Programm,

womit zu

der öffentlichen Prüfung der Zöglinge

des

Friedrichs-Werderschen Gymnasiums,

welche

Dienstag den 5. April 1870,

Vormittags von 10, Nachmittags von 2½ Uhr an

in

dem Hörsaale der Anstalt

(Kurstrasse No. 52)

stattfinden wird,

die Beschützer, Gönner und Freunde des Schulwesens und des Gymnasiums

ergebenst einladet

Dr. Karl Eduard Bonnell,
Director und Professor.

Inhalt:

Berlin, 1870.
Gedruckt in der Nauckschen Buchdruckerei.

Beiträge
zur
Functionentheorie.

A. Geometrisch-mechanische Bedeutung der bestimmten Integrale complexer Funktionen.

Es ist ein bekannter und für die Grössenschätzung wichtiger Satz, dass bei einer reellen Function einer reellen Veränderlichen der Werth von $\int_a^z f(z)\,dz : (z-a)$ unter denjenigen enthalten ist, welche $f(z)$ zwischen $z=a$ und $z=z$ annimmt; und es liegt seine Gültigkeit bei complexen Functionen für eine unendlich kleine Differenz $(z-a)$ auf der Hand, weil der obige Ausdruck für eine solche in den Differentialquotienten des Integrals übergeht. Im Falle einer endlichen Differenz $(z-a)$ kann ein Gleiches jedoch nicht behauptet werden, da sich der Werth jenes Ausdrucks als gleichzeitiger Werth irgend eines benutzten $f(z)$ z. B. dann unbedingt vermeiden lässt, wenn der Werth des Integrals nicht vom Integrationswege abhängt.

Nun ist es aber nicht bloss von theoretischem Interesse, sondern auch von praktischer Bedeutung — wozu der nächste Abschnitt ein Beispiel giebt — den Werth des bestimmten Integrals in der Anschauung genau zu fixiren; weshalb es gerechtfertigt erscheint, diesem Gegenstande einige Aufmerksamkeit zu widmen.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Werthe der complexen Grössen $z=x+iy$ und $f(z)=X+iY$ nach der Gauss'schen Methode durch Punkte einer Ebene dargestellt und fassen, wenn $f(z)$ mehrdeutig sein sollte, unter der Bezeichnung des Weges oder der Bahn $\mathfrak{W}$ der Function $f(z)$ eine im Voraus bestimmte Folge der Punkte $f(z)$ zusammen, welche dem Wege $\mathfrak{w}$ von z in der Weise entsprechen, dass die Vieldeutigkeit von $f(z)$ durch beliebige Auswahl unter den gleichzeitigen Werthen aufgehoben ist. Dadurch soll aber die völlige Unbestimmtheit der Function $f(z)$, welche in einzelnen Punkten des Integrationsweges $\mathfrak{w}$ eintreten kann, keineswegs ausgeschlossen sein, so wie auch $\mathfrak{W}$ keinen stetigen Zusammenhang zu zeigen braucht, sondern wir fordern nur die Erfüllung derjenigen ausreichenden und meistens erfüllten, wenn auch nicht durchaus nothwendigen Bedingungen für die endliche Bestimmtheit des Integrals, welche in einer früheren Abhandlung „Ueber die Endlichkeit von bestimmten Integralen und Reihensummen. Berlin 1867." aufgestellt sind.

Es zeigte sich dort u. A., was für unsern gegenwärtigen Zweck wichtig ist, die endliche Bestimmtheit von $\int_a^b f(z)\,dz$ als verbürgt, wenn $f(z)$ nur in einzelnen Punkten des Integrationsweges $\mathfrak{w}$ aufhört, endlich und bestimmt zu sein, in diesen singulären Punkten aber folgende Eigenschaften besitzt:

1. In den singulären Punkten z', durch welche der Integrationsweg $\mathfrak{w}$ hindurch führt, muss durch einen zweiten Punkt z von $\mathfrak{w}$ die Grösse

$$\underset{z=z'}{Lim}\,.\,(z-z')f(z)$$

einen bestimmten endlichen Werth erlangen.

2. In den Endpunkten z' des Integrationsweges muss

$$\underset{z=z'}{Lim}\,.\,(z-z')\,l^1(z-z')\,l^2(z-z')\ldots[l^n(z-z')]^{1+\varepsilon}f(z)$$

für irgend eine Nummer n und ein positives ε endlich sein, wobei $l^1(z-z')=l(z-z')$, $l^m(z-z')=l\,.\,l^{m-1}(z-z')$ gesetzt ist. Dies reducirt sich in den einfachsten Fällen darauf, dass es eine positive Grösse μ giebt, welche

$$\underset{z=z'}{Lim}\,.\,(z-z')^{1-\mu}f(z)=o$$

macht.

Indem wir nun die Function $f(z)$ den aufgezählten Bedingungen unterwerfen, wollen wir den Integrationsweg $\mathfrak{w}$ als gradlinig annehmen, so dass seine Elemente dz sämmtlich gleiche Richtungswinkel erhalten.

