i'} + \Phi^3 R^{(3)}_{-i'} + \Phi^4 R^{(4)}_{-i'} + \text{etc.}$$

$$U_{-i'} = \Phi^2 S^{(2)}_{-i'} + \Phi^3 S^{(3)}_{-i'} + \Phi^4 S^{(4)}_{-i'} + \text{etc.}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

für jeden erforderlichen Werth von i', so muss auch

$$T_0 = K(0,0) + 2K(1,0) + 2K(2,0) + \text{etc.}$$

und ausserdem allgemein

$$\begin{aligned} T_{-i'} &= K(0,-i') + K(1,-i') + K(2,-i') + \text{etc.} \\ &\quad + K(-1,-i') + K(-2,-i') + \text{etc.} \\ U_{-i'} &= L(0,-i') + L(1,-i') + L(2,-i') + \text{etc.} \\ &\quad + L(-1,-i') + L(-2,-i') + \text{etc.} \end{aligned}$$

werden. Die Coefficienten $L(1,0)$, $L(2,0)$, etc. entziehen sich hier wieder dieser Controle, und müssen daher, wenn man es für nöthig halten sollte, besonders durchgesehen werden. Die Controle der Summen, durch welche sich sowohl die K und L Coefficienten wie die M und N Coefficienten aus den G und H ergeben, kann wie folgt erhalten werden. Die Ausdrücke (3) und (4) zeigen leicht, dass auch

$$\begin{aligned} M(i,-i') &= 2K(i,-i') \\ &\quad + G^{(3)}_{i,-i'} + 2G^{(4)}_{i,-i'} + 3G^{(5)}_{i,-i'} + \text{etc.} \\ N(i,-i') &= 2L(i,-i') \\ &\quad + H^{(3)}_{i,-i'} + 2H^{(4)}_{i,-i'} + 3H^{(5)}_{i,-i'} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Rechnet man diese Coefficienten daher nicht blos durch (4), sondern auch durch die vorstehenden Formeln, so ergiebt sich eine Prüfung der letzten Additionen und Multiplicationen. Eben so kann man die für die Coefficienten des zweiten Differentials der Störungsfunction nach r erforderlichen Multiplicationen und Additionen prüfen.

16.

Ich komme jetzt zu der Entwickelung des Differentialquotienten der Störungsfunction nach Z. Führt man in den im Art. 2 gegebenen Ausdruck der Störungsfunction statt der linearischen Grössen die Verhältnisse zu a und a' ein, so wird er

$$a\Omega = \mu\left\{\frac{a}{\varDelta} - \nu^2\left(\frac{a'}{r'}\right) - \nu^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 H\right\}$$

und eben so wie in der Abhandlung (I) wird

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\frac{1}{\nu^2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} - \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{a}{\varDelta}\right) - \mu\nu^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 H$$

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = -\mu\left\{\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3 - \nu^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\}\frac{\sin J}{\nu}\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f' + \Pi')$$

Diese geben

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$a\Omega + 2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) =$$

$$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\frac{1}{\nu^2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} - 3\mu\nu^2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 H - \mu\nu\left(\frac{a'}{r'}\right)$$

oder

$$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 = \left\{a\Omega + 2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + 3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\Delta_1 + \mu\nu\left(\frac{a'}{r'}\right)\right\}\frac{1}{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\frac{1}{\nu^2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

indem $\mu\nu^2 H = \Delta_1$ (nach der im Art. 3 eingeführten Bezeichnung) ist. Es ist ferner identisch

$$\nu^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = \left\{\nu\left(\frac{a'}{r'}\right) - \nu^3\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\}\frac{1}{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\frac{1}{\nu^2} - \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

und hiemit wird

$$(5) \qquad a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \left\{a\Omega + 2ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + 3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\Delta_1 + \mu\nu^3\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\}(Z)$$

wo

$$(Z) = -\frac{\nu \sin J\left(\frac{a'}{r'}\right)\sin(f' + \Pi')}{1 - \nu^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2}$$

es besteht also dieser Differentialquotient aus einem Product zweier Reihen, welches am Einfachsten durch die mechanische Multiplication gebildet wird.

17.

Das Glied $\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\Delta_1$ ist schon im Vorhergehenden mit entwickelt worden, es braucht also nur diesen Rechnungen entnommen und mit 3 multiplicirt zu werden. Es fand sich:

ε g'	$3\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\Delta_1$	
	cos	sin
−1, −1	−0″.161	+0″.149
0, −1	−0.917	+0.512
1, −1	+10.971	−6.187
−1, −2	−0.018	+0.016
0, −2	−0.103	+0.057
1, −2	+1.228	−0.692
−1, −3	−0.002	+0.002
0, −3	−0.010	+0.005
1, −3	+0.116	−0.065
0, −4	−0.001	+0.001
1, −4	+0.010	−0.006

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Die Entwickelung der Grössen $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ und $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ ist ebenfalls im Vorhergehenden enthalten, es ist daher leicht durch mechanische Multiplication das Product derselben untereinander und mit $\mu\nu^3$ zu bilden. Es wurde gefunden:

ε	g'	$\underbrace{\mu\nu^3\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3}$ cos
0,	0	+2″.338
1,	0	−0.198
2,	0	+0.004
0,	−1	+0.196
±1,	−1	−0.017
0,	−2	+0.016
±1,	−2	−0.001
0,	−3	+0.001

womit alle Grössen gegeben sind, die zu dem einen Factor von $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ gehören. Für die Entwickelung des zweiten Factors wird zuerst

$$(Z) = -\sin J\left\{\nu\left(\frac{a'}{r'}\right) + \nu^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \nu^5\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ldots\right\}\sin(f'+\Pi')$$

oder

$$\begin{aligned}(Z) = &-\sin J\cos\Pi'\left\{\nu\left(\frac{a'}{r'}\right)\sin f' + \nu^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\sin f'.\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \nu^5\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\sin f'.\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ldots\right\}\\ &-\sin J\sin\Pi'\left\{\nu\left(\frac{a'}{r'}\right)\cos f' + \nu^3\left(\frac{a'}{r'}\right)\cos f'.\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \nu^5\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\cos f'.\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ldots\right\}\end{aligned}$$

Setzt man wie oben

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^n x' = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} X_i^{n,1} z'^{-i'}$$

so wird

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^n \sin f' = \left\{X_1^{n,1} - X_{-1}^{n,1}\right\}\sin g' + \left\{X_2^{n,1} - X_{-2}^{n,1}\right\}\sin 2g' + \ldots$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^n \cos f' = X_0^{n,1} + \left\{X_1^{n,1} + X_{-1}^{n,1}\right\}\cos g' + \left\{X_2^{n,1} + X_{-2}^{n,1}\right\}\cos 2g' + \ldots$$

die ein für alle Mal berechnet werden können, da sie nur von der Excentricität des störenden Planeten abhängen. Für die im Art. 1 angeführte Excentricität der Saturnbahn fanden sich die Logarithmen dieser Coefficienten wie folgt,

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

		$2\sin g'$	$2\sin 2g'$	$2\sin 3g'$	$2\sin 4g'$
$\left(\frac{a'}{r'}\right)\sin f'$		9.69778	8.62168	7.5208	6.412
$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\sin f'$		9.69897	8.84454	7.8825	6.876
$\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\sin f'$		9.70120	8.99266	8.1321	7.205
$\left(\frac{a'}{r'}\right)^7\sin f'$		9.7051	9.1047	8.3250	7.464
$\left(\frac{a'}{r'}\right)^9\sin f'$		9.7102	9.1957	8.4834	7.677
	$\cos 0g'$	$2\cos g'$	$2\cos 2g'$	$2\cos 3g'$	$2\cos 4g'$
$\left(\frac{a'}{r'}\right)\cos f'$	8.44744n	9.69744	8.62150	7.5208	6.412
$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\cos f'$	8.44915	9.70051	8.84540	7.8831	6.876
$\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\cos f'$	8.9293	9.70764	8.99552	8.1339	7.205
$\left(\frac{a'}{r'}\right)^7\cos f'$	9.1556	9.7187	9.1105	8.3284	7.464
$\left(\frac{a'}{r'}\right)^9\cos f'$	9.3074	9.7336	9.2053	8.4890	7.681

wo von jedem Coefficienten nur die Hälfte angesetzt ist, (die constanten Glieder ausgenommen,) weil dieses für die nachherige Multiplication erforderlich ist. Da die Entwickelungen von $\left(\frac{r}{a}\right)^2$, $\left(\frac{r}{a}\right)^4$, etc. im Vorhergehenden enthalten sind, so ergab sich leicht durch mechanische Multiplicationen

ε g'	$\frac{1}{2}(Z)$ sin	$\frac{1}{2}(Z)$ cos
0, 0		+0.001536
1, 0		+0.000017
0, —1	+0.022702	—0.032479
±1, —1	—0.000152	+0.000219
±2, —1	+0.000004	—0.000006
0, —2	+0.002006	—0.002872
±1, —2	—0.000023	+0.000032
0, —3	+0.000167	—0.000238
±1, —3	—0.000002	+0.000003
0, —4	+0.000013	—0.000019

wo aber, wie immer in dieser Abhandlung geschehen ist, vom constanten Gliede das Doppelte angesetzt ist, wie es sich bei der mechanischen Multiplication von selbst ergiebt.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

18.

Durch Multiplication der beiden Factoren des Ausdrucks (5) mit einander wurden nun die folgenden Coefficienten erhalten.

$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$					
$\varepsilon,\ g'$	sin	cos	$\varepsilon,\ g'$	sin	cos
0, 0		+0."0789	−1,−2	−0."014	+0."001
1, 0	−0."05053	−0.51401	0,−2	−0.026	−0.006
2, 0	+0.0045	−0.0044	1,−2	+0.466	−0.228
3, 0	+0.001	+0.004	2,−2	−0.013	−0.018
			3,−2	+0.040	−0.030
−2,−1	−0."005	+0."005			
−1,−1	−0.006	−0.033	0,−3	−0."010	−0."003
0,−1	+0.111	−0.156	1,−3	+0.067	−0.048
1,−1	−0.038	−0.003	2,−3	+0.168	+0.011
2,−1	+0.068	−0.150	3,−3	+0.001	−0.009
3,−1	+0.001	0.000	4,−3	+0.014	−0.001

Ich füge hinzu, dass sich für die Differentialquotienten der Störungsfunction, die bei der Berechnung der von den Quadraten und Producten der störenden Massen abhängigen Glieder gebraucht werden, ähnliche Ausdrücke entwickeln lassen wie (5), da diese aber bei den Saturnstörungen nicht in Betracht kommen, so lasse ich sie hier weg. Es kann sich auch jeder dieselben leicht selbst entwickeln, wenn eine Anwendung derselben vorliegen sollte.

19.

Die im Vorhergehenden gefundenen Werthe der Differentialquotienten der Störungsfunction werden nun nach den Vorschriften des Art. 74 (I) auf die Form

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon-i'\,(c'-c\mu)\right\}$$

gebracht, und zu dem Ende geben die Elemente des Art. 1

$$\log\lambda = 7.77488$$

Hiemit bekommt man die folgenden Werthe der Logarithmen der erforderlichen J Functionen

λ	$J_\lambda^{(0)}-1$	$J_\lambda^{(1)}$	$J_\lambda^{(2)}$
1	5.550n	7.7749	5.249
2	6.152n	8.0759	5.851
3	6.504n	8.2519	6.203
4	6.754n	8.3768	6.453
5	6.948n	8.4737	6.647

und damit endlich

	$(i)a\Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$	
$\varepsilon,\ \mu\varepsilon$	cos	sin	cos	sin	sin	cos
0, 0			+1″,0987			+0″,0789
1, 0	−0″,03583	−0″,00202	−0.07022	−0″,00737	−0″,05053	−0.51401
2, 0	−0.0706	−0.0138	−0.0803	−0.0155	+0.0045	−0.0044
3, 0	−0.0009	+0.0009	−0.0008	+0.0001	+0.001	+0.004
4, 0	+0.0004	+0.0004	+0.0005	+0.0002		
−3, −1	−0.0003	+0.0006	+0.001	−0.001		
−2, −1	+0.0045	+0.0002	−0.005	−0.001	−0.005	+0.005
−1, −1	+0.0129	−0.0088	−0.038	+0.028	−0.007	−0.032
0, −1	−0.0004	+0.0003	+0.055	+0.020	+0.111	−0.156
1, −1	+0.0839	−0.0515	+0.257	−0.153	−0.037	−0.003
2, −1	−0.0381	+0.0436	−0.042	+0.045	+0.068	−0.150
3, −1	−0.0338	+0.0114	−0.036	+0.012	+0.001	−0.001
4, −1	−0.0002	+0.0005	0.000	0.000		
−2, −2	+0.0002	+0.0010	0.000	−0.001		
−1, −2	+0.0009	+0.0015	−0.004	−0.004	−0.014	+0.001
0, −2	+0.0008	−0.0014	−0.016	+0.062	−0.032	−0.003
1, −2	−0.0706	+0.1303	−0.121	+0.243	+0.466	−0.228
2, −2	+0.8739	−1.4523	+0.893	−1.487	−0.007	−0.021
3, −2	+0.0036	+0.0168	+0.004	+0.017	+0.040	−0.030
4, −2	−0.0100	+0.0107	−0.010	+0.011	0.000	0.000
−1, −3	+0.0001	+0.0005	−0.001	−0.001		
0, −3	+0.0002	−0.0005	−0.005	+0.006	−0.011	−0.002
1, −3	−0.0138	+0.0332	−0.021	+0.073	+0.064	−0.048
2, −3	+0.1685	−0.1828	+0.173	−0.143	+0.169	+0.010
3, −3	+0.0173	−0.5589	+0.017	−0.567	+0.004	−0.009
4, −3	+0.0046	+0.0048	+0.004	+0.005	+0.014	−0.001
5, −3	−0.0014	+0.0052	−0.001	+0.005	0.000	0.000
0, −4	0.0000	−0.0001	−0.001	0.000		
1, −4	−0.0025	+0.0049	−0.006	+0.011		
2, −4	+0.0248	−0.0083	+0.028	+0.007		
3, −4	+0.0265	−0.1154	+0.037	−0.105		
4, −4	−0.0791	−0.1520	−0.080	−0.154		
5, −4	+0.0026	+0.0009	+0.002	0.000		
6, −4	+0.0007	+0.0019	+0.001	+0.002		
1, −5	−0.0004	+0.0005	−0.001	+0.001		
2, −5	+0.0027	+0.0010	+0.003	+0.004		
3, −5	+0.0096	−0.0130	+0.012	−0.009		
4, −5	−0.0137	−0.0456	−0.011	−0.043		
5, −5	−0.0425	−0.0279	−0.042	−0.028		
6, −5	+0.0012	−0.0002	+0.001	0.000		

Ich füge diesen noch für $i' = 0$ die Coefficienten des zweiten Differentials nach r hinzu, von welchen ich weiter unten Gebrauch machen werde.

ε,	$\mu\varepsilon$	$ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ cos	sin
0,	0	$+2''329$	
1,	0	-0.138	$-0''026$
2,	0	-0.202	-0.039
3,	0	-0.002	$+0.005$

§. 2. Entwickelung der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten für die vom Mars bewirkten Störungen der Egeria.

Berechnung einer Ungleichheit langer Periode.

20.

Die Entwickelung der Störungsfunction für die Marsstörungen der Egeria lässt sich beliebig durch die eine oder die andere der beiden in der Abhandlung (I) und in dieser Abhandlung vorgetragenen Methoden ausführen; ich habe jene gewählt, grösstentheils aus dem Grunde um zu zeigen, wie man durch dieselbe ein entferntes Glied berechnen kann, welches vermöge eines kleinen Divisors, welchen es bekommt, merklich wird. Ein solches Glied kommt in diesen Marsstörungen vor. Die der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente sind die folgenden:

Egeria für 1851 Dec. 5,0 m. Gr. Z. — Mars.

$$c = 19^0\ 31'\ 43''6$$

$$\left.\begin{aligned}\pi &= 119\ \ 12\ \ 12.4\\ \theta &= 43\ \ 17\ \ \ 9.1\end{aligned}\right\}\text{m. Aeq. } 1851.0 \left\{\begin{aligned}\pi' &= 333^0\ 18'\ 48''\\ \theta' &= 48\ \ 20\ \ 53\end{aligned}\right.$$

$$\varphi = 4\ \ 52\ \ 7.4 \qquad e' = 0.093263$$

$$i = 16\ \ 33\ \ 6.7 \qquad i' = 1^0\ 51'\ 6''$$

$$n = 858''3861 \qquad n' = 1886''656$$

$$\log a = 0.4108826 \qquad \log a' = 0.1828760$$

$$m' = \frac{1}{3200900}$$

Bilden wir nun wieder zuerst das Verhältniss der mittleren Bewegungen, und die Vielfachen davon, so finden wir

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden · SMWK · Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\mu = 2{,}197911$$
$$2\mu = 4{,}395822$$
$$3\mu = 6{,}593733$$
$$4\mu = 8{,}791644$$
$$5\mu = 10{,}989555$$

woraus der kleine Divisor

$$11 - 5\mu = +\,0{,}010445$$

hervorgeht, dessen Coefficient einer näheren Untersuchung bedarf. In einen Kettenbruch aufgelöst wird

$$\mu = 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

woraus der jenem am Nächsten stehende kleine Divisor

$$200 - 91\mu = -0{,}0099$$

folgt, und ohne Bedeutung ist.

21.

Ehe ich die folgenden Rechnungen darlege, muss ich anführen, dass dabei höchstens Logarithmen von fünf Decimalen angewandt worden sind, mithin die angegebenen Secunden nicht verbürgt werden können, aber hinreichend genau sind. Die Hülfsgrössen, die zuerst berechnet werden mussten, fanden sich wie folgt:

$$J = 14^0\ 42'\ 29''$$
$$\Phi = -0\ \ 38\ \ 36$$
$$\Psi = 354\ \ 19\ \ \ 5$$
$$\Pi = 76\ \ 33\ \ 39$$
$$\Pi' = 290\ \ 38\ \ 50$$

$$\log \alpha = 9.77199$$
$$P = 69^0\ 19'\ \ 5'',\quad \log p = 0.26285$$
$$V = 146\ \ 13\ \ 20,\quad \log \nu = 0.06937$$
$$W = 76\ \ 33\ \ 29,\quad \log w = 0.05825$$
$$W_1 = 76\ \ 37\ \ 45,\quad \log w_1 = 0.06987$$
$$R = 1.34385\quad \log \gamma_2 = 7.4834$$

und nachdem der Umkreis in 16 Theile getheilt worden war, ergab sich

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

	C	$\log q$	$Q-\varepsilon$	$\log q_1$
0	1.10786	9.99805	143° 16′ 56″	7.4854
1	1.10216	9.99768	147 35 8	7.4857
2	1.13592	0.01182	151 22 4	7.4716
3	1.20491	0.03465	153 32 34	7.4488
4	1.29904	0 05916	153 56 15	7.4242
5	1.40398	0.08054	152 58 49	7.4029
6	1.50313	0.09669	151 14 26	7.3868
7	1.58045	0.10743	149 20 48	7.3760
8	1.62336	0.11328	147 4 16	7.3702
9	1.62519	0.11450	145 0 3	7.3689
10	1.58641	0.11074	142 57 41	7.3727
11	1.51404	0.10129	140 58 52	7.3821
12	1.42000	0.08542	139 14 44	7.3980
13	1.31871	0.06342	138 8 22	7.4200
14	1.22475	0.03760	138 11 26	7.4458
15	1.15104	0.01329	139 53 8	7.4701

22.

Aus den vorstehenden Zahlenangaben wurden nun zuerst die $\alpha_i^{(1)}$ und $\alpha_i^{(3)}$ berechnet, und bei jenen auf das oben angeführte Glied Rücksicht genommen, welches den kleinen Divisor bekommt. Bei solchen Gliedern sind es zunächst diejenigen, die das Quadrat des kleinen Divisors bekommen, welche merklich werden, und gemeiniglich sind diese die einzigen merklichen, so dass man sich bei der Berechnung solcher Ungleichheit auf diese beschränken darf. Durch die Untersuchung der in der Abhandlung (I) entwickelten allgemeinen Ausdrücke zur Berechnung der Störungen überzeugt man sich leicht, dass die mit dem Quadrat des Divisors behafteten Glieder blos aus den mit $\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ multiplicirten Gliedern des Differentials von nz entstehen können, und dass mit bloser Rücksicht auf diese Glieder

$$n\delta z = -3a\iint\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)d\varepsilon^2$$

wird, so wie dass in ν und u solche Glieder gar nicht vorhanden sind. Es wird dieses übrigens weiter unten ausführlich gezeigt werden. Hier handelt es sich deshalb nur darum, die Coefficienten $(i)[11,5,c]$ und $(i)[11,5,s]$ des Ausdrucks

$$(i)a\Omega = (i)[11,5,c]\cos\{(11-5\mu)\,\varepsilon-5(c'-c\mu)\} + (i)[11,5,s]\sin\{(11-5\mu)\,\varepsilon-5(c'-c\mu)\}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

zu berechnen, da hieraus zufolge des Vorhergehenden

$$(6)\quad \begin{aligned} n\delta z = &- 3\frac{(i)[11,5,c]}{(11-5\mu)^2}\sin\{(11-5\mu)\varepsilon - 5(c'-c\mu)\} \\ &+ 3\frac{(i)[11,5,s]}{(11-5\mu)^2}\cos\{(11-5\mu)\varepsilon - 5(c'-c\mu)\}\end{aligned}$$

die einzigen Glieder sind, die das Quadrat des kleinen Divisors $11-5\mu$ bekommen.

Nun giebt dagegen die Entwickelung, die oben angefangen worden ist, zuerst $a\Omega$ in der Form

$$(i,i',c)\cos(i\varepsilon - i'\varepsilon') + (i,i',s)\sin(i\varepsilon - i'\varepsilon')$$

und um den Uebergang von dieser Form zu der, welche in den vorstehenden Ausdrücken angewandt werden muss, zu bewirken, muss man eine gewisse Anzahl der Coefficienten der zunächst vorstehenden Form berechnen, und diese in jene Form transformiren. In Bezug auf diese Transformation findet ein wesentlicher Unterschied statt, jenachdem der störende Planet ein oberer oder ein unterer ist. Wenn dieser ein oberer ist, so liegen immer die Glieder, die auf diese Transformation den wesentlichsten Einfluss äussern, vor dem gesuchten Gliede, das heisst sie hängen von Werthen von i' ab, die kleiner sind, wie der Werth von i' in dem Gliede welches man berechnen will, und die Glieder der Störungsfunction, in welchen i' eine grössere Zahl ist, haben geringeren Einfluss. Das Gegentheil findet statt, wenn der störende Planet ein unterer ist, denn alsdann gehören die grössten in dieser Transformation Einfluss habenden Glieder Werthen von i' an, die grösser sind, wie der Werth von i', der dem Resultat zukommt; die den meisten Einfluss habenden Glieder liegen daher in diesem Falle nach dem gesuchten Gliede, und man muss die Störungsfunction für grössere Werthe von i' entwickeln. Da Mars in Bezug auf Egeria ein unterer Planet ist, so findet hier der letztgenannte Fall statt, und ich habe $a\Omega$ bis zu $i'=10$ entwickelt, womit ich ausreichte. Die erhaltenen Werthe von $\alpha_i^{(1)}$ und $\alpha_i^{(3)}$ sind nun die folgenden.

$\frac{1}{8}\mu\alpha_i^{(1)}$	$\varepsilon=(0)$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	8.00731	8.01115	8.00589	7.98929	7.96301	7.93365	7.90777	7.88925
1	7.52780	7.53661	7.53447	7.51011	7.46370	7.40591	7.35226	7.31267
2	7.20751	7.22087	7.22093	7.19014	7.12455	7.04090	6.96114	6.90161
3	6.92865	6.94643	6.94896	6.91155	6.82757	6.71815	6.61278	6.53361
4	6.66946	6.69129	6.69630	6.65235	6.55013	6.41526	6.28440	6.18570
5	6.42095	6.44735	6.45489	6.40444	6.28405	6.12404	5.96763	5.84946
6	6.18019	6.21092	6.22089	6.16395	6.02547	5.84019	5.65846	5.52085
7	5.94468	5.97974	5.99213	5.92872	5.7722	5.5617	5.3547	5.1976
8	5.7131	5.7525	5.7673	5.6974	5.5228	5.2872	5.0549	4.8785
9	5.4846	5.5283	5.5455	5.4691	5.2766	5.0157	4.7582	4.562
10	5.2584	5.3065	5.3261	5.2433	5.0327	4.7467	4.4639	4.249
11	5.0343	5.0869	5.1087	5.0194	4 7909	4.480	4.172	3.937

$\frac{1}{8}\mu\alpha_i^{(1)}$	$\varepsilon=(8)$	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
0	7.87984	7.88004	7.88951	7.90729	7.93116	7.95725	7.98047	7.99726
1	7.29270	7.29421	7.31605	7.35465	7.40332	7.45225	7.49068	7.51419
2	6 87162	6.87438	6.90796	6.96626	7.03823	7.10843	7.16095	7.19060
3	6.49372	6.49772	6.54288	6.62063	6.71546	6.80655	6.87283	6.90851
4	6.13596	6.14122	6.19786	6.29493	6.41248	6.52428	6.60419	6.64583
5	5.78991	5.79638	5.86453	5.98079	6.12103	6.25341	6.34690	6.39447
6	5.45151	5.45922	5.53882	5.67427	5.83710	5.99010	6.09706	6.15056
7	5.1185	5.1275	5.2185	5.3731	5.5585	5.73204	5.85248	5.91191
8	4.7896	4.7997	4.9022	5.0760	5.2839	5.4779	5.6119	5.6772
9	4.464	4.475	4.589	4.7819	5.0124	5.2269	5.3743	5.4455
10	4.140	4.153	4.278	4.490	4.743	4.9783	5.1391	5.2163
11	3.819	3.833	3.970	4.201	4.476	4.732	4.9060	4.9890

ε	$\frac{1}{8}\mu\alpha_0^{(3)}$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_1^{(3)}$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_2^{(3)}$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_3^{(3)}$	$\frac{1}{8}\mu\alpha_4^{(3)}$
(0)	8.52475	8.43200	8.29954	8.1486	7.9869
(1)	8.54397	8.45421	8.32545	8.1785	8.0209
(2)	8.53310	8.44499	8.31829	8.1736	8.0182
(3)	8.47112	8.37857	8.24635	8.0957	7.9343
(4)	8.36120	8.25592	8.10809	7.9409	7.7624
(5)	8.23573	8.11194	7.94185	7.7511	7.5487
(6)	8.12635	7.98323	7.79041	7.5759	7.3490
(7)	8.04965	7.89124	7.68075	7.4478	7.2022
(8)	8.01167	7.84541	7.62594	7.3837	7.1286
(9)	8.01345	7.84818	7.62984	7.3887	7.1349
(10)	8.05345	7.89734	7.68949	7.4593	7.2165
(11)	8.12801	7.98695	7.79655	7 5845	7.3602
(12)	8.22813	8.10428	7.93412	7.7433	7.5407
(13)	8.33633	8.22760	8.07558	7.9039	7.7209
(14)	8.42811	8.32904	8.18878	8.0296	7.8593
(15)	8.48880	8.39386	8.25869	8.1049	7.9403

Alle hier gegebenen Grössen sind nach den Formeln §. 7 (I) gerechnet. Da hier aber die $\alpha_i^{(1)}$ viel weiter fortgesetzt werden mussten, wie die $\alpha_i^{(3)}$, so habe ich diese Fortsetzung nicht aus den $\alpha_i^{(3)}$, deren Berechnung überflüssig geworden wäre, sondern unmittelbar durch die Formeln des Art. 61 (I) berechnet, nachdem ich in diesen $n = 1$ gesetzt hatte.

23.

Durch mechanische Quadraturen ergab sich nun aus den vorstehenden Grössen,

$\varepsilon, \varepsilon'$	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ cos	sin	$\varepsilon, \varepsilon'$	$\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$ cos	sin
0, 0	+0″.14202		4,−4	−325.936	+315.320
1, 0	+0.01063	+0″.00259	5,−4	−232.424	+136.202
2, 0	+0.00007	+0.00049	6,−4	−83.598	+13.926
3, 0	−0.00028	−0.00001	7,−4	−16.505	−8.256
−3,−1	+0.00005	+0.00001	8,−4	−0.087	−4.775
−2,−1	+0.00035	+0.00008	9,−4	+1.039	−0.764
−1,−1	+0.00088	+0.00045	10,−4	+0.090	−0.296
0,−1	−0.00290	−0.00103	11,−4	+0.275	+0.018
1,−1	−0.03563	−0.02409	5,−5	+227.598	−40.977
2,−1	−0.00608	−0.00667	6,−5	+167.768	+10.406
3,−1	−0.00016	−0.00105	7,−5	+58.744	+25.178
4,−1	+0.00017	0.00000	8,−5	+9.687	+13.457
5,−1	+0.00005	+0.00005	9,−5	−1.194	+3.891
−1,−2	−0.0002	+0.0002	10,−5	−1.069	+0.445
0,−2	−0.0005	+0.0007	11,−5	−0.362	+0.052
1,−2	+0.0007	+0.0009	12,−5	−0.054	−0.044
2,−2	+0.0070	+0.0175	6,−6	−109.122	−47.501
3,−2	+0.0009	+0.0063	7,−6	−81.899	−62.600
4,−2	−0.0003	+0.0041	8,−6	−27.577	−38.199
5,−2	−0.0002	0.0000	9,−6	−1.493	−13.846
1,−3	0.0000	+0.0007	10,−6	+2.255	−2.808
2,−3	−0.0001	−0.0003	11,−6	+1.029	−0.022
3,−3	+0.0019	−0.0089	12,−6	+0.311	+0.141
4,−3	+0.0019	−0.0039	13,−6	+0.009	+0.114
5,−3	+0.0008	−0.0007	7,−7	+33.33	+51.54
6,−3	+0.00018,69	+0.00001,48	8,−7	+20.06	+59.03
7,−3	+6.51	+5.21	9,−7	+0.32	+31.95
8,−3	−0.58	+1.14	10,−7	−4.63	+10.07
9,−3	+0 04	+0.43	11,−7	−2.79	+1.38
10,−3	−0.29	−0.09	12,−7	−0.81	−0.35
			13,−7	−0.18	−0.25
			14,−7	+0.04	−0.07

8,−8	+0.31	−31.55	9,−9	−8.94	+13.37
9,−8	+9.64	−35.99	10,−9	−16.56	+14.55
10,−8	+11.69	−18.21	11,−9	−13.15	+5.80
11,−8	+7.07	−4.67	12,−9	−6.27	+0.14
12,−8	+2.62	+0.04	13,−9	−1.84	−1.05
13,−8	+0.53	+0.51	14,−9	−0.21	−0.62
14,−8	+0.03	+0.28	15,−9	+0.07	−0.22
15,−8	−0.04	+0.07	16,−9	+0.04	−0.03
			10,−10	+7.44	−3.21
			11,−10	+12.76	−1.73
			12,−10	+9.22	+1.56
			13,−10	+3.86	+2.32
			14,−10	+0.83	+1.44

Um das Hinschreiben der vielen Nullen zu umgehen sind hier vom Argumente 7,—3 an alle Coefficienten in Einheiten der fünften Decimale angesetzt. Streng genommen sind diese die Coefficienten von $A^{-\frac{1}{2}}$, und sie müssten also mit $B^{-\frac{1}{2}}$ multiplicirt werden, um in die Coefficienten von $\left(\frac{a}{\varDelta}\right)$ überzugehen. Allein der Factor $B^{-\frac{1}{2}}$ ist hier so wenig von Eins verschieden, dass die Berücksichtigung desselben unterbleiben durfte. Es fand sich nemlich

$$B^{-\frac{1}{2}} = 1 - 0.0010873 \cos(-\varepsilon-\varepsilon') + 0.0007359 \sin(-\varepsilon-\varepsilon')$$

der kleineren Glieder nicht zu gedenken.

Ferner ergab sich,

$\varepsilon,\ \varepsilon'$	$\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ cos	sin	$\varepsilon,\ \varepsilon'$	$\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ cos	sin
0, 0	+0″.33850		−1,−2	−0.002	−0.004
1, 0	+0.09765	+0″.02543	0,−2	0.000	−0.006
2, 0	+0.00770	+0.01049	1,−2	+0.027	+0.034
3, 0	−0.00455	+0.00080	2,−2	+0.068	+0.169
4, 0	−0.00198	−0.00084	3,−2	+0.013	+0.093
			4, 2	−0.007	+0.024
−3,−1	+0.0020	+0.0001	5,−2	−0.005	+0.001
−2,−1	+0.0052	+0.0025			
−1,−1	−0.0019	+0.0053			
0,−1	−0.0656	−0.0222			
1,−1	−0.2169	−0.1464			
2,−1	−0.0700	−0.0788			
3,−1	−0.0049	−0.0203			
4,−1	+0.0036	−0.0009			
5,−1	+0.0014	+0.0015			

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

0, −3	+0.001	+0.005	1, −4	+0.001	−0.003
1, −3	−0.002	+0.007	2, −4	+0.005	−0.005
2, −3	−0.003	−0.024	3, −4	−0.005	+0.012
3, −3	+0.025	−0.118	4, −4	−0.055	+0.054
4, −3	+0.033	−0.068	5, −4	−0.049	+0.029
5, −3	+0.018	−0.017	6, −4	−0.022	+0.004
6, −3	+0.005	0.000	7, −4	−0.005	−0.002

wo in Bezug auf $B^{-\frac{3}{2}}$ dieselbe Bemerkung gilt wie oben für $B^{-\frac{1}{2}}$.

24.

Berechnen wir vor allen Dingen das Glied langer Periode. Hiefür müssen nun zuerst die im vor. Art. angegebenen Glieder von $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)$, das ist hier die Glieder von $a\Omega$, da das zweite Glied der Störungsfunction hier keine Wirkung äussert, durch die Methode des Art. 69 (I) auf die Form $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{i\varepsilon - i'g'\right\}$, und dann diese durch die Methode des Art. 74 (I) auf die im Ausdruck (6) verlangte Form gebracht werden. Man kann diese beiden Verwandelungen in Eine zusammen ziehen, und wenn ich gleich diese Zusammenziehung in dem allgemeinen Falle, wo man eine grosse Anzahl von Coefficienten zu berechnen hat, für unvortheilhaft halten muss, und sie deshalb in die allgemeinen Vorschriften der Abhandlung (I) nicht aufgenommen habe, so verhält sich doch im gegenwärtigen Falle, wo nur Ein Glied zu ermitteln ist, diese Sache anders; hier kann diese Zusammenziehung mit Vortheil angewandt werden, weshalb ich sie entwickeln werde.

Zufolge des Art. 69 (I) ist

$$y'^{-i'} = \Sigma P_k^{(-i')} z'^k$$

und wenn man erwägt, dass

$$J_{k\lambda}^{(-p)} = (-1)^p J_{k\lambda}^{(p)}$$

ist, so kann der Ausdruck (141) des Art. 74 (I) wie folgt dargestellt werden,

$$z'^{-k} = \pi^{-k} \Sigma J_{k\lambda}^{(p)} y^{p-k\mu}$$

wo die angewandten Bezeichnungen dieselbe Bedeutung haben, wie in den angezogenen Stellen der Abhandlung (I). Die Substitution dieses Ausdrucks von z'^{-k} in den vorhergehenden giebt sogleich

$$y'^{-i'} = \Sigma\pi^{-k} \Sigma M(p, i', k)\, y^{p-k\mu}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

wo

$$M(p,i',k) = P^{(-i')}_{-k}\, J^{(p)}_{k\lambda} = \frac{i'}{k}\, J^{(k-i')}_{k\lambda'}\, J^{(p)}_{k\lambda}$$

wo ebenfalls wie früher $\lambda' = \frac{1}{2}e'$, $\lambda = \frac{\mu}{2}e$ ist. Substituirt man diesen Ausdruck von $y'^{-i'}$ in

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{(i,i',c) - \sqrt{-1}\,.\,(i,i',s)\}\, y^{i}\, y'^{-i'}$$

und vergleicht die Glieder mit denen des Ausdrucks

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{[i,i',c] - \sqrt{-1}\,.\,[i,i',s]\}\, \pi^{-i'}\, y^{i-i'\mu}$$

so erhält man sogleich

$$\begin{aligned}
[i,i',c] = {} & (i,i',c)\; M(0,i',i') + (i-1,i',c)\; M(1,i',i') + (i-2,i',c)\; M(2,i',i') + \text{etc.} \\
& \qquad - (i+1,i',c)\; M(1,i',i') + (i+2,i',c)\; M(2,i',i') \mp \text{etc.} \\
& + (i,i'-1,c)\, M(0,i'-1,i') + (i-1,i'-1,c)\, M(1,i'-1,i') + (i-2,i'-1,c)\, M(2,i'-1,i') + \text{etc.} \\
& \qquad - (i+1,i'-1,c)\, M(1,i'-1,i') + (i'+2,i'-1,c)\, M(2,i'-1,i') \mp \text{etc.} \\
& + \text{etc.} \\
& + (i,i'+1,c)\, M(0,i'+1,i') + (i-1,i'+1,c)\, M(1,i'+1,i') + (i-2,i'+1,c)\, M(2,i'+1,i') + \text{etc.} \\
& \qquad - (i+1,i'+1,c)\, M(1,i'+1,i') + (i+2,i'+1,c)\, M(2,i'+1,i') \mp \text{etc.} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

und ein ganz ähnlicher Ausdruck ergiebt sich für $[i,i',s]$ durch die (i,i',s). Durch diesen Ausdruck kann man leicht jedes beliebige Glied berechnen, zu mehrerer Deutlichkeit will ich aber denselben für das in Rede stehende Argument so weit ausschreiben, dass man ihn danach beliebig ausdehnen kann, wobei ich bemerke, dass statt der Coefficienten (i,i',c) und (i,i',s) selbst ihre Producte mit der Zahl i angewandt werden mussten, da es sich um die Entwickelung von $(i)a\Omega$ und nicht um die von $a\Omega$ handelt. Es wird dem obigen Ausdruck zufolge, und wenn man zur Abkürzung schlechtweg $J'^{(p)}$ statt $J^{(p)}_{5\lambda'}$, und $J^{(p)}$ statt $J^{(p)}_{5\lambda}$ schreibt:

$$\begin{array}{lll}
 & + \text{etc.} & + \text{etc.} \\
(i)[11,5,c] = + \text{etc.} & + \frac{3}{5}J'^{(2)}J^{(1)}.10(10,3,c) & + \frac{4}{5}J'^{(1)}J^{(1)}.10(10,4,c) \\
 & + \frac{3}{5}J'^{(2)}J^{(0)}.11(11,3,c) & + \frac{4}{5}J'^{(1)}J^{(0)}.11(11,4,c) \\
 & - \frac{3}{5}J'^{(2)}J^{(1)}.12(12,3,c) & - \frac{4}{5}J'^{(1)}J^{(1)}.12(12,4,c) \\
 & + \frac{3}{5}J'^{(2)}J^{(2)}.13(13,3,c) & + \frac{4}{5}J'^{(1)}J^{(2)}.13(13,4,c) \\
 & \mp \text{etc.} & \mp \text{etc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
+ \text{etc.} & - \text{etc.} & + \text{etc.} & \\
+ J'^{(0)}J^{(1)}.10(10,5,c) & - \frac{6}{5}J'^{(1)}J^{(1)}.10(10,6,c) & + \frac{7}{5}J'^{(2)}J^{(1)}.10(10,7,c) & \mp \text{etc.} \\
+ J'^{(0)}J^{(0)}.11(11,5,c) & - \frac{6}{5}J'^{(1)}J^{(0)}.11(11,6,c) & + \frac{7}{5}J'^{(2)}J^{(0)}.11(11,7,c) & \\
- J'^{(0)}J^{(1)}.12(12,5,c) & + \frac{6}{5}J'^{(1)}J^{(1)}.12(12,6,c) & - \frac{7}{5}J'^{(2)}J^{(1)}.12(12,7,c) & \\
+ J'^{(0)}J^{(2)}.13(13,5,c) & - \frac{6}{5}J'^{(1)}J^{(2)}.13(13,6,c) & + \frac{7}{5}J'^{(2)}J^{(2)}.13(13,7,c) & \\
\mp \text{etc.} & \pm \text{etc.} & \mp \text{etc.} &
\end{array}$$

Man sieht hieraus, dass bloss zwei Reihen von J Functionen in Anwendung kommen, nemlich die, in welcher der untere Index $5\lambda'$, und die in welcher derselbe 5λ ist. Da nun hier

$$\log\lambda' = 8.66868 \quad \log\lambda = 8.96975$$

so bekommt man durch die Formeln des Art. 70 (I) leicht

$\log J^{(0)}_{5\lambda'} = 9.97607$, $\log\frac{1}{5}J^{(1)}_{5\lambda'} = 8.65683$, $\log\frac{1}{5}J^{(2)}_{5\lambda'} = 7.72742$, $\log\frac{1}{5}J^{(3)}_{5\lambda'} = 6.6199$

$\log\frac{1}{5}J^{(4)}_{5\lambda'} = 5.3867$, $\log\frac{1}{5}J^{(5)}_{5\lambda'} = 4.056$,

$\log J^{(0)}_{5\lambda} = 9.89985$, $\log J^{(1)}_{5\lambda} = 9.62061$, $\log J^{(2)}_{5\lambda} = 9.00464$, $\log J^{(3)}_{5\lambda} = 8.2043$

$\log J^{(4)}_{5\lambda} = 7.2757$, $\log J^{(5)}_{5\lambda} = 6.2486$, $\log J^{(6)}_{5\lambda} = 5.139$,

Die Multiplicationen, die die vorstehende Formel verlangt, sind nun mit wenig Mühe ausgeführt, das Resultat will ich für jeden Werth von i' anführen.