Wenn wir daher die dz dadurch völlig gleich machen, dass wir ihnen auch gleiche absolute Grösse geben, so folgt aus der Definition des bestimmten Integrals, nach welcher

$$\int_a^b f(z)\,dz = Lim\,.\,\Sigma\, f(z)\,dz$$

ist, unmittelbar die Gleichung:

$$(1.)\quad \int_a^b f(z)\,dz:(b-a)=Lim\,.\,\frac{\Sigma X}{n}+i\,.\,Lim\,.\,\frac{\Sigma Y}{n}.$$

Diese interpretirt sich aber in folgender Weise:

Lehrsatz I.

Theilt man den graden Integrationsweg $\mathfrak{w}$ *des Integrals in unendlich viele gleiche Theile, so ist*

$$\int_a^b f(z)\,dz:(b-a)$$

der Punkt der mittleren Entfernung aller Punkte, welche in der Bahn $\mathfrak{W}$ *der Function* $f(z)$ *den Theilpunkten von* $\mathfrak{w}$ *entsprechen.*

— Dass man hierbei die Punkte von $\mathfrak{w}$ überspringen darf, in denen $f(z)$ einen unbestimmten (endlichen) Werth besitzt, liegt auf der Hand, da die mit unbestimmt endlichen Zählern versehenen Brüche $\frac{X}{n}, \frac{Y}{n}$ für unendlich grosse n verschwinden.

Der Mangel dieser Interpretation, dass man ausser der Gestalt der Bahn $\mathfrak{w}$ noch die Vertheilung gewisser Punkte auf ihr kennen muss, lässt sich verringern, wenn man annimmt, dass $f(z)$ nach der Richtung des Integrationsweges $\mathfrak{w}$ differentiirbar sei.

Denn bezeichnet man die in Rede stehende Ableitung durch $f'(z)$, so wird identisch:

$$b-a=\int_a^b dz=\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{df(z)}{f'(z)},\ \int_a^b f(z)dz=\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{f(z)\,df(z)}{f'(z)};$$

mithin, wenn man noch die Bezeichnungen

$$(2.)\quad \begin{cases} df(z)=dv\,.\,e^{i\varphi}, \\ f'(z)=v'\,.\,e^{i\varphi'} \end{cases}$$

einführt und unter V die Länge der vom Punkte $f(a)$ bis zum Punkte $f(b)$ reichenden Bahn $\mathfrak{w}$ der Function $f(z)$ versteht:

$$(3.)\quad \int_a^b f(z)dz:(b-a)=\frac{\int_o^V X\frac{dv}{v'}}{\int_o^V\frac{dv}{v'}}+i\,.\,\frac{\int_o^V Y\frac{dv}{v'}}{\int_o^V\frac{dv}{v'}}.$$

Zur Ableitung dieser Formel bemerken wir noch, dass $df(z)$ und dv augenscheinlich die Elemente von $\mathfrak{W}$ und von V sind, dass in Bezug auf die letzte Grösse diejenigen Punkte übersprungen werden dürfen, in denen $f(z)$ unbestimmt wird, und dass der in

$$\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{f(z)\,df(z)}{f'(z)}:\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{df(z)}{f'(z)}=\int_o^V f(z)\frac{dv}{v'}.e^{i(\varphi-\varphi')}:\int_o^V\frac{dv}{v'}.e^{i(\varphi-\varphi')}$$

auftretende Factor $e^{i(\varphi-\varphi')}$ sich weghebt, weil $(\varphi-\varphi')$ als Richtungswinkel der Elemente

$$dz=\frac{df(z)}{f'(z)}=\frac{dv}{v'}.\ e^{i(\varphi-\varphi')}$$

des graden Integrationsweges $\mathfrak{w}$ constant ist.

Die Gleichung (3.) lässt sich aber in folgender Weise interpretiren:

Lehrsatz II.

Unter der Voraussetzung eines graden Integrationsweges ist

$$\int_a^b f(z)\,dz:(b-a)$$

die complexe Coordinate des Schwerpunktes der entsprechenden Bahn $\mathfrak{W}$ von $f(z)$, wenn man die letztere proportional dem Modul von $\frac{1}{f'(z)}$ belastet denkt.

Die Grösse der Belastung von $\mathfrak{W}$ lässt sich ferner durch Ausbreitung eines Flächenstücks um diese Linie veranschaulichen.

Denn stellt man sich vor, dass eine Grade, welche die Länge c und den constanten Richtungswinkel $(\gamma+\varrho)$ hat, mit ihrem Mittelpunkte auf $\mathfrak{W}$ entlang gleitet, so ist die Abweichung beider $=\varphi-(\gamma+\varrho)$, mithin die Grösse des bestrichenen Flächenelements

$$= c \sin(\varphi - \gamma - \varrho)\, dv;$$

und sein Schwerpunkt liegt in $\mathfrak{W}$. Soll daher dieser Ausdruck $= k \cdot \frac{dv}{v'}$ sein, so muss

$$c = \frac{k}{v' \sin(\varphi - \gamma - \varrho)},$$

oder wenn man unter ϱ den Richtungswinkel des Integrationsweges versteht,

$$c = \frac{k}{v' \sin(\varphi' - \gamma)}$$

gesetzt werden, weil, wie schon oben angegeben wurde, $\varphi - \varphi' = \varrho$ ist.

$v' \sin(\varphi' - \gamma)$ bedeutet aber den Abstand des Punktes $f'(z)$ von einer durch den Nullpunkt gehenden Graden, deren Richtungswinkel γ mit der Ablenkung der bewegten Graden c gegen den Integrationsweg $\mathfrak{w}$ übereinstimmt.

Man kann daher den obigen Lehrsatz II. auch in folgender Weise aussprechen:

Lehrsatz III.

Dreht man das Axenkreuz der Ebene, in welcher die längs der Graden $\mathfrak{w}$ *gewonnenen Ableitungen* $f'(z)$ *verzeichnet werden, um einen eben so grossen Winkel, als um welchen eine mit ihrer Mitte auf* $\mathfrak{W}$ *entlang gleitende Strecke von der Richtung des Weges* $\mathfrak{w}$ *abweicht, und lässt die Länge dieser Strecke sich so verändern, dass sie den neuen Ordinaten von* $f'(z)$ *umgekehrt proportional bleibt, so stellt der Schwerpunkt des durch die bewegliche Strecke bestrichenen Flächenstücks den Werth von*

$$\int_a^b f(z)\, dz : (b - a)$$

auf dem Integrationswege $\mathfrak{w}$ *dar.*

Zusatz.

Ist die Bahn von $f'(z)$ *eine durch den Coordinatenanfang gehende Grade, so darf man die das fragliche Flächenstück bestreichende Strecke dem Modul von* $f'(z)$ *umgekehrt proportional machen.*

— Denn dann sind die Moduln den Ordinaten proportional, oder, was dasselbe heisst, das constante $\sin(\varphi' - \gamma)$ hebt sich in der Formel fort.

Vornehmlich wichtig an unsern Sätzen ist das zweifellose Resultat, dass Modul und Argument des Quotienten $\int_a^b f(z)\, dz : (b - a)$ Mittelwerthe zwischen den Moduln, beziehungsweise Argumenten von $f(z)$ auf dem graden Integrationswege sind, und dass die Stelle der kleinsten $f'(z)$ eine Attraction auf sie ausübt.

Der Zusatz findet seine Anwendung hauptsächlich bei reellen Functionen einer reellen Veränderlichen, bei welchen dann auch $f'(z)$ reell wird. Trägt man die reciproken Werthe dieser Funktion als rechtwinklige Ordinaten zu der in der reellen Axe liegenden Bahn $\mathfrak{W}$ von $f(z)$ auf beiden Seiten ab, so bestimmt sich dadurch das Flächenstück, dessen Schwerpunkt ermittelt werden soll. — Handelt es sich ferner darum, ihn näherungsweise zu berechnen, so kann man u. A. dadurch zum Ziele gelangen, dass man an die Stelle der Function $\frac{1}{f'(z)}$ von $f(z)$ eine algebraische Function von $f(z)$ setzt, welche sich an jene hinreichend genau anschmiegt. Ist z. B. die Begränzung des Flächenstücks nahezu gräde, so giebt schon der Ausdruck

$$\frac{1}{3} \cdot \left\{ f(a) + f(b) + \frac{f(a) f'(b) + f(b) f'(a)}{f'(a) + f'(b)} \right\}$$

den Schwerpunkt ziemlich genau.

B. Allgemeine Methode zur Berechnung der Werthe der Veränderlichen, für welche eine Function einen verlangten Werth annimmt.

Da jeder Unendlichkeitspunkt einer Function ein Nullpunkt der reciproken Function ist, und es keiner Schwierigkeit unterliegt, zu ermitteln, was aus der Function für $z = \infty$ werde, so können wir die Aufgabe auch so aussprechen, dass die endlichen Wurzeln einer Gleichung gefunden werden sollen.

Diese Gleichung stellen wir in der Form

$$(1.) \quad \varphi(z) = f(z)$$

dar und bezeichnen eine ihrer Wurzeln durch ζ.