$i' = 3$,	-0.018	$+0.003$
4,	$+0.597$	-0.448
5,	-4.893	$+7.698$
6,	-2.653	$+8.046$
7,	-1.368	$+3.468$
8,	-0.356	$+0.511$
9,	-0.036	$+0.027$
10,	-0.001	0.000

$$(i)[11,5,c] = -8,728, \quad (i)[11,5,s] = +19,305$$

und hieraus findet sich durch die Formel (6)

$$n\delta z = +2''40 \sin\{(11-5\mu)\varepsilon - 5(c'-c\mu)\}$$
$$+5''31 \cos\{(11-5\mu)\varepsilon - 5(c'-c\mu)\}$$

welcher Werth aber noch einer Verbesserung bedarf, im Falle dass die angenommene osculirende mittlere Bewegung der Egeria von dem mittleren Werthe derselben merklich abweichen sollte; ein Umstand, der erst weiter unten untersucht werden kann.

25.

Wenden wir uns nun zu den übrigen Ungleichheiten, so ist zuerst die Verwandelung in die Form $\frac{\cos}{\sin}\{i\varepsilon - i'g'\}$ vorzunehmen, und die dazu erforderlichen J Functionen sind die folgenden,

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$y'^{-i'} - z'^{-i'}$	z'	z'^{0}	z'^{-1}	z'^{-2}	z'^{-3}
−1	7.036n	8.66868n	7.337n	8.66678	7.511
−2			8.96924n	7.9382n	8.96545
−3			7.513	9.1439n	8.2895n
−4				7.938	9.2665n

womit man erhält

$\varepsilon,\ g'$	$\left(\frac{a}{\varDelta}\right)$ cos	$\left(\frac{a}{\varDelta}\right)$ sin	$\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ cos	$\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ sin
0, 0	+0."14228		+0."34462	
1, 0	+0.01225	+0."00373	+0.10783	+0."03251
2, 0	+0.00035	+0.00080	+0.01073	+0.01429
3, 0	−0.00027	+0.00003	−0.00432	+0.00175
4, 0	—	—	−0.00215	−0.00080
−3, −1	+0.00005	+0.00001	+0.0020	+0.0001
−2, −1	+0.00036	+0.00008	+0.0053	+0.0024
−1, −1	+0.00094	+0.00044	−0.0015	+0.0055
0, −1	−0.00285	−0.00096	−0.0654	−0.0216
1, −1	−0.03562	−0.02412	−0.2189	−0.1493
2, −1	−0.00672	−0.00829	−0.0761	−0.0943
3, −1	−0.00023	−0.00167	−0.0061	−0.0290
4, −1	+0.00021	−0.00011	+0.0043	−0.0031
5, −1	+0.00005	+0.00005	+0.0019	+0.0016
−1, −2	−0.0002	−0.0002	−0.002	−0.004
0, −2	−0.0006	−0.0007	−0.003	−0.007
1, −2	−0.0010	−0.0003	+0.017	+0.026
2, −2	+0.0066	+0.0170	+0.064	+0.167
3, −2	+0.0006	+0.0075	+0.010	+0.107
4, −2	−0.0006	+0.0016	−0.012	+0.033
5, −2	−0.0003	+0.0001	−0.008	+0.003
0, −3			+0.001	+0.005
1, −3			−0.001	+0.010
2, −3			+0.002	−0.007
3, −3			+0.027	−0.109
4, −3			+0.041	−0.075
5, −3			+0.027	−0.022
6, −3			+0.009	−0.001

die mehr wie ausreichend sind.

26.

Den zweiten Theil der Störungsfunction findet man durch die dafür im §. 7 (I) gegebenen Formeln wie folgt:

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$\varepsilon,\ g'$	(H) cos	sin
−1, −1	+0.″00221	+0.″00053
0, −1	+0.01246	+0.00852
1, −1	−0.14907	−0.10089
−1, −2	+0.0004	+0.0001
0, −2	+0.0023	+0.0016
1, −2	−0.0278	−0.0188

und die Factoren, womit $\mu\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ multiplicirt werden muss, um $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ zu erhalten:

$$\alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2 = -\ (9.84230)\ +2(8.9288)\cos\varepsilon-2(7.255)\cos 2\varepsilon$$
$$-2(8.5132)\cos g'-2(6.880)\cos 2g'-2(5.548)\cos 3g'$$

$$\alpha\sin J\left(\frac{r'}{a'}\right)\sin(f'+\Pi') = \quad 2(8.4206)\sin g'+2(7.089)\sin 2g'+2(5.933)\sin 3g'$$
$$+\ (8.2937)\quad -2(8.8456)\cos g'-2(7.513)\cos 2g'-2(6.357)\cos 3g'$$

Hieraus entstand:

$\varepsilon,\ g'$	$a\Omega$ cos	$a\Omega$ sin	$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ cos	$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ sin	$a\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ sin	$a\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ cos
0, 0	+0.″1423		−0.″1717			+0.″0148
1, 0	+0.01225	+0.″00373	−0.02255	−0.″00927	+0.″00841	+0.02127
2, 0	+0.0004	+0.0008	+0.016	−0.0021	+0.0045	+0.0072
3, 0	−0.0003	0.0000	+0.019	−0.0004	+0.0015	+0.0008
−2, −1	+0.0004	+0.0001	−0.002	0.000		
−1, −1	−0.0013	−0.0001	−0.006	−0.003		
0, −1	−0.0153	−0.0095	−0.005	−0.007		
1, −1	+0.1135	+0.0768	+0.230	+0.156		
2, −1	−0.0067	−0.0083	+0.017	+0.025		
3, −1	−0.0002	−0.0017	−0.001	+0.005		
4, −1	+0.0002	−0.0001	−0.001	+0.001		
−1, −2	−0.0006	−0.0003	+0.001	+0.001		
0, −2	−0.0029	−0.0023	+0.002	+0.003		
1, −2	+0.0268	+0.0185	+0.029	+0.020		
2, −2	+0.0066	+0.0170	−0.023	−0.056		
3, −2	+0.0006	+0.0075	−0.003	−0.028		
4, −2	−0.0006	+0.0016	+0.004	−0.007		
5, −2	−0.0003	+0.0001	+0.002	+0.001		

Die periodischen Breitenstörungen habe ich weggelassen, da sie voraussichtlich sehr klein ausfallen würden, indem die der Länge kaum etwas Merkliches geben.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

27.

Um endlich die letzte Verwandelung auszuführen ist:

$$\log\left(J_{\lambda}^{(0)}-1\right)=7.939n;\ \log J_{\lambda}^{(1)}=8.9679;\ \log J_{\lambda}^{(2)}=7.637$$
$$\log\left(J_{2\lambda}^{(0)}-1\right)=8.538n;\ \log J_{2\lambda}^{(1)}=9.2632;\ \log J_{2\lambda}^{(2)}=8.235$$

und hieraus folgt:

	$(i)a\Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$	
$\varepsilon,\ \mu\varepsilon$	cos	sin	cos	sin	sin	cos
0, 0			−0″,1747			+0″,0148
1, 0	+0″,01225	+0″,00373	−0.02255	−0″,00927	+0″,00841	+0.02127
2, 0	+0.0008	+0.0016	+0.0016	−0.0021	+0.0045	+0.0072
3, 0	−0.0009	0.000	+0.0019	−0.0004	+0.0015	+0.0008
−2, −1	−0.0009	−0.0002	−0.001	0.000		
−1, −1	+0.0017	+0.0004	−0.005	−0.001		
0, −1	−0.0106	−0.0072	−0.027	−0.022		
1, −1	+0.1137	+0.0776	+0.226	+0.152		
2, −1	−0.0026	−0.0089	+0.038	+0.040		
3, −1	−0.0014	−0.0063	+0.002	+0.008		
4, −1	+0.0006	−0.0010	−0.001	+0.001		
−1, −2	+0.0011	+0.0006	+0.001	0.000		
0, −2	−0.0046	−0.0027	−0.003	−0.002		
1, −2	+0.0235	+0.0121	+0.032	+0.030		
2, −2	+0.0173	+0.0322	−0.016	−0.045		
3, −2	+0.0050	+0.0270	−0.008	−0.036		
4, −2	−0.0015	+0.0108	+0.003	−0.013		
5, −2	−0.0019	+0.0021	+0.003	0.000		

§. 3. Integration der Differentialgleichungen der Bewegung in einem gewissen Falle.

28.

Nehmen wir an, dass der störende Planet ein unterer ist, und lösen die Störungsfunction in eine, nach den Potenzen der Radien fortschreitende, unendliche Reihe auf, dann erhalten wir

$$\Omega=\mu\left\{-\frac{r}{r'^2}H+\frac{1}{r}+\frac{r'}{r^2}D_1+\frac{r'^2}{r^3}D_2+\text{etc.}\right\}$$

wo $D_1=H$ ist. Sondern wir hier die drei ersten Glieder ab, und setzen

$$\Omega_0=\mu\left\{\frac{1}{r}+\left(\frac{r'}{r^2}-\frac{r}{r'^2}\right)H\right\}$$

so wird der übrige Theil der Störungsfunction

$$\Omega_1=\mu\left\{\frac{r'^2}{r^3}D_2+\frac{r'^3}{r^4}D_3+\text{etc.}\right\}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

und bekommt daher dieselbe Form, wie in dem Falle, wo der störende Planet ein oberer ist. Wenn daher das Verhältniss von r' zu r der Einheit nicht zu nahe kommt, so kann die Entwickelung von Ω_1 eben so behandelt werden, wie hier im §. 1 für den Fall gezeigt wurde, wo der störende Planet ein oberer ist. Es kann dieses um so mehr geschehen, da ich in diesem Paragraphen zeigen werde, dass die Differentialgleichungen der Bewegung durch endliche Ausdrücke integrabel sind, wenn man den vorstehenden Ausdruck für Ω_0 darin statt Ω substituirt; ich werde indess in dieser Entwickelung nur auf die erste Potenz der störenden Kraft Rücksicht nehmen. In meiner Pariser Preisschrift habe ich diese Integration schon ausgeführt, hier werde ich sie aber auf ganz anderem und kürzerem Wege ausführen.

29.

Nehmen wir die Gleichung (25) (I) vor, und lassen daraus das letzte Glied weg, welches von der Ordnung des Quadrats der störenden Kraft ist, dann wird sie

$$(7) \quad \ldots \ldots \quad \frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3}\nu = V$$

wo

$$(8) \quad \ldots \quad V = 2\frac{k^2}{r^3}h\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt - \frac{h^2 e \sin f}{r}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) + \frac{k^2}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

ist. Erwägen wir nun, dass

$$H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$$

ist, wenn x, y, z und x', y', z' irgend welche rechtwinkliche Coordinaten der beiden Planeten bedeuten, so soll jetzt für Ω der obige Werth von Ω_0, nemlich

$$\Omega = \mu\left\{\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(xx' + yy' + zz')\right\}$$

in (8) substituirt werden. Nehmen wir von diesem Ausdruck von Ω die partiellen Differentialquotienten nach x, y und z, und setzen nach den Differentiationen $z = 0$, so ergiebt sich

$$\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) = \mu\left\{-\frac{X}{r^3} - 3\frac{X}{r^5}(Xx' + Yy') + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)x'\right\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dY}\right) = \mu\left\{-\frac{Y}{r^3} - 3\frac{Y}{r^5}(Xx' + Yy') + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)y'\right\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \mu\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)z'$$

wo X, Y und Z die idealen Coordinaten des gestörten Planeten sind

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Da nun allgemein

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = X\left(\frac{d\Omega}{dY}\right) - Y\left(\frac{d\Omega}{dX}\right)$$

ist, so wird hier

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \mu\left\{\frac{Xy' - Yx'}{r^3} - \frac{Xy' - Yx'}{r'^3}\right\}.$$

Da wir hier die elliptischen Werthe der Coordinaten substituiren dürfen, so haben wir

$$\frac{X}{r^3} = -\frac{d^2X}{k^2dt^2}\,;\quad \frac{Y}{r^3} = -\frac{d^2Y}{k^2dt^2}$$
$$\frac{x'}{r'^3} = -\frac{d^2x'}{k^2dt^2}\,;\quad \frac{y'}{r'^3} = -\frac{d^2y'}{k^2dt^2}$$

Eliminiren wir hiemit r^3 und r'^3 aus dem vorstehenden Ausdruck, so ergiebt sich

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \mu\,\frac{x'd^2Y - y'd^2X - Yd^2x' + Xd^2y'}{k^2dt^2}$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dt und integrirt, so bekommt man

$$\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt = \frac{6}{h} + \mu\,\frac{x'dY - y'dX - Ydx' + Xdy'}{k^2dt}$$

wo $\frac{6}{h}$ die willkührliche Constante ist.

30.

Da ferner allgemein

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = X\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) + Y\left(\frac{d\Omega}{dY}\right)$$

ist, so wird hier

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = -\frac{\mu}{r} - \mu\left\{2\,\frac{Xx' + Yy'}{r^3} + \frac{Xx' + Yy'}{r'^3}\right\}$$

Zufolge der Gleichung (11*) (I) ist

$$1 = \frac{h}{k^2dt}(XdY - YdX)$$

Multiplicirt man das zweite und dritte Glied des vorstehenden Ausdrucks mit diesem Werthe von Eins, so wird er

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = -\frac{\mu}{r} + 2\,\frac{\mu h}{k^2r^3dt}(x'XYdX - x'X^2dY + y'Y^2dX - y'XYdY)$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2r'^3dt}(x'XYdX - x'X^2dY + y'Y^2dX - y'XYdY)$$

welcher zwar mehr zusammengesetzt ist, wie der obige, sich aber besser zur Substitution in (8) eignet wie dieser. Da ferner

$$he\sin f = \frac{dr}{dt}$$
$$rdr = XdX + YdY$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden · SMWK · Sächsische Akademie der Wissenschaften

ist, so wird

$$\frac{h^2 e \sin f}{r} = h\frac{X}{r^2}\frac{dX}{dt} + h\frac{Y}{r^2}\frac{dY}{dt}$$

34.

Substituirt man nun die eben entwickelten Grössen in (8), so bekommt man nach einer leichten Zusammenziehung

$$\begin{aligned} V = (26-\mu)\frac{k^2}{r^3} &+ 3\,\frac{\mu h}{r^5 dt}(XdX + YdY)(x'Y - y'X) \\ &+ 2\,\frac{\mu h}{r^3 dt}(Xdy' - Ydx') + \frac{\mu h}{r'^3 dt}(y'dX - x'dY) \end{aligned}$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit X, und eliminirt wieder r^3 und r'^3 durch die oben angeführten Gleichungen der Bewegung im Kegelschnitt, so wird

$$\begin{aligned} VX = -(26-\mu)\frac{d^2X}{dt^2} &+ 3\,\frac{\mu h}{r^5 dt}(XdX + YdY)(x'Y - y'X)\,X \\ &- 2\,\frac{\mu h}{k^2 dt^3}(d^2Xdy' - d^2Ydx')\,X - \frac{\mu h}{k^2 dt^3}(d^2y'dX - d^2x'dY)\,X \end{aligned}$$

Da das zweite Glied dieses Ausdrucks durch partielle Integration

$$\begin{aligned} 3\int\frac{\mu h}{r^5}(XdX + YdY)(x'Y - y'X)\,X = \\ -\frac{\mu h}{r^3}(x'Y - y'X)\,X &+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(d^2Xdy' - d^2Ydx')\,X \\ + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(y'd^2X - x'd^2Y)\,dX &+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(y'dX - x'dY)\,d^2X \end{aligned}$$

giebt, so bekommen wir zuerst

$$\begin{aligned} \int VXdt = (\mu-26)\frac{dX}{dt} &+ \frac{\mu h}{r^3}(y'X - x'Y)\,X \\ &+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(dx'd^2Y - dy'd^2X)\,X + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(d^2x'dY - d^2y'dX)\,X \\ &+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(y'd^2X - x'd^2Y)\,dX + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}\int(y'dX - x'dY)\,d^2X \end{aligned}$$

Es ist aber ferner

$$\begin{aligned} \int(dx'd^2Y - dy'd^2X)\,X &= (dx'dY - dy'dX)X - \int(d^2x'dY - d^2y'dX)\,X \\ &\qquad - \int(dx'dY - dy'dX)\,dX; \\ \int(y'd^2X - x'd^2Y)\,dX &= (y'dX - x'dY)\,dX - \int(dy'dX - dx'dY)\,dX \\ &\qquad - \int(y'dX - x'dY)\,d^2X; \end{aligned}$$

Substituirt man diese, so bekommt man

$$\begin{aligned} \int VXdt = c + (\mu-26)\frac{dX}{dt} &+ \frac{\mu h}{r^3}(y'X - x'Y)\,X \\ &+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}(dx'dY - dy'dX)\,X + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}(y'dX - x'dY)\,dX \end{aligned}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

und ebenso ergiebt sich

$$\int VYdt = c' + (\mu - 2\sigma)\frac{dY}{dt} + \frac{\mu h}{r^3}(y'X - x'Y)\,Y$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2 dt^2}(dx'dY - dy'dX)\,Y + \frac{\mu h}{k^2 dt^2}(y'dX - x'dY)\,dY$$

wo c und c' die willkührlichen Constanten sind.

32.

Integriren wir nun die Gleichung (7) durch das Laplace'sche Verfahren, so bekommen wir zuerst

$$\frac{Xdv - vdX}{dt} = \int VXdt$$
$$\frac{Ydv - vdY}{dt} = \int VYdt$$

und wenn man hieraus dv eliminirt, und dabei auf die Gleichung

$$\frac{XdY - YdX}{dt} = \frac{k^2}{h}$$

Rücksicht nimmt,

$$v = \frac{h}{k^2}\,Y\int VXdt - \frac{h}{k^2}\,X\int VYdt$$

und nachdem die im vor. Art. ermittelten Werthe dieser Integrale substituirt worden sind,

$$v = c\frac{h}{k^2}\,Y - c'\frac{h}{k^2}\,X + 2\sigma - \mu + \frac{\mu h}{k^2}\,\frac{x'dY - y'dX}{dt}$$

33.

Wenden wir uns nun zur Gleichung (27) (I), die wenn man das Quadrat der störenden Kraft übergeht, die folgende ist,

$$\frac{d\delta z}{dt} = h\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt - 2v$$

Die im Vorhergehenden schon enthaltenen Entwickelungen der Glieder dieser Gleichung geben sogleich

$$\frac{d\delta z}{dt} = -2c\frac{h}{k^2}\,Y + 2c'\frac{h}{k^2}\,X + 2\mu - 3\sigma$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2 dt}(y'dX - x'dY + Xdy' - Ydx')$$

und wenn man integrirt,

$$\delta z = c'' - 2c\frac{h}{k^2}\int Ydt + 2c'\frac{h}{k^2}\int Xdt + (2\mu - 3\sigma)\,t$$
$$+ \frac{\mu h}{k^2}(y'X - x'Y)$$

wo c'' die willkührliche Constante ist, und die Grössen, die ich unter dem Integralzeichen stehen gelassen habe, leicht durch endliche Ausdrücke zu erhalten sind, deren Entwickelung aber hier überflüssig wäre.

34.

Die in den vorstehenden Integralen vorkommenden vier, durch die Integrationen eingeführten, Constanten kann man bestimmen wie man will, weil in den Differentialgleichungen nur ein Theil der Störungsfunction angewandt worden ist. Denn irgend welche Bestimmung dieser Constanten hat keine andere Wirkung, als dass sie die Werthe der analogen Constanten modificirt, die bei der Berücksichtigung des übrigen Theils der Störungsfunction eingeführt werden müssen und Grössen derselben Ordnung sind wie jene. Aus diesem Grunde werde ich die obigen Constanten so bestimmen, dass die Glieder, welche dieselbe Form haben, wie die aus der Bewegung im Kegelschnitt ohnehin entstehenden, in dem Ausdruck für $n\delta z$ verschwinden. In beiden Coordinaten δz und ν kann man nicht alle diese Glieder fortschaffen. Durch diese Bedingung wird

$$c=0\,;\ c'=0\,;\ c''=0\,;\ 2\mu-3\sigma=0$$

und wir erhalten die folgenden einfachen Ausdrücke

$$(9)\quad\ldots\quad\begin{cases} n\delta z = n\,\frac{\mu h}{k^2}\,(y'X-x'Y) \\ \nu = \frac{1}{3}\mu + \frac{\mu h}{k^2}\,\frac{x'dY-y'dX}{dt} = \frac{1}{3}\mu - \frac{d.n\delta z}{dg} \end{cases}$$

35.

Gehen wir zur dritten Coordinate u über, die wir hier in dem Sinne nehmen wollen, wie sie von Art. 26 (I) an eingeführt worden ist. Nemlich $u=\frac{r}{a^0}s$. Die Gleichung (28) (I) wird alsdann hier

$$a\,\frac{d^2u}{dt^2} + a\,\frac{k^2}{r^3}\,u = k^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

und geht nach der Substitution des Ausdrucks für $\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$, welcher im Art. 29 entwickelt wurde, in folgende über,

$$a\,\frac{d^2u}{dt^2} + a\,\frac{k^2}{r^3}\,u = \mu k^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)z'\cos i$$

Hieraus ergiebt sich auf dieselbe Art wie oben für ν,

$$\begin{aligned} au &= \mu h\cos i\ Y\!\int\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)z'X dt \\ &\quad -\mu h\cos i\ X\!\int\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right)z'Y dt \end{aligned}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Durch Anwendung der Gleichungen

$$\frac{d^2X}{k^2dt^2} = -\frac{X}{r^3}; \quad \frac{d^2Y}{k^2dt^2} = -\frac{Y}{r^3}; \quad \frac{d^2z'}{k^2dt^2} = -\frac{z'}{r'^3}$$

bekommt man aber hier

$$\int\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) z'Xdt = \frac{1}{k^2}\int\frac{Xd^2z' - z'd^2X}{dt} = \frac{Xdz' - z'dX}{k^2dt}$$

$$\int\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) z'Ydt = \frac{1}{k^2}\int\frac{Yd^2z' - z.d^2Y}{dt} = \frac{Ydz' - z'dY}{k^2dt}$$

wo ich die beiden willkührlichen Constanten sogleich gleich Null gesetzt habe. Substituirt man diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck für *au*, so wird

$$au = \mu z' \cos i \qquad (10)$$

welches auch ein sehr einfacher Ausdruck ist. Man sieht durch die vorstehende Analyse, dass die Constante σ nur auf das constante Glied im Ausdruck von ν Einfluss geäussert hat, und es ist leicht zu erkennen, dass dessen Einfluss sich nicht weiter erstrecken kann, in Bezug auf welche Glieder der Störungsfunction man auch die Integrationen ausdehnt, so wie dass diese Eigenschaft sich auch auf die im §. 3 (I) entwickelten Differentialgleichungen erstreckt. In meiner Methode hat diese Constante also keinen Einfluss auf die Glieder, die die Säcularänderungen enthalten, wie bei den Laplace'schen Gleichungen der Fall ist; eine Eigenschaft, auf welche ich schon früher eine besondere Gelegenheit hatte aufmerksam zu machen.

36.

Ich mache darauf aufmerksam, dass die Integrabilität unserer Differentialgleichungen auch dann noch statt findet, wenn man aus dem Ausdruck für Ω des Art. 29 das erste Glied weglässt, und werde um dieses zu zeigen dieses Glied allein aufnehmen. Setzt man demzufolge blos $\Omega = \frac{\mu}{r}$ in die Ausdrücke, so bekommt man zuerst

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = 0; \quad r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = -\frac{\mu}{r}; \quad \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = 0; \quad h\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt = \sigma';$$

und die Differentialgleichung für ν wird

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3}\nu = (2\sigma' - \mu)\frac{k^2}{r^3}$$

wie auch aus dem Vorhergehenden leicht zu erkennen ist. Nach der Ausführung der Integrationen werden wir daher jetzt bekommen

$$\delta z = 0; \quad \nu = \tfrac{1}{2}\mu; \quad u = 0$$

Für den Fall, wo

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\Omega = \mu\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(xx' + yy' + zz')$$

substituirt wird, ergiebt sich also

$$n\delta z = n\frac{\mu h}{k^2}(y'X - x'Y)$$

$$\nu = \frac{\mu h}{k^2}\frac{x'dY - y'dX}{dt}$$

$$au = \mu z' \cos i$$

Ich werde diese Ausdrücke weiter unten anwenden.

37.

Ich werde noch in die Ausdrücke (9) und (10) die Anomalien einführen, um zu zeigen, welche Form sie alsdann annehmen. Für die rechtwinklichen Coordinaten haben wir durch §. 4 (I) folgende Ausdrücke

$$X = r\cos(f + \Pi);\; x' = r'\cos(f' + \Pi')$$

$$Y = r\sin(f + \Pi);\; y' = r'\cos J\sin(f' + \Pi')$$

$$z' = -r'\sin J\sin(f' + \Pi')$$

Substituirt man diese in die erste (9), und erinnert sich, dass

$$h = \frac{k^2}{a^2 n\cos\varphi}$$

ist, so ergiebt sich sogleich, wenn man auch m' statt μ wieder einführt,

$$n\delta z = \frac{m'}{a^2\cos\varphi}rr'\left\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\sin(f' - f + \Pi' - \Pi) - \sin^2\tfrac{1}{2}J\sin(f' + f + \Pi' + \Pi)\right\}$$

Da ferner

$$\frac{d.r\cos f}{dg} = -\frac{a\sin f}{\cos\varphi};\quad \frac{d.r\sin f}{dg} = \frac{a(e + \cos f)}{\cos\varphi}$$

so giebt der vorstehende Ausdruck von $n\delta z$ in Folge der zweiten Gleichung (9)

$$\begin{aligned}\nu = \tfrac{1}{3}m' &+ \frac{m'}{a\cos^2\varphi}r'\left\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos(f' - f + \Pi' - \Pi) + \sin^2\tfrac{1}{2}J\cos(f' + f + \Pi' + \Pi)\right\}\\ &+ \frac{m'e}{a\cos^2\varphi}r'\left\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos(f' + \Pi' - \Pi) + \sin^2\tfrac{1}{2}J\cos(f' + \Pi' + \Pi)\right\}\end{aligned}$$

Der Ausdruck (10) giebt sogleich

$$au = -m'\cos i\sin J\, r'\sin(f' + \Pi')$$

Ich bemerke hiezu, dass dieses die Ausdrücke sind, wodurch die auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und des störenden Planeten bezogenen Coordinaten des gestörten Planeten auf den Mittelpunkt der Sonne reducirt werden.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

§. 4. Entwickelung und allgemeine Integration der Differentialgleichungen für die erste Potenz der störenden Massen.

38.

Es ist zuerst die Gleichung (59) (I), nemlich

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = Ma\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + Nar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

worin

$$M = \frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{-(3-\tfrac{3}{2}e^2) + 2e\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon$$
$$+ e^2\cos(\eta+\varepsilon) - 3e\cos\eta + (4-e^2)\cos(\eta-\varepsilon) - e\cos(\eta-2\varepsilon)\Big\}$$
$$N = \frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+ e^2\sin(\eta+\varepsilon) - e\sin\eta - (2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon) + e\sin(\eta-2\varepsilon)\Big\}$$

ist, in Verbindung mit der Form, die im Vorhergehenden den Reihenentwickelungen der Differentialquotienten der Störungsfunction gegeben worden ist, zu entwickeln und zu integriren. Diese Reihen sollen von nun an wie folgt bezeichnet werden,

$$(i)\; a\Omega = \Sigma\Sigma\, \text{б}(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\}$$
$$+ \Sigma\Sigma\, \text{б}(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\}$$

woraus

$$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = -\Sigma\Sigma\, \text{б}(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\}$$
$$+ \Sigma\Sigma\, \text{б}(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\}$$

folgt, und

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \Sigma\Sigma\, c(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\}$$
$$+ \Sigma\Sigma\, c(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\}$$

in welchen Ausdrücken die Summation in Bezug auf i sich von $-\infty$ bis $+\infty$, die in Bezug auf i' sich aber nur von 0 bis $+\infty$ erstreckt. Ich nehme ferner wie vorher an, dass statt des constanten Gliedes selbst in $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ der doppelte Betrag desselben angesetzt sei. In $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ ist kein constantes Glied vorhanden.

Da die vorzunehmende allgemeine Entwickelung und Integration sich am Einfachsten und Uebersichtlichsten durch Anwendung der imaginären Exponentialfunctionen ausführen lässt, so will ich diese einführen. Sei wie früher

$$y = h^{\varepsilon\sqrt{-1}}; \quad \pi = h^{-(c'-c\mu)\sqrt{-1}}$$

wo h die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist, dann wird

$$\frac{dy}{y} = d\varepsilon \sqrt{-1}, \quad \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = y\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\sqrt{-1}$$

und wir bekommen zuerst

$$ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{\sigma(i,i',c) - \sqrt{-1}\,.\,\sigma(i,i',s)\}\,\pi^{i'}\,y^{i-i'\mu}$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{c(i,i',c) - \sqrt{-1}\,.\,c(i,i',s)\}\,\pi^{i'}\,y^{i-i'\mu}$$

wo beide Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt werden müssen,

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \sigma(-i,-i',c) = -\,\sigma(i,i',c) \\ \sigma(-i,-i',s) = \sigma(i,i',s) \\ c(-i,-i',c) = c(i,i',c) \\ c(-i,-i',s) = -\,c(i,i',s) \end{cases}$$

und überdiess

$$\sigma(0,0,c) = \sigma(0,0,s) = c(0,0,s) = 0$$

ist.

39.

Setzen wir ferner

$$v = h^{\eta\sqrt{-1}}$$

und substituiren die Werthe

$$d\varepsilon = \frac{dy}{y\sqrt{-1}}, \quad \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = y\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\sqrt{-1}$$

$$2\cos\varepsilon = y + \frac{1}{y}, \quad 2\sqrt{-1}\,.\sin\varepsilon = y - \frac{1}{y}$$

$$2\cos 2\varepsilon = y^2 + \frac{1}{y^2}, \quad 2\sqrt{-1}\,.\sin 2\varepsilon = y^2 - \frac{1}{y^2}$$

$$2\cos\eta = v + \frac{1}{v}, \quad 2\sqrt{-1}\,.\sin\eta = v - \frac{1}{v}$$

$$2\cos(\eta-\varepsilon) = \frac{v}{y} + \frac{y}{v}, \quad 2\sqrt{-1}\,.\sin(\eta-\varepsilon) = \frac{v}{y} - \frac{y}{v}$$

$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

in den obigen Ausdruck für dW, so wird dieser

$$\begin{aligned} dW = \frac{dy}{y}\Big\{ & B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + B_1\frac{1}{y} + B_2\frac{1}{y^2} \\ & + \frac{1}{v}\left[A_{-1}\frac{1}{y} + A_0 + A_1 y + A_2 y^2\right] \\ & + v\left[A_{-1} y + A_0 + A_1\frac{1}{y} + A_2\frac{1}{y^2}\right]\Big\}\, ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \\ + \frac{dy}{y}\Big\{ & D_1 y + D_2 y^2 - D_1\frac{1}{y} - D_2\frac{1}{y^2} \\ & + \frac{1}{v}\left[C_{-1}\frac{1}{y} + C_0 + C_1 y + C_2 y^2\right] \\ & - v\left[C_{-1} y + C_0 + C_1\frac{1}{y} + C_2\frac{1}{y^2}\right]\Big\}\, ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \end{aligned}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

wo

$$\left.\begin{array}{l} A_{-1}=\frac{e^2}{2\cos^2\varphi},\ A_0=-\frac{3e}{2\cos^2\varphi},\ A_1=\frac{4-e^2}{2\cos^2\varphi},\ A_2=-\frac{e}{2\cos^2\varphi} \\ C_{-1}=\frac{e^2}{2\cos^2\varphi},\ C_0=-\frac{e}{2\cos^2\varphi},\ C_1=-\frac{2-e^2}{2\cos^2\varphi},\ C_2=\frac{e}{2\cos^2\varphi} \end{array}\right\} \quad (13)$$

$$B_0=-\frac{6-3e^2}{2\cos^2\varphi},\quad B_1=\frac{e}{\cos^2\varphi},\quad B_2=-\frac{e^2}{4\cos^2\varphi}$$

$$D_1=-\frac{e}{2\cos^2\varphi},\quad D_2=\frac{e^2}{4\cos^2\varphi}$$

ist. Substituirt man hierin die im vor. Art. gegebenen Reihenentwickelungen der Differentialquotienten der Störungsfunction nach y und r, so nimmt dW folgende Form an,

$$\begin{aligned} 2dW= & \frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\left\{F(i,i',c)+\frac{1}{v}G(i,i',c)+vH(i,i',c)\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \\ & -\sqrt{-1}.\frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\left\{F(i,i',s)+\frac{1}{v}G(i,i',s)+vH(i,i',s)\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \end{aligned} \quad (14)$$

wo beide Summen sich wieder von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken,

$$\begin{aligned} F(i,i',c)= & B_0\sigma(i,i',c)+B_1\sigma(i-1,i',c)+B_2\sigma(i-2,i',c)+B_1\sigma(i+1,i',c)+B_2\sigma(i+2,i',c) \\ & +D_1c(i-1,i',c)+D_2c(i-2,i',c)-D_1c(i+1,i',c)-D_2c(i+2,i',c) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} G(i,i',c)= & A_{-1}\sigma(i+1,i',c)+A_0\sigma(i,i',c)+A_1\sigma(i-1,i',c)+A_2\sigma(i-2,i',c) \\ & +C_{-1}c(i+1,i',c)+C_0c(i,i',c)+C_1c(i-1,i',c)+C_2c(i-2,i',c) \\ H(i,i',c)= & A_{-1}\sigma(i-1,i',c)+A_0\sigma(i,i',c)+A_1\sigma(i+1,i',c)+A_2\sigma(i+2,i',c) \\ & -C_{-1}c(i-1,i',c)-C_0c(i,i',c)-C_1c(i+1,i',c)-C_2c(i+2,i',c) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

ist, und $F(i,i',s)$, $G(i,i',s)$, $H(i,i',s)$ hervorgehen, wenn man in diesen Ausdrücken innerhalb der Klammern allenthalben c in s verwandelt. Die Gleichungen (12) geben in Verbindung mit den vorstehenden Ausdrücken leicht zu erkennen, dass

$$\left.\begin{aligned} F(-i,-i',c) &= -F(i,i',c) \\ G(-i,-i',c) &= -H(i,i',c) \\ F(-i,-i',s) &= F(i,i',s) \\ G(-i,-i',s) &= H(i,i',s) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

In Bezug auf die Anwendung der Ausdrücke (15) ist zu bemerken:

1) Dass man die Producte, aus welchen die H Coefficienten bestehen, nicht besonders zu berechnen braucht, sondern sie unmittelbar aus denen für die G Coefficienten erhält. Da man für jeden merklichen Werth von i' alle Glieder rechnen muss, in welchen für i merkliche Werthe entstehen, so ordnet man die Rechnung am Zweckmässigsten so, dass man unter den Ueberschriften

$$\text{etc.},\ i-2,i';\ i-1,i';\ i,i';\ i+1,i';\ i+2,i';\ \text{etc.}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

die Logarithmen von

$$\text{etc. } 6(i-2,i'); \; 6(i-1,i'); \; 6(i,i'); \; 6(i+1,i'); \; 6(i+2,i'); \text{ etc.}$$

*) hinschreibt, und dazu die Logarithmen von A_{-1}, A_0, A_1, A_2 addirt. Hierunter schreibt man in dieselben Columnen die Logarithmen von

$$\text{etc. } c(i-2,i'); \; c(i-1,i') \; c(i,i'); \; c(i+1,i'); \; c(i+2,i'); \text{ etc.}$$

wozu man die Logarithmen von C_{-1}, C_0, C_1, C_2 addirt. Die Zahlen der Logarithmen der Producte schreibt man hierauf nach Angabe des Ausdrucks (15) für $G(i,i',c)$ in die betreffenden Columnen und addirt sie. Um hieraus die H Coefficienten zu bekommen, braucht man nur die Producte mit A_{-1} und C_{-1} um zwei Columnen rechter Hand zu verschieben, die Producte mit A_0 und C_0 in denselben Columnen, in welchen sie sich schon befinden, wieder hinzuschreiben, die Producte mit A_1 und C_1 um zwei Columnen zur linken, die mit A_2 und C_2 um vier Columnen zur linken zu verschieben, und die algebraischen Zeichen der Producte mit den vier C Coefficienten umzuwechseln.

Hierauf giebt die Addition die H Coefficienten.

2) Den oben gegebenen Ausdruck für die F Coefficienten braucht man gar nicht anzuwenden, sondern kann diese auf eine einfachere Art berechnen. Die Ausdrücke (15) geben

$$\begin{aligned}
&F(i,i',c)+\tfrac{1}{2}\{G(i+1,i',c)+H(i-1,i',c)\}=\\
&(B_0+A_1)\,6(i,i',c)\\
&\quad+\{B_1+\tfrac{1}{2}A_2+\tfrac{1}{2}A_0\}\,6(i-1,i',c)+(B_2+\tfrac{1}{2}A_{-1})\,6(i-2,i',c)\\
&\quad+\{B_1+\tfrac{1}{2}A_2+\tfrac{1}{2}A_0\}\,6(i+1,i',c)+(B_2+\tfrac{1}{2}A_{-1})\,6(i+2,i',c)\\
&\quad+\{D_1+\tfrac{1}{2}C_2-\tfrac{1}{2}C_0\}\,c(i-1,i',c)+(D_2-\tfrac{1}{2}C_{-1})\,c(i-2,i',c)\\
&\quad-\{D_1+\tfrac{1}{2}C_2-\tfrac{1}{2}C_0\}\,c(i+1,i',c)-(D_2-\tfrac{1}{2}C_{-1})\,c(i+2,i',c)
\end{aligned}$$

substituirt man in die rechte Seite dieser Gleichung die oben gegebenen Ausdrücke der A, B, C, D Coefficienten, so wird

$$(17) \qquad F(i,i',c)=-\tfrac{1}{2}\{G(i+1,i',c)+H(i-1,i',c)\}-6(i,i',c)$$

und hieraus bekommt man durch Vertauschung des Index c mit s einen analogen Ausdruck für $F(i,i',s)$. Die Berechnung der F Coefficienten durch diese Ausdrücke ist am Einfachsten, und man würde also höchstens den oben bei (15) gegebenen zur Controle anwenden. Aber auch

*) Ich habe hier die Indices c und s weggelassen, um anzudeuten, dass das Schema sich auf beide Gattungen der durch c und s unterschiedenen Coefficienten bezieht.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

dieses ist nicht nothwendig, denn man kann die Controle auf kürzere Art erhalten. Man kann auf ähnliche Weise wie in mehreren der vorhergehenden Rechnungen verfahren. Man braucht nur neben der oben angeführten Reihe der b und c Coefficienten für jeden Werth von i' die Summe derselben einzuführen, und diese auch mit den A und C Coefficienten zu multipliciren. Die Summe der G und H Coefficienten muss hiemit übereinstimmen.