Ferner setzen wir voraus, dass beide Functionen $\varphi(z)$ und $f(z)$ in der Nähe des Punktes $z = \zeta$ endlich bestimmt, stetig und monogen seien, indem wir durch den letzten Ausdruck mit Cauchy die Eigenschaft bezeichnen, dass die Ableitungen $\varphi'(z)$ und $f'(z)$ nicht von der Differentiationsrichtung abhängen.*)

Dann lassen sich durch die Gleichung

$$(2.) \quad \varphi(z_{n+1}) = f(z_n)$$

die Grössen z_{n+1} und z_n in eine solche Abhängigkeit von einander setzen, dass z_{n+1} vom Punkte $z = \zeta$ aus einen stetigen (im Allgemeinen krummen) Weg $\mathfrak{w}'_{n+1}$ beschreibt, wenn z_n von demselben Punkte aus einen graden Weg $\mathfrak{w}_n$ zurücklegt; denn es folgt aus der obigen Voraussetzung:

$$(3.) \quad \begin{cases} \varphi'(z_{n+1})\, dz_{n+1} = f'(z_n)\, dz_n, \\ z_{n+1} - \zeta = \displaystyle\int_{\zeta}^{z_n} \frac{f'(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})}\, dz_n, \end{cases}$$

so dass eine Unstetigkeit des Weges $\mathfrak{w}'_{n+1}$ nur eintreten kann, wo die Function

$$\frac{dz_{n+1}}{dz_n} = \frac{f'(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})} = \psi(z_n)$$

von einer hinreichend hohen Ordnung unendlich wird. (Vergl. das Citat aus der erwähnten Abh.)

Indem wir uns nun auf den Lehrsatz II. des vorigen Abschnittes berufen, leiten wir aus der letzten Gleichung (3.) sofort die folgende ab:

$$(4.) \quad z_{n+1} - \zeta = (z_n - \zeta) \cdot s_n,$$

wo s_n den Schwerpunkt der dem graden Wege $\mathfrak{w}_n$ von z_n entsprechenden Bahn $\mathfrak{B}_n$ von $\frac{dz_{n+1}}{dz_n} = \psi(z_n)$ bedeutet, wenn man diese proportional dem reciproken Modul von $\psi'(z_n)$ belastet denkt.

*) Die Begriffe einer monogenen Function und einer Function von $x + iy$ im Sinne Riemanns decken sich nicht, sondern der letztere ist weiter.

Nimmt man daher irgend einen Werth $z_1 = \zeta_1$ an und bestimmt $\zeta_2, \zeta_3, \ldots$ nach und nach durch Gl. (2.), so ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der Gl. (4.) die folgende:

$$(5.) \quad \zeta_{n+1} - \zeta = (\zeta_1 - \zeta) \cdot \prod_{m=1}^{m=n} s_m,$$

welche ohne Weiteres erkennen lässt, dass $\lim\limits_{n=\infty} . \zeta_n = \zeta$ sein muss, wenn $mod.\ s_n < 1$ ist und bleibt, wie gross man auch n annehmen mag. Hierzu ist aber offenbar im Allgemeinen nöthig, dass $mod.\ \psi(\zeta)$ selbst < 1 sei, weil nur in diesem Falle — von der Möglichkeit $mod.\ \psi(\zeta) = 1$ sehen wir ab — der Punkt ζ_{n+1} stets näher an ζ liegen kann, als ζ_n; wie sich aus (4.) in evidenter Weise ergiebt.

Um uns nicht in unfruchtbare Subtilitäten zu verlieren, wollen wir für das Weitere nur beachten, dass jedenfalls $mod.\ s_n < 1$ hervorgeht, wenn der ganze Weg $\mathfrak{B}_n$ innerhalb eines mit dem Radius 1 um den Coordinatenanfang beschriebenen Kreises verläuft, wie die Belastung auch vertheilt sein mag. Da dann ζ_{n+1} dem Punkte ζ näher gerückt ist, als ζ_n [Gl. (4.)], so wird auch $mod.\ s_{n+1} < 1$ sein, wenn ein um ζ mit dem Radius $\overline{\zeta\zeta_n}$ gezogener Kreis nur Punkte einschliesst, in denen $mod.\ \psi(z) < 1$ ist, u. s. f.

Man braucht aber die letzte Bedingung nicht immer auf den ganzen Kreis auszudehnen, da man es bei reellen Wurzeln reeller Gleichungen nur mit einem Durchmesser oder Radius zu thun hat. Dann bezeichnet man durch ϱ_n den Richtungswinkel des graden Weges $\mathfrak{w}_n$, durch ψ_n denjenigen von $\mathfrak{B}_n$ im Punkte $\psi(\zeta_n)$ und durch ϱ'_{n+1} denjenigen von $\mathfrak{w}'_{n+1}$ im Punkte ζ_{n+1}, so ist in Folge der Gl. (3.): $\varrho'_{n+1} = \varrho_n + \psi_n$, und daher ϱ'_{n+1} von ϱ_n um π oder 2π verschieden, wenn $\psi_n = \pi$ oder $= 2\pi$ ist.

Aus dieser Gleichung geht aber auch noch hervor, dass die Wege $\mathfrak{w}'_1, \mathfrak{w}'_2, \mathfrak{w}'_3, \ldots$ um den Punkt ζ einen regelmässigen Stern bilden, dessen Strahlen in diesem Punkte um den Richtungswinkel von $\psi(\zeta)$ von einander abweichen.