40.

Die oben ausgeführten Entwickelungen und beschriebenen Rechnungen gelten für jeden Werth von i', die Null eingeschlossen. Um im letztgenannten Falle sicher zu gehen pflege ich, obgleich man hier streng genommen die Coefficienten nicht braucht, in welchen i negativ ist, die folgenden Coefficientenreihen hinzuschreiben, und mit den A und C Coefficienten zu multipliciren,

$$\begin{array}{lllll} b(-2,0,c)\,; & b(-1,0,c)\,; & 0\,; & b(1,0,c)\,; & b(2,0,c)\,;\ \text{etc.} \\ c(-2,0,c)\,; & c(-1,0,c)\,; & c(0,0,c)\,; & c(1,0,c)\,; & c(2,0,c)\,;\ \text{etc.} \\ b(-2,0,s)\,; & b(-1,0,s)\,; & 0\,; & b(1,0,s)\,; & b(2,0,s)\,;\ \text{etc.} \\ c(-2,0,s)\,; & c(-1,0,s)\,; & 0\,; & c(1,0,s)\,; & c(2,0,s)\,;\ \text{etc.} \end{array}$$

worauf man die Ausdrücke (15) ohne Irrthum befürchten zu müssen anwenden kann. Die beiden ersten Coefficienten dieser vier Reihen müssen den Gleichungen (12) gemäss bestimmt werden, welche

$$\begin{array}{ll} b(-2,0,c)=-b(2,0,c)\,; & b(-1,0,c)=-b(1,0,c) \\ c(-2,0,c)=c(2,0,c)\,; & c(-1,0,c)=c(1,0,c) \\ b(-2,0,s)=b(2,0,s)\,; & b(-1,0,s)=b(1,0,s) \\ c(-2,0,s)=-c(2,0,s)\,; & c(-1,0,s)=-c(1,0,s) \end{array}$$

geben. Für $i'=0$ finden einige specielle Gleichungen zwischen den F, G und H Coefficienten statt, die angeführt zu werden verdienen. Es sind

$$\left.\begin{array}{l} F(0,0,c)=0 \\ G(0,0,c)=-H(0,0,c) \\ G(0,0,s)=H(0,0,s) \end{array}\right\} \quad (18)$$

die aus (16) hervorgehen, und ihren Grund darin haben, dass $dW\sqrt{-1}$ in der That eine reelle Grösse ist. Es ist aber ferner noch

$$F(0,0,s)=-G(1,0,s)=eH(0,0,s) \quad (19)$$

deren Richtigkeit man leicht erkennt, wenn man bedenkt, dass aus den (13)

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$e(A_{-1}+A_1)=-A_0-A_2=2B_1\,;\; A_{-1}=-2B_2=-eA_2$$
$$e(C_1-C_{-1})=C_0-C_2=2D_1\,;\; C_{-1}=2D_2=-eC_2$$

folgt, und diese so wie $i=0$, $i=1$, $i'=0$ und s statt c in die (15) setzt.

Wenn diese Entwickelungen ausgeführt sind, so ordnet man am Zweckmässigsten das Resultat derselben so, dass abtheilungsweise immer die Coefficienten

$$F(i,i',c)\,,\; F(i,i',s)$$
$$G(i+1,i',c),\; G(i+1,i',s)$$
$$H(i-1,i',c),\; H(i-1,i',s)$$

unmittelbar unter einander zu stehen kommen, denn es wird sich weiter unten zeigen, dass die Summe dieser drei Coefficienten gebraucht wird. Zugleich hat man hier die beiden G und H zusammen stehend, woraus der darüber stehende F Coefficient nach (17) berechnet werden muss.

41.

Integrirt man nun den Ausdruck (14), so ergiebt sich mit Vorbehalt der Hinzufügung der willkührlichen Constanten, die später berücksichtigt werden sollen,

$$\begin{aligned} 2W = &\;\Sigma\Sigma\left\{\frac{F(i,i',c)}{i-i'\mu}+\frac{1}{v}\,\frac{G(i,i',c)}{i-i'\mu}+v\,\frac{H(i,i',c)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \\ &-\sqrt{-1}\,.\,\Sigma\Sigma\left\{\frac{F(i,i',s)}{i-i'\mu}+\frac{1}{v}\,\frac{G(i,i',s)}{i-i'\mu}+v\,\frac{H(i,i',s)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}\end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} -2v\left(\frac{dW}{dv}\right)= &\;\Sigma\Sigma\left\{\frac{1}{v}\,\frac{G(i,i',c)}{i-i'\mu}-v\,\frac{H(i,i',c)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \\ &-\sqrt{-1}\,.\,\Sigma\Sigma\left\{\frac{1}{v}\,\frac{G(i,i',s)}{i-i'\mu}-v\,\frac{H(i,i',s)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}\end{aligned}$$

Da nun offenbar

$$\left(\overline{\frac{dW}{dv}}\right)dy=\left(\overline{\frac{dW}{d\tau}}\right)dt$$

ist, so wird zufolge der Gleichungen (38) (I)

$$2nd\delta z=\Sigma\Sigma\{P(i,i',c)-\sqrt{-1}\,.\,P(i,i',s)\}\,\pi^{i'}y^{i-i'\mu}\,.\,ndt$$
$$2dv=\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\{Q(i,i',c)-\sqrt{-1}\,.\,Q(i,i',s)\}\,\pi^{i'}y^{i-i'\mu}\,.\,\frac{dy}{y}$$

wenn

$$(20)\quad \begin{cases} P(i,i',c)=\dfrac{F(i,i',c)}{i-i'\mu}+\dfrac{G(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu}+\dfrac{H(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu} \\ Q(i,i',c)=\dfrac{G(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu}-\dfrac{H(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu}\end{cases}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

so wie ganz ähnliche Ausdrücke für $P(i,i',s)$ und $Q(i,i',s)$ angenommen werden. Da ferner

$$ndt = \frac{r}{a}\,d\varepsilon = \frac{dy}{y\sqrt{-1}}\left(1 - y\frac{e}{2} - \frac{1}{y}\frac{e}{2}\right)$$

ist, so geben die vorstehenden Ausdrücke für $d\delta z$ und $d\nu$ mit Vorbehalt der den Integrationen hinzuzufügenden willkührlichen Constanten

$$2n\delta z = \Sigma\Sigma\left\{\frac{P(i,i',c) - \frac{e}{2}[P(i+1,i',c) + P(i-1,i',c)]}{(i-i'\mu)\sqrt{-1}}\right.$$
$$\left.- \frac{P(i\,i',s) - \frac{e}{2}[P(i+1,i',s) + P(i-1,i',s)]}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

$$2\nu = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\left\{\frac{Q(i,i',c)}{i-i'\mu} - \sqrt{-1}\,.\,\frac{Q(i,i',s)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

Geht man nun zum Reellen über, und setzt

$$\left.\begin{aligned} R(i,i',c) &= \frac{P(i,i',c) - \frac{e}{2}P(i+1,i',c) - \frac{e}{2}P(i-1,i',c)}{i-i'\mu} \\ S(i,i',c) &= \frac{Q(i,i',c)}{i-i'\mu} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

sowie ähnliche Ausdrücke für $R(i,i',s)$ und $S(i,i',s)$, so wird

$$\left.\begin{aligned} n\delta z &= \Sigma\Sigma R(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c' - c\mu)\} \\ &- \Sigma\Sigma R(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c' - c\mu)\} \\ \nu &= \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma S(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c' - c\mu)\} \\ &+ \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma S(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c' - c\mu)\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (22)$$

wo die Summation in Bezug auf i' sich nur von 0 bis ∞ erstreckt. Nachdem man also durch Anwendung der Ausdrücke (15) und (17) die G, H und F Coefficienten berechnet hat, ergeben sich die Coefficienten der Störungen der mittleren Länge und des natürlichen Logarithmus des Radius Vectors durch die Ausdrücke (20) und (21). In allen diesen Rechnungen muss man die algebraischen Zeichen aller Grössen so lassen, wie sie sich von selbst ergeben, und nur bei den Coefficienten

$$R(i,i',s)$$

ist am Schlusse der ganzen Rechnung das Zeichen umzuwechseln, nemlich $+$ in $-$ und $-$ in $+$ zu verwandeln.

42.

Die vorgehends beschriebenen Rechnungen können mit Ausnahme des ersten Ausdrucks (21) auf folgende einfache Art controlirt werden. Zufolge der Gleichungen (70) (I) und (71) (I) ist, wenn man nur auf die erste Potenz der störenden Kraft Rücksicht nimmt,

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\int (\overline{dW}) = 2\nu + \frac{d\delta z}{dt}$$

Nun wird aber aus (14)

$$2(\overline{dW}) = \frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\{F(i,i',c) + G(i+1,i',c) + H(i-1,i',c)\}\,\pi^{i'}\,y^{i-i'\mu}$$
$$-\sqrt{-1}\,.\,\frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\{F(i,i',s) + G(i+1,i',s) + H(i-1,i',s)\}\,\pi^{i'}\,y^{i-i'\mu}$$

und aus dem vor. Art.

$$4\nu + 2\frac{d\delta z}{dt} = \Sigma\Sigma\{S(i,i',c) + P(i,i',c)\}\,\pi^{i'}\,y^{i-i'\mu}$$
$$-\sqrt{-1}\,.\,\Sigma\Sigma\{S(i,i',s) + P(i,i',s)\}\,\pi^{i'}\,y^{i-i'\mu}$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$(23) \qquad . \quad . \quad \Pi(i,i',c) = \frac{F(i,i',c) + G(i+1,i',c) + H(i-1,i',c)}{i-i'\mu}$$

und einen ähnlichen Ausdruck für $\Pi(i,i',s)$, so ergeben sich die beiden folgenden Bedingungsgleichungen

$$(24) \qquad . \quad . \quad \begin{cases} \Pi(i,i',c) = S(i,i',c) + P(i,i',c) \\ \Pi(i,i',s) = S(i,i',s) + P(i,i',s) \end{cases}$$

die zur Controle dienen. Die Berechnung der R aus den P durch die erste (21) wird hiedurch nicht controlirt, und also auf andere Art nachgesehen werden müssen, wenn man es für nöthig halten sollte. Da zufolge der oben angeführten Gleichungen

$$\delta\frac{h}{h_0} = -\frac{d\delta z}{dt} - 2\nu$$

ist, so geben die vorstehenden Entwickelungen, nach dem Uebergang zum Reellen sogleich

$$(25) \qquad \begin{cases} \delta\frac{h}{h_0} = -\Sigma\Sigma\,\Pi(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \\ \qquad\qquad - \Sigma\Sigma\,\Pi(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \end{cases}$$

welche Function zufolge des §. 5 (I) bei der Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen gebraucht wird.

43.

Zur Berechnung der Breitenstörungen erster Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte dient die Gleichung (61) (I), nemlich

$$\frac{dR}{\cos i d\varepsilon} = Qa^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

wo

$$Q = e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+\tfrac{1}{2}e^2\sin(\eta+\varepsilon) - \tfrac{3}{2}e\sin\eta + (1+\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\eta-\varepsilon) - \tfrac{1}{2}e\sin(\eta-2\varepsilon)$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

ist. Führt man auch hier die imaginären Exponentialfunctionen durch die oben dafür angeführten Formeln ein, so wird

$$\frac{dR}{\cos i} = \frac{dy}{y}\Big\{M_1 y + M_2 y^2 - M_1\frac{1}{y} - M_2\frac{1}{y^2} + \frac{1}{v}\Big[N_{-1}\frac{1}{y} + N_0 + N_1 y + N_2 y^2\Big] - v\Big[N_{-1}y + N_0 + N_1\frac{1}{y} + N_2\frac{1}{y^2}\Big]\Big\} a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

wo

$$M_1 = -\frac{e}{2},\ M_2 = \frac{e^2}{4}$$

$$N_{-1} = \frac{e^2}{4};\ N_0 = -\frac{3e}{4};\ N_1 = \frac{2+e^2}{4};\ N_2 = -\frac{e}{4} \qquad (26)$$

Durch die vorhergehende Entwickelung sei nun erhalten

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \Sigma\Sigma\, d(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\} + \Sigma\Sigma\, d(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\}$$

wo dieselben Bemerkungen anzuwenden sind, die im Art. 38 den Entwickelungscoefficienten von $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ hinzugefügt wurden. Durch die imaginären Exponentialfunctionen ausgedrückt wird nun

$$2a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \Sigma\Sigma\left\{-d(i,i',s)\sqrt{-1} + d(i,i',c)\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

wo

$$\begin{aligned} d(-i,-i',s) &= -\,d(i,i',s)\\ d(-i,-i',c) &= \,d(i,i',c)\end{aligned}$$

ist, und hiemit geht der vorstehende Ausdruck für dR über in

$$2\frac{dR}{\cos i} = -\sqrt{-1}.\frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\left\{T(i,i',s) + \frac{1}{v}U(i,i',s) + vV(i,i',s)\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} + \frac{dy}{y}\Sigma\Sigma\left\{T(i,i',c) + \frac{1}{v}U(i,i',c) + vV(i,i',c)\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu} \qquad (27)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} T(i,i',s) &= M_1\, d(i-1,i',s) + M_2 d(i-2,i',s) - M_1 d(i+1,i',s) - M_2 d(i+2,i',s)\\ U(i,i',s) &= N_{-1}d(i+1,i',s) + N_0\, d(i,i',s) + N_1 d(i-1,i',s) + N_2 d(i-2,i',s)\\ V(i,i',s) &= -N_{-1}d(i-1,i',s) - N_0\, d(i,i',s) - N_1 d(i+1,i',s) - N_2 d(i+2,i',s)\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

ist, und dieselben Gleichungen für $T(i,i',c)$, $U(i,i',c)$ und $V(i,i',c)$ gelten, wenn man allenthalben darin c statt s schreibt. Die vorstehenden Ausdrücke geben leicht zu erkennen, dass

$$\left.\begin{aligned} T(-i,-i',s) &= T(i,i',s)\\ U(-i,-i',s) &= V(i,i',s)\\ T(-i,-i',c) &= -T(i,i',c)\\ U(-i,-i',c) &= -V(i,i',c)\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ . \quad (29)$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

und ausserdem die Gleichungen

$$T(0,0,c) = 0$$

(30) . . . $-\tfrac{1}{2}T'(0,0,s) = U(1,0,s) = eV(0,0,s)$

statt finden. Durch Hülfe der oben angegebenen Ausdrücke der M und N Coefficienten folgt ferner, dass

(31) . . . $\begin{cases} T(i,i',s) = -U(i+1,i',s) - V(i-1,i',s) \\ T(i,i',c) = -U(i+1,i',c) - V(i-1,i',c) \end{cases}$

ist, welche Gleichungen auch aus andern Gründen hergeleitet werden können. Es geht hieraus hervor, dass man die T Coefficienten nicht direct zu berechnen braucht, sondern sie am Einfachsten durch Anwendung der vorstehenden Ausdrücke erhält, nachdem man die U und V Coefficienten durch die (28) berechnet hat. Die Controle für diese Berechnung der letzteren erhält man wieder durch Einführung der Summen der d Coefficienten, und überhaupt gelten für die Berechnung der U und V Coefficienten dieselben Bemerkungen, die in den Art. 39 und 40 in Bezug auf die G und H Coefficienten gemacht worden sind, weshalb ich darauf verweise.

44.

Integrirt man nun den eben entwickelten Ausdruck für dR, und setzt

(32) . . . $Y(i,i',s) = \frac{T(i,i',s)}{i-i'\mu} + \frac{U(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu}$

so wie die analoge Gleichung für $Y(i,i',c)$, so wird mit Vorbehalt der hinzuzufügenden, willkührlichen Constante

$$2\frac{u}{\cos i} = \Sigma\Sigma\left\{-Y(i,i',s)\sqrt{-1} + Y(i,i',c)\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

oder nach dem Uebergange zum Reellen

(33) . . $\begin{cases} \frac{u}{\cos i} = \Sigma\Sigma\, Y(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \\ \quad + \Sigma\Sigma\, Y(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)\} \end{cases}$

wo wieder die Summation in Bezug auf i' nur von 0 bis ∞ ausgedehnt werden darf. Ausserdem giebt die Anwendung des im Art. 22 (I) bewiesenen Satzes einen zweiten Ausdruck für u. Dieser Satz giebt im vorliegenden Falle die Gleichung

$$u = \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dy$$

und da aus (27)

$$\frac{2R}{\cos i} = -\sqrt{-1}\,\Sigma\Sigma\left\{\frac{T(i,i',s)}{i-i'\mu} + \frac{1}{v}\,\frac{U(i,i',s)}{i-i'\mu} + v\,\frac{V(i,i',s)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$
$$+\,\Sigma\Sigma\left\{\frac{T(i,i',c)}{i-i'\mu} + \frac{1}{v}\,\frac{U(i,i',c)}{i-i'\mu} + v\,\frac{V(i,i',c)}{i-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

folgt, so wird auch

$$\frac{2u}{\cos i} = -\sqrt{-1}\int\frac{dy}{y}\,\Sigma\Sigma\left\{-\frac{U(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$
$$+\int\frac{dy}{y}\,\Sigma\Sigma\left\{-\frac{U(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu}\right\}\pi^{i'}y^{i-i'\mu}$$

Führt man diese Integration aus und setzt

$$W(i,i',s) = -\frac{U(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu} \quad \ldots \quad (34)$$

sowie eine ähnliche Gleichung für $W(i,i',c)$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} Y(i,i',s) &= \frac{W(i,i',s)}{i-i'\mu} \\ Y(i,i',c) &= \frac{W(i,i',c)}{i-i'\mu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (35)$$

Man kann diese Ausdrücke ausschliesslich anwenden, um die Y Coefficienten zu berechnen, man kann sie aber auch anwenden, um die nach (32) geführte Rechnung zu controliren.

45.

Nachdem diese Integrationen ausgeführt worden sind, kann leicht bewiesen werden, dass der Ausdruck (6), welcher im Art. 24 zur Berechnung der vom Mars in der Länge der Egeria bewirkten Ungleichheit langer Periode angewandt wurde, in der That alle Glieder enthält, die mit dem Quadrat des kleinen Divisors behaftet sind, wie dort behauptet wurde.

Substituirt man die im Art. 39 gegebenen Ausdrücke der F, G und H Coefficienten in den Ausdruck (20) der P Coefficienten, und diesen wieder in den Ausdruck (21) der R Coefficienten, so bekommt man leicht, und indem man zur Abkürzung p statt $i - i'\mu$ schreibt, und die Indices c und s weglässt, weil die Ausdrücke unverändert für beide gelten,

$$
\begin{aligned}
R(i,i') = {} & \frac{\sigma(i,i')}{p}\left\{\frac{B_0}{p}+\frac{A_1}{p+1}+\frac{A_1}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_1}{p+1}+\frac{A_2}{p+2}+\frac{2A_0}{p}+\frac{B_1}{p-1}+\frac{A_2}{p-2}\right]\right\} \\
& +\frac{\sigma(i+1,i')}{p}\left\{\frac{B_1}{p}+\frac{A_0}{p+1}+\frac{A_2}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_0}{p+1}+\frac{A_1}{p+2}+\frac{A_1+A_{-1}}{p}+\frac{B_2}{p-1}\right]\right\} \\
& +\frac{\sigma(i+2,i')}{p}\left\{\frac{B_2}{p}+\frac{A_{-1}}{p+1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_1}{p+1}+\frac{A_0}{p+2}+\frac{A_2}{p}\right]\right\}-\frac{\sigma(i+3,i')}{p}\frac{e}{2}\left[\frac{B_2}{p+1}+\frac{A_{-1}}{p+2}\right] \\
& +\frac{\sigma(i-1,i')}{p}\left\{\frac{B_1}{p}+\frac{A_2}{p+1}+\frac{A_0}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_0}{p-1}+\frac{A_1}{p-2}+\frac{A_1+A_{-1}}{p}+\frac{B_2}{p+1}\right]\right\} \\
& +\frac{\sigma(i-2,i')}{p}\left\{\frac{B_2}{p}+\frac{A_{-1}}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{B_1}{p-1}+\frac{A_0}{p-2}+\frac{A_2}{p}\right]\right\}-\frac{\sigma(i-3,i')}{p}\frac{e}{2}\left[\frac{B_2}{p-1}+\frac{A_{-1}}{p-2}\right] \\
& +\frac{c(i,i')}{p}\left\{\frac{C_1}{p+1}-\frac{C_1}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{D_1}{p+1}+\frac{C_2}{p+2}-\frac{D_1}{p-1}-\frac{C_2}{p-2}\right]\right\} \\
& +\frac{c(i+1,i')}{p}\left\{-\frac{D_1}{p}+\frac{C_0}{p+1}-\frac{C_2}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{C_1}{p+2}+\frac{C_{-1}-C_1}{p}-\frac{D_2}{p-1}\right]\right\} \\
& +\frac{c(i+2,i')}{p}\left\{-\frac{D_2}{p}+\frac{C_{-1}}{p+1}-\frac{e}{2}\left[\frac{C_0}{p+2}-\frac{D_1}{p+1}-\frac{C_2}{p}\right]\right\}+\frac{c(i+3,i')}{p}\frac{e}{2}\left[\frac{D_2}{p+1}-\frac{C_{-1}}{p+2}\right] \\
& +\frac{c(i-1,i')}{p}\left\{\frac{D_1}{p}+\frac{C_2}{p+1}-\frac{C_0}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{D_2}{p+1}+\frac{C_1-C_{-1}}{p}-\frac{C_1}{p-2}\right]\right\} \\
& +\frac{c(i-2,i')}{p}\left\{\frac{D_2}{p}-\frac{C_{-1}}{p-1}-\frac{e}{2}\left[\frac{D_1}{p-1}+\frac{C_2}{p}-\frac{C_0}{p-2}\right]\right\}-\frac{c(i-3,i')}{p}\frac{e}{2}\left[\frac{D_2}{p-1}-\frac{C_{-1}}{p-2}\right]
\end{aligned}
$$

Substituirt man die Ausdrücke der A, B, C und D Coefficienten in diesen Ausdruck, und löst die zusammengesetzten Brüche in ihre Partialbrüche auf, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
R(i,i') = {} & \frac{\sigma(i,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{3}{p^2}\cos^2\varphi-\frac{2-e^2}{p+1}+\frac{2-e^2}{p-1}-\frac{e}{8(p+2)}+\frac{e}{8(p-2)}\right\} \\
& +\frac{\sigma(i+1,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{3e}{4p}+\frac{3e^3}{4(p+1)}-\frac{4e-e^3}{8(p-1)}+\frac{4e-e^3}{8(p+2)}\right\} \\
& +\frac{\sigma(i+2,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{3e^2}{8p}-\frac{3e^2}{8(p+2)}\right\}+\frac{\sigma(i+3,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{e^3}{8(p+1)}+\frac{e^3}{8(p+2)}\right\} \\
& +\frac{\sigma(i-1,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{3e^3}{4p}-\frac{3e^3}{4(p-1)}+\frac{4e-e^3}{8(p+1)}-\frac{4e-e^3}{8(p-2)}\right\} \\
& +\frac{\sigma(i-2,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{3e^2}{8p}+\frac{3e^2}{8(p-2)}\right\}+\frac{\sigma(i-3,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{e^3}{8(p-1)}-\frac{e^3}{8(p-2)}\right\} \\
& +\frac{c(i,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{8-5e^2}{4p}+\frac{4-3e^2}{4(p+1)}+\frac{4-3e^2}{4(p-1)}+\frac{e^2}{8(p+2)}+\frac{e^2}{8(p-2)}\right\} \\
& +\frac{c(i+1,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{e-e^3}{4p}+\frac{e}{2(p+1)}-\frac{4e-e^3}{8(p-1)}-\frac{2e-e^3}{8(p+2)}\right\} \\
& +\frac{c(i+2,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{3e^2}{8p}-\frac{e^2}{4(p+1)}-\frac{e^2}{8(p+2)}\right\}+\frac{c(i+3,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{e^3}{8(p+1)}+\frac{e^3}{8(p+2)}\right\} \\
& +\frac{c(i-1,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{e-e^3}{4p}+\frac{e}{2(p-1)}-\frac{4e-e^3}{8(p+1)}-\frac{2e-e^3}{8(p-2)}\right\} \\
& +\frac{c(i-2,i')}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{3e^2}{8p}-\frac{e^2}{4(p-1)}-\frac{e^2}{8(p-2)}\right\}+\frac{c(i-3,i')}{\cos^2\varphi}\left\{-\frac{e^3}{8(p-1)}+\frac{e^3}{8(p-2)}\right\}
\end{aligned}
$$

Zieht man hier die Glieder aus, die den Divisor im Quadrat enthalten, so wird

$$R(i,i') = -\frac{3\sigma(i,i')}{p^2}$$

und es ist leicht ohne weitere Entwickelungen zu erkennen, dass die

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Ausdrücke für $S(i,i')$ und $Y(i,i')$ gar keine Glieder enthalten, in welchen das Quadrat eines Divisors vorkäme. Substituirt man den vorstehenden Werth von $R(i,i')$ in den ersten Ausdruck (22), specialisirt in Bezug auf das im §. 2 betrachtete Argument, und erwägt, dass dort die Bezeichnungen $(i)[11,5,c]$ und $(i)[11,5,s]$ dasselbe bedeuten, was hier $6(11,5,c)$ und $6(11,5,s)$, so kommt man auf die dort angewandte Formel (6). W. z. b. w.

§. 5. Integration der Differentialgleichungen für den Fall $i'=0$.

Bestimmung der willkührlichen Constanten in zwei verschiedenen Fällen.

46.

Die im vor. §. ausgeführten Entwickelungen der Differentialgleichungen sind zwar in allen Fällen gültig, die Integrationen aber nicht, indem sie für einige der zu $i'=0$ gehörigen Glieder eine Ausnahme erleiden. In den Ausdrücken (20), (21), (23), (32) und (35), durch welche die Integrationen ausgeführt werden, kommen die Divisoren $i-i'\mu$, $i+1-i'\mu$ und $i-1-i'\mu$ vor, wenn also nicht nur $i'=0$, sondern auch i entweder $=0$, oder $=\pm 1$ ist, so werden einige von diesen Divisoren Null, wodurch angezeigt wird, dass die Integration in diesen Fällen anders ausgeführt werden muss. Diese Ausnahmefälle sollen jetzt betrachtet werden, aber anstatt die Entwickelungen blos auf diese Glieder zu beschränken, werde ich sie des Zusammenhangs wegen auf alle zu $i'=0$ gehörigen Glieder ausdehnen.

Setzen wir $i'=0$ in (14), schreiben die ersten Glieder vollständig aus, und lassen der Kürze wegen hier und im Folgenden den zweiten Index, welcher die Null ist, weg, so wird

$$\begin{aligned}2dW=\frac{dy}{y}\Big\{&-F(0,s)\sqrt{-1}+\left[G(0,c)-G(0,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{v}+\left[H(0,c)-H(0,s)\sqrt{-1}\right]v\\&+\left[F(1,c)-F(1,s)\sqrt{-1}\right]y+\left[G(1,c)-G(1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{y}{v}+\left[H(1,c)-H(1,s)\sqrt{-1}\right]vy\\&+\left[F(-1,c)-F(-1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{y}+\left[G(-1,c)-G(-1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{vy}+\left[H(-1,c)-H(-1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{v}{y}\\&+\left[F(2,c)-F(2,s)\sqrt{-1}\right]y^2+\left[G(2,c)-G(2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{y^2}{v}+\left[H(2,c)-H(2,s)\sqrt{-1}\right]vy^2\\&+\left[F(-2,c)-F(-2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{y^2}+\left[G(-2,c)-G(-2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{vy^2}+\left[H(-2,c)-H(-2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{v}{y^2}\\&+\text{etc.}\Big\}\end{aligned}$$

Geht man hievon zum Reellen über, so wird in Folge der Gleichungen

(16) und (19)

$$
\begin{array}{lll}
\frac{dW}{d\varepsilon} = & & \frac{e}{2} H(0,s) \\
& -G(1,c)\sin(-\eta+\varepsilon) & +G(1,s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& -F(1,c)\sin\varepsilon & +F(1,s)\cos\varepsilon \\
& -G(2,c)\sin(-\eta+2\varepsilon) & +G(2,s)\cos(-\eta+2\varepsilon) \\
& -H(0,c)\sin\eta & +H(0,s)\cos\eta \\
& -F(2,c)\sin 2\varepsilon & +F(2,s)\cos 2\varepsilon \\
& -G(3,c)\sin(-\eta+3\varepsilon) & +G(3,s)\cos(-\eta+3\varepsilon) \\
& -H(1,c)\sin(\eta+\varepsilon) & +H(1,s)\cos(\eta+\varepsilon) \\
& -\text{etc.} & +\text{etc.}
\end{array}
$$

47.

Um die Form der willkührlichen Constante anzugeben, die dem Integral des eben entwickelten Differentials hinzugefügt werden muss, ist der zu Anfang des Art. 38 angeführte endliche Ausdruck von dW zu betrachten. Man sieht leicht, dass die darin befindlichen Functionen der Zeit auf drei verschiedene Arten vorkommen; die eine enthält kein η, eine andere ist mit $\cos\eta$ multiplicirt, und noch eine andere mit $\sin\eta$. Hieraus, welches man auch aus dem vorstehenden Differential erkennen kann, folgt, dass man dieser Constante die folgende Form geben muss,

$$k + k_1\cos\eta + k_2\sin\eta$$

wo k, k_1 und k_2 drei willkührliche Constanten sind. Integrirt man daher den vorstehenden Ausdruck für dW, nachdem er mit $d\varepsilon$ multiplicirt worden ist, so erhält man

$$
\begin{array}{lll}
W = & k & +\frac{e}{2}H(0,s)\,\varepsilon \\
& +\ G(1,c)\cos(-\eta+\varepsilon) & +\ G(1,s)\sin(-\eta+\varepsilon) \\
& +\ k_1\cos\eta & +\ k_2\sin\eta \\
& +\ F(1,c)\cos\varepsilon & +\ F(1,s)\sin\varepsilon \\
& +\frac{1}{2}G(2,c)\cos(-\eta+2\varepsilon) & +\frac{1}{2}G(2,s)\sin(-\eta+2\varepsilon) \\
& +\ H(0,s)\,\varepsilon\cos\eta & -\ H(0,c)\,\varepsilon\sin\eta \\
& +\frac{1}{2}F(2,c)\cos 2\varepsilon & +\frac{1}{2}F(2,s)\sin 2\varepsilon \\
& +\frac{1}{3}G(3,c)\cos(-\eta+3\varepsilon) & +\frac{1}{3}G(3,s)\sin(-\eta+3\varepsilon) \\
& +\ H(1,c)\cos(\eta+\varepsilon) & +\ H(1,s)\sin(\eta+\varepsilon) \\
& +\ \text{etc.} & +\ \text{etc.}
\end{array}
$$

und hieraus durch die Differentiation nach η

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = \; & G(1,c)\sin(-\eta+\varepsilon) && - G(1,s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& - k_1 \sin\eta && + k_2 \cos\eta \\
& + \tfrac{1}{2} G(2,c)\sin(-\eta+2\varepsilon) && - \tfrac{1}{2} G(2,s)\cos(-\eta+2\varepsilon) \\
& - H(0,s)\,\varepsilon \sin\eta && - H(0,c)\,\varepsilon\cos\eta \\
& + \tfrac{1}{3} G(3,c)\sin(-\eta+3\varepsilon) && - \tfrac{1}{3} G(3,s)\cos(-\eta+3\varepsilon) \\
& - H(1,c)\sin(\eta+\varepsilon) && + H(1,s)\cos(\eta+\varepsilon) \\
& + \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Verwandelt man in diesen beiden Ausdrücken η in ε, so bekommt man,

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} = \; & 1 + k + P(0,c) && + \frac{e}{2} H(0,s)\,\varepsilon \\
& + [P(1,c) + k_1]\cos\varepsilon && + [P(1,s) + k_2]\sin\varepsilon \\
& + H(0,s)\,\varepsilon\cos\varepsilon && - H(0,c)\,\varepsilon\sin\varepsilon \\
& + P(2,c)\cos 2\varepsilon && + P(2,s)\sin 2\varepsilon \\
& + P(3,c)\cos 3\varepsilon && + P(3,s)\sin 3\varepsilon \\
& + \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\frac{dv}{d\varepsilon} = & - e H(0,s) \\
& - [Q(1,c) - k_1]\sin\varepsilon && + [Q(1,s) - k_2]\cos\varepsilon \\
& + H(0,s)\,\varepsilon\sin\varepsilon && + H(0,c)\,\varepsilon\cos\varepsilon \\
& - Q(2,c)\sin 2\varepsilon && + Q(2,s)\cos 2\varepsilon \\
& - Q(3,c)\sin 3\varepsilon && + Q(3,s)\cos 3\varepsilon \\
& - \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

wo den Ausdrücken (20) analog

$$
\begin{aligned}
P(0,c) &= G(1,c) \\
P(1,c) &= F(1,c) + \tfrac{1}{2} G(2,c) \\
P(2,c) &= \tfrac{1}{2} F(2,c) + \tfrac{1}{3} G(3,c) + H(1,c) \\
P(3,c) &= \tfrac{1}{3} F(3,c) + \tfrac{1}{4} G(4,c) + \tfrac{1}{2} H(2,c) \\
& \text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
P(1,s) &= F(1,s) + \tfrac{1}{2} G(2,s) \\
P(2,s) &= \tfrac{1}{2} F(2,s) + \tfrac{1}{3} G(3,s) + H(1,s) \\
P(3,s) &= \tfrac{1}{3} F(3,s) + \tfrac{1}{4} G(4,s) + \tfrac{1}{2} H(2,s) \\
& \text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
Q(1,c) &= \tfrac{1}{2} G(2,c) \\
Q(2,c) &= \tfrac{1}{3} G(3,c) - H(1,c) \\
Q(3,c) &= \tfrac{1}{4} G(4,c) - \tfrac{1}{2} H(2,c) \\
& \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$Q(1,s) = \tfrac{1}{2}G(2,s)$$
$$Q(2,s) = \tfrac{1}{3}G(3,s) - \quad H(1,s)$$
$$Q(3,s) = \tfrac{1}{4}G(4,s) - \tfrac{1}{2}H(2,s)$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Multipliciren wir den ersten dieser Ausdrücke mit

$$ndt = (1 - e\cos\varepsilon)\, d\varepsilon$$

den zweiten mit $d\varepsilon$ und integriren, so wird

$$\begin{aligned}
nz = c &+ \left\{1 + R(0,c) + k - \tfrac{e}{2}k_1\right\}\varepsilon \\
&+ \left\{R(1,c) - H(0,c) + k_1 - e(1+k)\right\}\sin\varepsilon - \left\{R(1,s) - \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0,s) + k_2\right\}\cos\varepsilon \\
&+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0,s)\,\varepsilon\sin\varepsilon \qquad + H(0,c)\,\varepsilon\cos\varepsilon \\
&+ \left\{R(2,c) + \tfrac{e}{8}H(0,c) - \tfrac{e}{4}k_1\right\}\sin 2\varepsilon - \left\{R(2,s) + \tfrac{e}{8}H(0,s) - \tfrac{e}{4}k_2\right\}\cos 2\varepsilon \\
&- \tfrac{e}{4}H(0,s)\,\varepsilon\sin 2\varepsilon \qquad - \tfrac{e}{4}H(0,c)\,\varepsilon\cos 2\varepsilon \\
&+ R(3,c)\sin 3\varepsilon \qquad - R(3,s)\cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad - \text{etc.} \\
&\pm \Sigma R\left(i, i', {}^{c}_{s}\right) {}^{\sin}_{\cos}\left\{(ci - i'\mu)\,\varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\nu = 2C &- eH(0,s)\,\varepsilon \\
&+ \{Q(1,c) + H(0,c) - k_1\}\cos\varepsilon + \{Q(1,s) + H(0,s) - k_2\}\sin\varepsilon \\
&- H(0,s)\,\varepsilon\cos\varepsilon \qquad - H(0,c)\,\varepsilon\sin\varepsilon \\
&+ \tfrac{1}{2}Q(2,c)\cos 2\varepsilon \qquad + \tfrac{1}{2}Q(2,s)\sin 2\varepsilon \\
&+ \tfrac{1}{3}Q(3,c)\cos 3\varepsilon \qquad + \tfrac{1}{3}Q(3,s)\sin 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.} \\
&+ \Sigma S\left(i, i', {}^{c}_{s}\right) {}^{\cos}_{\sin}\left\{(ci - i'\mu)\,\varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

wo dem ersten Ausdruck (21) analog

$$\begin{aligned}
R(0,c) &= P(0,c) - \tfrac{e}{2}P(1,c) \\
R(1,c) &= P(1,c) - e\,P(0,c) - \tfrac{e}{2}P(2,c) \\
R(2,c) &= \tfrac{1}{2}\left\{P(2,c) - \tfrac{e}{2}P(1,c) - \tfrac{e}{2}P(3,c)\right\} \\
R(3,c) &= \tfrac{1}{3}\left\{P(3,c) - \tfrac{e}{2}P(2,c) - \tfrac{e}{2}P(4,c)\right\} \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
R(1,s) &= P(1,s) - \tfrac{e}{2}P(2,s) \\
R(2,s) &= \tfrac{1}{2}\left\{P(2,s) - \tfrac{e}{2}P(1,s) - \tfrac{e}{2}P(3,s)\right\} \\
R(3,s) &= \tfrac{1}{3}\left\{P(3,s) - \tfrac{e}{2}P(2,s) - \tfrac{e}{2}P(4,s)\right\} \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Diese sind die vollständigen Ausdrücke von nz und ν; c und C sind die den Integralen hinzugefügten willkührlichen Constanten, von welchen c die mittlere Anomalie für $t = 0$ bedeutet, und C eine von den Constanten k und k_1 abhängige Constante ist, die weiter unten bestimmt werden wird.

48.