Was uns von den Resultaten dieser Betrachtung das Wichtigste ist, enthält der folgende

Lehrsatz.

Liegt der Punkt ζ_1 im Innern eines Kreises, dessen Mittelpunkt ζ der Gleichung

$$\varphi(\zeta) = f(\zeta)$$

genügt, während alle Punkte seiner Fläche, indem man stets

$$\varphi(z_{n+1}) = f(z_n)$$

setzt, der Grösse

$$\frac{dz_{n+1}}{dz_n} = \psi(z_n) = \frac{f'(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})}$$

einen die Einheit nicht erreichenden Modul ertheilen, so ist jederzeit

$$\lim_{n=\infty} . \zeta_n = \zeta,$$

wie man im Übrigen auch den Punkt ζ_1 gewählt haben mag.

Zusatz.

Ist ζ eine reelle Wurzel einer Gleichung zwischen reellen Functionen, so ergiebt sich ζ als Grenzwerth von ζ_n,

1.) wenn die Ableitung

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{f'(z_1)}{\varphi'(z_2)}$$

zwischen $z_1 = \zeta$ *und* $z_1 = \zeta_1$ *überall positiv und kleiner als die Einheit ist;*

2.) wenn sie zwischen $z_1 = \zeta_1$ *und* $z_1 = \zeta_2$ *überall negativ und, absolut genommen, kleiner als die Einheit ist; und*

3.) wenn sie zwischen $z_1 = \zeta_1$ *und* $z_1 = \zeta - (\zeta_1 - \zeta)$ *nirgends einen die Einheit erreichenden Modul besitzt, wie sich auch ihr Vorzeichen in diesem Intervall ändern mag.*

Anstatt der recurrirenden Formel (2.) verwendet man übrigens mit grösserem Nutzen wegen der stärkeren Convergenz die folgende:

$$(6.)\quad \varphi(\zeta_{n+1}) = \frac{f(\zeta_n)\,\varphi'(\zeta_1) - \varphi(\zeta_n)\,f'(\zeta_1)}{\varphi'(\zeta_1) - f'(\zeta_1)},$$

und vor allen Dingen diese:

$$(7.)\quad \varphi(\zeta_{n+1}) = \frac{f(\zeta_n)\,\varphi'(\zeta_n) - \varphi(\zeta_n)\,f'(\zeta_n)}{\varphi'(\zeta_n) - f'(\zeta_n)} = f_n(\zeta_n);$$

denn die Gleichung

$$\varphi(z) = \frac{f(z)\,\varphi'(\zeta_n) - \varphi(z)\,f'(\zeta_n)}{\varphi'(\zeta_n) - f'(\zeta_n)} = f_n(z),$$

welche mit (1.) gleiche Wurzeln besitzt, bietet den Vortheil, dass für sämmtliche Werthe von n die Ableitungen

$$\frac{dz_{n+1}}{dz_n} = \frac{f'_n(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})} = \frac{f'(z_n)\,\varphi'(\zeta_n) - \varphi'(z_n)\,f'(\zeta_n)}{\varphi'(z_{n+1})\,[\varphi'(\zeta_n) - f'(\zeta_n)]}$$

beziehungsweise an den Stellen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n, \ldots$ verschwinden und daher die Werthe von s_n in (5.) bald sehr klein geben.

Zum Zwecke der praktischen Rechnung muss übrigens $\varphi(z)$ eine leicht umzukehrende Function sein, weshalb sie sich im Allgemeinen am einfachsten gestaltet, wenn $\varphi(z) = z$ gemacht wurde.

Für die Auflösung der Gleichung

$$z = f(z)$$

ergeben sich übrigens aus dem Obigen die Formeln:

$$(8.)\quad \zeta_{n+1} = f(\zeta_n),$$

$$(9.)\quad \zeta_{n+1} = \frac{f(\zeta_n) - \zeta_n f'(\zeta_1)}{1 - f'(\zeta_1)} = \zeta_n - \frac{\zeta_n - f(\zeta_1)}{1 - f'(\zeta_1)},$$

$$(10.)\quad \zeta_{n+1} = \frac{f(\zeta_n) - \zeta_n f'(\zeta_n)}{1 - f'(\zeta_n)} = \zeta_n - \frac{\zeta_n - f(\zeta_n)}{1 - f'(\zeta_n)},$$

von denen die letzte am wirksamsten ist. Die Anwendbarkeit der beiden letzten entscheidet sich aber danach, ob

$$(11.)\quad \frac{dz_2}{dz_1} = \frac{f'(z_1) - f'(\zeta_1)}{1 - f'(\zeta_1)} = 1 - \frac{1 - f'(z_1)}{1 - f'(\zeta_1)}$$

den oben aufgestellten Bedingungen genügt.

Beispiele.