Vermittelst der Gleichung

$$nt + c = \varepsilon - e \sin\varepsilon$$

kann der in den eben entwickelten Ausdrücken ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen vorkommende Bogen ε eliminirt und durch nt ersetzt werden, und man darf bei dieser Elimination in derselben c übergehen, da die daraus entstehenden Glieder sich mit den willkührlichen Constanten vereinigen. Eliminirt man daher den Bogen ε, wo er ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen vorkommt, durch die Gleichung

$$\varepsilon = nt + e \sin\varepsilon$$

und lässt auch die hiebei entstehenden, sich mit den willkührlichen Constanten vereinigenden Glieder weg, oder schreibt mit andern Worten

$$c \text{ für } c + \tfrac{e}{2}\left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0,s)$$

$$\text{und } C \text{ für } C + \tfrac{e}{4} H(0,c)$$

*) so erhält man

$$\begin{aligned}
nz = c &+ \left\{1 + R(0,c) + k - \tfrac{e}{2} k_1\right\} nt \\
&+ \left\{R(1,c) + eR(0,c) - \left(1 - \tfrac{e^2}{8}\right) H(0,c) + \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) k_1\right\} \sin\varepsilon \\
&\qquad\qquad\qquad - \left\{R(1,s) - \left(1 - \tfrac{5e^2}{8}\right) H(0,s) + k_2\right\} \cos\varepsilon \\
&+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0,s)\, nt \sin\varepsilon \qquad + H(0,c)\, nt \cos\varepsilon \\
&+ \left\{R(2,c) + \tfrac{5e}{8} H(0,c) - \tfrac{e}{4} k_1\right\} \sin 2\varepsilon - \left\{R(2,s) + \tfrac{e}{8}(5 - 2e^2) H(0,s) - \tfrac{e}{4} k_2\right\} \cos 2\varepsilon \\
&- \tfrac{e}{4} H(0,s)\, nt \sin 2\varepsilon \qquad - \tfrac{e}{4} H(0,c)\, nt \cos 2\varepsilon \\
&+ \left\{R(3,c) - \tfrac{e^2}{8} H(0,c)\right\} \sin 3\varepsilon \qquad - \left\{R(3,s) - \tfrac{e^2}{8} H(0,s)\right\} \cos 3\varepsilon \\
&+ R(4,c) \sin 4\varepsilon \qquad - R(4,s) \cos 4\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad - \text{etc.} \\
&\pm \Sigma R\left(i, i', {}^{c}_{s}\right) {}^{\sin}_{\cos} \left\{(i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

---

*) Um etwaigen Misdeutungen vorzubeugen bemerke ich, dass durch diese Weglassungen die geometrische Strenge nicht im Mindesten verletzt wird.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\begin{aligned}
2v = 2C - eH(0,s)\,nt & \\
+\{Q(1,c)+H(0,c)-k_1\}\cos\varepsilon & + \{Q(1,s)+(1-e^2)\,H(0,s)-k_2\}\sin\varepsilon \\
-H(0,s)\,nt\cos\varepsilon & + H(0,c)\,nt\sin\varepsilon \\
+\tfrac{1}{2}\{Q(2,c)-eH(0,c)\}\cos 2\varepsilon & + \tfrac{1}{2}\{Q(2,s)-eH(0,s)\}\sin 2\varepsilon \\
+\tfrac{1}{3}Q(3,c)\cos 3\varepsilon & + \tfrac{1}{3}Q(3,s)\sin 3\varepsilon \\
+\text{ etc.} & + \text{ etc.} \\
+\Sigma S\left(i,i',{}^{c}_{s}\right)\tfrac{\cos}{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\right\} &
\end{aligned}$$

Weiter unten werden die analogen Ausdrücke der folgenden Grössen gebraucht, die ich daher hier sogleich anführe.

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} = 1 + k + P(0,c) - \frac{e}{2}H(0,c) + \frac{e}{2}H(0,s)\,nt & \\
+\left\{P(1,c)+k_1\right\}\cos\varepsilon & + \left\{P(1,s)+\frac{e^2}{2}H(0,s)+k_2\right\}\sin\varepsilon \\
+H(0,s)\,nt\cos\varepsilon & - H(0,c)\,nt\sin\varepsilon \\
+\left\{P(2,c)+\frac{e}{2}H(0,c)\right\}\cos 2\varepsilon & + \left\{P(2,s)+\frac{e}{2}H(0,s)\right\}\sin 2\varepsilon \\
+P(3,c)\cos 3\varepsilon & + P(3,s)\sin 3\varepsilon \\
+\text{ etc.} & + \text{ etc.} \\
+\Sigma P\left(i,i',{}^{c}_{s}\right)\tfrac{\cos}{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\right\} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\frac{dv}{d\varepsilon} = -\left(\overline{\frac{dW}{d\eta}}\right) = -\frac{e}{2}H(0,s) & \\
-\{Q(1,c)-k_1\}\sin\varepsilon & + \{Q(1,s)-k_2\}\cos\varepsilon \\
+H(0,s)\,nt\sin\varepsilon & + H(0,c)\,nt\cos\varepsilon \\
-\left\{Q(2,c)-\frac{e}{2}H(0,c)\right\}\sin 2\varepsilon & + \left\{Q(2,s)-\frac{e}{2}H(0,s)\right\}\cos 2\varepsilon \\
-Q(3,c)\sin 3\varepsilon & + Q(3,s)\cos 3\varepsilon \\
-\text{ etc.} & + \text{ etc.} \\
\mp\Sigma Q\left(i,i',{}^{c}_{s}\right)\tfrac{\sin}{\cos}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\right\} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\frac{d^2W}{d\eta^2}}\right) = -G(1,c) + \frac{e}{2}H(0,c) & \\
-\{\tfrac{1}{2}G(2,c)+k_1\}\cos\varepsilon & - \{\tfrac{1}{2}G(2,s)+k_2\}\sin\varepsilon \\
-H(0,s)\,nt\cos\varepsilon & + H(0,c)\,nt\sin\varepsilon \\
-\left\{\tfrac{1}{3}G(3,c)+H(1,c)+\tfrac{e}{2}H(0,c)\right\}\cos 2\varepsilon & - \left\{\tfrac{1}{3}G(3,s)+H(1,s)+\tfrac{e}{2}H(0,s)\right\}\sin 2\varepsilon \\
-\left\{\tfrac{1}{4}G(4,c)+\tfrac{1}{2}H(2,c)\right\}\cos 3\varepsilon & - \left\{\tfrac{1}{4}G(4,s)+\tfrac{1}{2}H(2,s)\right\}\sin 3\varepsilon \\
-\text{ etc.} & - \text{ etc.} \\
-\Sigma\left\{G'\left(i+1,i',{}^{c}_{s}\right)+H'\left(i-1,i',{}^{c}_{s}\right)\right\}\tfrac{\cos}{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\right\} &
\end{aligned}$$

wenn wir zur Abkürzung

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$G'\left(i,i'{}^{c}_{,s}\right)=\frac{G\left(i,i'{}^{c}_{,s}\right)}{i-i'\mu}$$
$$H'\left(i,i'{}^{c}_{,s}\right)=\frac{H\left(i,i'{}^{c}_{,s}\right)}{i-i'\mu}$$

setzen. Mit Ausnahme einiger der zu $i'=0$ gehörigen Glieder bestehen also die Coefficienten von $\left(\overline{\frac{dW}{d\eta}}\right)$ aus der Differenz, und die von $\left(\overline{\frac{d^2W}{d\eta^2}}\right)$ aus der Summe der Coefficienten der in W mit $\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\left\{-y+\ldots\right\}$ und mit $\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\left\{+y+\ldots\right\}$ multiplicirten Glieder.

Es wird ferner aus dem Vorhergehenden

$$\left(\overline{\frac{dW}{d\varepsilon}}\right)=-\frac{dh}{h_0 d\varepsilon}=-\frac{e}{2}H(0,s)$$
$$-\Pi'(1,c)\sin\varepsilon+\Pi'(1,s)\cos\varepsilon$$
$$-\Pi'(2,c)\sin 2\varepsilon+\Pi'(2,s)\cos 2\varepsilon$$
$$-\text{etc.}\qquad+\text{etc.}$$

wo

$$\Pi'(1,c)=F(1,c)+G(2,c)+H(0,c)$$
$$\Pi'(2,c)=F(2,c)+G(3,c)+H(1,c)$$
$$\text{etc.}\qquad\text{etc.}$$
$$\Pi'(1,s)=F(1,s)+G(2,s)+H(0,s)$$
$$\text{etc.}\qquad\text{etc.}$$

Integrirt man daher und führt nach der Integration wieder nt statt ε ein, so bekommt man

$$\delta\frac{h}{h_0}=K+\frac{e}{2}H(0,s)\,nt$$
$$-\Pi'(1,c)\cos\varepsilon-\left\{\Pi'(1,s)-\frac{e^2}{2}H(0,s)\right\}\sin\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{2}\Pi'(2,c)\cos 2\varepsilon-\tfrac{1}{2}\Pi'(2,s)\sin 2\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{3}\Pi'(3,c)\cos 3\varepsilon-\tfrac{1}{3}\Pi'(3,s)\sin 3\varepsilon$$
$$-\text{etc.}\qquad-\text{etc.}$$
$$-\Sigma\Pi\left(i,i'{}^{c}_{,s}\right)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon-i'\,(c'-c\mu)\right\}$$

wo K die dem Integral hinzugefügte willkührliche Constante ist, und die Coefficienten $\Pi\left(i,i'{}^{c}_{,s}\right)$ aus (23) oder (24) entnommen werden.

49.

Setzt man ferner $i'=0$ in (27), und schreibt die ersten Glieder vollständig aus, so bekommt man

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$
\begin{aligned}
2\frac{dR}{\cos i} = \frac{dy}{y}\Big\{ & -T(0,s)\sqrt{-1} + \left[U(0,c) - U(0,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{v} + \left[V(0,c) - V(0,s)\sqrt{-1}\right]v \\
& + \left[T(1,c) - T(1,s)\sqrt{-1}\right]y + \left[U(1,c) - U(1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{y}{v} + \left[V(1,c) - V(1,s)\sqrt{-1}\right]vy \\
& + \left[T(-1,c) - T(-1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{y} + \left[U(-1,c) - U(-1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{vy} + \left[V(-1,c) - V(-1,s)\sqrt{-1}\right]\frac{v}{y} \\
& + \left[T(2,c) - T(2,s)\sqrt{-1}\right]y^2 + \left[U(2,c) - U(2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{y^2}{v} + \left[V(2,c) - V(2,s)\sqrt{-1}\right]vy^2 \\
& + \left[T(-2,c) - T(-2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{y^2} + \left[U(-2,c) - U(-2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{1}{vy^2} + \left[V(-2,c) - V(-2,s)\sqrt{-1}\right]\frac{v}{y^2} \\
& + \text{etc.}\Big\}
\end{aligned}
$$

geht man hievon zum Reellen über, so wird in Folge der Gleichungen (29) und (30)

$$
\begin{aligned}
\frac{dR}{\cos i\, d\varepsilon} = -eV(0,s) & \\
& + U(1,s)\cos(-\eta+\varepsilon) && - U(1,c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\
& + T(1,s)\cos\varepsilon && - T(1,c)\sin\varepsilon \\
& + U(2,s)\cos(-\eta+2\varepsilon) && - U(2,c)\sin(-\eta+2\varepsilon) \\
& + V(0,s)\cos\eta && - V(0,c)\sin\eta \\
& + T(2,s)\cos 2\varepsilon && - T(2,c)\sin 2\varepsilon \\
& + U(3,s)\cos(-\eta+3\varepsilon) && - U(3,c)\sin(-\eta+3\varepsilon) \\
& + V(1,s)\cos(\eta+\varepsilon) && - V(1,c)\sin(\eta+\varepsilon) \\
& + \text{etc.} && - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

50.

Aus der Form des im vor. §. angegebenen endlichen Ausdrucks für dR kann man schliessen, dass die zum Integral des vorstehenden Ausdrucks von dR hinzuzufügende willkührliche Constante die Form

$$l_2 + l\sin\eta + l_1\cos\eta$$

haben muss. Gehen wir aber weiter zurück, so zeigt die Gleichung

$$\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{hr^2\varrho}{na^2}\sin(\omega - f)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

des Art. 41 (I), dass diese Constante auch unter die Form

$$l\frac{\varrho}{a}\sin\omega + l_1\frac{\varrho}{a}\cos\omega$$

muss gebracht werden können. Substituiren wir in das letzte Glied dieses Ausdrucks $\cos\eta - e$ für $\frac{\varrho}{a}\cos\omega$, und vergleichen mit der vorstehenden Form, so wird $l_2 = -el_1$, und die ganze Constante wird

$$-el_1 + l\sin\eta + l_1\cos\eta$$

wo l und l_1 zwei willkührliche Constanten sind. Integrirt man nun den Ausdruck für dR des vor. Art. und verwandelt nach der Integration η in

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

ε, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = U(1,c) - el_1 - eV(0,s)\,\varepsilon \\
+\{Y(1,s)+l\}\sin\varepsilon + \{Y(1,c)+l_1\}\cos\varepsilon \\
-V(0,c)\,\varepsilon\sin\varepsilon \quad + V(0,s)\,\varepsilon\cos\varepsilon \\
+Y(2,s)\sin 2\varepsilon \quad + Y(2,c)\cos 2\varepsilon \\
+Y(3,s)\sin 3\varepsilon \quad + Y(3,c)\cos 3\varepsilon \\
+\text{etc.} \quad + \text{etc.} \\
+\Sigma Y\left(i,i'\,{}^{s}_{c}\right){}^{\sin}_{\cos}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

wo der Gleichung (32) analog

$$\begin{aligned}
Y(1,s) &= T(1,s) + \tfrac{1}{2}U(2,s) \\
Y(2,s) &= \tfrac{1}{2}T(2,s) + \tfrac{1}{3}U(3,s) + V(1,s) \\
Y(3,s) &= \tfrac{1}{3}T(3,s) + \tfrac{1}{4}U(4,s) + \tfrac{1}{2}V(2,s) \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
Y(1,c) &= T(1,c) + \tfrac{1}{2}U(2,c) \\
Y(2,c) &= \tfrac{1}{2}T(2,c) + \tfrac{1}{3}U(3,c) + V(1,c) \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

ist. Man könnte nun auch die zweite im vor. §. für u entwickelte Form für den Fall $i'=0$ angeben, allein da die Controle, die sie in diesem Falle gewährt, nicht wesentlich ist, so lasse ich sie weg.

Eliminirt man auch hier den Bogen ε ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen durch die Gleichung

$$\varepsilon = nt + e\sin\varepsilon$$

so entsteht,

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = U(1,c) - \frac{e}{2}V(0,c) - el_1 - eV(0,s)\,nt \\
+\left\{Y(1,s) - e^2V(0,s) + l\right\}\sin\varepsilon + \left\{Y(1,c)+l_1\right\}\cos\varepsilon \\
-V(0,c)\,nt\sin\varepsilon \quad + V(0,s)\,nt\cos\varepsilon \\
+\left\{Y(2,s)+\frac{e}{2}V(0,s)\right\}\sin 2\varepsilon + \left\{Y(2,c)+\frac{e}{2}V(0,c)\right\}\cos 2\varepsilon \\
+Y(3,s)\sin 3\varepsilon \quad + Y(3,c)\cos 3\varepsilon \\
+\text{etc.} \quad + \text{etc.} \\
+\Sigma Y\left(i,i'\,{}^{s}_{c}\right){}^{\sin}_{\cos}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'(c'-c\mu)\right\}
\end{aligned}$$

womit die allgemeinen Integrationen ausgeführt sind. Da wir weiter unten auch den Ausdruck vom Differential von u in derselben Form brauchen werden, so füge ich diesen sogleich bei.

$$\frac{\overline{\left(\frac{dR}{d\eta}\right)}}{\cos i} = \frac{\frac{du}{d\varepsilon}}{\cos i} = -\tfrac{3e}{2}\, V(0,s)$$
$$+\left\{Y(1,s)+V(0,s)+l\right\}\cos\varepsilon - \left\{Y(1,c)+V(0,c)+l_1\right\}\sin\varepsilon$$
$$-\,V(0,c)\,nt\cos\varepsilon \qquad\qquad -\,V(0,s)\,nt\sin\varepsilon$$
$$+\left\{2Y(2,s)+\tfrac{e}{2}V(0,s)\right\}\cos 2\varepsilon - \left\{2Y(2,c)+\tfrac{e}{2}V(0,c)\right\}\sin 2\varepsilon$$
$$+\,3Y(3,s)\cos 3\varepsilon \qquad\qquad -\,3Y(3,c)\sin 3\varepsilon$$
$$+\,\text{etc.} \qquad\qquad -\,\text{etc.}$$
$$\pm\,\Sigma W\left(i,i',{}^{s}_{c}\right){}^{\cos}_{\sin}\left\{(i-i'\mu)\,\varepsilon - i'\,(c'-c\mu)\right\}$$

wo die W Coefficienten die durch (34) gegebenen sind.

51.

Die im Vorhergehenden entwickelten Integrale enthalten die sechs unabhängigen Constanten c, k, k_1, k_2, l, l_1, die den Umständen gemäss bestimmt werden müssen, und die beiden abhängigen Constanten C und K. Ehe jene bestimmt werden können, muss gezeigt werden, wie diese von denselben abhängen. Die strenge Gleichung, welche die Abhängigkeit der Constante C bedingt, ist die Gleichung (33) (I), nemlich

$$\frac{dz}{dt}(1+\nu)^2 = \frac{h_0}{h}$$

die wir für unsern jetzigen Zweck wie folgt umstellen wollen

$$(36)\qquad \frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h} - 2\nu + (3\nu^2 - 4\nu^3 \pm \text{etc.})\frac{h_0}{h} - 2\nu\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)$$

Im Art. 48 fanden wir

$$\frac{dz}{dt} = 1 + k + P(0,c) - \tfrac{e}{2}H(0,c) + \text{veränderlichen Gliedern,}$$

welches Resultat jedoch nur für die erste Potenz der störenden Kräfte gilt. Nachdem auf die Quadrate und höheren Potenzen dieser Rücksicht genommen sein wird, wird der bestimmte Theil des constanten Gliedes in $\frac{dz}{dt}$ nicht mehr $1 + P(0,c) - \frac{e}{2}H(0,c)$ sein, sondern er wird dieser Grösse, vermehrt um kleine Glieder von der Ordnung des Quadrats und der höheren Potenzen der störenden Kräfte, gleich sein.

Damit die Entwickelungen, die ich jetzt vornehmen werde, sich auf alle Potenzen der störenden Kräfte erstrecken, werde ich daher statt des obigen Ausdrucks

$$\frac{dz}{dt} = 1 + k + Z_0 + Z_1 + \text{veränderl. Gl.}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

setzen, wo

$$Z_0 = P(0,c) - \frac{e}{2} H(0,c)$$

und Z_1 eine jedenfalls bestimmte und bestimmbare Grösse von der Ordnung der Quadrate der störenden Kräfte ist. Der Ausdruck für ν ist immer

$$\nu = C + \text{veränderl. Gl.}$$

da man auch nach der Berücksichtigung des Quadrats und der höheren Potenzen der störenden Kräfte die etwa im Ausdruck von ν entstehenden constanten Glieder der Constante C einverleibt sich denken, und diese daher weglassen darf. Bezeichnen wir ferner das constante Glied im vollständigen Ausdruck von $\frac{h_0}{h}$ mit $1 + k_3$, so dass nach der Entwickelung und Integration

$$\frac{h_0}{h} = 1 + k_3 + \text{veränderl. Gl.}$$

wird, und setzen wir in demselben Sinne

$$(3\nu^2 - 4\nu^3 \pm \text{etc.}) \frac{h_0}{h} - 2\nu\left(\frac{h_0}{h} - 1\right) = V_1 + \text{veränderl. Gl.}$$

wo V_1 erst bei der Berechnung der Störungen höherer Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte erhalten werden kann. Substituiren wir nun diese Ausdrücke in (36), und behalten nur die constanten Glieder bei, so wird

$$C = \tfrac{1}{2}(k_3 - k_1 - Z_0 - Z_1 + V_1)$$

und ist also unter andern von k_3 abhängig gemacht worden.

52.

Es liegt nun zunächst die Aufgabe vor, die eben eingeführte Constante k_3 in Function der übrigen, unabhängigen Constanten darzustellen, und zur Lösung dieser Aufgabe müssen die beiden Differentialgleichungen (41) (I) und (42) (I) angewandt werden, nemlich nach einer kleinen Umformung der ersteren

$$dW_0 = h_0\left\{2\frac{\varrho}{r}\cos(\bar{f}-\omega) - 1 - 2\frac{h^2}{h_0{}^2} + 2\frac{h^2}{h_0{}^2}\frac{\varrho\cos(\bar{f}-\omega)}{a_0\cos^2\varphi_0} + 2e_0\frac{h^2}{h_0{}^2}\frac{\varrho\cos\omega}{a_0\cos^2\varphi_0}\right\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

$$+ 2h_0\varrho\sin(\bar{f}-\omega)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dt$$

$$d\frac{h_0}{h} = h_0\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

Heben wir aus diesem Ausdruck von dW_0 die Glieder heraus, welche die Factoren $\varrho\cos\omega$ und $\varrho\sin\omega$ nicht enthalten, so ergeben sich die

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

folgenden

$$-h_0\left(1+2\frac{h^2}{h_0^2}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

Führen wir in der im Art. 48 erklärten, dem Integral aus dW_0 hinzuzufügenden Constante

$$k+k_1\cos\eta+k_2\sin\eta$$

statt der excentrischen Anomalie η die wahre Anomalie ω ein, so wird sie

$$k+e_0k_1+\frac{k_1}{a_0}\varrho\cos\omega+\frac{k_2}{a_0\cos\varphi_0}\varrho\sin\omega$$

und sehen wir hier gleichfalls von den mit $\varrho\cos\omega$ und $\varrho\sin\omega$ multiplicirten Gliedern ab, so bleibt

$$k+ek_1$$

übrig, wenn man schlechtweg e für e_0 schreibt, und diese Constante ist also in den vorhergehenden Entwickelungen dem Integral

$$-h_0\int\left(1+2\frac{h^2}{h_0^2}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

hinzugefügt worden, während im vor. Art. bestimmt wurde, dass die Constante k_3 dem Integral

$$h_0\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

hinzugefügt werden soll. Da diese beiden Integrale von einander abhängig sind, so wird k_3 zu einer Function von $k+ek_1$, die auf folgende Art ermittelt werden kann. Aus der Gleichung

$$d\frac{h_0}{h}=h_0\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

folgt

$$d\frac{h}{h_0}=-\frac{h^2}{h_0}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

integrirt man diese beiden Gleichungen, und fügt die im Vorhergehenden angegebenen willkührlichen Constanten den Integralen ausdrücklich hinzu, so bekommt man

$$2\frac{h}{h_0}-\frac{h_0}{h}=1+k+ek_1-h_0\int\left(1+2\frac{h^2}{h_0^2}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

$$\frac{h_0}{h}=1+k_3+h_0\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

oder da die Entwickelungen der unter den Integralzeichen befindlichen Functionen keine constanten Glieder hervorbringen können, wie weit man auch die Annäherungen treiben mag,

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} &= 1 + k + ek_1 + \text{veränderl. Gl.} \\ \frac{h_0}{h} &= 1 + k_3 \qquad\quad + \text{veränderl. Gl.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Da nun $\frac{h_0}{h} - 1$ eine kleine Grösse von der Ordnung der störenden Kraft ist, so wird

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \left(\frac{h_0}{h} - 1\right) + \left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2 - \left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^3 \pm \text{etc.}$$

und hieraus folgt

$$2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} = 4 - 3\frac{h_0}{h} + 2\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^3 \pm \text{etc.}$$

Setzt man nun

$$\left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^2 - \left(\frac{h_0}{h} - 1\right)^3 \pm \text{etc.} = H_1 + \text{veränderl. Gl.}$$

wo man die Constante H_1 bei der Berechnung der Störungen höherer Ordnung auf ähnliche Weise erhalten kann wie die oben mit Z_1 und V_1 bezeichneten Constanten, und substituirt diesen Ausdruck sowohl wie die Ausdrücke (37) in die vorstehende Gleichung, so ergiebt sich mit bloser Beibehaltung der constanten Glieder

$$k_3 = -\tfrac{1}{3}(k + ek_1) + \tfrac{2}{3}H_1$$

Mittelst dieses Werthes von k_3 verwandelt sich die am Ende des vor. Art. gefundene Gleichung in

$$C = -\tfrac{1}{6}(4k + ek_1 + 3Z_0) + \tfrac{1}{6}(3V_1 + 2H_1 - 3Z_1) \quad . \quad (38)$$

welcher Ausdruck für alle Potenzen der störenden Kraft gilt. Behält man darin blos die Glieder der ersten Ordnung bei, so geht

$$C = -\tfrac{1}{6}(4k + ek_1 + 3Z_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

daraus hervor, und der numerische Werth dieser Grössen muss also in die vorhergehenden Ausdrücke für die erste Annäherung substituirt werden.

Die im Art. 48 zu der Entwickelung von $\delta\frac{h}{h_0}$ addirte Constante K steht in enger Beziehung zu k_3, und man findet aus dem Vorhergehenden leicht, dass der strenge Ausdruck dafür

$$K = \tfrac{1}{3}(k + ek_1) + \tfrac{1}{3}H_1$$

ist. Hier wo wir nur die Grössen erster Ordnung von K zu berücksichtigen brauchen, ist also

$$K = \tfrac{1}{3}(k + ek_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

in den genannten Ausdruck für $\delta\frac{h}{h_0}$ zu substituiren.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

53.

Die unabhängigen willkührlichen Constanten müssen den Umständen gemäss bestimmt werden, und abgesehen von besonderen Fällen, die vielleicht vorkommen möchten, obgleich noch keine solche dagewesen sind, kommen gegenwärtig in den Anwendungen namentlich zwei Fälle vor, je nachdem man sich zur Berechnung der Störungen osculirender oder mittlerer Elemente bedient hat. Jeder dieser beiden Fälle muss besonders betrachtet werden.

Wenn man zum ersten Male die Störungen eines Planeten berechnet, so werden selten oder nie die mittleren Elemente desselben bekannt sein, denn es werden wohl nie so viele Systeme von osculirenden Elementen vorliegen, dass man daraus die wahren Grenzen derselben entnehmen könnte, woraus zufolge der in der Einleitung zur Abhandlung (I) gegebenen Definition der mittleren Elemente die Kenntniss derselben geschöpft werden muss. Allein da im Verlaufe dieser Abhandlungen gezeigt werden wird, wie man die mittleren Elemente aus den osculirenden, und den dazu gehörigen Störungen bestimmen kann, und man nach dieser Bestimmung sich wohl in den Fall versetzt sehen könnte die Störungen mit der Zugrundelegung von mittleren Elementen zu berechnen, so will ich hier um das Thema der Bestimmung der willkührlichen Constanten vollständig auszuführen annehmen, dass die Kenntniss der mittleren Elemente auf irgend eine Art erlangt sei. Ich werde die Eigenschaften, die sie besitzen müssen, erörtern, und darauf die Bestimmung der Constanten zuerst in diesem Falle auseinander setzen.

Die im Art. 48 dem Ausdruck von nz hinzugefügte willkührliche Constante c ist jetzt der mittlere Werth der mittleren Anomalie für die Zeitepoche selbst, und es ist in Bezug darauf weiter keine Erörterung nöthig.

Der wahre Werth der mittleren Bewegung in der Zeiteinheit ist die Grenze des Verhältnisses des vom Planeten um die Sonne beschriebenen Winkels zur Zeit, in welcher er beschrieben worden ist, wenn diese Zeit unbestimmt wachsend angenommen wird. Der mittlere Werth der mittleren Bewegung muss nothwendiger Weise mit dem eben definirten wahren Werthe derselben identisch sein, weil die mittlere Bewegung überhaupt eben so wenig wie die grosse Achse der Ellipse, mit welcher sie durch das dritte Keppler'sche Gesetz in engster

Beziehung steht, Säcularänderung besitzt, und daher die osculirenden Werthe derselben nur um den eben definirten wahren Werth derselben osciliren können. Die eben gegebene Definition des wahren (oder mittleren) Werthes der mittleren Bewegung bedingt, dass im Ausdruck von *nz* ausser dem Gliede *nt*, wo eben *n* den mittleren (oder wahren) Werth der mittleren Bewegung in der Zeiteinheit bedeutet, nur Glieder anderer Form vorkommen dürfen, denn wenn ausserdem noch ein der Zeit proportionales Glied in diesem Ausdruck vorhanden wäre, so könnte *n* nicht die Grenze des in der Definition genannten Verhältnisses sein. Es folgt hieraus, dass wenn der Berechnung der Störungen mittlere Elemente zu Grunde gelegt worden sind, die Constante *k* so bestimmt werden muss, dass das im Ausdruck von *nz* enthaltene der Zeit proportionale Glied $= nt$ werde.

Ich bemerke hiezu noch, dass jede Bestimmung der willkührlichen Constanten dahin führen muss, dass im Gliede *nt* der wahre Werth von *n* eintritt, und dieser Werth muss auch in die Argumente substituirt werden, denn sonst können die Störungen, welche Form man ihnen auch gegeben, und welche Coordinaten man auch gewählt haben mag, nie die wahre Geschwindigkeit des Planeten darstellen. Man kann mit anderen Werthen von *n* wohl bewirken, dass dieses innerhalb eines kurzen Zeitraums nahe der Fall ist, aber in kürzerer oder längerer Zeit, je nachdem die Störungsglieder weniger oder mehr beträchtlich sind, müssen sich nothwendig Abweichungen von der wahren Bewegung im Resultat zu erkennen geben.

In Bezug auf die übrigen vier Constanten tritt der Umstand ein, dass sie sich den elliptischen Elementen einverleiben, welche Säcularänderungen unterworfen sind, und deren mittlere Werthe daher nur dann Sinn haben, wenn man von den Säcularänderungen absieht; mit anderen Worten, wenn man ihnen einen bestimmten Zeitpunkt unterlegt, unter welchem hier die überhaupt als Epoche gewählte Zeit verstanden werden soll. Gehen wir hievon zu der in der Einleitung zur Abhandlung (I) aufgestellten Definition der mittleren Elemente über, zufolge welcher sie zwischen den überhaupt möglichen Grenzen der betreffenden, auf die Epoche bezogenen, osculirenden Elemente in der Mitte liegen, so lässt sich als charakteristische Eigenschaft dieser mittleren Elemente angeben, dass ihre Anwendung auf Störungen führen muss, deren mögliches Maximum kleiner ist, wie die bei der Anwen-

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

dung irgend anderer Elemente möglichen Maxima. Die Glieder der allgemeinen Ausdrücke der Störungen, welche die vier Constanten k_1, k_2, l, l_1 enthalten, ändern sich mit den der Rechnung zu Grunde gelegten Elementen am Meisten, indem bei ihrer Bestimmung immer der Grundsatz maassgebend sein muss, dass sie das ihrige dazu beitragen müssen, damit durch die Störungen und den der Rechnung zu Grunde gelegten elliptischen Elementen der Ort und die Geschwindigkeit des gestörten Planeten zur Zeitepoche dargestellt werde. Die Aenderung dieser Glieder ist daher eine Grösse derselben Ordnung wie eine Aenderung der der Rechnung zu Grunde gelegten elliptischen Elemente selbst*), während die Aenderungen der übrigen Störungscoefficienten kleine Grössen der ersten Ordnung in Bezug auf die Aenderungen der elliptischen Elemente sind. Je grösser jene Glieder sind, desto grösser kann daher überhaupt das Maximum der Störungen werden, und desto mehr weicht dieses von seinem möglichst geringen Betrage ab.

Es folgt hieraus, dass die betreffenden mittleren Elemente diejenigen sind, die in Verbindung mit solchen Störungen, in welchen von diesen, sich mit den Elementen stark ändernden, Gliedern so viele Null werden wie überhaupt möglich ist, den Ort und die Geschwindigkeit des gestörten Planeten darstellen.

Die sich mit den elliptischen Elementen stark ändernden Störungsglieder sind in dem Ausdruck von nz die $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$, $\sin 2\varepsilon$, $\cos 2\varepsilon$, proportionalen und in den Ausdrücken von ν und u die constanten und die $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ proportionalen Glieder. Von diesen können nur vier Glieder gleich Null gemacht werden, weil nur vier Constanten hiefür zur Verfügung stehen, und da man, um das Maximum der Störungen so klein wie möglich zu machen, die vier grössten dieser Glieder zum Verschwinden bringen muss, so lässt sich die analytische Bedingung der betreffenden vier mittleren Elemente, nemlich der Excentricität, der Länge des Perihels, der Neigung und der Knotenlänge so aussprechen, dass sie die Coefficienten der mit $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ multi-

*) Wenn z. B. dem Werthe e der der Rechnung zu Grunde gelegten Excentricität der Werth k_1 der so bezeichneten Constante entspricht, so entspricht dem Werthe $e + \Delta e$ der Excentricität sehr nahe der Werth $k_1 - \frac{2\Delta e}{\cos^2\varphi}$, welcher aus der Bedingung entspringt, dass der Ort und die Geschwindigkeit des Planeten in beiden Fällen dieselben sein müssen; und ähnliche Variationen ergeben sich für die übrigen drei Constanten.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

plicirten Glieder in den Ausdrücken für nz und u gleich Null machen müssen. Es sind zwar oft die bez. Coefficienten in ν grösser wie die in u, allein die in nz sind immer ohngefähr doppelt so gross wie die in u, und die eben entwickelte Form dieser Ausdrücke zeigt, dass die Coefficienten von $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ in nz und in ν nicht zugleich gleich Null gemacht werden können. Es ist nun leicht die Bestimmung der willkührlichen Constanten für den Fall, dass der Berechnung der Störungen mittlere Elemente zu Grunde gelegt worden sind, auszuführen. Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
Z(1,c) &= R(1,c) + eR(0,c) - \left(1 - \tfrac{e^2}{8}\right) H(0,c)\\
Z(1,s) &= R(1,s) - \left(1 - \tfrac{5e^2}{8}\right) H(0,s)\\
Z(2,c) &= R(2,c) + \tfrac{5e}{8} H(0,c)\\
Z(2,s) &= R(2,s) + \tfrac{e}{8}(5 - 2e^2) H(0,s)\\
&\text{etc.}\\
W(1,c) &= \tfrac{1}{2}\{Q(1,c) + H(0,c)\}\\
W(1,s) &= \tfrac{1}{2}\{Q(1,s) + (1-e^2) H(0,s)\}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

dann werden die Ausdrücke des Art. 48

$$\begin{aligned}
nz = c + nt + \left\{R(0,c) + k - \tfrac{e}{2} k_1\right\} nt&\\
+ \left\{Z(1,c) + \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) k_1\right\} \sin\varepsilon &- \left\{Z(1,s) + k_2\right\} \cos\varepsilon\\
+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0,s)\, nt \sin\varepsilon &+ H(0,c)\, nt\cos\varepsilon\\
+ \left\{Z(2,c) - \tfrac{e}{4} k_1\right\} \sin 2\varepsilon &- \left\{Z(2,s) - \tfrac{e}{4} k_2\right\} \cos 2\varepsilon\\
- \tfrac{e}{4} H(0,s)\, nt \sin 2\varepsilon &- \tfrac{e}{4} H(0,c)\, nt\cos 2\varepsilon\\
+ \text{etc.} &- \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu = C - \tfrac{e}{2} H(0,s)\, nt&\\
+ \left\{W(1,c) - \tfrac{1}{2}k_1\right\} \cos\varepsilon &+ \left\{W(1,s) - \tfrac{1}{2}k_2\right\} \sin\varepsilon\\
- \tfrac{1}{2} H(0,s)\, nt \cos\varepsilon &+ \tfrac{1}{2} H(0,c)\, nt \sin\varepsilon\\
+ \text{etc.} &+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

und zufolge der vorstehenden Erklärungen bekommen wir hieraus die folgenden Bedingungsgleichungen

$$0 = R(0,c) + k - \tfrac{e}{2} k_1$$
$$0 = Z(1,c) + \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) k_1$$
$$0 = Z(1,s) + k_2$$

woraus

$$k = R(0,c) - \tfrac{2}{2-e^2} Z(1,c)$$
$$k_1 = -\tfrac{2}{2-e^2} Z(1,c)$$
$$k_2 = -Z(1,s)$$

folgt.*) Substituirt man diese sowohl in die vorstehenden Ausdrücke wie in den Ausdruck (39) für C, so wird

$$\begin{aligned} nz = c &+ nt \\ &+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0,s)\, nt \sin\varepsilon \qquad + H(0,c)\, nt \cos\varepsilon \\ &+ \left\{Z(2,c) + \tfrac{e}{2(2-e^2)} Z(1,c)\right\} \sin 2\varepsilon - \left\{Z(2,s) + \tfrac{e}{4} Z(1,s)\right\} \cos 2\varepsilon \\ &- \tfrac{e}{4} H(0,s)\, nt \sin 2\varepsilon \qquad - \tfrac{e}{4} H(0,c)\, nt \cos 2\varepsilon \\ &- \text{etc.} \qquad - \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = \tfrac{1}{6} P(0,c) &+ \tfrac{e}{6} P(1,c) - \tfrac{e^2}{2(2-e^2)} P(2,c) - \tfrac{e(4+e^2)}{8(2-e^2)} H(0,c) \\ &- \tfrac{e}{2} H(0,s)\, nt \\ &+ \left\{W(1,c) + \tfrac{1}{2-e^2} Z(1,c)\right\} \cos\varepsilon + \left\{W(1,s) + \tfrac{1}{2} Z(1,s)\right\} \sin\varepsilon \\ &- \tfrac{1}{2} H(0,s)\, nt \cos\varepsilon \qquad + \tfrac{1}{2} H(0,c)\, nt \sin\varepsilon \\ &+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$X(0,c) = U(1,c) - \tfrac{e}{2} V(0,c)$$
$$X(1,s) = Y(1,s) - e^2 V(0,s)$$

so wird der Ausdruck des Art. 50 für u

$$\begin{aligned} \frac{u}{\cos i} = X(0,c) &- el_1 - eV(0,s)\, nt \\ &+ \{X(1,s) + l\} \sin\varepsilon + \{Y(1,c) + l_1\} \cos\varepsilon \\ &- V(0,c)\, nt \sin\varepsilon \qquad + V(0,s)\, nt \cos\varepsilon \\ &+ \text{etc.} \qquad - \text{etc.} \end{aligned}$$

*) Diese Bestimmung dieser Constanten ist mit der Bestimmung der analogen Constanten in den „*Fundamenta nova etc.*" identisch, und stimmt mit der Laplace'schen Bestimmung seiner analogen Constanten überein.

und die Bedingungsgleichungen werden hier

$$0 = X(1, s) + l$$
$$0 = Y(1, c) + l_1$$

wodurch schliesslich

$$\frac{u}{\cos i} = X(0, c) + eY(1, c) - eV(0, s)\,nt$$
$$- V(0, c)\,nt \sin \varepsilon \qquad + V(0, s)\,nt \cos \varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \qquad + \text{etc.}$$

wird. Zufolge (40) wird in diesem Falle

$$K = -\tfrac{1}{3}R(0, c) - \frac{e}{2-e^2}Z(1, c)$$

Diese Bestimmungen werden strenge, wenn man die strengen Werthe der Coefficienten, und die im Vorhergehenden entwickelten Glieder höherer Ordnung der Constanten C und K substituirt.

54.

Wir kommen jetzt zu dem Falle, in welchem der Berechnung der Störungen die Werthe der osculirenden Elemente, die der Epoche, das ist dem Zeitpunkt $t = 0$ angehören, zu Grunde gelegt worden sind.

Wenn dieses der Fall ist, so ist an sich klar, dass die für diesen Zeitpunkt statt findenden numerischen Werthe der Störungen selbst, sowohl wie die ihrer ersten Differentialquotienten in Bezug auf die Zeit Null werden müssen. Lässt man daher nz, ν und u für diesen Zeitpunkt gelten, das heisst, substituirt man den numerischen Werth von ε darin, welcher in diesem Zeitpunkt statt findet, so muss

$$nz = c_0; \quad \nu = 0; \quad u = 0;$$
$$\frac{dz}{dt} = 1; \quad \frac{d\nu}{dt} = 0; \quad \frac{du}{dt} = 0;$$

werden, wenn wie früher unter den osculirenden Elementen c_0 die mittlere Anomalie bedeutet. Da aber

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{d\nu}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}; \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

ist, und $\frac{d\varepsilon}{dt}$ nie Null werden kann, so darf man statt der beiden zuletzt angeführten Bedingungsgleichungen die folgenden

$$\frac{d\nu}{d\varepsilon} = 0; \quad \frac{du}{d\varepsilon} = 0$$

anwenden, die man durch die hier erklärte Methode, gleich wie $\frac{dz}{dt}$, unmittelbar erhält.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

Substituirt man nun die numerischen Werthe von c, c' und μ in die Argumente der Ausdrücke für $n\delta z$; $\frac{d\delta z}{dt}$; ν; $\frac{d\nu}{d\varepsilon}$; $\frac{u}{\cos i}$; $\frac{du}{\cos i d\varepsilon}$, und ausserdem $t = 0$ so wie für ε den diesem Zeitpunkt entsprechenden Werth der excentrischen Anomalie, den ich ε_0 nennen werde, setzt dabei fürerst die willkührlichen Constanten c, k, k_1, k_2, l, l_1 und C gleich Null, und bezeichnet die so erhaltenen numerischen Werthe mit

$$(n\delta z)_0;\ 1 + \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0;\ (\nu)_0;\ \left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0;\ \left(\frac{u}{\cos i}\right)_0;\ \left(\frac{du}{\cos i d\varepsilon}\right)_0$$

dann bekommt man zur Bestimmung der Constanten die folgenden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
c_0 &= c + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)k_1 \sin\varepsilon_0 - k_2 \cos\varepsilon_0 - \frac{e}{4}k_1 \sin 2\varepsilon_0 + \frac{e}{4}k_2 \cos 2\varepsilon_0 + (n\delta z)_0 \\
0 &= k + k_1 \cos\varepsilon_0 + k_2 \sin\varepsilon_0 + \left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 \\
0 &= -\tfrac{4}{3}k - \frac{e}{3}k_1 - k_1 \cos\varepsilon_0 - k_2 \sin\varepsilon_0 + 2(\nu)_0 - Z \\
0 &= k_1 \sin\varepsilon_0 - k_2 \cos\varepsilon_0 + 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \\
0 &= -el_1 + l \sin\varepsilon_0 + l_1 \cos\varepsilon_0 + \left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 \\
0 &= l \cos\varepsilon_0 - l_1 \sin\varepsilon_0 + \left(\frac{du}{\cos i d\varepsilon}\right)_0
\end{aligned}$$

wenn wir Z statt $Z_0 + Z_1$ schreiben.

Von der Constante C habe ich hier nur die Glieder erster Ordnung ausdrücklich hingeschrieben, allein diese Gleichungen können demungeachtet auf die Glieder der höheren Ordnungen der störenden Kräfte angewandt werden, man braucht nur zu dem Ende die Glieder höherer Ordnung des Ausdrucks (38) der Grösse $(\nu)_0$ einzuverleiben. Diese Glieder müssen jedenfalls, wenn sie merklich sein sollten, aus den in den vorangegangenen Annäherungen berechneten Werthen der Grössen, von welchen sie abhängen, berechnet werden, und da man dieses Verfahren fortsetzen kann, so weit man will, so giebt sich zu erkennen, dass die vorstehenden Gleichungen strenge sind. Die zweite und dritte dieser geben nun zuerst

$$\begin{aligned}
0 &= -k - ek_1 + 3\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z \\
0 &= k_1(\cos\varepsilon_0 - e) + k_2 \sin\varepsilon_0 + 4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z
\end{aligned}$$

und hieraus zieht man in Verbindung mit der vierten

$$(41)\left\{\begin{aligned}
k &= -\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{e\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} + \left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z\right\}\frac{1}{1 - e\cos\varepsilon_0} \\
k_1 &= -2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} - \left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z\right\}\frac{\cos\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} \\
k_2 &= 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{\cos\varepsilon_0 - e}{1 - e\cos\varepsilon_0} - \left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z\right\}\frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0}
\end{aligned}\right.$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

worauf die erste

$$\left.\begin{aligned} c &= c_0 - (n\delta z)_0 + \left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \left\{\frac{3\,(1-e^2)}{2\,(1-e\cos\varepsilon_0)} + \tfrac{1}{2} - 2e\cos\varepsilon_0\right\} \\ &\qquad - \tfrac{1}{4}\left\{4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6\,(\nu)_0 - 3Z\right\}\left\{\frac{3e\sin\varepsilon_0}{1-e\cos\varepsilon_0} - 2e\sin\varepsilon_0\right\} \\ &\text{oder} \\ c &= c_0 - (n\delta z)_0 - k_1\left\{\frac{2-e^2}{2}\sin\varepsilon_0 - \frac{e}{2}\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0\right\} + k_2\left\{\frac{e}{4} + \cos\varepsilon_0 - \frac{e}{2}\cos^2\varepsilon_0\right\} \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

giebt. Aus den beiden letzten Bedingungsgleichungen ergiebt sich ferner

$$\left.\begin{aligned} l &= -\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 \frac{\sin\varepsilon_0}{1-e\cos\varepsilon_0} - \left(\frac{du}{\cos i\,d\varepsilon}\right)_0 \frac{\cos\varepsilon_0 - e}{1-e\cos\varepsilon_0} \\ l_1 &= -\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 \frac{\cos\varepsilon_0}{1-e\cos\varepsilon_0} + \left(\frac{du}{\cos i\,d\varepsilon}\right)_0 \frac{\sin\varepsilon_0}{1-e\cos\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (43)$$

*) Die aus diesen Gleichungen hervorgehenden Zahlenwerthe dieser Constanten müssen vor allen Dingen in die Ausdrücke des Art. 48 für nz und ν, so wie in den Ausdruck des Art. 50 für $\frac{u}{\cos i}$ substituirt werden. Wenn die Berechnung der von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängigen Glieder nöthig wird, so ist die Substitution dieser Werthe der Constanten auch in die Ausdrücke für $\frac{d\delta z}{dt}$, $2\frac{d\nu}{d\varepsilon}$ oder $\left(\frac{dW}{d\eta}\right)$, $\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)$ und $\delta\frac{h}{h_0}$ des Art. 48, so wie in den Ausdruck des Art. 50 für $\frac{du}{\cos i\,d\varepsilon}$ oder $\left(\frac{dR}{d\eta}\right)$ erforderlich.

55.

An die eben entwickelten Ausdrücke der Constanten knüpfen sich ein paar Bemerkungen, die nicht unwichtig sind. Diese Ausdrücke zeigen, dass nur die Constante c von $(n\delta z)_0$ abhängt, die übrigen fünf Constanten hingegen von dieser Grösse unabhängig gefunden werden. Die Grösse $(n\delta z)_0$ ist aber die einzige, in deren Gliedern die Quadrate der kleinen Divisoren vorkommen, und die Constanten k, k_1, k_2, l und l_1 sind also nur von der ersten Potenz dieser Divisoren abhängig. Da man in der ersten Annäherung die Divisoren aus dem osculirenden Werth der mittleren Bewegung berechnen muss, während sie der Strenge nach aus dem wahren (oder mittleren) Werthe dieser Bewegung berechnet werden müssen, so hat der Fehler, mit welchem die durch die erste Annäherung berechneten Werthe der Constanten aus dieser Ur-

*) Diese Bestimmung der Constanten ist mit der Bestimmung der analogen Constanten in den Astr. Nachr. Bd. XVIII Nr. 425 identisch.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

sache behaftet sind, auf die Werthe von k, k_1, k_2, l und l_1 den wenigsten Einfluss, und diese Constanten, auf welche es bei der Verbesserung der Störungscoefficienten durch die Berücksichtigung des Quadrats der störenden Kraft mit ankommt, werden also durch die obigen Ausdrücke im Allgemeinen weit genauer gefunden wie die sechste Constante c, die von $(n\delta z)_0$ abhängig ist, aber bei der eben genannten Verbesserung der Störungscoefficienten nicht gebraucht wird, da sie nur in den Argumenten vorkommt.

Da nach der Substitution der numerischen Werthe von k und k_1

$$nz = c + \left\{1 + R(0,c) + k - \tfrac{e}{2}\,k_1\right\} nt + \text{periodischen Gliedern}$$

wird, so ist in Folge der Erklärungen des Art. 53 der numerische Werth von

$$\left\{1 + R(0,c) + k - \tfrac{e}{2}\,k_1\right\} n$$

bis auf Grössen von der Ordnung der Quadrate der störenden Kräfte dem wahren (oder mittleren) Werthe der mittleren Bewegung in der Zeiteinheit gleich. Nach der Berücksichtigung der von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder wird derselbe bis auf Grössen von der Ordnung der Cuben der störenden Kräfte dem wahren Werthe der mittleren Bewegung gleich, u. s. w. Man sieht hieraus, dass durch die Bestimmung der willkührlichen Constanten die Kenntniss des wahren Werthes der mittleren Bewegung erlangt wird, und dass dieser von selbst in den Ausdruck der wahren Länge, statt des zuerst darin befindlichen osculirenden Werthes der mittleren Bewegung eintritt; ein Umstand, welcher zufolge des Art. 53 stets statt finden muss, wenn die richtigen Grundsätze befolgt werden, da man ohne die Anwendung des wahren Werthes der mittleren Bewegung in dem Ausdruck der Länge für die Zeit t, nie auf die Dauer die wahren Oerter des gestörten Planeten erhalten kann.

Die Verbesserung des, wie eben erklärt, erhaltenen, bis auf Grössen von der Ordnung der Quadrate der störenden Kräfte genauen, wahren Werthes der mittleren Bewegung kann im Allgemeinen nach der Berechnung der überhaupt von den Quadraten dieser Kräfte abhängenden Glieder vorgenommen werden, so wie hier der von der ersten Potenz dieser Kräfte abhängige Unterschied zwischen dem osculirenden und dem wahren Werthe der mittleren Bewegung nach der Berechnung der bezüglichen Störungscoefficienten ermittelt wurde. Allein ein Theil

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

dieser Verbesserung kann sogleich vorgenommen werden, und es ist jedenfalls in den Fällen, wo er nicht unbeträchtlich werden sollte, dienlich, diesen sogleich zu berechnen.

In die Divisoren muss schliesslich der wahre Werth (n) der mittleren Bewegung statt des osculirenden Werthes n_0, und in die Argumente c statt c_0 substituirt werden, denn wenn man nicht die wahren Werthe der Argumente und der Bewegungen derselben substituirt, so kann man nie auf die Dauer die wahren Oerter des Planeten bekommen, und wenn sehr kleine Divisoren und grosse Coefficienten vorkommen, und zugleich die Unterschiede $(n) - n_0$ und $c - c_0$ nicht ganz klein sind, so kann hieraus eine erhebliche Verbesserung von (n) und den Constanten entstehen. Diese kann man sogleich berechnen, indem man mit dem eben gefundenen Werthe von (n) die Coefficienten, mit den entsprechenden Werthen von c und μ die Argumente verbessert, und hierauf neue Werthe der Constanten und (n) berechnet, mit welchen man auch, wo nöthig, diese Verbesserung nochmals vornehmen kann. Man kann auf diese Art unter Umständen sich den wahren Werthen dieser Grössen schon sehr näheren.

Die Unterschiede zwischen den osculirenden Werthen der mittleren Bewegung und dem wahren Werthe derselben sind im Allgemeinen kleine Grössen, allein sie können demungeachtet auf die Störungscoefficienten, und namentlich auf diejenigen derselben, welche kleine Divisoren enthalten, sehr merkliche Wirkung äussern, und es muss daher in jedem Falle der statt findende Unterschied mit Sorgfalt ermittelt werden, wenn gleich sich auch Fälle denken lassen, wo derselbe nur kleine Wirkungen hervorbringt. Namentlich sind die Störungscoefficienten, die mit dem Quadrat des kleinsten der vorhandenen Divisoren behaftet sind, der Wirkung des in Rede stehenden Unterschiedes am Meisten ausgesetzt.

Ich mache schliesslich noch darauf aufmerksam, dass die hier abgeleiteten Folgerungen voraussetzen, dass der bei der Berechnung der Störungen angewandte osculirende Werth der mittleren Bewegung in der That das ist, was er bedeutet. Sollte dieser Werth mit einem merklichen Fehler behaftet sein, so können anderweitige und manchmal grössere Verbesserungen daraus die Folge werden; ich werde später auf diesen Umstand zurück kommen.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

56.

Die Formeln, wodurch in der Regel die Verbesserung der Störungscoefficienten, die aus dem Unterschiede zwischen dem der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Werthe der mittleren Bewegung und dem wahren Werthe derselben entspringt, ausgeführt werden kann, können wie folgt abgeleitet werden. Stellen wir überhaupt irgend eine der im Vorhergehenden vorkommenden, nach ε zu integrirenden Functionen unter folgender Form dar,

$$F = \gamma_c \cos\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\} + \gamma_s \sin\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\}$$

wo A für $-i'(c' - \mu c)$ geschrieben ist, so wird

$$\int F d\varepsilon = \frac{\gamma_c}{i - i'\mu} \sin\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\right\} - \frac{\gamma_s}{i - i'\mu} \cos\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\right\}$$

Für die Entwickelung der Verbesserung, die dieses Integral aus dem angeführten Grunde bedarf, müssen wir erwägen, dass der strenge Ausdruck (41) (I) für dW_0 mit n_0, welches in h_0 enthalten ist, multiplicirt ist, und dass die Variation der im Factor h des strengen Ausdrucks (45) (I) für dR_0 enthaltenen Grösse n schon im Gliede $C''\delta\frac{h}{h_0}$ des Ausdrucks (83) (I) mit berücksichtigt ist, wir müssen daher das vorstehende Integral wie folgt schreiben,

$$\int F d\varepsilon = \frac{n_0 \gamma_c}{in - i'n'} \sin\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\right\} - \frac{n_0 \gamma_s}{in - i'n'} \cos\left\{(i - i'\mu)\,\varepsilon + A\right\}$$

Nehmen wir hievon die Variation in Bezug auf n, so wird

$$\Delta \int F d\varepsilon = f(i,i') \int F d\varepsilon$$

wenn man

$$f(i,i') = -\frac{i}{i - i'\mu}\,\frac{(n) - n_0}{n_0}$$

setzt, wo n_0 wieder der osculirende, und (n) der wahre Werth der mittleren Bewegung ist. Wendet man diesen Ausdruck auf die im vor. §. vorkommenden Integrale an, so findet sich leicht,

$$\Delta P(i,i') = \left(\frac{F(i,i')}{i - i'\mu}\right) f(i,i') + \left(\frac{G(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) f(i+1,i') + \left(\frac{H(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) f(i-1,i')$$

$$\Delta Q(i,i') = \left(\frac{G(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) f(i+1,i') - \left(\frac{H(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) f(i-1,i')$$

$$\Delta R(i,i') = R(i,i') f(i,i') + \frac{\Delta P(i,i') - \frac{e}{2}\Delta P(i+1,i') - \frac{e}{2}\Delta P(i-1,i')}{i - i'\mu}$$

$$\Delta S(i,i') = S(i,i') f(i,i') + \frac{\Delta Q(i,i')}{i - i'\mu}$$

$$\Delta Y(i,i') = \left(\frac{T(i,i')}{i - i'\mu}\right) f(i,i') + \left(\frac{U(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) f(i+1,i') + \left(\frac{V(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) f(i-1,i')$$

$$\Delta W(i,i') = -\left(\frac{U(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) f(i+1,i') + \left(\frac{V(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) f(i-1,i')$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

wo ich die Indices c und s weggelassen habe, weil die Formeln unverändert für beide gelten. Ich bemerke noch dass die Quotienten, womit die f Functionen multiplicirt sind, durch die vorhergehenden Rechnungen gegeben sind. Hat man nun die vorstehenden Grössen berechnet, so wird

$$\Delta n\delta z = \Sigma\Delta R(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} - \Sigma\Delta R(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$

$$2\Delta v = \Sigma\Delta S(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} + \Sigma\Delta S(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \Sigma Y(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} + \Sigma Y(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$

$$\Delta\frac{d\delta z}{dt} = \Sigma P(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} + \Sigma P(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$

$$2\Delta\frac{dv}{d\varepsilon} = -\Sigma Q(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} + \Sigma Q(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$

$$\Delta\frac{du}{\cos i d\varepsilon} = \Sigma W(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} - \Sigma W(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$

Wenn $(n)-n_0$ sehr merklich ist, so kann es sich ereignen, dass die vorstehenden Ausdrücke für die Glieder, die den kleinsten Divisor enthalten, nicht ausreichen, in diesem Falle verfährt man am Besten, wenn man mit (n) den betreffenden Divisor von Neuem berechnet, und damit die Divisionen, welche die Integrale erfordern, von Neuem ausführt.

§. 6. Anwendung der Entwickelungen der §§. 4 und 5 auf die vom Jupiter, Saturn und Mars bewirkten Störungen der Egeria.

57.

Vor Allem sind nach den Formeln (13) und (26) die mit A, C und N bezeichneten Coefficienten zu berechnen, die blos von der Excentricität des gestörten Planeten abhängen, und daher mit dem störenden Planeten sich nicht ändern. Dass die mit B, D und M bezeichneten Coefficienten nicht gebraucht werden, habe ich schon oben angeführt. Mit der mehrmals angeführten Excentricität der Egeriabahn fand sich

$$\log A_{-1} = 7.55965$$
$$\log A_0 = 9.408001n$$
$$\log A_1 = 0.303387$$
$$\log A_2 = 8.63088n$$
$$\log C_{-1} = 7.55965$$
$$\log C_0 = 8.63088n$$
$$\log C_1 = 0.001573n$$
$$\log C_2 = 8.63088$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\log N_{-1} = 7.2554$$
$$\log N_0 = 8.803831n$$
$$\log N_1 = 9.700531$$
$$\log N_2 = 8.32676n$$

Hiemit ergaben sich zuerst die $G(i,i',c)$, $H(i,i',c)$, $G(i,i',s)$, $H(i,i',s)$ durch (15) und die $F(i,i',c)$ und $F(i,i',s)$ durch (17), die ich für Jupiter und Saturn alle einzeln anführen will.

Jupiter.

	c	s
½F(0,0)		−0″03351
G(1,0)	−26″0998	+0.06702
		+0.03351
F(1,0)	+1.364	+0.362
G(2,0)	+1.611	+0.378
H(0,0)	−2.49209	−0.78967
	+0.483	−0.050
F(2,0)	+5.934	+2.198
G(3,0)	−0.967	−0.381
H(1,0)	−7.005	−2.579
	−2.038	−0.762
3,0	−0.339	−0.522
	−0.031	+0.042
	+0.505	+0.661
	+0.135	+0.181
4,0	−0.155	−0.096
	+0.028	+0.023
	+0.180	+0.105
	+0.053	+0.032
−3,−1	−0.104	−0.138
	+0.117	+0.174
	+0.025	+0.014
	+0.038	+0.050
−2,−1	−0.830	−0.129
	+1.141	+0.267
	−0.054	−0.125
	+0.257	+0.013
−1,−1	+1.201	+1.697
	−2.292	−3.244
	+0.575	+0.897
	−0.516	−0.650
0,−1	−0.417	−1.090
	−2.140	−0.647
	+2.945	+2.735
	+0.388	+0.998

	c	s
1,−1	+3″901	+11″023
	+1.344	+4.545
	−6.536	−19.193
	−1.291	−3.625
2,−1	−1.870	+1.197
	+0.653	−0.841
	+1.810	−1.060
	+0.593	−0.704
3,−1	+0.272	−5.604
	−0.063	+1.253
	−0.324	+6.253
	−0.115	+1.902
4,−1	−0.195	+0.219
	+0.030	+0.014
	+0.230	−0.335
	+0.065	−0.102
5,−1	−0.053	+0.155
	+0.013	−0.035
	+0.057	−0.173
	+0.017	−0.053
−3,−2	−0.016	−0.055
	+0.020	+0.074
	+0.001	0.000
	+0.005	+0.019
−2,−2	−0.121	+0.085
	+0.173	−0.098
	−0.040	−0.032
	+0.042	−0.045
−1,−2	+0.022	+0.504
	+0.029	−1.150
	−0.089	+0.520
	−0.038	−0.126

	c	s
0,−2	+0″917	−0″865
	−2.568	+2.952
	+0.904	−1.365
	−0.747	+0.722
1,−2	−13.957	+11.694
	+5.746	−3.338
	+15.551	−14.187
	+7.340	−5.831
2,−2	+89.825	−63.473
	−27.362	+19.358
	−92.475	+65.392
	−30.012	+21.277
3,−2	+4.363	+0.120
	−1.907	+0.206
	−3.259	−0.880
	−0.803	−0.554
4,−2	−3.957	+1.096
	+0.987	−0.271
	+4.346	−1.194
	+1.376	−0.369
5,−2	+0.054	+0.057
	+0.026	−0.018
	−0.121	−0.049
	−0.041	−0.010
6,−2	+0.127	+0.008
	−0.029	−0.002
	−0.141	−0.007
	−0.043	−0.001
−2,−3	−0.035	+0.028
	+0.064	−0.038
	−0.016	−0.001
	+0.013	−0.011

-1, -3	+0.056	+0.072
	-0.055	-0.179
	-0.045	+0.089
	-0.044	-0.018
0, -3	+0.080	-0.153
	-0.9749	+0.4492
	+0,834	-0.179
	-0.061	+0.117
1, -3	-2.48168	+1.40311
	+2.90258	+0.25719
	+1.29794	-2.14054
	+1.71884	-0.48024
2, -3	+28.966	-0.442
	-9.654	-0.549
	+30.5410	-0.0058
	-11.229	-0.997
3, -3	-51.522	-39.586
	+16.186	+12.477
	+52.745	+40.217
	+17.409	+13.108
4, -3	-1.896	-4.099
	+0.790	+1.538
	+1.326	+3.641
	+0.220	+1.080
5, -3	+1.499	+2.156
	-0.401	-0.541
	-1.619	-2.376
	-0.521	-0.761
6, -3	+0.037	+0.041
	-0.017	-0.028
	-0.021	-0.011
	-0.001	+0.002
-1, -4	+0.020	+0.019
	-0.034	-0.051
	+0.003	+0.025
	-0.011	-0.007
0, -4	-0.015	-0.067
	-0.164	+0.089
	+0.189	+0.028
	+0.010	+0.050
1, -4	-0.245	+0.402
	+0.615	+0.433
	-0.148	-0.948
	+0.222	-0.113
2, -4	+4.554	+1.416
	-1.508	-1.750
	-4.810	-0.796
	-1.764	-1.130

3, -4	-8.067	-21.982
	+2.346	+7.485
	+8.101	+22.828
	+2.380	+8.331
4, -4	-12.380	+33.150
	+3.976	-10.574
	+12.397	-33.773
	+3.993	-11.197
5, -4	-2.493	+2.650
	+0.894	-0.973
	+2.348	-2.300
	+0.749	-0.623
6, -4	+0.978	-1.279
	-0.260	+0.352
	-1.068	+1.380
	-0.350	+0.453
7, -4	+0.062	-0.053
	-0.023	+0.021
	-0.052	+0.040
	-0.013	+0.008
0, -5	-0.001	-0.018
	-0.038	+0.034
	+0.039	-0.002
	0.000	+0.014
1, -5	-0.057	+0.126
	+0.114	+0.100
	-0.007	-0.275
	+0.050	-0.049
2, -5	+0.809	+0.143
	-0.019	-0.524
	-1.072	+0.189
	-0.282	-0.192
3, -5	-0.054	-4.944
	-0.661	+1.878
	+0.360	+5.022
	-0.355	+1.956
4, -5	-12.829	+10.195
	+4.416	-3.277
	+13.234	-10.338
	+4.821	-3.420
5, -5	+18.319	+1.216
	-5.899	-0.411
	-18.589	-1.090
	-6.169	-0.285
6, -5	+2.379	+0.999
	-0.846	-0.352
	-2.186	-0.978
	-0.653	-0.331

7, -5	-0.874	-0.301
	+0.252	+0.083
	+0.938	+0.328
	+0.316	+0.110
1, -6	-0.016	+0.026
	+0.0314	+0.0197
	-0.002	-0.056
	+0.013	-0.010
2, -6	+0.1961	+0.0194
	+0.0281	-0.1099
	-0.2972	+0.0542
	-0.0730	-0.0363
3, -6	-0.012	-0.939
	-0.340	+0.259
	+0.2398	+1.0374
	-0.112	+0.357
4, -6	-4.041	+1.288
	+1.584	-0.118
	+4.064	-1.436
	+1.607	-0.266
5, -6	+8.710	+5.869
	-2.864	-2.040
	-8.853	-6.040
	-3.007	-2.211
6, -6	-1.987	-8.986
	+0.634	+2.901
	+2.099	+9.092
	+0.746	+3.007
7, -6	+0.090	-1.691
	-0.046	+0.583
	-0.091	+1.607
	-0.047	+0.499
8, -6	-0.002	+0.512
	+0.002	-0.068
	+0.002	-0.632
	+0.002	-0.188
2, -7	+0.046	+0.006
	+0.006	-0.028
	-0.069	+0.013
	-0.017	-0.009
3, -7	-0.015	-0.223
	-0.088	+0.028
	+0.082	+0.279
	-0.021	+0.084
4, -7	-0.904	+0.203
	+0.340	+0.142
	+0.921	-0.339
	+0.357	+0.006

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

5,−7	+1″.832	+2″.621	7,−8	−3″.712	+0″.039	9,−9	+0″.543	−0″.830
	−0.497	−1.031		+1.252	+0.006		−0.178	+0.264
	−1.903	−2.642		+3.757	−0.030		−0.535	+0.853
	−0.568	−1.052		+1.297	+0.015		−0.170	+0.287
6,−7	+1.813	−6.089	8,−8	+1.435	+1.564	10,−9	+0.206	−0.292
	−0.652	+2.030		−0.452	−0.508		−0.071	+0.095
	−1.863	+6.180		−1.486	−1.563		−0.199	+0.268
	−0.702	+2.121		−0.503	−0.507		−0.064	+0.089
7,−7	−3.950	+2.110	9,−8	+0.438	+0.518	4,−10	−0.014	+0.007
	+1.280	−0.675		−0.172	−0.182		+0.003	+0.004
	+3.979	−2.188		−0.401	−0.496		−0.016	−0.011
	+1.309	−0.753		−0.135	−0.160		+0.005	0.000
8,−7	−0.949	+0.302	10,−8	−0.076	−0.107	5,−10	+0.025	+0.054
	+0.311	−0.103		+0.021	+0.031		+0.008	−0.017
	+0.927	−0.282		+0.084	+0.116		−0.037	−0.054
	+0.289	−0.083		+0.029	+0.040		−0.004	−0.017
9,−7	+0.259	−0.092	3,−9	−0.007	−0.014	6,−10	+0.131	−0.097
	−0.075	+0.030		−0.003	+0.002		−0.055	0.000
	−0.279	+0.095		+0.010	+0.017		−0.131	+0.122
	−0.095	+0.033		0.000	+0.005		−0.055	+0.025
2,−8	+0.011	0.000	4,−9	−0.055	+0.025	7,−10	−0.368	−0.269
	+0.002	−0.008		+0.014	+0.006		+0.094	+0.125
	−0.017	+0.007		−0.063	−0.035		+0.395	+0.260
	−0.004	−0.001		+0.022	−0.004		+0.121	+0.116
3,−8	−0.008	−0.053	5,−9	+0.112	+0.104	8,−10	−0.102	+0.952
	−0.019	+0.007		−0.001	−0.008		+0.067	−0.320
	+0.023	+0.066		−0.141	−0.135		+0.093	−0.970
	−0.004	+0.020		−0.028	−0.039		+0.058	−0.338
4,−8	−0.208	+0.061	6,−9	+0.287	+0.026	9,−10	+0.939	−0.618
	+0.056	+0.049		−0.092	−0.208		−0.315	+0.202
	+0.234	−0.111		−0.331	+0.159		−0.952	+0.625
	+0.082	−0.001		−0.136	−0.024		−0.329	+0.209
5,−8	+0.338	+0.697	7,−9	−1.427	−0.528	10,−10	−0.446	−0.159
	+0.010	−0.291		+0.491	+0.215		+0.150	+0.052
	−0.421	−0.691		+1.431	+0.551		+0.454	+0.153
	−0.073	−0.285		+0.495	+0.238		+0.158	+0.046
6,−8	+1.438	−1.781	8,−9	+0.603	+1.978			
	−0.587	+0.567		−0.203	−0.669			
	−1.437	+1.814		−0.599	−1.999			
	−0.586	+0.600		−0.199	−0.690			

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Saturn.

	c	s		c	s		c	s
			$-1, -2$	$-0''.004$	$-0''.003$	$4, -3$	$-0''.014$	$-0''.039$
$\frac{1}{2}F(0,0)$		$-0''.00044$		$+0.007$	$+0.005$		$+0.005$	$+0.005$
$G(1,0)$	$-1''.1002$	$+0.00087$		-0.001	-0.004		$+0.012$	$+0.062$
		$+0.00043$		$+0.002$	-0.002		$+0.003$	$+0.028$
$F(1,0)$	$+0.051$	$+0.005$	$0, -2$	-0.017	$+0.031$	$1, -4$	$+0.011$	-0.016
$G(2,0)$	$+0.058$	$+0.005$		$+0.038$	-0.102		-0.003	0.000
$H(0,0)$	-0.08874	-0.01024		-0.006	$+0.043$		-0.013	$+0.021$
	$+0.020$	0.000		$+0.015$	-0.028		-0.005	$+0.005$
$F(2,0)$	$+0.215$	$+0.042$	$1, -2$	$+0.327$	-0.583	$2, -4$	-0.071	$+0.013$
$G(3,0)$	-0.063	-0.013		-0.171	$+0.271$		$+0.017$	-0.007
$H(1,0)$	-0.225	-0.043		-0.340	$+0.635$		$+0.075$	-0.002
	-0.073	-0.014		-0.184	$+0.323$		$+0.021$	$+0.004$
$3, 0$	0.000	-0.004	$2, -2$	-2.633	$+4.377$	$3, -4$	-0.089	$+0.326$
	-0.001	$+0.002$		$+0.860$	-1.428		$+0.029$	-0.099
	$+0.003$	$+0.003$		$+2.658$	-4.422		$+0.094$	-0.323
	$+0.002$	$+0.001$		$+0.885$	-1.473		$+0.034$	-0.096
$-2, -1$	-0.015	$+0.001$	$3, -2$	$+0.026$	-0.110	$4, -4$	$+0.238$	$+0.452$
	$+0.014$	$+0.001$		$+0.004$	$+0.014$		-0.078	-0.150
	$+0.005$	-0.002		-0.063	$+0.172$		-0.240	-0.450
	$+0.004$	0.000		-0.033	$+0.076$		-0.080	-0.148
$-1, -1$	-0.037	$+0.028$	$4, -2$	$+0.030$	-0.033	$1, -5$	$+0.001$	-0.002
	$+0.0627$	-0.0471		-0.010	$+0.011$		-0.001	0.000
	-0.015	$+0.010$		-0.030	$+0.032$		-0.001	$+0.002$
	$+0.011$	-0.009		-0.010	$+0.010$		-0.001	0.000
$0, -1$	$+0.0222$	-0.0141	$0, -3$	-0.004	$+0.008$	$2, -5$	-0.008	-0.005
	-0.0803	-0.0044		$+0.010$	-0.015		$+0.001$	0.000
	$+0.0367$	$+0.0320$		-0.003	$+0.001$		$+0.008$	$+0.007$
	-0.0214	$+0.0135$		$+0.003$	-0.006		$+0.001$	$+0.002$
$1, -1$	-0.259	$+0.161$	$1, -3$	$+0.064$	-0.120	$3, -5$	-0.031	$+0.033$
	-0.082	$+0.043$		-0.036	$+0.019$		$+0.009$	-0.009
	$+0.4308$	-0.2611		-0.063	$+0.154$		$+0.032$	-0.031
	$+0.090$	-0.057		-0.035	$+0.053$		$+0.010$	-0.007
$2, -1$	$+0.107$	-0.128	$2, -3$	-0.506	$+0.478$	$4, -5$	$+0.037$	$+0.133$
	-0.022	$+0.036$		$+0.162$	-0.125		-0.010	-0.043
	-0.116	$+0.132$		$+0.512$	-0.464		-0.036	-0.131
	-0.031	$+0.040$		$+0.168$	-0.111		-0.009	-0.041
$3, -1$	$+0.101$	-0.033	$3, -3$	-0.044	$+1.674$	$5, -5$	$+0.128$	$+0.082$
	-0.032	$+0.011$		$+0.017$	-0.554		-0.043	-0.028
	-0.102	$+0.032$		$+0.037$	-1.676		-0.126	-0.080
	-0.033	$+0.010$		$+0.010$	-0.556		-0.041	-0.026

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

Im Anfang dieser beiden Tafeln habe ich die Bezeichnung der numerischen Grössen, die sie enthalten, in der ersten Columne angeführt, nachher habe ich mich begnügt, blos die Indices der F Coefficienten anzugeben, die der darunter stehenden G und H Coefficienten folgen daraus von selbst. Jede vierte Zeile enthält die Summe der drei darüber stehenden, und giebt also die Coefficienten der im Vorhergehenden mit $\overline{T}$ bezeichneten Grösse, das ist die Coefficienten der Entwickelung von $\frac{r}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$. Diese dienen zur Controle der folgenden Rechnungen, und werden auch bei der Berechnung der vom Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder gebraucht.

Durch Anwendung der Formeln (28) und (31) ergaben sich ferner die folgenden Coefficienten, aus welchen die Breitenstörungen hervorgehen.

Jupiter.

	s	c		s	c		s	c
			1,−1	−0″011	−0″164	3,−2	−0″116	+0″063
$\frac{1}{2}T(0,0)$	−0″11567			−2.156	−1.198		−0.950	+2.033
$U(1,0)$	+0.11567	+3″328		+2.167	+1.362		+1.066	−2.096
$T(1,0)$	+0.031	−0.185	2,−1	+0.136	+0.104	4,−2	+0.082	−0.181
$U(2,0)$	−1.394	−7.418		+4.218	+0.548		−0.013	−0.032
$V(0,0)$	+1.36263	+7.60274		−4.354	−0.652		−0.069	+0.213
$T(2,0)$	+0.125	+0.643	3,−1	−0.369	−0.044	5,−2	+0.002	+0.004
$U(3,0)$	+0.361	+0.514		−0.196	+0.067		+0.010	−0.099
$V(1,0)$	−0.486	−1.157		+0.565	−0.023		−0.012	+0.095
3,0	−0.035	−0.046	4,−1	+0.019	−0.008	−1,−3	+0.023	+0.002
	+0.107	+0.195		−0.153	+0.033		+0.019	−0.102
	−0.072	−0.149		+0.134	−0.025		−0.042	+0.100
4,0	−0.009	−0.017	−2,−2	+0.014	−0.018	0,−3	−0.044	+0.184
	−0.033	−0.016		−0.107	+0.004		+0.2973	−0.1593
	+0.042	+0.033		+0.093	+0.014		−0.253	−0.025
−3,−1	−0.018	−0.014	−1,−2	+0.148	−0.050	1,−3	−0.1743	−0.3460
	+0.029	+0.076		+0.015	−0.139		−0.3267	+2.4159
	−0.011	−0.062		−0.163	+0.189		+0.5010	−2.0699
−2,−1	−0.045	−0.093	0,−2	−0.489	+0.457	2,−3	+0.050	−0.093
	−0.165	−0.060		+2.146	−1.053		−1.803	−4.147
	+0.210	+0.153		−1.657	+0.596		+1.7533	+4.2398
−1,−1	+0.385	+0.224	1,−2	−0.028	−0.016	3,−3	+0.080	+0.279
	−0.893	−1.236		−5.778	+5.261		+0.178	+1.036
	+0.508	+1.012		+5.806	−5.245		−0.258	−1.315
0,−1	−0.109	−0.011	2,−2	+0.395	−0.267	4,−3	−0.010	−0.084
	+4.492	+2.579		+1.426	−0.974		−0.841	−0.766
	−4.383	−2.568		−1.821	+1.241		+0.851	+0.850

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

5,−3	+0″077	+0″068	3,−5	−0″002	+0″115	3,−7	+0″013	+0″015
	−0.020	−0.024		+0.895	−0.793		+0.031	−0.068
	−0.057	−0.044		−0.893	+0.678		−0.044	+0.053
6,−3	+0.001	+0.002	4,−5	−0.055	+0.036	4,−7	−0.040	+0.006
	+0.055	+0.023		−0.348	+1.263		+0.174	+0.165
	−0.056	−0.025		+0.403	−1.299		−0.134	−0.176
0,−4	−0.005	+0.032	5,−5	+0.035	−0.082	5,−7	+0.010	−0.031
	+0.096	+0.014		+0.197	−0.280		−0.444	+0.027
	−0.091	−0.046		−0.232	+0.362		+0.434	+0.004
1,−4	−0.123	−0.078	6,−5	−0.017	+0.024	6,−7	+0.028	+0.001
	+0.056	+0.432		+0.069	+0.261		+0.280	−0.198
	+0.067	−0.354		−0.052	−0.285		−0.308	+0.197
2,−4	+0.210	−0.047	1,−6	−0.006	−0.005	7,−7	−0.021	+0.012
	−1.574	−0.857		−0.006	+0.028		−0.094	+0.024
	+1.364	+0.904		+0.012	−0.023		+0.115	−0.036
3,−4	+0.069	+0.060	2,−6	+0.014	+0.022	8,−7	+0.009	−0.003
	+2.469	−0.181		−0.082	−0.022		+0.014	−0.061
	−2.538	+0.121		+0.068	+0.044		−0.023	+0.064
4,−4	−0.164	−0.007	3,−6	+0.026	+0.059	3,−8	+0.004	+0.004
	−0.595	−0.139		+0.141	−0.294		+0.011	−0.017
	+0.759	+0.146		−0.167	+0.235		−0.015	+0.013
5,−4	+0.049	+0.012	4,−6	−0.059	−0.011	4,−8	−0.012	+0.008
	+0.481	−0.287		+0.286	+0.690		+0.048	+0.034
	−0.530	+0.275		−0.227	−0.679		−0.036	−0.042
6,−4	−0.043	+0.026	5,−6	−0.013	−0.041	5,−8	+0.003	−0.023
	+0.030	−0.019		−0.553	−0.389		−0.144	+0.080
	+0.013	−0.007		+0.566	+0.430		+0.141	−0.057
0,−5	−0.004	+0.008	6,−6	+0.035	+0.032	6,−8	+0.015	+0.008
	+0.029	0.000		+0.104	+0.154		+0.069	−0.247
	+0.025	−0.008		−0.139	−0.186		−0.084	+0.239
1,−5	−0.029	−0.011	7,−6	−0.009	−0.013	7,−8	−0.005	+0.016
	−0.017	+0.094		−0.127	−0.002		+0.045	+0.166
	+0.046	−0.083		+0.136	+0.015		−0.040	−0.182
2,−5	+0.077	−0.066	2,−7	+0.004	−0.005	8,−8	−0.002	−0.013
	−0.402	−0.062		−0.023	−0.009		+0.006	−0.0 4
	+0.325	+0.128		+0.019	+0.014		−0.004	+0.062

Saturn.

	s	*c*		*s*	*c*		*s*	*c*
			3,0	0″000	−0″001	0,−1	−0″001	−0″001
$\frac{1}{2}T(0,0)$	−0″00216			0.000	+0.002		+0.057	−0.075
$U(1,0)$	+0.00216	+0″083		0.000	−0.001		−0.056	+0.076
$T(1,0)$	+0.001	−0.005	−2,−1	0.000	−0.001	1,−1	−0.002	0.000
$U(2,0)$	−0.026	−0.259		−0.003	+0.005		−0.025	+0.011
$V(0,0)$	+0.02537	+0.26379		+0.003	−0.004		+0.027	−0.011
$T(2,0)$	+0.002	+0.023	−1,−1	+0.005	−0.007	2,−1	+0.001	+0.002
$U(3,0)$	+0.003	+0.008		−0.011	−0.006		+0.035	+0.075
$V(1,0)$	−0.005	−0.031		+0.006	+0.013		−0.036	+0.073

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

−1,−2	−0″002	0″000	2,−2	−0″018	+0″009	1,−3	+0″008	+0″001
	−0.004	+0.001		−0.017	−0.004		+0.021	−0.025
	+0.006	−0.001		+0.035	−0.005		−0.029	+0.024
0,−2	+0.021	−0.010	3,−2	+0.001	+0.001	2,−3	−0.003	+0.004
	−0.046	+0.013		+0.020	−0.015		+0.084	+0.007
	+0.025	−0.003		−0.021	+0.014		−0.081	−0.008
1,−2	+0.001	−0.001	0,−3	+0.003	−0.002			
	+0.235	−0.114		−0.009	+0.002			
	−0.236	+0.115		+0.006	0.000			

58.