1.) Gauss giebt in seiner *Theoria motus corporum coelestium* p. 10. den Beweis, dass man, nach der recurrirenden Formel

$$u_{n+1} = \mu + e \sin u_n$$

rechnend, die reelle Wurzel der Gleichung

$$u = \mu + e \sin u$$

finden muss, wenn $e < 1$ ist.

Man erkennt auf der Stelle, dass diese Auflösung mit unserm Satze übereinstimmt, da

$$mod.\ \frac{du_{n+1}}{du_n} = mod.\ e\ cos\ u_n < 1$$

ist, von welchem Anfangswerthe u_1 man auch ausgehen mag; so wie, dass der umgekehrte Weg $e\ sin\ u_{n+1} = u_n - \mu$ immer weiter von der Wurzel entfernt.

Will man aber eine schneller wirkende Formel haben, so ergiebt sich aus (10.):

$$u_{n+1} = \frac{\mu + e\,(sin\ u_n - u_n\ cos\ u_n)}{1 - e\ cos\ u_n}$$

als geeignet für diesen Zweck.

2.) Um die Rechnung an einem numerischen Beispiele durchzuführen, wählen wir die von Gauss in seiner Abhandlung vom Jahre 1849 benutzte algebraische Gleichung

$$z^7 + 28z^4 = 480;$$

und zwar wollen wir die zwischen $z = 1$ und $z = 2$ liegende reelle Wurzel berechnen, indem wir die Gleichung zunächst so transformiren, dass sie für unsere Methode möglichst ungünstig wird, und dann, indem wir ihr eine günstigere Form geben.

Zunächst schreiben wir sie in der Gestalt

$$z = \frac{480}{z^6 + 28z^3} = f(z),$$

so dass

$$f'(z) = -\frac{2880\,(z^3 + 14)}{(z^5 + 28z^2)^2}$$

in dem von $z = 1$ bis $z = 2$ reichenden Intervall zwischen 3 und 48 liegt. Dessen ungeachtet wirkt noch die Formel (10.), welche in unserem Falle

$$\zeta_{n+1} = \frac{3360\,\zeta_n\,(\zeta_n^3 + 16)}{\zeta_n^4\,(\zeta_n^3 + 28)^2 + 2880\,(\zeta_n^3 + 14)}$$

giebt, weil der für $\zeta_1 = 2$ verschwindende Differentialquotient (11.)

$$\frac{dz_2}{dz_1} = 1 - \frac{18}{73} \cdot \left[1 + \frac{2880\,(z_1^3 + 14)}{z_1^4\,(z_1^3 + 28)^2}\right]$$

von $z_1 = \zeta_1$ bis zu dem aus ihr berechneten Werthe $z_1 = \zeta_2 = \frac{140}{73} = 1{,}91781$ negativ und, absolut genommen, < 1 ist. — Bei genauer Rechnung findet man nähmlich, dass $\frac{dz_2}{dz_1}$ in diesem Intervall zwischen 0 und $-$ 0,146037 liegt.

Daher liegt ζ zwischen $\zeta_1 = 2$ und $\zeta_2 = 1{,}91781$; und alle folgenden Werthe ζ_n geben den Werthe ζ genauer. Der nächste ist schon $\zeta_3 = 1{,}922862$, welcher von dem von Gauss berechneten $\zeta = 1{,}9228841$ nur noch in der sechsten Ziffer abweicht, während ζ_4, d. i. der dritte berechnete, den Werth von ζ genauer giebt, als sich mit siebenstelligen Tafeln berechnen lässt. — Von der selbstständigen Beurtheilung des Fehlers sprechen wir später.

Um dieselbe Wurzel auch nach einer günstigeren Formel zu berechnen, schreiben wir die vorgelegte Gleichung in der Form

$$z = \sqrt[4]{\frac{480}{28 + z^3}} = f(z).$$

Dann ist schon die Formel (8.) brauchbar, weil

$$\frac{dz_2}{dz_1} = f'(z_1) = -\frac{3z_1^2}{2(28+z_1^3)} \cdot \sqrt[4]{\frac{30}{28+z_1^3}}$$

in dem von $z_1 = 1$ bis $z_1 = 2$ reichenden Intervall ungefähr zwischen $-\frac{1}{19}$ und $-\frac{1}{6}$ liegt.

Die Formel (10.) aber, welche hier als

$$\zeta_{n+1} = f(\zeta_n) \cdot \frac{1 + \frac{3\zeta_n^2}{4(28+\zeta_n^3)} \cdot \zeta_n}{1 + \frac{3\zeta_n^2}{4(28+\zeta_n^3)} \cdot f(\zeta_n)}$$

erscheint, giebt, nachdem $\zeta_1 = 2$ gesetzt ist, die beiden Näherungswerthe

$$\zeta_2 = \frac{14 \cdot \sqrt[4]{\frac{40}{3}}}{12 + \sqrt[4]{\frac{40}{3}}} = 1{,}9231\,;\ \zeta_3 = 1{,}9228841;$$

von denen schon der zweite völlig mit dem von Gauss berechneten übereinstimmt.