Um weiter gehen zu können braucht man die numerischen Werthe der Divisoren $i-i'\mu$, und diese erhält man sehr leicht aus den im §. 7 (I) für den Jupiter, und in §. 1 für den Saturn angeführten numerischen Werthen der Vielfachen von μ. Es wird z. B. für den Jupiter

$$
\begin{array}{lll}
-1-\mu=-1.3485\;, & -1-2\mu=-1.69696\;, & 0-3\mu=-1.04543 \\
0-\mu=-0.34848, & 0-2\mu=-0.69696\;, & 1-3\mu=-0.0454334 \\
1-\mu=+0.65152, & 1-2\mu=+0.303044, & 2-3\mu=+0.954567 \\
2-\mu=+1.6515\;, & 2-2\mu=+1.30304\;, & 3-3\mu=+1.95457 \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

u. s. w. Hiemit ergeben sich durch die Formeln (20), so wie durch die analogen des Art. 47 die folgenden Werthe der mit $P(i,i',c)$, $P(i,i',s)$, $Q(i,i',c)$ und $Q(i,i',s)$ bezeichneten Coefficienten.

Jupiter.

	c	s		c	s		c	s
$P(0,0)$	−26″100		0,−1	−4″272	+0″106	−1,−2	−0″022	+1″161
$Q(0,0)$		+0″06702		−1.101	+1.036		−0.075	+1.843
$P(1,0)$	+2.170	+0.551	1,−1	+25.559	+74.748	0,−2	−10.323	+11.785
$Q(1,0)$	+0.806	+0.189		−17.942	−52.323		−7.941	+8.936
$P(2,0)$	−4.360	−1.407	2,−1	+1.894	−1.219	1,−2	−63.958	+56.382
$Q(2,0)$	+6.683	+2.452		−2.532	+1.310		+26.723	−22.917
3,0	+0.132	+0.168	3,−1	−0.110	+2.015	2,−2	−248.099	+175.479
	−0.261	−0.320		+0.179	−3.443		+293.272	−207.378
4,0	+0.027	+0.016	4,−1	+0.039	−0.064	3,−2	−1.184	−0.561
	−0.054	−0.030		−0.081	+0.130		+1.924	+0.737
−3,−1	−0.025	−0.036	5,−1	+0.007	−0.021	4,−2	+0.918	−0.249
	−0.044	−0.071		−0.014	+0.042		−1.658	+0.455
−2,−1	−0.477	−0.106	−3,−2	−0.003	−0.012	5,−2	−0.019	−0.005
	−0.862	−0.235		−0.007	−0.027		+0.042	+0.012
−1,−1	+5.442	+7.670	−2,−2	−0.054	+0.034	6,−2	−0.014	0.000
	+6.821	+9.692		−0.105	+0.050		+0.028	+0.002

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

−2, −3	−0″.017	+0″.009	4, −5	+6″.194	−4″.710	4, −8	+0″.956	−0″.450
	−0.035	+0.018		−9.167	+7.215		−1.078	+0.544
−1, −3	+0.041	+0.107	5, −5	−3.995	−0.207	5, −8	−0.191	−0.346
	+0.038	+0.200		+6.848	+0.386		+0.350	+0.519
0, −3	+20.973	−9.650	6, −5	−0.273	−0.132	6, −8	−0.342	+0.401
	+21.866	−9.971		+0.510	+0.233		+0.510	−0.685
1, −3	+56.4216	−28.5659	7, −5	+0.094	+0.033	7, −8	+0.528	+0.001
	+4.2822	−1.7781		−0.180	−0.064		−0.928	+0.010
2, −3	+697.620	−0.615	1, −6	−0.329	−0.214	8, −8	−0.151	−0.154
	−677.153	−0.409		−0.346	−0.244		+0.280	+0.290
3, −3	+34.373	+26.101	2, −6	−1.855	−0.385	9, −8	−0.030	−0.037
	−49.778	−37.909		−0.241	−0.071		+0.053	+0.070
4, −3	+0.237	+0.865	3, −6	−2.830	−12.314	10, −8	+0.006	+0.008
	−0.479	−1.474		+2.461	+11.553		−0.011	−0.015
5, −3	−0.250	−0.368	4, −6	+2.897	−0.945	3, −9	+0.039	+0.090
	+0.467	+0.695		−3.924	+1.538		+0.006	+0.017
6, −3	−0.001	0.000	5, −6	−2.377	−1.668	4, −9	−0.518	+0.289
	+0.002	−0.002		+3.905	+2.641		+0.470	−0.254
−1, −4	+0.015	+0.022	6, −6	+0.343	+1.418	5, −9	−0.103	−0.103
	+0.025	+0.044		−0.593	−2.535		+0.163	+0.153
0, −4	+0.348	−0.190	7, −6	−0.013	+0.165	6, −9	−0.102	+0.040
	+0.495	−0.214		+0.015	−0.312		+0.154	−0.139
1, −4	+1.743	+0.375	8, −6	0.000	−0.052	7, −9	+0.232	+0.100
	+0.909	+0.035		0.000	+0.119		−0.399	−0.149
2, −4	+18.787	+3.267	2, −7	−0.046	−0.073	8, −9	−0.066	−0.225
	−13.150	−3.110		−0.037	−0.041		+0.120	+0.403
3, −4	+9.244	+26.851	3, −7	−0.271	−1.014	9, −9	−0.043	+0.071
	−12.466	−34.793		+0.130	+0.653		+0.084	−0.137
4, −4	+4.071	−11.241	4, −7	+1.197	−0.419	10, −9	−0.013	+0.018
	−6.615	+18.095		−1.510	+0.661		+0.025	−0.037
5, −4	+0.404	−0.359	5, −7	−0.644	−0.959	4, −10	−0.058	+0.040
	−0.707	+0.670		+1.080	+1.403		+0.035	−0.020
6, −4	−0.130	+0.168	6, −7	−0.362	+1.150	5, −10	−0.052	−0.078
	+0.250	−0.320		+0.585	−1.968		+0.075	+0.098
7, −4	−0.003	+0.003	7, −7	+0.481	−0.273	6, −10	−0.051	+0.041
	+0.008	−0.006		−0.888	+0.493		+0.071	−0.080
0, −5	+0.038	−0.035	8, −7	+0.079	−0.024	7, −10	+0.074	+0.055
	+0.065	−0.047		−0.156	+0.046		−0.137	−0.076
1, −5	+0.524	+0.376	9, −7	−0.021	+0.007	8, −10	+0.016	−0.123
	+0.439	+0.230		+0.040	−0.013		−0.015	+0.218
2, −5	+4.569	−0.117	2, −8	+0.007	−0.042	9, −10	−0.088	+0.057
	−1.459	−0.162		+0.003	−0.034		+0.163	−0.107
3, −5	+1.061	+16.395	3, −8	−0.081	−0.328	10, −10	+0.034	+0.011
	−1.690	−18.663		+0.013	+0.090		−0.062	−0.021

Saturn.

	c	s		c	s		c	s
P(0,0)	−1″100		0,−2	+0″119	−0″286	1,−4	+0″046	−0″075
Q(0,0)		+0″00087		+0.048	−0.109		−0.025	+0.038
P(1,0)	+0.080	+0.008	1,−2	+1.567	−2.916	2,−4	+0.127	+0.001
Q(1,0)	+0.029	+0.003		−1.312	+2.421		−0.166	+0.002
2,0	−0.138	−0.026	2,−2	+2.480	−4.125	3,−4	+0.037	−0.120
	+0.204	+0.039		−3.380	+5.622		−0.057	+0.196
−2,−1	−0.007	0.000	3,−2	−0.026	+0.064	4,−4	−0.047	−0.088
	−0.010	−0.002		+0.038	−0.096		+0.080	+0.151
−1,−1	−0.408	+0.306	4,−2	−0.005	+0.005	1,−5	+0.003	−0.010
	−0.454	+0.341		+0.009	−0.010		−0.002	+0.003
0,−1	−0.2837	+0.0673	0,−3	+0.029	−0.046	2,−5	+0.021	+0.020
	−0.0612	+0.0230		+0.015	−0.025		−0.027	−0.024
1,−1	−3.418	+2.073	1,−3	+0.238	−0.561	3,−5	+0.014	−0.013
	+3.028	−1.839		−0.173	+0.378		−0.022	+0.021
2,−1	−0.085	+0.098	2,−3	+0.626	−0.548	4,−5	−0.007	−0.027
	+0.127	−0.141		−0.821	+0.753		+0.014	+0.047
3,−1	−0.028	+0.008	3,−3	+0.012	−0.567	5,−5	−0.016	−0.010
	+0.047	−0.014		−0.019	+0.906		+0.030	+0.019
−1,−2	−0.022	−0.014	4,−3	+0.002	+0.014			
	−0.025	−0.020		−0.004	−0.023			

Die durch die Formeln (34) erhaltenen $W(i,i,s)$ und $W(i,i,c)$ führe ich endlich noch an.

Jupiter.

	s	c		s	c		s	c
W(−3,−1)	+0″015	+0″046	3,−3	−0″330	−1″729	2,−6	+0″028	−0″016
W(−2,−1)	−0.185	−0.090	4,−3	+0.648	+0.629	3,−6	+1.769	−2.433
−1,−1	−2.779	−3.978	5,−3	−0.015	−0.010	4,−6	−0.347	−0.983
0,−1	−3.642	−2.053	6,−3	−0.023	−0.010	5,−6	+0.437	+0 324
1,−1	−4.913	−3.182	0,−4	+0.282	+0.055	6,−6	−0.069	−0.095
2,−1	+8.274	−1.208	1,−4	−0.140	−0.459	7,−6	+0.057	+0.004
3,−1	+0.396	−0.032	2,−4	−2.482	−1.761	2,−7	+0.028	+0.006
4,−1	+0.083	−0.016	3,−4	−5.135	+0.270	3,−7	+0.080	−0.077
−2,−2	−0.088	−0.002	4,−4	+0.638	+0.130	4,−7	−0.307	−0.370
−1,−2	+0.082	−0.270	5,−4	−0.307	+0.168	5,−7	+0.403	−0.005
0,−2	−6.105	+3.124	6,−4	−0.001	+0.001	6,−7	−0.183	+0.121
1,−2	−3.898	+3.490	0,−5	+0.048	+0.003	7,−7	+0.049	−0.014
2,−2	−6.628	+4.518	1,−5	+0.040	−0.317	8,−7	−0.007	+0.023
3,−2	+1.106	−2.223	2,−5	−0.119	−0.123	3,−8	+0.010	−0.003
4,−2	−0.027	+0.100	3,−5	−3.862	+2.982	4,−8	−0.192	−0.213
5,−2	−0.006	+0.048	4,−5	+0.427	−1.421	5,−8	+0.161	−0.072
−1,−3	+0.032	−0.131	5,−5	−0.149	+0.226	6,−8	−0.054	+0.167
0,−3	+6.667	−3.494	6,−5	−0.029	−0.138	7,−8	−0.021	−0.089
1,−3	−0.137	−0.551	1,−6	−0.072	+0.319	8,−8	−0.002	+0.023
2,−3	−37.667	−91.198						

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden SMWK Sächsische Akademie der Wissenschaften

Saturn.

	s	c		s	c		s	c
W(-2, -1)	−0″,004	+0″,005	−1, −2	−0″,017	+0″,004	0, −3	+0″,012	−0″,003
W(-1, -1)	−0.081	−0.049	0, −2	+0.044	−0.016	1, −3	+0.056	−0.041
0, −1	−0.016	+0.020	1, −2	+0.704	−0.344	2, −3	−0.173	−0.017
1, −1	−0.179	+0.072	2, −2	+0.055	−0.006			
2, −1	−0.054	+0.111	3, −2	−0.017	+0.012			

59.

Aus den vorstehenden Zahlenwerthen ergaben sich nun die Störungen der mittleren Länge, des Logarithmus des Radius Vectors, und der auf der Bahn senkrechten Coordinate durch die Formeln (21) und (32), so wie durch die Ausdrücke der Art. 48 und 50 wie folgt, wobei die Formeln (24) und (35) als Controlen benutzt wurden.

Jupiter.

i, i'	$n\delta z$		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
	sin	cos	cos	sin	sin	cos
0,0						+3″,65
0,0		−26″,192nt	+0″,03351nt			−0.11567nt
1,0	+4″,84	−1.39	−0.84	−0″,30	−0″,68	−3.89
1,0	−0.78683nt	−2.49209nt	+0.39484nt	−1.24605nt	−7.60274nt	+1.36263nt
2,0	−2.36	+0.76	+1.72	+0.63	−0.25	−0.34
2,0	+0.01675nt	+0.05287nt				
3,0	+0.11	−0.08	−0.04	−0.05	−0.02	−0.04
−2, −1	+0.30	−0.18	+0.18	+0.05	+0.08	+0.04
−1, −1	−4.19	+5.69	−2.53	−3.59	+2.06	+2.95
0, −1	+16.04	−9.73	+1.58	−1.48	+10.46	+5.90
1, −1	+39.39	−114.80	−13.77	−40.16	−7.54	−4.88
2, −1	+0.49	+2.71	−0.77	+0.40	−5.01	−0.73
3, −1	−0.07	−0.78	+0.03	−0.65	+0.15	−0.01
4, −1	+0.01	+0.04	−0.01	+0.02	+0.02	0.00
−2, −2	+0.02	−0.01	+0.02	−0.01	+0.03	0.00
−1, −2	−0.25	+0.39	+0.02	−0.54	−0.05	+0.16
0, −2	+10.92	+13.41	+5.70	−6.41	+8.55	−4.48
1, −2	−174.86	−159.82	+44.09	−37.81	−12.86	+11.51
2, −2	−188.28	−132.88	+112.53	−79.57	−5.00	+3.47
3, −2	+4.04	+3.47	+0.42	+0.16	+0.48	−0.97
4, −2	+0.29	+0.07	−0.25	+0.07	−0.01	+0.03
−1, −3	+0.41	+0.25	−0.01	−0.05	−0.02	+0.06
0, −3	−17.77	−8.08	−10.46	+4.77	−6.38	+3.34
1, −3	−570.65	−619.16	−47.13	+19.57	+3.01	+12.13
2, −3	+726.83	+0.54	+354.69	−0.21	−39.46	−95.54
3, −3	+2.43	−13.35	−12.73	−9.70	−0.17	−0.88
4, −3	−0.40	+0.08	−0.08	−0.25	+0.22	+0.21
5, −3	−0.07	+0.10	+0.06	+0.09		

0, −4	−0,20	−0″,15	−0″,18	+0″,08	−0″,20	−0″,04
1, −4	−2.36	+0.62	−1.15	−0.04	+0.36	+1.17
2, −4	+30.24	−3.48	−10.85	−2.57	−4.10	−2.91
3, −4	+5.15	−16.93	−3.88	−10.83	−3.20	+0.17
4, −4	+1.40	+4.74	−1.27	+3.47	+0.25	+0.05
5, −4	+0.08	−0.03	−0.10	+0.09	−0.09	+0.05
6, −4	−0.03	−0.04	+0.03	−0.04		
0, −5	−0.01	−0.03	−0.02	+0.01	−0.03	0.00
1, −5	−0.44	+0.51	−0.30	−0.16	−0.05	+0.43
2, −5	+17.48	+3.22	−2.83	−0.31	−0.46	−0.48
3, −5	+0.48	−13.20	−0.67	−7.42	−3.07	+2.37
4, −5	+2.80	+2.39	−2.03	+1.60	+0.19	−0.63
5, −5	−1.30	0.00	+1.05	+0.06	−0.05	+0.07
6, −5	−0.03	+0.03	+0.06	+0.03	−0.01	−0.03
1, −6	+0.23	−0.13	+0.16	+0.11	+0.07	−0.29
2, −6	+18.94	+1.61	+1.33	+0.39	−0.31	+0.18
3, −6	−3.16	+13.48	+1.35	+6.35	+1.95	−2.68
4, −6	+1.63	+0.18	−1.03	+0.40	−0.18	−0.52
5, −6	−0.87	+0.58	+0.67	+0.45	+0.15	+0.11
6, −6	+0.11	−0.38	−0.08	−0.32	−0.02	−0.03
7, −6	−0.01	−0.02	0.00	−0.03	+0.01	0.00
2, −7	+0.08	−0.07	+0.04	+0.05	−0.06	−0.02
3, −7	−0.57	+1.77	+0.12	+0.58	+0.14	−0.14
4, −7	+0.79	+0.22	−0.48	+0.21	−0.20	−0.24
5, −7	−0.27	+0.39	+0.21	+0.27	+0.16	0.00
6, −7	−0.10	−0.34	+0.08	−0.28	−0.05	+0.03
7, −7	+0.11	−0.07	−0.10	+0.05	+0.01	0.00
2, −8	0.00	−0.04	0.00	+0.02		
3, −8	−0.58	+1.45	+0.03	+0.21	+0.05	−0.01
4, −8	+0.79	+0.35	−0.44	+0.22	−0.16	−0.18
5, −8	−0.10	+0.16	+0.08	+0.11	+0.07	−0.03
6, −8	−0.11	−0.13	+0.08	−0.11	−0.02	+0.05
7, −8	+0.13	0.00	−0.11	0.00	0.00	−0.02
8, −8	−0.03	+0.03	+0.03	+0.03		
3, −9	−0.45	+0.57	−0.02	−0.06		
4, −9	−0.61	−0.33	+0.27	−0.15		
5, −9	−0.04	+0.06	+0.04	+0.04		
6, −9	−0.04	−0.01	+0.03	−0.02		
7, −9	+0.06	−0.03	−0.05	−0.02		
8, −9	−0.02	+0.05	+0.01	+0.04		
4, −10	−0.11	−0.08	+0.03	−0.02		
5, −10	−0.03	+0.05	+0.03	+0.03		
6, −10	−0.02	−0.02	+0.01	−0.02		
7, −10	+0.02	−0.02	−0.02	−0.01		
8, −10	0.00	+0.03	0.00	+0.02		

Saturn.

i, i'	$n\delta z$		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
	sin	cos	cos	sin	sin	cos
0,0						+0."07
0,0		−1."104*nt*	+0."00044*nt*			−0.00216*nt*
1,0	+0."17	−0.02	−0.03	0."00	−0,02	−0.14
1,0	−0.01019*nt*	−0.08874*nt*	+0.00512*nt*	−0.04437*nt*	−0.26379*nt*	+0.02537*nt*
2,0	−0.15	+0.03	+0.05	+0.01	0.00	0.00
2,0	+0.00022*nt*	+0.00188*nt*				
−1,−1	+0.35	+0.27	+0.20	−0.15	+0.07	+0.04
0,−1	+0.87	−0.24	+0.22	−0.08	+0.12	−0.15
1,−1	−3.96	−2.40	+1.76	−1.07	−0.21	+0.08
2,−1	+0.03	−0.01	+0.03	−0.04	−0.03	+0 06
−1,−2	+0.02	0.00	+0.01	+0.01	+0.01	0.00
0,−2	−0.19	−0.58	−0.09	+0.19	−0.16	+0.06
1,−2	+2.03	+3.80	−0.91	+1.68	+0.98	−0.48
2,−2	+1.40	+2.33	−0.98	+1.64	+0.03	0.00
3,−2	−0.05	−0.09	+0.01	−0.02	−0.01	0.00
0,−3	−0.05	−0.05	−0.02	+0.03	−0.03	+0.01
1,−3	+0.36	+0.93	−0.15	+0.33	+0.10	−0.07
2,−3	+0.39	+0.32	−0.26	+0.24	−0.11	−0.01
3,−3	−0.01	+0.21	0.00	+0.18	0.00	0.00
1,−4	+0.09	+0.17	−0.03	+0.04		
2,−4	+0.09	−0.01	−0.06	0.00		
3,−4	+0.01	+0.05	−0.01	+0.04		
4,−4	−0.01	+0.02	+0.01	+0.02		

Eben so ergaben sich die folgenden Störungen vom

Mars,

i, i'	$n\delta z$		ν		$\frac{u}{\cos i}$	
	sin	cos	cos	sin	sin	cos
0,0		+0."171*nt*	+0."00008*nt*			+0."00034*nt*
1,0	−0."00180*nt*	−0.00543*nt*	+0.00090*nt*	−0."00272*nt*	+0."00962*nt*	−0.00410*nt*
2,0	+0.00004*nt*	+0.00012*nt*				
0,−1	+0.01	0.00	0.00	0.00		
1,−1	−0.01	+0.04	−0.09	−0.05		
2,−1	+0.29	−0.13	0.00	−0.06		
3,−1	0.00	−0.03	0.00	0.01		
2,−2	+0.01	−0.02	0.00	+0.02		
3,−2	+0.02	−0.12	+0.02	+0.08		
4,−2	+0.06	+0.33	+0.01	−0.07		
5,−2	+0.01	+0.04	0.00	+0.02		

wozu noch die im §. 2 berechnete Ungleichheit langer Periode kommt.

Ich füge diesem die Coefficienten von $\delta\frac{h}{h_0}$ hinzu, die bei der Berechnung der vom Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder gebraucht werden.

Jupiter.

	$\delta \frac{h}{h_0}$				
i, i'	cos	sin	i, i'	cos	sin
0,0	−0″,03351nt		4,−3	−0″,07	−0″,37
1,0	−0.48	+0″,05	5,−3	+0.13	+0.19
2,0	+1.02	+0.38	1,−4	+0.56	−0.29
3,0	−0.04	−0.06	2,−4	+2.91	+1.86
−2,−1	+0.11	+0.01	3,−4	−1.48	−5.19
−1,−1	−0.38	−0.48	4,−4	−1.53	+4,30
0,−1	+1.11	+2.86	5,−4	−0.21	+0 17
1,−1	+1.98	+5.56	6,−4	+0.08	−0.10
2,−1	−0.36	+0.43	1,−5	+0.07	−0.07
3,−1	+0.04	−0.72	2,−5	+1.09	+0.75
−1,−2	−0.02	−0.07	3,−5	+0.28	−1.56
0,−2	−1.07	+1.04	4,−5	−2.13	+1.52
1,−2	−24.22	+19.24	5,−5	+1.89	+0.09
2,−2	+23.03	−16.33	6,−5	+0.15	+0.08
3,−2	+0.35	+0.24	2,−6	−0.80	−0.40
4,−2	−0.42	+0.11	3,−6	+0.12	−0.39
0,−3	−0.06	+0.11	4,−6	−0.84	+0.14
1,−3	+37.83	−10.57	5,−6	+1.03	+0.76
2,−3	+11.76	+1.05	6,−6	−0.19	−0.77
3,−3	−8.91	−6.71	7,−6	+0.01	−0.10

Saturn.

	$\delta \frac{h}{h_0}$	
i, i'	cos	sin
0,0	−0″,00044nt	
1,0	−0.02	0″,00
2,0	+0.04	+0.01

Vom Mars kommt höchstens $\delta \frac{h}{h_0} = -0'',00008nt$ in Betracht, welches Glied auch so klein ist, dass ich es hätte weglassen können.

60.

Im Vorhergehenden sind die den Integralen hinzuzufügenden Constanten noch nicht angesetzt. Addiren wir die Glieder der Abtheilung für $i' = 0$, die für alle störenden Planeten gleiche Argumente haben, und fügen die Constanten nach den Vorschriften des vor. § hinzu, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
nz = c &+ \left\{1 - 27{,}''125 + k - \tfrac{e}{2}k_1\right\} nt \\
&+ \left\{5{,}''01 + \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)k_1\right\}\sin\varepsilon + \left\{-1{,}''41 - k_2\right\}\cos\varepsilon \\
&- 0{,}79882\,nt\sin\varepsilon \qquad\qquad - 2{,}58626\,nt\cos\varepsilon \\
&+ \left\{-2{,}50 - \tfrac{e}{4}k_1\right\}\sin 2\varepsilon \quad + \left\{0{,}79 + \tfrac{e}{4}k_2\right\}\cos 2\varepsilon \\
&+ 0{,}01701\,nt\sin 2\varepsilon \qquad + 0{,}05487\,nt\cos 2\varepsilon \\
&+ 0{,}11\sin 3\varepsilon \qquad\qquad - 0{,}08\cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\nu = 2C &+ 0{,}''06805\,nt \\
&+ \{-1{,}''75 - k_1\}\cos\varepsilon + \{-0{,}''61 - k_2\}\sin\varepsilon \\
&+ 0{,}''80172\,nt\cos\varepsilon \qquad - 2{,}''58626\,nt\sin\varepsilon \\
&+ 3{,}56\cos 2\varepsilon \qquad\qquad + 1{,}28\sin 2\varepsilon \\
&- 0{,}08\cos 3\varepsilon \qquad\qquad - 0{,}10\sin 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = &+ 3{,}''72 - el_1 - 0{,}''11749\,nt \\
&+ \{-0{,}''70 + l\}\sin\varepsilon + \{-4{,}''03 + l_1\}\cos\varepsilon \\
&- 7{,}''85691\,nt\sin\varepsilon \qquad + 1{,}''38390\,nt\cos\varepsilon \\
&- 0{,}25\sin 2\varepsilon \qquad\qquad - 0{,}34\cos 2\varepsilon \\
&- 0{,}02\sin 3\varepsilon \qquad\qquad - 0{,}04\cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta z}{dt} = &- 26{,}''919 + k - 0{,}''03402\,nt \\
&+ \{2{,}''25 + k_1\}\cos\varepsilon + \{0{,}''56 + k_2\}\sin\varepsilon \\
&- 0{,}''80172\,nt\cos\varepsilon \qquad + 2{,}''58626\,nt\sin\varepsilon \\
&- 4{,}61\cos 2\varepsilon \qquad\qquad - 1{,}47\sin 2\varepsilon \\
&+ 0{,}13\cos 3\varepsilon \qquad\qquad + 0{,}17\sin 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = &+ 0{,}''03 \\
&+ \{-0{,}''84 + k_1\}\sin\varepsilon + \{0{,}''19 - k_2\}\cos\varepsilon \\
&- 0{,}''80172\,nt\sin\varepsilon \qquad - 2{,}''58626\,nt\cos\varepsilon \\
&- 7{,}00\sin 2\varepsilon \qquad\qquad + 2{,}53\cos 2\varepsilon \\
&+ 0{,}26\sin 3\varepsilon \qquad\qquad - 0{,}32\cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\left(\overline{\frac{d^2W}{d\eta^2}}\right) = + 27''090$$
$$+ \{-0''48 - k_1\} \cos\varepsilon + \{-0''19 - k_2\} \sin\varepsilon$$
$$+ 0''80172 nt \cos\varepsilon \quad - 2''58626 nt \sin\varepsilon$$
$$+ 7{,}68 \cos 2\varepsilon \quad + 2{,}79 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0{,}25 \cos 3\varepsilon \quad - 0{,}34 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

$$\delta\frac{h}{h_0} = K - 0''03402 nt$$
$$- 0''50 \cos\varepsilon + 0''05 \sin\varepsilon$$
$$+ 1{,}06 \cos 2\varepsilon + 0{,}39 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0{,}04 \cos 3\varepsilon - 0{,}06 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

$$\frac{du}{\cos i d\varepsilon} = \frac{1}{\cos i}\left(\frac{dR}{d\eta}\right) = - 0''17$$
$$+ \{0''70 + l\} \cos\varepsilon + \{-3''84 - l_1\} \sin\varepsilon$$
$$- 7''85791 nt \cos\varepsilon - 1''38390 nt \sin\varepsilon$$
$$- 0{,}55 \cos 2\varepsilon \quad + 1{,}03 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0{,}06 \cos 3\varepsilon \quad + 0{,}12 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

wo die etc. Zeichen sich auf die im Vorhergehenden enthaltenen numerischen Werthe der von $i' = 1$, etc. abhängigen Glieder beziehen.

61.

Es müssen nun zur Bestimmung der Constanten die für die Zeitepoche statt findenden numerischen Werthe von $n\delta z$, $\frac{d\delta z}{dt}$, ν, $\frac{d\nu}{d\varepsilon}$, $\frac{u}{\cos i}$ und $\frac{du}{\cos i d\varepsilon}$ berechnet werden, und zu dem Ende ergab sich aus Bouvard's Jupitertafeln mit Hinzufügung des Betrages der grossen Ungleichheit für 1851 Dec. 5,0 m. Z. Gr.

$$c' = 206^0\ 48'\ 57''5$$

und eben so aus dessen Saturntafeln

$$c' = 307^0\ 31'\ 44''0$$

Aus dem im Art. 1 angeführten Werthe von c_0, nemlich

$$c_0 = 19^0\ 31'\ 43''6$$

fand sich

$$\varepsilon_0 = 21^0\ 17'\ 41''3$$

und hiemit für den Jupiter

$$c' + \mu(\varepsilon_0 - c) = 207^0\ 25'\ 53''0$$

und für den Saturn

$$c' + \mu(\varepsilon_0 - c) = 307^0\ 46'\ 36''2$$

Nachdem hieraus die erforderlichen Bögen gebildet, und die Substitutionen in die vorhergehenden Ausdrücke ausgeführt worden waren, ergab sich

$$\begin{aligned}
(n\delta z)_0 &= -\ 0''54 + 230''55 - 6''95 = +\ 223''06\\
\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 &= -28.80 - 995.62 - 7.23 = -1031.65\\
2(\nu)_0 &= +\ 1.52 + 1031.92 + 7.23 = +1040.67\\
2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 &= -\ 2.87 + 336.17 - 8.25 = +\ 325.05\\
\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 &= -\ 0.74 + 55.06 + 0.92 = +\ 55.24\\
\left(\frac{du}{\cos i d\varepsilon}\right)_0 &= -\ 0.53 + 96.37 - 0.37 = +\ 95.47
\end{aligned}$$

Von den drei getrennten Theilen, in welchen ich diese Grössen angegeben habe, ist der erste aus den im vor. Art. für $i' = 0$ angegebenen Gliedern, nachdem darin $t = 0$ gesetzt worden war, entstanden, der zweite ergab sich aus den übrigen Jupiter-, und der dritte aus den übrigen Saturnstörungen. Die unbedeutenden periodischen Marsstörungen habe ich hiebei übergangen. Durch Anwendung der Ausdrücke (41), (42) und (43) bekam ich hieraus

$$\begin{aligned}
c &= 19^0\ 33'\ 27''9\\
k &= +\ 39''37\\
k_1 &= +\ 806''49\\
k_2 &= +\ 663{,}22\\
l &= -\ 109{,}57\\
l_1 &= -\ 18{,}24
\end{aligned}$$

und die Substitution dieser Werthe in die Ausdrücke des vor. Art. gab mit Zuziehung der Ausdrücke (39) und (40) für C und K,

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\begin{aligned}
nz = 19^\circ\, 33'\, 27.''9 &+ 858.''2946t \\
&+ 808.''60 \sin\varepsilon \quad - 664.''63 \cos\varepsilon \\
&- 0.''79882 nt \sin\varepsilon \quad - 2.''58626 nt \cos\varepsilon \\
&- 19.61 \sin 2\varepsilon \quad + 14.86 \cos 2\varepsilon \\
&+ 0.01701 nt \sin 2\varepsilon + 0.05487 nt \cos 2\varepsilon \\
&+ 0.11 \sin 3\varepsilon \quad - 0.08 \cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\nu = &- 48.''39 \quad + 0.''06850 nt \\
&- 808.''24 \cos\varepsilon \quad - 663.''83 \sin\varepsilon \\
&+ 0.''80172 nt \cos\varepsilon - 2.''58626 nt \sin\varepsilon \\
&+ 3.56 \cos 2\varepsilon \quad + 1.28 \sin 2\varepsilon \\
&- 0.08 \cos 2\varepsilon \quad - 0.10 \sin 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = &+ 5.''27 \quad - 0.''11749 nt \\
&- 110.''27 \sin\varepsilon \quad - 22.''27 \cos\varepsilon \\
&- 7.''85691 nt \sin\varepsilon + 1.''38390 nt \cos\varepsilon \\
&- 0.25 \sin 2\varepsilon \quad - 0.34 \cos 2\varepsilon \\
&- 0.02 \sin 3\varepsilon \quad - 0.04 \cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} = 1 &+ 12.''45 \quad - 0.''03402 nt \\
&+ 808.''74 \cos\varepsilon \quad + 663.''78 \sin\varepsilon \\
&- 0.80172 nt \cos\varepsilon + 2.58626 nt \sin\varepsilon \\
&- 4.61 \cos 2\varepsilon \quad - 1.47 \sin 2\varepsilon \\
&+ 0.13 \cos 3\varepsilon \quad + 0.17 \sin 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right) = &+ 0.''03 \\
&+ 805{,}65 \sin\varepsilon - 663{,}03 \cos\varepsilon \\
&- 0.80172 nt \sin\varepsilon - 2.58626 nt \cos\varepsilon \\
&- 7.00 \sin 2\varepsilon \quad + 2.53 \cos 2\varepsilon \\
&+ 0.26 \sin 3\varepsilon \quad - 0.32 \cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\left(\overline{\frac{d^2 W}{d\eta^2}}\right) = + 27''090$$
$$- 807''33 \cos\varepsilon \quad - 663''41 \sin\varepsilon$$
$$+ 0''80172 nt \cos\varepsilon - 2''58626 nt \sin\varepsilon$$
$$+ 7.68 \cos 2\varepsilon \quad + 2.78 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0.25 \cos 3\varepsilon \quad - 0.34 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

$$\delta \frac{h}{h_0} = + 35''94 \quad - 0''03402 nt$$
$$- 0''50 \cos\varepsilon + 0''05 \sin\varepsilon$$
$$+ 1.06 \cos 2\varepsilon + 0.39 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0.04 \cos 3\varepsilon - 0.06 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

$$\frac{du}{\cos i d\varepsilon} = \left(\overline{\frac{dR}{d\eta}}\right) \frac{1}{\cos i} = - 0''17$$
$$- 108''87 \cos\varepsilon \quad + 14''40 \sin\varepsilon$$
$$- 7''85691 nt \cos\varepsilon - 1''38390 nt \sin\varepsilon$$
$$- 0.55 \cos 2\varepsilon \quad + 1.03 \sin 2\varepsilon$$
$$- 0.06 \cos 3\varepsilon \quad + 0.12 \sin 3\varepsilon$$
$$+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}$$

wo für die constanten Glieder nicht der doppelte, sondern der einfache Betrag angesetzt ist.

Diese sind, nachdem man die übrigen im Vorhergehenden berechneten Störungen, von $i' = 1$ an, an die Stelle der etc. gesetzt hat, die vollständigen Werthe der ersten Annäherung von nz, ν, $\frac{u}{\cos i}$, etc. Der Coefficient von t im Ausdruck von nz ist der wahre Werth der mittleren Bewegung, in so weit die erste Annäherung ihn geben kann, und vorausgesetzt, dass der zu Grunde gelegte Werth von n in der That der osculirende Werth der mittleren Bewegung für die Zeitepoche ist; ein Umstand, der später erörtert werden wird. Da hier die Unterschiede zwischen dem osculirenden und dem wahren Werthe der mittleren Bewegung so wie zwischen c und c_0 sehr klein sind, nemlich $= 0''0915$ und bez. $= 1'\ 44''3$, so habe ich nicht für nöthig gehalten, die im Art. 55 erklärte Verbesserung der zuerst erhaltenen Werthe der Constanten anzuwenden, sondern im Vorhergehenden die zuerst erhaltenen Werthe derselben angesetzt und benutzt.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

62.

Die Verbesserung der Störungscoefficienten, welche aus dem eben gefundenen Werthe

$$(n) - n_0 = -0''0915$$

hervorgeht, kann sogleich durch die Ausdrücke (44) berechnet werden, und giebt die folgenden, den oben gefundenen Coefficienten der Jupiterstörungen hinzuzufügenden Verbesserungen,

i, i'	$n\delta z$		2ν		$\frac{u}{\cos i}$	
	sin	cos	cos	sin	sin	cos
1, −2	−0″10	−0″09	+0″03	−0″03		
2, −2	−0.11	−0.08	+0.12	−0.08		
0, −3	+0.04	+0.02	+0.05	−0.02	+0″02	−0″01
1, −3	+2.63	+3.03	+0.21	−0.09	−0.01	−0.02
2, −3	−1.48	0.00	+1.50	0.00	+0.09	+0.23
3, −3	+0.05	0.00	−0.01	−0.01		

Mit Ausnahme der Glieder, die den kleinsten Divisor bekommen, ist wie man sieht, diese Verbesserung sehr unbedeutend, aber für diese hat der kleine Unterschied zwischen n_0 und (n) doch ein paar Secunden geben können.

Für die im §. 2 berechnete, vom Mars verursachte Ungleichheit langer Periode habe ich den Divisor neu berechnet. Mit $n = 858''2946$ ergiebt sich

$$5\mu = 10{,}990724$$

also

$$11 - 5\mu = +\, 0{,}009276$$

die genannte Ungleichheit wird hiemit

$$n\delta z = +\, 3''04 \sin\{(11 - 5\mu)\,\varepsilon - 5\,(c' - c\mu)\}$$
$$+\, 6{,}73 \cos\{(11 - 5\mu)\,\varepsilon - 5\,(c' - c\mu)\}$$

und es hat also der kleine Unterschied zwischen n_0 und (n) hier wieder ein paar Secunden bewirkt.

63.

Ich will jetzt noch zu der Berechnung der Coefficienten von $n\delta z$ und ν ein Beispiel anführen, und wähle dazu aus den Jupiterstörungen die erste Columne für $i' = 2$, welche eine der grössten Abtheilungen

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

ist. Die decadischen Ergänzungen der Logarithmen der hier eintretenden Divisoren sind die folgenden:

für $-4, -2 \ldots 9.328n$	für $2, -2 \ldots 9.885041$
$-3, -2 \ldots 9.432n$	$3, -2 \ldots 9.63770$
$-2, -2 \ldots 9.5691n$	$4, -2 \ldots 9.4811$
$-1, -2 \ldots 9.7704n$	$5, -2 \ldots 9.3662$
$0, -2 \ldots 0.15679n$	$6, -2 \ldots 9.276$
$1, -2 \ldots 0.518494$	$7, -2 \ldots 9.201$

die gleich wie die im Art. 57 angeführten Logarithmen der A und C Coefficienten auf den untern Rand eines Streifen Papiers geschrieben wurden. Ich lasse die Rechnung genau so folgen, wie ich sie gestellt habe, und werde darauf ihre Erklärung geben. Im Original erstrecken sich die Coefficienten, die hinzugezogen wurden, in dieser Abtheilung von $i = -3$ bis $i = 7$, wozu noch eine Columne für die zur Controle angewandte Summe der Coefficienten kommt, da aber diese Anzahl der Columnen nicht in das Format dieser Schriften gebracht werden kann, so sehe ich mich genöthigt abzukürzen, und hier nur die Columnen von $i = -2$ bis $i = 5$ anzuführen.

	−2	−1	0	1	2	3	4	5
	8.591	7.903	8.929n	0.5195	1.47576n	0.2504n	0.1106	7.778n
A −1				8.078	9.035n	7.810n	7.670	
A 0	7.699n	7.011n	8.037	9.6275n	0.5838	9.358	9.219n	6.88
A 1	8.894	8.206	9.232n	0.8229	1.77915n	0.5538n	0.4140	8.081n
A 2	7.22n		7.560	9.150n	0.1066	8.881	8.741n	
	8.945n	8.568n	0.1694	0.7888	1.50805n	0.3006n	0.2025	8.204n
C −1			7.729	8.348	9.0677n	7.860n	7.762	
C 0	7.576	7.199	8.800n	9.4196n	0.1389	8.931	8.833n	6.83
C 1	8.947	8.570	0.1710n	0.7904n	1.50962	0.3022	0.2041n	8.206
C 2	7.576n	7.199n	8.800	9.4196	0.1389n	8.931n	8.833	6.83n
			+0.012	−0.109	−0.006	+0.005		
	−0.005	−0.001	+0.011	−0.424	+3.835	+0.228	−0.166	+0.001
	+0.010	+0.078	+0.016	−0.171	+6.651	−60.139	−3.579	+2.594
			−0.002		+0.004	−0.141	+1.278	+0.076
		+0.005	+0.022	−0.117	−0.007	+0.006		
	+0.004	+0.002	−0.063	−0.263	+1.377	+0.085	−0.068	+0.001
	+0.011	+0.089	+0.037	−1.482	−6.171	+32.331	+2.005	−1.600
			−0.004	−0.002	+0.063	+0.263	−1.377	−0.085
G	+0.005	+0.077	+0.037	−0.704	+10.484	−60.047	−2.467	+2.671
G	+0.015	+0.096	−0.008	−1.864	−4.738	+32.685	+0.560	−1.684
					+0.012	−0.109	−0.006	+0.005
	−0.005	−0.001	+0.011	−0.424	+3.835	+0.228	−0.166	+0.001
	+0.016	−0.171	+6.651	−60.139	−3.579	+2.594	−0.012	−0.084
	+0.004	−0.141	+1.278	+0.076	−0.055		+0.002	
				−0.005	−0.022	+0.117	+0.007	−0.006
	−0.004	−0.002	+0.063	+0.263	−1.377	−0.085	+0.068	−0.001
	−0.037	+1.482	+6.171	−32.331	−2.005	+1.600	−0.016	−0.056
	−0.063	−0.263	+1.377	+0.085	−0.068	+0.001	+0.002	
H	+0.015	−0.313	+7.940	−60.487	+0.213	+2.713	−0.182	−0.078
H	−0.104	+1.217	+7.611	−31.988	−3.472	+1.633	+0.061	−0.063

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$-F$ {	+0 082	−0.030	−0.832	+10.649	−59.919	−2.583	+2 667	−0 048
	+0.039	+0.008	−0.085	+3.308	−29.906	−1.780	+1.290	−0.006
	9.083n	8.342	9.9624	1.14479n	1.953397	0.6398	0.5974n	8.732
	8.652	8.112n	0.1192n	1.66328n	1.838438	0.2775	0.0785n	8.098
	8.301	9.238	8.462	0.4096n	0.7594	1.43715n	0.2803n	9.994
	7.870n	9.008n	8.619n	0.9281n	0.6444	1.07485n	9.7644n	9.360
	8.949n	9.9562	1.19176	1.966024n	0 5131n	0.6381	9.083n	9.149n
	8.518	9.7266n	1.34855n	2.484518n	0.3981n	0.2758	8.564n	8 515n

0, −2, −2	+0″045	0, 2, −2	+68″935
−1, −1, −2	−0.102	−1, 3, −2	−11.881
1, −3, −2	+0.003	1, 1, −2	−305.153
	−0.054		−248.099
	−0.105		+293.272
0, −1, −2	−0.013	0, 3, −2	+1.894
−1, 0, −2	−0.042	−1, 4, −2	−0.577
1, −2, −2	+0.033	1, 2, −2	−2.501
	−0.022		−1.184
	−0.075		+1.924
0, 0, −2	−1.316	0, 4, −2	−1.198
−1, 1, −2	−8.474	−1, 5, −2	+0.229
1, −1, −2	−0.533	1, 3, −2	+1.887
	−10.323		+0.918
	−7.941		−1.658
0, 1, −2	−46.055	0, 5, −2	+0.013
−1, 2, −2	+4.410	−1, 6, −2	+0.005
1, 0, −2	−22.313	1, 4, −2	−0.037
	−63.958		−0.019
	+26.723		+0.042

Die erste Zeile dieser Rechnung enthält über jeder Columne den Werth des Index i, welchem alle in der Columne befindlichen Zahlen angehören; die zweite Zeile enthält die Logarithmen der $\mathfrak{b}$ Coefficienten, nemlich die der Zahlen, welche sich in der cos überschriebenen Columne der im Art. 84 (I) gegebenen Entwickelung von $(i)a\Omega$ in der Abtheilung für $i'=2$ befinden. Hierauf folgen die Logarithmen der Producte mit den vier A Coefficienten. Alsdann kommen die Logarithmen der c Coefficienten, das ist der Zahlen, die in der cos überschriebenen Columne und der Abtheilung für $i'=2$ in der a. a. O. befindlichen Entwickelung von $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ vorkommen, und die vier folgenden Zeilen geben die Logarithmen der Producte dieser Coefficienten mit den vier C Coefficienten. Die hierauf folgenden zwei Abtheilungen enthalten diese Producte selbst, die nach Maassgabe des Ausdrucks (15) für $G(i,i',c)$ unter einander gestellt sind. Die nun folgende, mit G bezeichnete, Abtheilung enthält die Summen dieser Producte, und die Summe von den in dieser Abtheilung je über einander stehenden zwei Zahlen ist also der betreffende G Coefficient. Es folgen nun die im Art. 39 erklärten, für die Erlangung der H Coefficienten nöthigen, Verschiebungen der schon in den vorhergehenden Abtheilungen enthaltenen Producte, worauf die mit H bezeichnete Abtheilung die zwei Summen derselben giebt, aus denen die H Coefficienten selbst folgen. Diese Werthe dieser Coefficienten wurden nun in die erste der im Art. 57 befindlichen Tafeln am gehörigen Orte eingetragen, und dabei Platz für die noch zu berechnenden F Coefficienten gelassen. Die Berechnung dieser ist in der mit $-F$ bezeichneten Abtheilung enthalten. Es wurde zufolge der Gleichung (17) erst das arithmetische Mittel aus den bezüglichen G und H Coefficienten genommen, und diesem der 6 Coefficient hinzugefügt. Die Summe von je zwei Zahlen dieser Abtheilung ist also der betreffende F Coefficient mit umgekehrtem Zeichen. Die F Coefficienten selbst wurden hierauf auch der genannten Tafel des Art. 57 einverleibt.

Die drei letzten Abtheilungen enthalten nun blos die Divisionen der F, G und H Coefficienten mit den Werthen von $i - i'\mu$. Die Quotienten habe ich hierauf mit Hinzufügung ihrer Indices und des Index von η angeführt, und daraus nach Maassgabe der Ausdrücke (20) die P und Q Coefficienten durch Addition und Subtraction berechnet, die sich in der ersten Tafel des Art. 58 befinden.

Die fernere Rechnung steht wie folgt.

	−2	−1	0	1	2	3	4	5
	.623	8.580n	9.8733n	0.86570	1.47730n	9.9047n	0.140	8.613n
	8.192n	8.350	0.0301	1.38419	1.36234n	9.5424n	9.621	7.979n
$\delta\frac{h_0}{h}$	−0.016	+0.022	+1.072	+24.221	−23.033	−0.349	+0.418	−0.010
	9.021n	8.8751n	0.89988n	1.42689	2.467271	0.2842	0.2196n	8.623
	8.590	8.6455	1.05667	1.94538	2.352312	9.9219	9.7007n	7.989
2ν	+0.039	+0.044	+11.394	+88.182	+225.067	+0.835	−0.502	+0.010
	−0.054	−0.022	−10.323	−63.958	−248.099	−1.184	+0.918	−0.019
$\delta\frac{h_0}{h}$	−0.015	+0.022	+1.071	+24.224	−23.032	−0.349	+0.416	−0.009
	8.732n	8.342n	1.0136n	1.8059n	2.39463n	0.073n	9.963	8.279n
	7.360	6.97	9.6413	0.4336	1.02237	8.701	8.591n	6.9
	−0.054	−0.022	−10.323	−63.958	−248.099	−1.184	+0.918	−0.019
		+0.002	+0.001	+0.438	+2.714	+10.528	+0.050	−0.039
	+0.001	+0.438	+2.714	+10.528	+0.050	−0.039	+0.001	+0.001
	−0.053	+0.418	−7.608	−52.992	−245.335	+9.305	+0 969	−0.057
	8.723n	9.621	0.8813n	1.72421n	2.38976n	0.9687	9.986	8.756n
	8.292	9.391n	1.0381	2.24270n	2.27480n	0.6064	9.467	8.122n
$n\delta z$	+0.02	−0.25	+10.92	−174.86	−188.28	+4.04	+0.29	−0.01

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Unter den Werthen des Index i stehen hier zunächst die Logarithmen der Coefficienten von $\overline{T}$, die in der ersten Tafel des Art. 57 angeführt sind, und woraus durch Division mit $i - i'\mu$ zufolge des Ausdrucks (23) die Π Coefficienten, nemlich die Coefficienten der Function $\delta\frac{h_0}{h}$ hervorgehen, die in der vierten Zeile enthalten sind. Hierauf folgen die Logarithmen der Q Coefficienten, und darauf die Berechnung der Coefficienten von 2ν nach dem zweiten Ausdruck (21). Zu diesen Coefficienten habe ich die P Coefficienten, das ist die Coefficienten von $\frac{d\delta z}{dt}$ addirt, woraus wieder die Coefficienten von $\delta\frac{h_0}{h}$ erhalten wurden, deren Uebereinstimmung mit den eben auf die andere Art berechneten Werthen derselben zufolge der (24) eine Controle für die Richtigkeit der Rechnung giebt. Hierauf kommen die Logarithmen der P Coefficienten, und die der Producte derselben mit $-\frac{1}{2}e$, und darauf die Zahlen deren Summe zufolge der ersten (21) auch mit $i - i'\mu$ dividirt werden muss. Den Schluss der Rechnung bilden diese Division, und die dadurch sich ergebenden Coefficienten von $n\delta z$.

Da die Berechnung der Coefficienten von $\frac{u}{\cos i}$ auf ähnliche Art ausgeführt wird, und etwas einfacher ist, so habe ich nicht für nöthig gehalten davon ein Beispiel anzuführen.

§. 7. Von der Säcularänderung der mittleren Länge.

64.

Die Säcularänderung der mittleren Länge besteht aus den, dem Quadrat und den höheren Potenzen der Zeit, proportionalen Gliedern im Ausdruck für nz. Da aus dem Vorhergehenden erhellt, dass unter den von den ersten Potenzen der störenden Kräfte abhängigen Gliedern keine solchen Glieder vorhanden sind, so kann die Säcularänderung der mittleren Länge nur von der Ordnung der Quadrate und Producte der störenden Kräfte sein. Wenn man die Cuben und höheren Potenzen dieser Kräfte übergeht, so reducirt sich die genannte Säcularänderung auf das dem Quadrat der Zeit proportionale Glied in nz. Das der Zeit selbst proportionale Glied im Ausdruck von nz, oder mit anderen Worten die wahre mittlere Bewegung — n i e jedoch blos irgend ein Theil derselben — nebst den eben genannten, dem Quadrat und den höheren

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Potenzen der Zeit proportionalen Gliedern können die Säcularänderung der mittleren Länge (oder Anomalie) für die Zeitepoche genannt werden, denn diese Glieder stehen zu diesem Element in derselben Relation wie die Säcularänderungen der übrigen Elemente zu den Werthen dieser für die Zeitepoche. Man hat indess, so viel ich weiss, diese Benennung nie angewandt, sondern immer nur die oben genannten Glieder als die Säcularänderung der mittleren Länge überhaupt bezeichnet.

Die in der ersten Abhandlung für die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte überhaupt abhängigen Glieder entwickelten Formeln sind streng und allgemein gültig, man muss also unter den andern Gliedern dieser Ordnung auch die Säcularänderung der mittleren Länge durch dieselben richtig erhalten. Aber in Bezug auf diese Säcularänderung ist eine Gattung von Gliedern vorhanden, die, sei die angewandte Methode welche sie will, — wenn sie nur überhaupt nicht fehlerhaft ist, — in Folge des bekannten Satzes, dass auch mit Rücksicht auf die Quadrate und Producte der störenden Kräfte unter den osculirenden Elementen die grosse Achse der Ellipse keiner Säcularänderung unterworfen ist, sich vollständig gegen einander aufheben müssen. Da in der numerischen Rechnung, wegen der stets statt findenden Unsicherheit der letzten der angewandten Decimalstellen diese vollständige Aufhebung im Allgemeinen nicht statt finden wird, so wird es nothwendig diese Glieder im Voraus kennen zu lernen, damit man sie auch in dem Falle weglassen kann, wo die numerische Rechnung die vollständige Aufhebung derselben nicht bewirkt hat.

Da die Säcularänderung der mittleren Länge für die Planeten überhaupt gemeiniglich sehr klein ist, so würde man manchmal ohne diese Weglassung, eben wegen der erwähnten Unsicherheit der letzten Decimale ein ungenaues Resultat für dieselbe erhalten können. Durch die Sätze, die im Folgenden bewiesen werden, gelangt man nicht nur zur Kenntniss der einander aufhebenden Glieder, sondern auch zur Kenntniss der Glieder, aus welchen einzig und allein die Säcularänderung der mittleren Länge entstehen kann.

65.

Bei der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte zeigen sich Glieder, die dem Quadrat, und Glieder,

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

die dem Cubus der Zeit proportional sind, und in Bezug auf welche die folgenden Sätze statt finden.

1^ter^ Satz.

„Abgesehen von den in der ersten Annäherung den Integralen hinzugefügten willkührlichen Constanten, verhält sich in der Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von ε und η der Coefficient des mit $\cos\eta$ multiplicirten Gliedes zum constanten Gliede wie 1 zu $\frac{1}{2}e$."

Der hier Bezug habende Ausdruck ist der im Art. 43 (I) gegebene, nemlich,

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} &= A\frac{an\delta z}{r} + B\nu + C\delta\frac{h}{h_0} + D\frac{u}{\cos i} + E\frac{u_i}{\cos i} \\ (45) \quad \ldots \quad &+ Fn'\delta z' + G\nu' + H\frac{u'}{\cos i'}\end{aligned}$$

und das im Satze angegebene Verhältniss der beiden dort genannten Coefficienten ist dasselbe, welches sich in der ersten Annäherung auch zu erkennen gab. Denn durch die Gleichung (19) hatten wir dort

$$F(0,0,s) = eH(0,0,s)$$

und es bedeutet für die erste Annäherung $F(0,0,s)$ das Doppelte des constanten Gliedes und $H(0,0,s)$ den Coefficienten des mit $\cos\eta$ multiplicirten Gliedes in $\frac{dW}{d\varepsilon}$.

Vermöge dieses Verhältnisses zwischen diesen beiden Coefficienten konnte im Vorhergehenden kein dem Quadrat von t oder ε proportionales Glied in nz erscheinen, und es wird daher zufolge des obigen Satzes bei der Berücksichtigung der Quadrate und Producte der störenden Massen, wenn man vorläufig die im Satze ausgeschlossenen Glieder weglässt, auch kein t^2 oder ε^2 proportionales Glied in nz entstehen können.

Um dieses deutlich zu machen bemerke ich, dass in der ersten Annäherung

$$n\delta z = \int \frac{r}{a}\overline{W}_0\, d\varepsilon$$

und in der zweiten Annäherung mit Weglassung der im Satze ausgeschlossenen Glieder

$$n\delta z = \int \frac{r}{a}\,\delta\overline{W}_0\, d\varepsilon$$

ist, setzt man daher

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$dW_0 \text{ oder } d\delta W_0 = (\tfrac{1}{2}ek + k\cos\eta)\,d\varepsilon$$

so wird

$$\overline{W_0} \text{ oder } \overline{\delta W_0} = \tfrac{1}{2}ek\varepsilon + k\varepsilon\cos\varepsilon$$

Durch die Multiplication dieses Ausdrucks mit dem Werthe $1-e\cos\varepsilon$ von $\frac{r}{a}$ verschwindet das Glied $\frac{1}{2}ek\varepsilon$, welches hier allein im Stande wäre ein ε^2 oder t^2 proportionales Glied im Integral, das ist in $n\delta z$ hervor zu bringen.

66.

Um den obigen Satz zu beweisen, werde ich zuerst den folgenden damit verwandten beweisen.

2^ter^ Satz.

„Mit Uebergehung der in der ersten Annäherung den Integralen hinzugefügten willkührlichen Constanten ist in der Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien das constante Glied gleich Null.“

Der Uebergang von diesem zweiten Satze zum ersten wird nachher leicht zu bewerkstelligen sein. Berücksichtigen wir zuerst nur das Quadrat der störenden Kraft, und setzen demzufolge

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = A_1 n\delta z + B_1\nu + C_1\delta\frac{h}{h_0} + D_1\frac{u}{\cos i} + E_1\frac{u_1}{\cos i} \quad . \quad . \quad (46)$$

so ist

$$A_1 = \left(\frac{dT_1}{dg}\right)$$

$$T_1 = \frac{an}{r}T,\ B_1 = \frac{an}{r}B,\ C_1 = \frac{an}{r}C,\ D_1 = \frac{an}{r}D,\ E_1 = \frac{an}{r}E$$

wo T, B, C, D, E dieselben Ausdrücke sind, die im Art. 43 (I) u. f. eingeführt wurden. Die Form dieser Ausdrücke ist die folgende

$$\Xi_1 + \Upsilon\cos\eta + \Psi\sin\eta$$

wie schon aus den oben für die erste Annäherung entwickelten Functionen erkannt werden kann. Da in der Entwickelung von $\sin\eta$ nach den Sinussen der Vielfachen des Bogens γ, welcher zur mittleren Anomalie g in derselben Beziehung stehen soll, wie η zu ε, kein constantes Glied enthalten ist, und in der Entwickelung von $\cos\eta$ nach den Cosinussen der Vielfachen von γ das constante Glied $= -\frac{1}{2}e$ ist, so wird, wenn man dem vorstehenden Ausdruck die folgende Form giebt

(47) . . . $\Xi + \Upsilon(\cos\eta + \frac{1}{2}e) + \Psi \sin\eta$

Ξ die einzige Function sein, die nach der Entwickelung in Bezug auf γ, g und g' möglicher Weise ein constantes Glied haben könnte, indem alle aus dem übrigen Theil des vorstehenden Ausdrucks durch die genannte Entwickelung entstehenden Glieder nothwendiger Weise mit $\cos\gamma$, $\cos 2\gamma$, etc. oder mit $\sin\gamma$, $\sin 2\gamma$, etc. multiplicirt sein müssen. Wir brauchen daher in den folgenden Entwickelungen nur auf die oben durch Ξ dargestellten Glieder Rücksicht zu nehmen.

Wenn Ξdt mit dem Differential der halben grossen Achse in der Theorie der Veränderung der willkührlichen Constanten identisch wäre, so könnte ich auf den für dieses Differential längst vorhandenen Beweis verweisen, da aber diese Identität nicht statt findet, so muss der Beweis für Ξ vollständig durchgeführt werden.

67.

Der Ausdruck von T_1 ist zufolge der ersten Abhandlung, und wenn wir nur auf die Glieder erster Ordnung in Bezug auf die störenden Massen Rücksicht nehmen, die hier blos in jedem der Factoren des Ausdrucks (46) verlangt werden, der folgende:

$$T_1 = M_1 a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + N_1 ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

wo

$$M_1 = \frac{an}{r\cos^2\varphi}\Big\{-3(1-\tfrac{1}{2}e^2) + 2e\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon$$
$$+ e^2\cos(\eta+\varepsilon) - 3e\cos\eta + (4-e^2)\cos(\eta-\varepsilon) - e\cos(\eta-2\varepsilon)\Big\}$$

$$N_1 = \frac{an}{r\cos^2\varphi}\Big\{e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+ e^2\sin(\eta+\varepsilon) - e\sin\eta - (2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon) + e\sin(\eta-2\varepsilon)\Big\}$$

ist. Es ist nun ein Leichtes die beiden Factoren M_1 und N_1 auf die Form des Ausdrucks (47) zu bringen, man erhält

$$M_1 = -3\frac{an}{r} - (\cos\eta + \tfrac{1}{2}e)\frac{an}{r\cos^2\varphi}\Big\{3e - 4\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon\Big\}$$
$$+ \sin\eta \,.\, \frac{an}{r\cos^2\varphi}\Big\{(4-2e^2)\sin\varepsilon - e\sin 2\varepsilon\Big\}$$

$$N_1 = (\cos\eta + \tfrac{1}{2}e)\frac{an}{r\cos^2\varphi}\Big\{2\sin\varepsilon - e\sin 2\varepsilon\Big\}$$
$$- \sin\eta \,.\, \frac{an}{r\cos^2\varphi}\Big\{e + 2(1-e^2)\cos\varepsilon - e\cos 2\varepsilon\Big\}$$

durch deren Substitution man zuerst

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$T_1 = -3\frac{a^2n}{r}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$-(\cos\eta+\tfrac{1}{2}e)\frac{a^2n}{r\cos^2\varphi}\left\{\left[3e-4\cos\varepsilon+e\cos 2\varepsilon\right]\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)-\left[2\sin\varepsilon-e\sin 2\varepsilon\right]r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}$$
$$+\ \sin\eta\ .\ \frac{a^2n}{r\cos^2\varphi}\left\{\left[(4-2e^2)\sin\varepsilon-e\sin 2\varepsilon\right]\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)-\left[e+2\cos^2\varphi\cos\varepsilon-e\cos 2\varepsilon\right]r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}$$

erhält. Es ist aber

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) &= \frac{r}{a}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)\\ \frac{r}{a}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) &= \frac{a\cos\varphi}{r}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)+ae\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\\ \frac{r}{a}\left(\frac{d\Omega}{de}\right) &= \frac{a}{r\cos\varphi}(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{df}\right)-a(\cos\varepsilon-e)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\end{aligned}\right\}\quad(48)$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit $\frac{2r}{a^2e}$, oder mit der gleichen Function $\frac{2-2e\cos\varepsilon}{ae}$, so giebt sie

$$(2\sin\varepsilon-e\sin 2\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{2+e^2}{e}-4\cos\varepsilon+e\cos 2\varepsilon\right)\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)-\frac{2\cos\varphi}{ae}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

und eliminirt man $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$ zwischen den drei Gleichungen (48), so erhält man

$$\frac{1}{r}\left\{(4-2e^2)\sin\varepsilon-e\sin 2\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)-\left\{e+2\cos^2\varphi\cos\varepsilon-e\cos 2\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\frac{2\cos^2\varphi}{a}\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\quad(49)$$

Hiemit vereinfacht sich der eben gefundene Ausdruck von T_1, und geht in den folgenden über

$$T_1=-3an\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)+\frac{2an}{e}\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)-\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}(\cos\eta+\tfrac{1}{2}e)+2an\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\sin\eta\quad(50)$$

Nehmen wir nun hier blos auf die Glieder Rücksicht, die dem Vorhergehenden zufolge von γ unabhängig sind, so wird sogleich

$$A_1=-3an\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)$$

Setzen wir ferner $V_1=\frac{na}{r}V$, so giebt die Vergleichung des Ausdrucks für V der ersten Abhandlung mit dem obigen Ausdruck für T_1 sogleich zu erkennen, dass mit bloser Rücksicht auf die von γ unabhängigen Glieder

$$V_1=-3\frac{a^2n}{r}\left(\frac{d\cdot r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$

ist, welchen Ausdruck man leicht in den folgenden verwandelt,

$$V_1=-3anr\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)-3\frac{a^3ne\sin\varepsilon}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Setzt man ferner $X_1=\frac{an}{r}X$, so geben die Ausdrücke (66) (I) und (67) (I) für X leicht zu erkennen, dass die oft erwähnten Glieder in X_1 folgenden Ausdruck haben:

$$X_1 = -3\frac{a^2 n}{r\cos^2\varphi}\left\{e^2 - e\cos\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + 3\frac{a^2 n}{\cos^2\varphi}\, e\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

den man durch die beiden ersten Gleichungen (48) leicht in folgenden verwandelt:

$$X_1 = 3\frac{a^3 ne\,(\cos\varepsilon - e)}{r^2\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) + 3\frac{a^3 ne\sin\varepsilon}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

es wird also, da $B_1 = V_1 + X_1$ ist,

$$B_1 = -3anr\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right) + 3\frac{a^3 ne\,(\cos\varepsilon - e)}{r^2\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

Da ferner

$$\overline{T_1} = \frac{an}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

und $C_1 = 2\,(T_1 + X_1 + \overline{T}_1)$ ist, so geben die vorstehenden Ausdrücke

$$C_1 = 2\frac{an}{\cos\varphi}\left(1 - \frac{3a}{r}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

Aus den Ausdrücken (72) (I) folgt endlich sogleich

$$D_1 = -3a^2 n\left(\frac{d^2\Omega}{dZdg}\right)$$

$$E_1 = -3\frac{a^3 n}{r}\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

Substituirt man nun die eben gefundenen Ausdrücke von A_1, B_1, etc. in Ausdruck (46), so wird wegen $u_1 = \frac{du}{dt}\frac{r}{an}$,

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = -3an\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)n\delta z - 3an\left\{r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right) - \frac{a^2 e\,(\cos\varepsilon - e)}{r^2\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}\nu$$
$$+ 2\frac{an}{\cos\varphi}\left(1 - \frac{3a}{r}\right)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\delta\frac{h}{h_0} - 3a^2 n\left(\frac{d^2\Omega}{dZdg}\right)\frac{u}{\cos i} - 3a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\frac{\frac{du}{dt}}{\cos i}$$

in welchen noch die analytischen Ausdrücke für $n\delta z$, ν, $\delta\frac{h}{h_0}$, u und $\frac{du}{dt}$ zu substituiren sind.

68.

Den Ausdruck für $\delta\frac{h}{h_0}$ erhalten wir unmittelbar aus der ersten Abhandlung wie folgt,

$$\delta\frac{h}{h_0} = -\frac{an}{\cos\varphi}\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt$$

und zur Ermittelung der Ausdrücke für $n\delta z$ und ν wird der Ausdruck (50) für T_1 dienen, indem ohne Rücksicht auf die willkührlichen Constanten,

$$n\delta z = n\int\left(\int\overline{T_1}\,dt\right)dt$$

ist. Für ν werde ich hier die Gleichung

$$\nu = -\tfrac{1}{2}\frac{d\delta z}{dt} - \tfrac{1}{2}\delta\frac{h}{h_0} \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

anwenden. Multiplicirt man (50) mit dt, integrirt und verwandelt nach der Integration τ in t, so bekommt man erstlich

$$\begin{aligned}\frac{d\delta z}{dt} = (\overline{\int T_1 dt}) = & -3an\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt \\ & + \frac{2an}{e}(\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}e)\int\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}dt \\ & + 2an\sin\varepsilon\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt\end{aligned}$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit ndt, oder dessen Werth $(1 - e\cos\varepsilon)\,d\varepsilon$, integrirt durch die theilweise Integration, und setzt für $\sin 2\varepsilon$ und $\cos 2\varepsilon$ ihre Werthe $2\sin\varepsilon\cos\varepsilon$ und $2\cos^2\varepsilon - 1$, so ergiebt sich zuerst

$$\begin{aligned}n\delta z = & -3an^2\iint\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt^2 + \frac{an}{e}\left\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\right\}\int\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}dt \\ & - an\left\{\tfrac{1}{2}e + 2\cos\varepsilon - e\cos^2\varepsilon\right\}\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt \\ & - \frac{an}{e}\int\left\{\left\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\right\}\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\} - \left\{\tfrac{1}{2}e^2 + 2e\cos\varepsilon - e^2\cos^2\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\right\}dt\end{aligned}$$

Die Gleichung (49) giebt aber leicht

$$\left\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) = \cos^2\varphi\left(\frac{d\Omega}{de}\right) + a\left\{e + (1-e^2)\cos\varepsilon - e\cos^2\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und die dritte Gleichung (48) giebt

$$\frac{1}{\cos\varphi}\left\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{d\Omega}{de}\right) + r(\cos\varepsilon - e)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

hieraus folgt

$$\left\{(2-e^2)\sin\varepsilon - e\sin\varepsilon\cos\varepsilon\right\}\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\} = -\left\{e^2 - 2e\cos\varepsilon + e^2\cos^2\varepsilon\right\}\left(\frac{d\Omega}{de}\right) + 2er\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Es wird daher schliesslich

$$\begin{aligned}n\delta z = & -3an^2\iint\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt^2 - 2an\int r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dt \\ & + \frac{an}{e}(2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\int\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}dt + an\left\{e - 2\cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon\right\}\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt\end{aligned}$$

Die Gleichung (51) giebt sofort durch Hülfe der schon entwickelten Grössen

$$\begin{aligned}\nu = & \tfrac{3}{2}an\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt + \frac{an}{2\cos\varphi}\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt \\ & - \frac{an}{e}(\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}e)\int\left\{\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\right\}dt - an\sin\varepsilon\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt\end{aligned}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

Um den Ausdruck für u zu erhalten, bemerke ich, dass zufolge der ersten Abhandlung mit bloser Rücksicht auf die erste Potenz der störenden Massen

$$u = \overline{\left(\int U_1 dt\right)}$$

wird, wo

$$U_1 = \frac{n}{\cos\varphi} r\varrho \sin(\omega - f) \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \cos i$$

ist. Nach der Ausführung der Integration ergiebt sich daher

$$\frac{u}{\cos i} = \frac{nr\sin f}{\cos\varphi} \int \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r\cos f.\, dt - \frac{nr\cos f}{\cos\varphi} \int \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r\sin f.\, dt$$

und da man um $\frac{du}{dt}$ zu erhalten nur ausserhalb der Integralzeichen zu differentiiren braucht, und man hier $ndt = dg$ setzen darf, so wird

$$\frac{\frac{du}{dt}}{\cos i} = \frac{n^2}{\cos\varphi} \cdot \frac{d.r\cos f}{dg} \int \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r\cos f.\, dt - \frac{n^2}{\cos\varphi} \cdot \frac{d.r\cos f}{dg} \int \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r\sin f.\, dt$$

Substituirt man nun diese Werthe von $n\delta z$, etc. in den am Ende des vor. Art. gefundenen Ausdruck, so findet man erstlich

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta W_0}{dt} = {} & 9a^2n^3 \left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) \iint \left(\frac{d\Omega}{dg}\right) dt^2 + 6a^2n^2 \left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) \int r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) dt \\
& + 3\frac{a^2n^2}{e} A \int \left(\frac{d\Omega}{dg}\right) dt + 3\frac{a^2n^2}{e\cos\varphi} B \int \left(\frac{d\Omega}{df}\right) dt + 3a^2n^2 C \int \left(\frac{d\Omega}{de}\right) dt \\
& - 3\frac{a^2n^2}{\cos\varphi} D \int r\cos f \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) dt + 3\frac{a^2n^2}{\cos\varphi} E \int r\sin f \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) dt
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
A = {} & -(2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon \left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) + (\cos\varepsilon - e) r \left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right) - \frac{a^2(e^3 - 2e^2\cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon)}{r^2\cos\varphi} \left(\frac{d\Omega}{df}\right) \\
B = {} & (2 - e^2 - e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon \left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) - (\cos\varepsilon + e) r \left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right) \\
& + \frac{a^2}{3r^2\cos\varphi}(4e - 3e^3 - 2e^2\cos\varepsilon + (3e - 2e^3)\cos^2\varepsilon) \left(\frac{d\Omega}{df}\right) \\
C = {} & -(e - 2\cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon) \left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) + \sin\varepsilon . r \left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right) - \frac{ae}{r^2\cos\varphi}(\cos\varepsilon - e)\sin\varepsilon \left(\frac{d\Omega}{df}\right) \\
D = {} & r\sin f \left(\frac{d^2\Omega}{dZdg}\right) + \frac{d.r\sin f}{dg} \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) \\
E = {} & r\cos f \left(\frac{d^2\Omega}{dZdg}\right) + \frac{d.r\cos f}{dg} \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)
\end{aligned}$$

gesetzt ist. Diese Coefficienten sind einer wesentlichen Reduction fähig.

69.

Die beiden letzten Gleichungen (48) kann man leicht wie folgt stellen

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$0=\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)-\frac{a^2\cos\varphi}{r^2}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)-\frac{a^2e\sin\varepsilon}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\quad .\quad .\quad .\quad (52)$$

$$0=\left(\frac{d\Omega}{de}\right)-\frac{a^2\sin\varepsilon}{r^2\cos\varphi}(2-e^2-e\cos\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)+\frac{a^2}{r}(\cos\varepsilon-e)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\quad (53)$$

Eliminirt man hieraus $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$, so ergiebt sich

$$0=(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)-\cos^2\varphi\left(\frac{d\Omega}{de}\right)-(\cos\varepsilon+e)\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und differentiirt man diese nach g, so wird

$$0=(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)-\cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right)-(\cos\varepsilon+e)\,r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)$$
$$+(e+2\cos\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)+\frac{a^2}{r}(1-e^2-2e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\qquad (54)$$

Multiplicirt man nun (52) mit $\frac{1}{e}(1+e^2-2e\cos\varepsilon)$, und addirt das Product zu (54), so entsteht

$$0=(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)-\cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right)-(\cos\varepsilon+e)\,r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)$$
$$+\frac{1+2e^2}{e}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)-\frac{a^2\cos\varphi}{er^2}(1+e^2-2e\cos\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)-2\frac{a^2}{r}e^2\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Addirt man diese Gleichung zur Gleichung für den Coefficienten A, und bedenkt dass

$$r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)+\frac{a^2e\sin\varepsilon}{r}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\left(\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg}\right)$$

ist, so wird

$$A=-\cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right)-2e\left(\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg}\right)-\frac{1}{e\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)+\frac{1+2e^2}{e}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$$

Multiplicirt man (52) mit $\frac{1}{e}(1-e^2-2e\cos\varepsilon)$, und addirt (54) zum Product, so entsteht

$$0=(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)-\cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right)-(\cos\varepsilon+e)\,r\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)$$
$$+\frac{1}{e}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)-\frac{a^2\cos\varphi}{er^2}(1-e^2-2e\cos\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der Gleichung für B, so bekommt man

$$B=\cos^2\varphi\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right)+\frac{3-2e^2}{3e\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)-\frac{1}{e}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$$

Multiplicirt man (52) mit $\frac{r^2}{a^2e}$, und differentiirt sie hierauf nach g, so wird

$$0=\frac{r^2}{a^2e}\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)-\frac{\cos\varphi}{e}\left(\frac{d^2\Omega}{dfdg}\right)-r\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right)$$
$$+2\sin\varepsilon\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)-\frac{a^2}{r}(e+\cos\varepsilon-2e\cos^2\varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\quad .\quad (55)$$

Multiplicirt man hierauf (52) mit $-2\sin\varepsilon$, und addirt dieses Product

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

zur Summe aus (53) und (55), so kommt

$$0 = \frac{1}{e}(1-2e\cos\varepsilon + e^2\cos^2\varepsilon)\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) - \frac{\cos\varphi}{e}\left(\frac{d^2\Omega}{dfdg}\right) - r\sin\varepsilon\left(\frac{d^2\Omega}{drdg}\right) + \left(\frac{d\Omega}{de}\right) + \frac{a^2 e\sin\varepsilon}{r^2\cos\varphi}(\cos\varepsilon - e)\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

Die Addition dieser Gleichung zur Gleichung für C giebt

$$C = \frac{\cos^2\varphi}{e}\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) - \frac{\cos\varphi}{e}\left(\frac{d^2\Omega}{dfdg}\right) + \left(\frac{d\Omega}{de}\right)$$

Setzt man ferner

$$P = r\cos f\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right);\ Q = r\sin f\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

so geben die Gleichungen für die Coefficienten D und E sogleich zu erkennen, dass

$$D = \left(\frac{dQ}{dg}\right);\ E = \left(\frac{dP}{dg}\right)$$

ist. Substituirt man nun die eben gefundenen Ausdrücke der Coefficienten A, B, C, D und E in den Ausdruck für $\frac{d\delta W_0}{dt}$ des vor. Art., so bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W_0}{dt} &= 9a^2n^3\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)\iint\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt^2 + 3a^2n^2\frac{1+2e^2}{e^2}\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt\\
&+ a^2n^2\frac{3-2e^2}{e^2\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt + 3a^2n^2\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt\\
&- 3\frac{a^2n^2}{e^2\cos\varphi}\left\{\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt + \left(\frac{d\Omega}{dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt\right\}\\
&+ 6a^2n^2\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)\int r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dt - \left(\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt\right\}\\
&+ 3\frac{a^2n^2\cos\varphi}{e}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt - \left(\frac{d^2\Omega}{dfdg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt\right\}\\
&+ 3\frac{a^2n^2\cos^2\varphi}{e}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt - \left(\frac{d^2\Omega}{dedg}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt\right\}\\
&+ 3\frac{a^2n^2}{\cos\varphi}\left\{\left(\frac{dP}{dg}\right)\int Qdt - \left(\frac{dQ}{dg}\right)\int Pdt\right\}\end{aligned}$$

ein Ausdruck, durch welchen leicht gezeigt werden kann, dass der obige zweite Satz statt findet.

70.

Sei nach der Entwickelung

$$\Omega = \Sigma k\cos(ig + i'g' + K)$$

wo k und K die durch die Entwickelung erlangten numerischen Werthe, und i und i' irgend zwei ganze Zahlen bedeuten, dann wird

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden   SMWK   Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right) = -\Sigma i^2 k \cos(ig + i'g' + K)$$

$$\iint \left(\frac{d\Omega}{dg}\right) dt^2 = \Sigma \frac{ik}{(in+i'n')^2} \sin(ig + i'g' + K)$$

Die Multiplication dieser Ausdrücke mit einander zeigt sogleich, dass im ersten Gliede des eben gefundenen Ausdrucks für $\frac{d\delta W_0}{dt}$ kein constantes Glied enthalten ist. Aus dem obigen Ausdruck für Ω bekommen wir ferner

$$\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) = -\Sigma ik \sin(ig + i'g' + K)$$

$$\int \left(\frac{d\Omega}{dg}\right) dt = \Sigma \frac{ik}{in+i'n'} \cos(ig + i'g' + K)$$

aus deren Product wieder kein constantes Glied hervorgehen kann. Das zweite Glied des Ausdrucks für $\frac{d\delta W_0}{dt}$ enthält also auch kein constantes Glied, und da das dritte und vierte Glied dem zweiten völlig ähnlich sind, so können diese auch keine constanten Glieder enthalten. Sei ferner

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \Sigma l \sin(ig + i'g' + L)$$

dann wird

$$\int \left(\frac{d\Omega}{df}\right) = -\Sigma \frac{l}{in+i'n'} \cos(ig + i'g' + L)$$

Die Verbindung dieser Ausdrücke mit den vorstehenden giebt, wenn wir blos auf die constanten Glieder Rücksicht nehmen,

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) \int \left(\frac{d\Omega}{dg}\right) dt = \Sigma \frac{ikl}{in+i'n'} \sin(L - K)$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dg}\right) \int \left(\frac{d\Omega}{df}\right) dt = \Sigma \frac{ikl}{in+i'n'} \sin(K - L)$$

in der Summe dieser beiden Ausdrücke heben sich, wie man sieht, die constanten Glieder, und folglich enthält das fünfte Glied von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ auch kein constantes Glied. Die vier übrigen Glieder von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ haben gleiche Form, und wir brauchen also nur Eins derselben, z. B. das letzte zu betrachten. Sei daher

$$P = \Sigma k' \cos(ig + i'g' + K')$$

$$Q = \Sigma l' \sin(ig + i'g' + L')$$

woraus

$$\int P dt = \Sigma \frac{k'}{in+i'n'} \sin(ig + i'g' + K')$$

$$\int Q dt = -\Sigma \frac{l'}{in+i'n'} \cos(ig + i'g' + L')$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\left(\frac{dP}{dg}\right) = -\Sigma ik' \sin(ig + i'g' + K')$$
$$\left(\frac{dQ}{dg}\right) = \Sigma il' \cos(ig + i'g' + L')$$

hervorgeht. Es wird also, wenn wir nur die constanten Glieder berücksichtigen,

$$\left(\frac{dP}{dg}\right)\int Qdt = \Sigma \frac{ik'l'}{in+i'n'} \sin(K' - L')$$
$$\left(\frac{dQ}{dg}\right)\int Pdt = \Sigma \frac{ik'l'}{in+i'n'} \sin(K' - L')$$

und in dem Unterschied dieser beiden Ausdrücke heben sich wieder die constanten Glieder.