Beurtheilung des Fehlers.

Hat man sich nach den in unserm Satz angegebenen Kennzeichen überzeugt, dass die berechneten Werthe zu dem gesuchten convergiren, so hält es auch nicht schwer, für die Grösse des jedes Mal gemachten Fehlers eine obere Grenze anzugeben; und zwar dient hierzu unmittelbar die Gleichung (4.):

$$\zeta_{n+1} - \zeta = (\zeta_n - \zeta) \cdot s_n,$$

in welcher $(\zeta_{n+1} - \zeta)$ und $(\zeta_n - \zeta)$ die Fehler zweier auf einander folgenden Näherungswerthe sind. In anderer Form geschrieben, lautet sie

$$(12.)\quad \zeta_{n+1} - \zeta = -(\zeta_{n+1} - \zeta_n)\frac{s_n}{1 - s_n},$$

so dass man in dieser Gleichung einen Anhalt hat zur Beurtheilung des Fehlers nicht blos im Modul, sondern auch im Argument, da s_n in Bezug auf beide Stücke durch Mittelwerthe der $\psi(z_n)$ bestimmt wird, und die Differenz $(\zeta_{n+1} - \zeta_n)$ bekannt ist.

Verlangt man eine möglichst grosse Genauigkeit der Fehlerangabe, so muss man bei der Verwendung von (12.) die jedesmalige Natur von $\psi(z_n)$ auf $\mathfrak{w}_n$ berücksichtigen. Will man ihr aber einen weiteren Spielraum lassen, so erhellt sofort aus (12.), dass unterallen Umständen der Modul des Fehlers

$$(13.)\quad mod.\,(\zeta_{n+1} - \zeta) < mod.\,(\zeta_{n+1} - \zeta_n) \cdot \frac{p}{1-p}$$

ist, wo p den grössten Modul bedeutet, welchen $\psi(z_n) = \frac{f'(z_n)}{\varphi'(z_{n+1})}$ auf dem Wege $\mathfrak{w}_n$ annehmen kann. — Rechnet man nach den Formeln (9.) oder (10.), so muss man sich hier natürlich überall $f_1(z)$, beziehungsweise $f_n(z)$ für $f(z)$ gesetzt denken.

Benutzen wir die Formel (13.) zur Beurtheilung des Fehlers von ζ_3 im letzten Beispiel, so ist zu berücksichtigen, dass

$$f_2(z) = \frac{f(z) - z\,f'(\zeta_2)}{1 - f'(\zeta_2)},\ f_2'(z) = \frac{f'(z) - f'(\zeta_2)}{1 - f'(\zeta_2)} = \psi(z)$$

war, und dass, weil ζ zwischen ζ_2 und ζ_3 liegt, wegen des Verschwindens von $\psi(\zeta_2)$ jedenfalls

$$p < mod.\, \psi(\zeta_3) = mod.\, \frac{f'(\zeta_3) - f'(\zeta_2)}{1 - f'(\zeta_2)} = 0{,}000\,020\,621\,6$$

ist. Da ferner $\zeta_2 - \zeta_3 = 0{,}000\,242\,5$ ist, so ergiebt sich daher, dass der Fehler von $\zeta_3 < 0{,}000\,000\,005$ ist, dass also der fragliche Werth ζ_3 mindestens in den ersten 8 Decimalstellen richtig ausgefallen wäre, wenn man ihn so weit berechnet hätte.

C. Ueber die Glieder der Taylor'schen Reihe und eine auf ihre Eigenschaften gestützte Methode zur Berechnung der singulären Punkte und der Wurzeln der Functionen.

Ist $f(z)$ eine in dem Gebiete $\mathfrak{Z}$ der z- Fläche endliche und eindeutig bestimmte Function der complexen Veränderlichen z, und ihre erste Ableitung nicht blos endlich und bestimmt, sondern auch unabhängig von der Differentiationsrichtung, so gilt bekanntlich ein Gleiches von allen höheren Ableitungen, so lange deren Ordnungszahl endlich ist.

Wir wollen zunächst untersuchen, wie sie sich verhalten, wenn ihre Ordnungszahl ins Unendliche wächst.

Zu dem Zwecke sei $z = a$ ein algebraisch singulärer Punkt der Function $f(z)$, das soll heissen: ein Punkt der z- Fläche, in welchem für irgend einen Werth von m

$$\underset{z=a}{Lim}\, .\, (z - a)^m f(z) = A$$

eine von der Annäherungsrichtung unabhängige, bestimmte, endliche, nicht verschwindende Grösse ist, und in dessen Bereich aus $(z - a)^m f(z)$ durch die Substitution $(z - a) = \zeta^\mu$ eine eindeutig bestimmte, monogene Function von ζ hervorgeht, während $f(z)$ selbst in ihm unendlich oder vieldeutig wird.