Es ist hiemit der im Art. 66 aufgestellte Satz für die Quadrate der störenden Kräfte bewiesen.

71.

Um diesen Satz auch für die Producte der störenden Massen zu beweisen, kommen drei Gattungen von Gliedern in Betracht. Erstens sind die Glieder zu betrachten, die ein zweiter störender Planet in Verbindung mit den eben betrachteten Gliedern von Ω hervorbringen kann, und in Bezug auf diese ist der Beweis schon im Vorhergehenden enthalten. Denn die betreffenden Störungsglieder sind in diesem Falle mit

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{ig + i''g'' + K''\right\}$$

multiplicirt, die in dem Ausdruck für $\frac{d\delta W_0}{dt}$ mit Gliedern von der Form

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{ig + i'g' + K\right\}$$

verbunden werden müssen. Nun ist aber klar, dass die Verbindung von derartigen Gliedern nur dann überhaupt constante Glieder erzeugen kann, wenn

$$i' = 0 \text{ und zugleich } i'' = 0$$

ist, aber der Fall $i' = 0$ ist in den Ausdrücken des vor. Art. einbegriffen, und folglich ist der Satz auch für diese Gattung von Störungen schon bewiesen.

Zweitens kommen die Störungen in Betracht, die der hier als störender betrachtete Planet von dem gestörten erleidet. Da diese Störungen von denselben Argumenten abhängen, wie die bei den Quadraten der störenden Kräfte in Betracht gekommenen, aber die Coefficienten, womit sie multiplicirt sind, andere Werthe haben, so muss für diese

Störungen der Beweis besonders geführt werden. Streng genommen könnte ich hier diesen Beweis übergehen, da die kleinen Planeten, die den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlungen ausmachen, keinen merklichen Einfluss auf die übrigen ausüben, aber anderer Anwendungen wegen, deren die hier entwickelten Formeln fähig sind, werde ich den Beweis mit aufnehmen.

Drittens sind die Störungen zu betrachten, die der störende Planet von irgend einem anderen Planeten erleidet, da aber diese mit

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}\left\{i'g' + i''g'' + K_1\right\}$$

multiplicirt sind, so können sie überhaupt nur constante Glieder in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ hervorbringen, wenn

$$i = 0 \text{ und } i'' = 0$$

sind, und dieser Umstand macht, wie man weiter unten sehen wird, ihre Betrachtung sehr einfach.

72.

Der Ausdruck (45) giebt in Bezug auf die hier zu betrachtenden, von den Producten der störenden Kräfte abhängigen, Glieder

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = F_1 n'\delta z' + G_1 \nu' + H_1 \frac{u'}{\cos i'}$$

wo

$$F_1 = \frac{an}{r} F;\; G_1 = \frac{an}{r} G;\; H_1 = \frac{an}{r} H$$

ist. Zufolge des Art. 46 (I) haben wir sogleich

$$F_1 = \left(\frac{dT_1}{dg'}\right);\; G_1 = -V_1 - T_1$$

und wenn wir hier wieder nur die Glieder betrachten, die zufolge der Form (47) überhaupt nur constante Glieder bekommen können, so wird sogleich vermittelst der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke

$$F_1 = -3an\left(\frac{d^2\Omega}{dg\,dg'}\right);\; G_1 = 3an\left(\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg}\right) + 3an\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$$

für welchen letzteren Ausdruck wir auch setzen dürfen

$$G_1 = -3anr'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'\,dg}\right)$$

weil Ω eine homogene Function von r und r' von der Ordnung -1 ist. Der Ausdruck (72) (I) für H giebt ferner sogleich zu erkennen, dass

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$H_1 = -\,3aa'n\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)$$

ist. Hiemit wird im jetzigen Falle

$$(56)\quad . \quad . \quad \frac{d\delta W_0}{dt} = -\,3an\left(\frac{d^2\Omega}{dgdg'}\right)n'\delta z' - 3anr'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\nu' - 3aa'n\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)\frac{u'}{\cos i'}$$

73.

Die im Art. 68 entwickelten Ausdrücke für $n\delta z$, ν und u können wir ohne Weiteres auf $n'\delta z'$, ν' und u' dadurch ausdehnen, dass wir alle Grössen, die sich darin auf den gestörten Planeten beziehen, in die dem störenden zukommenden verwandeln, und umgekehrt. Wir bekommen daher jetzt auf dieselbe Art wie oben zuerst

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W_0}{dt} &= 9ana'n'^2\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right)\iint\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt^2 + 6ana'n'\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right)\int r'\left(\frac{d\Omega'}{dr'}\right)dt\\ &+ 3\frac{ana'n'}{e'}A'\int\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt + 3\frac{ana'n'}{e'\cos\varphi'}B'\int\left(\frac{d\Omega'}{df'}\right)dt + 3ana'n'C'\int\left(\frac{d\Omega'}{de'}\right)dt\\ &- 3\frac{ana'n'}{\cos\varphi'}D'\int r'\cos f'\left(\frac{d\Omega'}{dZ'}\right)dt - 3\frac{ana'n'}{\cos\varphi'}E'\int r'\sin f'\left(\frac{d\Omega'}{dZ'}\right)dt\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned}A' &= -\,(2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\sin\varepsilon'\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) + (\cos\varepsilon'-e')\,r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\\ B' &= \quad (2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\sin\varepsilon'\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) - (\cos\varepsilon'+e')\,r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\\ C' &= -\,(e'-2\cos\varepsilon'+e'\cos^2\varepsilon')\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) + \sin\varepsilon'\,.\,r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\\ D' &= r'\sin f'\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right);\quad E' = r'\cos f'\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)\end{aligned}$$

gesetzt ist. Gehen wir nun hier von den Gleichungen

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{d\Omega}{dg'}\right) - \frac{a'^2\cos\varphi'}{r'^2}\left(\frac{d\Omega}{df'}\right) - \frac{a'^2e'\sin\varepsilon'}{r'}\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)\\ 0 &= \left(\frac{d\Omega}{de'}\right) - \frac{a'^2\sin\varepsilon'}{r'^2\cos\varphi'}(2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\left(\frac{d\Omega}{df'}\right) + \frac{a'^2}{r'^2}(\cos\varepsilon'-e')\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)\end{aligned}$$

aus, die den Gleichungen (52) und (53) analog sind, so finden wir auf dieselbe Art wie im Art. 69 die zwei folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}0 &= (2-e'^2-e'\cos\varepsilon')\sin\varepsilon'\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) - \cos^2\varphi'\left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right) - (\cos\varepsilon'+e')\,r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\\ 0 &= \frac{1}{e'}(1-2e'\cos\varepsilon'+e'^2\cos^2\varepsilon')\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) - \frac{\cos\varphi'}{e'}\left(\frac{d^2\Omega}{df'dg}\right) - r'\sin\varepsilon'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\end{aligned}$$

Addirt man die erste dieser zum Ausdruck für A', subtrahirt sie vom Ausdruck für B', und addirt man die zweite zum Ausdruck für C', so bekommt man

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$A' = -\cos^2\varphi'\left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right) - 2e'r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)$$
$$B' = \cos^2\varphi'\left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right)$$
$$C' = \frac{\cos^2\varphi'}{e'}\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right) - \frac{\cos\varphi'}{e'}\left(\frac{d^2\Omega}{df'dg}\right)$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so wird

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W_0}{dt} = {} & 9ana'n'^2\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right)\iint\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt^2 \\ & + 6ana'n'\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dgdg'}\right)\int r'\left(\frac{d\Omega'}{dr'}\right)dt - r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt\right\} \\ & + 3\frac{ana'n'\cos\varphi'}{e'}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{df'}\right)dt - \left(\frac{d^2\Omega}{df'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{de'}\right)dt\right\} \\ & + 3\frac{ana'n'\cos^2\varphi'}{e'}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dg'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{de'}\right)dt - \left(\frac{d^2\Omega}{de'dg}\right)\int\left(\frac{d\Omega'}{dg'}\right)dt\right\} \\ & + 3\frac{ana'n'}{\cos\varphi'}\left\{r'\cos f'\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)\int r'\sin f'\left(\frac{d\Omega'}{dZ'}\right)dt - r'\sin f'\left(\frac{d^2\Omega}{dZ'dg}\right)\int r'\cos f'\left(\frac{d\Omega'}{dZ'}\right)dt\right\}\end{aligned}$$

Erwägen wir nun, dass

$$\Omega' = \frac{m}{m'}\Omega + m(xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

ist, und substituiren zuerst $\frac{m}{m'}\Omega$ für Ω' in den vorstehenden Ausdruck, so besteht derselbe aus Gliedern, die dieselbe Form haben, wie die Glieder des Ausdrucks im Art. 69. Das Glied $\frac{m}{m'}\Omega$ von Ω' kann also kein constantes Glied in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ hervorbringen, und es bleibt nur noch das zweite Glied des obigen Ausdrucks von Ω' zu betrachten übrig.

74.

In §. 3 ist gezeigt worden, dass die Differentialgleichungen für $n\delta z$, ν und u an sich integrabel werden, wenn man

$$m(xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

für Ω darin substituirt. Da es dieser Ausdruck ist, welcher hier substituirt werden muss, so können wir die dort gegebenen Integrale für unsern Zweck anwenden. Beziehen wir sie auf den störenden Planeten, so werden sie

$$n'\delta z' = m\frac{n'h'}{k^2}(yX' - xY')$$
$$\nu' = m\frac{n'h'}{k^2}\left(x\frac{dY'}{dg'} - y\frac{dX'}{dg'}\right)$$
$$\frac{a'u'}{\cos i'} = mz$$

wo

$$z = r \sin J \sin (f + \Pi)$$

gesetzt, und die Coordinaten überhaupt auf die ideale Bahnebene des störenden Planeten bezogen werden müssen. Dieser Lage der Coordinaten entspricht auch der im Art. 34 (I) aufgestellte Ausdruck für $\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)$. Substituirt man nun die vorstehenden Ausdrücke in den Ausdruck (56), so wird dieser

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = -3anm\frac{n'h'}{k^2}\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dgdg'}\right)(yX' - xY') + r'\left(\frac{d^2\Omega}{dgdr'}\right)\left(x\frac{dY'}{dg'} - y\frac{dX'}{dg'}\right)\right\}$$
$$-3anm\left(\frac{d^2\Omega}{dgdZ'}\right)z$$

Es ist aber

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dgdg'}\right) = \left(\frac{d^2\Omega}{dgdX'}\right)\frac{dX'}{dg'} + \left(\frac{d^2\Omega}{dgdY'}\right)\frac{dY'}{dg'}$$
$$r'\left(\frac{d^2\Omega}{dgdr'}\right) = \left(\frac{d^2\Omega}{dgdX'}\right)X' + \left(\frac{d^2\Omega}{dgdY'}\right)Y'$$

substituirt man diese und erwägt, dass

$$\frac{k^2}{n'h'} = X'\frac{dY'}{dg'} - Y'\frac{dX'}{dg'}$$

ist, so wird

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = -3anm\left\{\left(\frac{d^2\Omega}{dgdX'}\right)x + \left(\frac{d^2\Omega}{dgdY'}\right)y + \left(\frac{d^2\Omega}{dgdZ'}\right)z\right\}$$
$$= -3anm\left(\frac{d\,.\left\{\left(\frac{d\Omega}{dX'}\right)x + \left(\frac{d\Omega}{dY'}\right)y + \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)z\right\}}{dg}\right)$$
$$+ 3anm\left\{\left(\frac{d\Omega}{dX'}\right)\frac{dx}{dg} + \left(\frac{d\Omega}{dY'}\right)\frac{dy}{dg} + \left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)\frac{dz}{dg}\right\}$$

Da das erste Glied dieses Ausdrucks ein vollständiges Differential nach g ist, so kann es kein constantes Glied enthalten, aber auch das zweite Glied ist ein vollständiges Differential nach g, und kann deshalb auch kein constantes Glied enthalten. Um dieses zu zeigen, müssen wir den Ausdruck der Störungsfunction vornehmen, nemlich

$$\Omega = m'D - m'E$$

wo

$$D = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}};\quad E = \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}$$

ist, und in welchem nach den Differentiationen nach x', y' und z', X' für x', Y' für y' und $z' = 0$ gesetzt werden muss. Aus dem Ausdruck für D geht hervor, dass

$$\left(\frac{dD}{dX'}\right) = -\left(\frac{dD}{dx}\right);\quad \left(\frac{dD}{dY'}\right) = -\left(\frac{dD}{dy}\right);\quad \left(\frac{dD}{dZ'}\right) = -\left(\frac{dD}{dz}\right)$$

ist, woraus

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$\left(\frac{dD}{dX'}\right)\frac{dx}{dg}+\left(\frac{dD}{dY'}\right)\frac{dy}{dg}+\left(\frac{dD}{dZ'}\right)\frac{dz}{dg}=-\left(\frac{dD}{dg}\right)$$

folgt. Da ferner

$$\left(\frac{dE}{dX'}\right)=\frac{x}{r'^3}-3\frac{X'}{r'^5}(xX'+yY')$$

$$\left(\frac{dE}{dY'}\right)=\frac{y}{r'^3}-3\frac{Y'}{r'^5}(xX'+yY')$$

$$\left(\frac{dE}{dZ'}\right)=\frac{z}{r'^3}$$

wird, so erhält man

$$\left(\frac{d\Omega}{dX'}\right)\frac{dx}{dg}+\left(\frac{d\Omega}{dY'}\right)\frac{dy}{dg}+\left(\frac{d\Omega}{dZ'}\right)\frac{dz}{dg}=-m'\left(\frac{dD}{dg}\right)$$

$$-\frac{m'}{r'^3}\frac{d\,(x^2+y^2+z^2)}{2dg}+\tfrac{3}{2}m'\frac{X'^2}{r'^5}\frac{d.x^2}{dg}+3m'\frac{X'Y'}{r'^5}\frac{d.xy}{dg}+\tfrac{3}{2}m'\frac{Y'}{r'^5}\frac{d.y^2}{dg}$$

Da nun die Coordinaten des störenden Planeten kein g enthalten, so ist die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential nach g. W. z. b. w.

Also auch die Störungen, die der gestörte Planet in der Bewegung des störenden hervorbringt, können in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ kein constantes Glied hervorbringen.

In Bezug auf dritte im Art. 71 aufgezählte Gattung von Störungen wurde dort bemerkt, dass sie nur aus Gliedern der Differentialquotienten von Ω, die folgende Form haben

$$k\cos(i''g'+K)$$

entstehen können, aber im Ausdruck (56) sind alle Differentialquotienten von Ω nach g differentiirt, und die Glieder der genannten Form sind also in diesem Ausdruck nicht vorhanden. Es können also auch die Störungen, die der störende Planet von irgend einem dritten erleidet, in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ kein constantes Glied hervorbringen.

75.

Im Vorhergehenden ist der Satz des Art. 66 vollständig bewiesen, und es ist also nur noch der Uebergang zu dem Satze des Art. 65 zu bewirken. Die einzigen Glieder, die hiebei in Betracht kommen, sind die, welche g' nicht enthalten, und wir dürfen daher für den jetzigen Zweck, und mit Rücksicht auf die Form (47) setzen,

$$\frac{d\delta W_0}{dt}=nk_1\cos g+nk_2\cos 2g+nk_3\cos 3g+\text{etc.}$$

$$+(\cos\eta+\tfrac{1}{2}e)\{nl_0+nl_1\cos g+nl_2\cos 2g+nl_3\cos 3g+\text{etc.}\}\quad(57)$$

wo dem Vorhergehenden zufolge das constante Glied Null ist, und ich die mit den Sinussen multiplicirten Glieder weggelassen habe, weil sie auf keinen Fall in der jetzt zu betrachtenden Umwandelung ein constantes Glied hervorbringen können. Es ist nun

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = \frac{1}{n}\frac{d\delta W_0}{dt}(1 - e\cos\varepsilon)$$

und es ist also die Entwickelung der Functionen

$$(1 - e\cos\varepsilon)\cos ig$$

in Reihen zu betrachten, die nach den Cosinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie ε fortschreiten. Bezeichnet man aber mit y die zur excentrischen, und mit z die zur mittleren Anomalie gehörige imaginäre Exponentialfunction, so habe ich früher bewiesen, dass ohne Ausnahme

$$z^i = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}}\, y + J^{(i-2)}_{\frac{ie}{2}}\, y^2 + \text{etc.}$$
$$+ J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}}\frac{1}{y} + J^{(i+2)}_{\frac{ie}{2}}\frac{1}{y^2} + \text{etc.}$$

ist, woraus

$$z^{-i} = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}}\, y + J^{(i+2)}_{\frac{ie}{2}}\, y^2 + \text{etc.}$$
$$+ J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}}\frac{1}{y} + J^{(i-2)}_{\frac{ie}{2}}\frac{1}{y^2} + \text{etc.}$$

folgt. Geht man zum Reellen über, so ergiebt sich

$$\cos ig = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} + \left\{J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}}\right\}\cos\varepsilon + \left\{J^{(i+2)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i-2)}_{\frac{ie}{2}}\right\}\cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

und hieraus

$$(1 - e\cos\varepsilon)\cos ig = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}}$$
$$+ \left\{J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}} + J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}} - eJ^{(i)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i+2)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i-2)}_{\frac{ie}{2}}\right\}\cos\varepsilon + \text{etc.}$$

Aber zwischen den JFunctionen findet mit Ausnahme von $i = 0$ folgende Relation statt

$$0 = J^{(i)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i+1)}_{\frac{ie}{2}} - \frac{e}{2}J^{(i-1)}_{\frac{ie}{2}}$$

Hieraus folgt, dass in den Entwickelungen der Functionen $(1 - e\cos\varepsilon)$ $\cos ig$ keine constanten Glieder vorhanden sind, wenn i von Null verschieden ist. Die Verwandelung des obigen Ausdrucks (57) giebt also

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = \tfrac{1}{2}el_0 + l_0\cos\eta + \text{Gliedern anderer Form,}$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

und es verhält sich hier der Coefficient von $\cos\eta$ zum constanten Gliede wie 1 zu $\frac{1}{2}e$. W. z. b. w.

76.

3^{ter} Satz.

„Die in der ersten Annäherung den Integralen hinzugefügten willkührlichen Constanten bringen in der Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von ε und η sowohl constante Glieder, wie Glieder von der Form knt und $k'nt\cos\eta$ hervor, in welchen die Coefficienten nicht in dem eben für die anderen Glieder gefundenen Verhältniss zu einander stehen."

Betrachten wir, um diesen Satz zu beweisen, zuerst wieder die Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ nach den mittleren Anomalien. Die Function $\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)$ hat kein constantes Glied, sei aber

$$n\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt = p$$

dann ist p die diesem Integral hinzugefügte willkührliche Constante. Sei ferner

$$n\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt + \tfrac{2}{3}r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \pi$$

dann ist π aus der willkührlichen Constante p und dem in der Entwickelung von $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ entstehenden constanten Gliede zusammengesetzt. Seien ferner in den übrigen, in dem Ausdruck des Art. 69 unter dem Integralzeichen stehenden, Functionen die durch die Entwickelungen entstehenden constanten Glieder die folgenden,

$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = \alpha;\quad \left(\frac{d\Omega}{de}\right) = \beta;$$
$$P = \theta;\qquad Q = \varkappa;$$

dann geben die Integrale

$$n\int\left\{n\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt + \tfrac{2}{3}r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}dt = \pi nt + q$$
$$n\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt = \alpha nt + \beta;\ n\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt = \beta nt + c$$
$$n\int P dt = \theta nt + h;\ n\int Q dt = \pi nt + k$$

wo p, q, β, c, h, k die sechs willkührlichen Constanten sind, die zufolge der Grundzüge der Integralrechnung jedenfalls mit den in der That im §. 5 eingeführten willkührlichen Constanten identificirt werden können.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden · SMWK · Sächsische Akademie der Wissenschaften

Betrachten wir nun wieder die Ausdrücke der Art. 69 und 73 für $\frac{d\delta W_0}{dt}$, so zeigt sich sogleich, dass die in diesen mit einem Differential nach g multiplicirten Glieder keine Glieder von der im Satze genannten Form hervorbringen können, indem in den Differentialquotienten nach g keine ähnlichen vorhanden sind. Es können also namentlich die beiden eben h und k genannten Constanten keine derartigen Glieder einführen. Anders verhält sich die Sache aber in Bezug auf die drei folgenden Glieder des Ausdrucks von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ im Art. 69:

$$a^2n^2\frac{3-2e^2}{e^2\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt + 3a^2n^2\left(\frac{d\Omega}{de}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{de}\right)dt$$

$$-3\frac{a^2n^2}{e^2\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)\int\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt$$

Diese geben, nachdem die obigen Werthe der Differentialquotienten und der Integrale darin substituirt worden sind,

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = a^2n\frac{3-2e^2}{e^2\cos^2\varphi}(\alpha^2nt+\alpha b) + 3a^2n(\beta^2nt+\beta c) - 3\frac{a^2n}{e^2\cos\varphi}\alpha p$$

und diese sind die einzigen Glieder dieser Art, die vorkommen können, denn in allen übrigen Gliedern von $\frac{d\delta W_0}{dt}$ sind die Integrale mit Differentialquotienten nach g multiplicirt.

Da wir nun im vor. Art. gesehen haben, dass in der Entwickelung von $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ das Verhältniss $\frac{1}{2}e$ zu 1 zwischen dem constanten Gliede und dem Coefficienten des mit $\cos\eta$ multiplicirten vom Nichtvorhandensein des constanten Gliedes in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ bedingt war, so kann für die vorstehenden Glieder dieses Verhältniss nicht statt finden, wie auch die Coefficienten von $\cos\eta$ und $t\cos\eta$ beschaffen sein mögen. W. z. b. w.

77.

Multipliciren wir den eben entwickelten Ausdruck mit dt und integriren, so wird

$$\overline{\delta W}_0 = a^2\frac{3-2e^2}{e^2\cos^2\varphi}(\tfrac{1}{2}\alpha^2n^2t^2+\alpha bnt) + 3a^2(\tfrac{1}{2}\beta^2n^2t^2+\beta cnt) - \frac{3a^2}{e^2\cos\varphi}\alpha pnt$$

und es scheint daher, dass diese Glieder in $n\delta z$ Glieder hervorbringen würden, die dem Quadrat und dem Cubus der Zeit proportional wären. Aber dass dieses nicht der Fall ist, zeigt der folgende

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

4te Satz.

„In der Entwickelung von $\frac{d\delta z}{d\varepsilon}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von ε sind die aus den im Vorhergehenden betrachteten Gliedern entstehenden, und bez. t und t^2 proportionalen, Glieder gleich Null.“

Da zufolge des Art. 75 in den Entwickelungen der Functionen $(1-e\cos\varepsilon)\cos ig$ keine constanten Glieder vorhanden sind, so ist klar, dass der obige Satz bedingt, dass auch in der Entwickelung von $\frac{d\delta z}{dt}$ nach den Cosinussen und Sinussen der mittleren Anomalie g keine t und t^2 proportionalen Glieder enthalten seien. Wir brauchen also blos dieses zu beweisen. Da nun aber die Gleichung (40) (I)

$$\frac{d\delta z}{dt} = \overline{\delta W_0} + \overline{\left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right)}\, n\delta z + \nu^2$$

giebt, und der betreffende Ausdruck von $\overline{\delta W_0}$ schon zu Anfang dieses Art. gegeben ist, so brauchen wir nur noch die beiden letzten Glieder des vorstehenden Ausdrucks zu entwickeln.

Substituiren wir die im vor. Art. gegebenen Ausdrücke der Integrale in die Ausdrücke für $n\delta z$ und ν, die im Art. 68 entwickelt worden sind, so wird

$$\begin{aligned} n\delta z &= -3a(\pi nt + q) \\ &\quad + \frac{a}{e}(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin\varepsilon\left(p - \frac{\alpha nt+\mathit{6}}{\cos\varphi}\right) + a(e - 2\cos\varepsilon + e\cos^2\varepsilon)(\beta nt + c) \\ \nu &= \tfrac{3}{2}ap + \frac{a}{2\cos\varphi}(\alpha nt + \mathit{6}) \\ &\quad - \frac{a}{e}(\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}e)\left(p - \frac{\alpha nt+\mathit{6}}{\cos\varphi}\right) - a\sin\varepsilon(\beta nt + c) \end{aligned}$$

und da man hier $\overline{\left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right)}$ erhält, wenn man den a. a. O. entwickelten Ausdruck für $\frac{d\delta z}{dt}$ ausserhalb der Integralzeichen nach g differentiirt und mit dg dividirt, so ergiebt sich

$$\overline{\left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right)} = -\frac{2a^2\sin\varepsilon}{er}\left(p - \frac{\alpha nt+\mathit{6}}{\cos\varphi}\right) + \frac{2a^2\cos\varepsilon}{r}(\beta nt + c)$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem vorstehenden Ausdruck von $n\delta z$, erhebt den von ν ins Quadrat, und nimmt blos auf die Glieder Rücksicht, die Glieder hervorbringen können, die t und t^2 proportional sind, so wird zuerst

$$\overline{\left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right)}\, n\delta z = -6\,\frac{a^3\cos\varepsilon}{r}(\beta nt+c)(\pi nt+q)$$
$$-\frac{2a^3}{e^2 r}(2-e^2-e\cos\varepsilon)\sin^2\varepsilon\left(p-\frac{\alpha nt+\beta}{\cos\varphi}\right)^2$$
$$+\frac{2a^3}{r}(e-2\cos\varepsilon+e\cos^2\varepsilon)\cos\varepsilon(\beta nt+c)^2$$

oder

$$\overline{\left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right)}\, n\delta z = -6\,\frac{a^3\cos\varepsilon}{r}(\beta nt+c)(\pi nt+q)$$
$$-\frac{2a^2}{e^2}\left(\frac{a\sin^2\varepsilon}{r}\cos^2\varphi+\sin^2\varepsilon\right)\left(p-\frac{\alpha nt+\beta}{\cos\varphi}\right)^2$$
$$+\frac{2a^2}{e}\left(\frac{r\cos\varepsilon}{a}-\frac{a\cos\varepsilon}{r}\cos^2\varphi\right)(\beta nt+c)^2$$

und

$$\nu^2 = \frac{a^2}{4}\left(3p+\frac{\alpha nt+\beta}{\cos\varphi}\right)^2$$
$$+\frac{a^2}{e^2}(\cos^2\varepsilon+e\cos\varepsilon+\tfrac{1}{4}e^2)\left(p-\frac{\alpha nt+\beta}{\cos\varphi}\right)^2$$
$$+a^2\sin^2\varepsilon(\beta nt+c)^2$$

wo in den Coefficienten nur die constanten Glieder, die ihre Entwickelung nach den Cosinussen der Vielfachen von g giebt, beibehalten werden dürfen. Da

$$\frac{\cos\varepsilon}{r}=\frac{d.\sin\varepsilon}{adg}$$

ist, so enthält die Entwickelung dieser Function kein constantes Glied. Da ferner

$$\frac{a\sin^2\varepsilon}{r}=\frac{a}{2r}-\frac{a\cos 2\varepsilon}{2r}=\frac{a}{2r}-\frac{d.\sin 2\varepsilon}{4dg}$$

und in der Entwickelung von $\frac{a}{r}$ das constante Glied $=1$ ist, so ist $\frac{1}{2}$ das constante Glied in $\frac{a\sin^2\varepsilon}{r}$. Da ferner in der Entwickelung von $\cos i\varepsilon$ für $i=1$ das constante Glied $=-\frac{1}{2}e$, und für $i>1$ das constante Glied Null ist, so ergeben sich leicht die constanten Glieder der Entwickelung der übrigen in den beiden obigen Ausdrücken vorkommenden Coefficienten. Es folgt hieraus leicht, dass die folgenden Werthe substituirt werden müssen.

$$\frac{\cos\varepsilon}{r}=0$$
$$\frac{a\sin^2\varepsilon}{r}=\frac{1}{2}$$
$$\sin^2\varepsilon=\frac{1}{2}$$
$$\frac{r}{a}\cos\varepsilon=-e$$
$$\cos^2\varepsilon=\frac{1}{2}$$
$$e\cos\varepsilon=-\frac{1}{2}e^2$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

und mit bloser Bezugnahme auf die t und t^2 proportionalen Glieder wird daher

$$\left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right)n\delta z = -\frac{2a^2(2-e^2)}{e^2\cos^2\varphi}\left(\tfrac{1}{2}\alpha^2n^2t^2 + \alpha 6nt\right) - 4a^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2n^2t^2 + \beta cnt\right) + \frac{2a^2(2-e^2)}{e^2\cos\varphi}\alpha pnt$$

$$\nu^2 = \frac{a^2}{e^2\cos^2\varphi}\left(\tfrac{1}{2}\alpha^2n^2t^2 + \alpha 6nt\right) + a^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2n^2t^2 + \beta cnt\right) - \frac{a^2(1-2e^2)}{e^2\cos\varphi}\alpha pnt$$

also

$$\left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right)n\delta z + \nu^2 = -\frac{a^2(3-2e^2)}{e^2\cos^2\varphi}\left(\tfrac{1}{2}\alpha^2n^2t^2 + \alpha 6nt\right) - 3a^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2n^2t^2 + \beta cnt\right) + \frac{3a^2}{e^2\cos\varphi}\alpha pnt$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem obigen Ausdruck für $\delta\overline{W}_0$, so findet man

$$\delta\overline{W}_0 + \left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right)n\delta z + \nu^2 = 0$$

W. z. b. w.

Da man in der Berechnung der Störungen nach der hier erklärten Methode $\frac{d\delta z}{dt}$ zuvor, und darauf erst $\frac{d\delta z}{d\varepsilon}$ bekommt, so will ich noch auf folgenden Satz aufmerksam machen.

5ter Satz.

„In der Entwickelung von $\frac{d\delta z}{dt}$ nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von ε, verhalten sich die Coefficienten der t und t^2 proportionalen Glieder zu denen von $t\cos\varepsilon$ und $t^2\cos\varepsilon$ wieder wie $\frac{1}{2}e$ zu 1."

welcher eine nothwendige Folge des vierten Satzes ist. Denn da zufolge dieses Satzes die Coefficienten der t und t^2 proportionalen Glieder in $\frac{d\delta z}{d\varepsilon}$ gleich Null sind, und

$$n\frac{d\delta z}{d\varepsilon} = (1 - e\cos\varepsilon)\frac{d\delta z}{dt}$$

ist, so muss nothwendig

$$\frac{d\delta z}{dt} = \tfrac{1}{2}eft + \tfrac{1}{2}ef't^2 + ft\cos\varepsilon + f't^2\cos\varepsilon + \text{etc.}$$

sein, wo f und f' die durch die Rechnung erhaltenen numerischen Coefficienten bedeuten. Denn wenn diese Relation nicht statt fände, so würden nach der Multiplication mit $1 - e\cos\varepsilon$ die t und t^2 proportionalen Glieder nicht Null sein können.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften

78.

Im Vorhergehenden ist somit bewiesen, dass die in $\left(\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}\right)$ entstehenden constanten und t proportionalen, so wie die in $\left(\frac{d W_0}{d\gamma}\right) n\delta z$ und ν^2 entstehenden t und t^2 proportionalen Glieder zur Säcularänderung der mittleren Länge nichts beitragen, sondern sich gegen einander aufheben. Sollte sich daher in der Rechnung, wegen der Unrichtigkeit der letzten Decimalstelle diese Aufhebung nicht vollständig zeigen, so muss man dennoch diese Glieder im Resultat weglassen.

Es folgt hieraus, dass die Säcularänderung der mittleren Länge nur aus den Gliedern entstehen kann, die η neben ε enthalten. Setzen wir

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = knt \sin(\eta - \varepsilon)$$

wo k der durch die Entwickelungen zu berechnende numerische Coefficient ist, der nur aus sehr wenigen Gliedern zusammen gesetzt ist, so wird

$$\overline{\delta W}_0 = knt$$

und

$$n\delta z = \int \frac{r}{a} \overline{\delta W}_0 d\varepsilon = \tfrac{1}{2} kn^2 t^2$$

wenn wir hier die in den Integralen mit entstehenden Glieder anderer Form weglassen. Da ausserdem nur kleinere Glieder dieser Form entstehen können, so ist

$$\tfrac{1}{2} kn^2 t^2$$

das Hauptglied der Säcularänderung der mittleren Länge, wenn man die Grössen von der Ordnung der Cuben und der höheren Potenzen der störenden Kräfte übergeht.

§. 8. Integration der in den Breitenstörungen aus der Variation des Factors $\cos i$ entstehenden Glieder.

79.

Im Art. 48 (I) wurde der folgende allgemeine Ausdruck für die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängigen Breitenstörungen gegeben,

$$\frac{d\delta R_0}{d\varepsilon} = A'' \frac{an\delta z}{r} + B''\nu + C''\delta\frac{h}{h_0} + D''\frac{u}{\cos i} + E''\frac{u_1}{\cos i} + F'' n'\delta z' + G''\nu' + H''\frac{u}{\cos i}$$

und die Ausdrücke für die Coefficienten A'', B'', etc. abgeleitet. Es gab sich hiebei zu erkennen, dass die Ausdrücke für die Coefficienten D'' und E'' aus zwei Theilen von verschiedener Form bestehen, die dort mit D''_1, E''_1 und D''_2, E''_2 bezeichnet wurden. Der erste Theil eines jeden dieser beiden Coefficienten rührt von der Veränderung der Störungsfunction her, während der andere Theil aus der Veränderung des Factors $\cos i$ entsteht, womit der strenge Ausdruck des Differentials der Breitenstörungen multiplicirt ist. Ich will diesem zufolge hier das Differential von δR_0 in die zwei entsprechenden Theile theilen, und diese mit $d\delta_1 R_0$ und $d\delta_2 R_0$ bezeichnen, so dass

$$\frac{d\delta_1 R_0}{dt} = A''\frac{an\delta z}{r} + B''\nu + C''\delta\frac{h}{h_0} + D''_1\frac{u}{\cos i} + E''_1\frac{u_1}{\cos i} + F''n'\delta z' + G''\nu' + H''\frac{u'}{\cos i'}$$

$$\frac{d\delta_2 R_0}{dt} = D''_2\frac{u}{\cos i} + E''_2\frac{u'}{\cos i'}$$

wird. Hierauf bekommt man nach der Integration

$$\delta R_0 = \delta_1 R_0 + \delta_2 R_0$$

und setzt man nach der Verwandelung von η in ε

$$\delta_1 u = \overline{\delta_1 R_0};\ \ \delta_2 u = \overline{\delta_2 R_0}$$

so wird

$$\delta u = \delta_1 u + \delta_2 u$$

80.

Ich werde jetzt zeigen, dass der Ausdruck von $d\delta_2 R_0$ theils an sich integrabel ist, theils auf die im Art. 10 (I) mit Γ bezeichnete Function hingeführt werden kann. Im Art. 48 (I) wurde gefunden

$$D''_2 = -\frac{\varrho r^2}{a\cos^3\varphi}\sin(\omega - f)\left\{\sin(f+\pi-\theta) + e\sin(\pi-\theta)\right\}\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\sin i$$

$$E''_2 = -\frac{\varrho r^2}{a\cos^2\varphi}\sin(\omega - f)\cos(f+\pi-\theta)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\sin i$$

substituirt man diese Werthe, und geht durch die Gleichung $d\varepsilon = \frac{a}{r}ndt$ zum Differential nach t über, so wird zuerst

$$\frac{d\delta_2 R_0}{dt} = -\frac{n\varrho r}{\cos^2\varphi}\sin(\omega-f)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\sin i\left\{[\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)]\frac{u}{\cos\varphi\cos i} + \cos(f+\pi-\theta)\frac{u_1}{\cos i}\right\}$$

Da hier $u = \frac{r}{a}s$ ist, so giebt der im Art. 9 (I) gegebene Ausdruck für s,

$$u = q\frac{r}{a}\sin(f+\pi-\theta) - p\frac{r}{a}\cos(f+\pi-\theta) \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

woraus man durch die Differentiation nach ε erhält,

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
Sächsische Akademie der Wissenschaften

$$u_1 = q\frac{r}{a\cos\varphi}[\cos(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)]+p\frac{r}{a\cos\varphi}[\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)]$$

Durch die Elimination von p ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen

$$(59)\quad q = \frac{u}{\cos^2\varphi}[\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)]+\frac{u_1}{\cos\varphi}\cos(f+\pi-\theta)$$

Aus Art. 10 (I) erhalten wir ferner

$$\frac{dp}{dt} = \frac{an}{\cos\varphi}r\sin(f+\pi-\theta)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{an}{\cos\varphi}r\cos(f+\pi-\theta)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$

und durch Hülfe dieser drei Gleichungen wird

$$\frac{d\delta_2 R_0}{dt} = -\left\{\frac{\varrho}{a}\sin(\omega+\pi-\theta)\,q\frac{dq}{dt}-\frac{\varrho}{a}\cos(\omega+\pi-\theta)\,q\frac{dp}{dt}\right\}\frac{\sin i}{\cos^2 i}$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks ist an sich integrabel, und für die Integration des zweiten bemerke ich, dass identisch

$$\int q\,dp = \tfrac{1}{2}pq+\tfrac{1}{2}\int(q\,dp-p\,dq)$$
$$= \tfrac{1}{2}pq+\Gamma\cos^3 i$$

zufolge Art. 10 (I). Integrirt man daher und verwandelt darauf ϱ in r und ω in f, so wird

$$\delta_2 u = -\left\{q\frac{r}{a}\sin(f+\pi-\theta)-p\frac{r}{a}\cos(f+\pi-\theta)\right\}\frac{q}{2\cos^2 i}\sin i$$
$$+\Gamma\frac{r}{a}\cos(f+\pi-\theta)\cos i\sin i$$

oder nach der Substitution der Ausdrücke (58) und (59) für u und q,

$$\delta_2 u = -\frac{u^2}{2\cos^2 i}\,\frac{\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)}{\cos^2\varphi}\sin i-\frac{uu_1}{2\cos^2 i}\,\frac{\cos(f+\pi-\theta)}{\cos\varphi}\sin i$$
$$+\Gamma\frac{r}{a}\cos(f+\pi-\theta)\cos i\sin i$$

wo zufolge (23) (I)

$$\Gamma = \frac{1}{2\cos\varphi\cos i}\int\frac{r}{a}\cdot\frac{u}{\cos i}\cdot a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)d\varepsilon$$

ist. Hiemit ist die oben angekündigte Integration ausgeführt. Wir haben im Art. 59 gesehen, dass für die Egeria in $\frac{u}{\cos i}$ der grösste Coefficient $= 95''5$ ist, hieraus folgt, dass der grösste Coefficient in $\frac{u^2}{2\cos^2 i}$ und $\frac{uu_1}{2\cos^2 i}$ sehr nahe $= 0''01$ ist, die beiden ersten Glieder von $\delta_2 u$ sind also in unserm Beispiel selbst in dem Falle, dass man die Fundamentalebene so wählen wollte, dass $\sin i$ nahe gleich Eins würde, unmerklich, und dieses ist daher um so mehr der Fall, wenn man die Ecliptik oder den Aequator als Fundamentalebene annimmt. Es wird sich in der Folge in Bezug auf das dritte Glied von $\delta_2 u$ nahe dasselbe herausstellen.

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
SMWK
Sächsische Akademie der Wissenschaften