Da sich diese Function von ζ nach steigenden Potenzen von ζ entwickeln lässt, so folgt:

$$f(z) = (z - a)^{-m} \,.\, \left\{ A + A' \,.\, (z - a)^{\frac{1}{\mu}} + A'' \,.\, (z - a)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots \right\},$$

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = (z - a)^{-(m+n)} \,.\, \left\{ \binom{-m}{n} A + \binom{-m + \frac{1}{\mu}}{n} A' (z - a)^{\frac{1}{\mu}} + \binom{-m + \frac{2}{\mu}}{n} A'' (z - a)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots \right\}.$$

Nach der Annahme verschwindet A nicht, weshalb auch das erste Glied der letzten Reihe für kein n verschwinden kann, wenn m eine positive Zahl, d. h. wenn $z = a$ ein Unendlichkeitspunkt von $f(z)$ ist. Eben so verhält es sich, wenn bei einem blossen Verzweigungspunkte $z = a$ der Exponent m eine (negative) gebrochene Zahl ist. Hat aber das zu einem blossen Verzweigungspunkte gehörende m einen ganzzahligen (negativen) Werth, so muss zwar der Binomialcoefficient $\binom{-m}{n}$ für hinreichend hohe n verschwinden; jedoch wird es dann der Verzweigung wegen in der Reihe für $f(z) \,.\, (z - a)^m$ wenigstens ein nicht verschwindendes Glied $A^{(k)} (z - a)^{\frac{k}{\mu}}$ geben, in welchem der Exponent $\frac{k}{\mu}$ eine gebrochene Zahl ist, und dieses wird auch bei der Differentiation für kein n verschwinden, weil der hinzutretende Factor $\binom{-m + \frac{k}{\mu}}{n}$ nicht verschwindet.

Daher erscheint die letzte Gleichung, nachdem n eine gewisse endliche Nummer überschritten hat, jederzeit in der Form:

$$\frac{(z-a)^{\alpha+n} f^{(n)}(z)}{\binom{-\alpha}{n} n!} = A + \frac{\binom{-\alpha+\frac{1}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} A'(z-a)^{\frac{1}{\mu}} + \frac{\binom{-\alpha+\frac{2}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} A''(z-a)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots,$$

indem A eine endliche, nicht verschwindende — mit dem obigen A nicht nothwendig übereinstimmende — Constante, und

$$\alpha = m - \frac{k}{\mu}$$

ebenfalls eine durch die Natur der Function $f(z)$ im Punkte $z=a$ bedingte Constante bedeutet. — Beide Constanten, A und α, werden durch die Reihenentwickelung der Function $f(z)$ leicht bestimmt, indem

$$A(z-a)^{-\alpha}$$

das erste nicht verschwindende Glied derselben vorstellt, in welchem α entweder eine positive oder eine gebrochene negative Zahl ist.

Die Zahl α, welche die *Charakteristik* des Punktes $z=a$ heissen soll, stimmt demnach, wenn sie positiv ist, mit der Ordnung überein, von welcher die Function in ihm unendlich wird, kennzeichnet aber wenn sie negativ ist, bloss eine Verzweigung der Function.

Wir bemerken noch, dass die rechte Seite der letzten Gleichung sich auf ihr Anfangsglied A reducirt, wenn man n unendlich gross werden lässt; denn es ist:

$$Lim.\frac{\binom{-\alpha+\frac{r}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} = Const.\,Lim\frac{n^{\alpha-\frac{r}{\mu}-1}}{n^{\alpha-1}} = Const.\,Lim\,n^{-\frac{r}{\mu}} = o.$$

Dividirt man sie aber durch

$$(z-a)^{\alpha+n} : \binom{-\alpha}{n},$$

so folgt:

$$(1.)\quad \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \binom{-\alpha}{n}(z-a)^{-(\alpha+n)}.\varphi(z,n) + \psi(z),$$

wo der Ausdruck

$$\varphi(z,n) = A + \frac{\binom{-\alpha+\frac{1}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} A'(z-a)^{\frac{1}{\mu}} + \frac{\binom{-\alpha+\frac{2}{\mu}}{n}}{\binom{-\alpha}{n}} A''(z-a)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots$$

alle Glieder enthalten soll, in denen der Exponent $\frac{k}{\mu} < \alpha + n$ ist, so dass $\psi(z)$ eine für $z=a$ endliche Function bedeutet, und die für alle endlichen Werthe von z endliche und bestimmte Function $\varphi(z,n)$ für $z=a$ den Werth A annimmt, wie auch für $n=\infty$.

Da nun die Gl. (1.) für jeden beliebigen algebraisch singulären Punkt gilt, so schliesst man, dass

$$(2.)\quad \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \psi(z) + \Sigma\binom{-\alpha_s}{n}(z-a_s)^{-(\alpha_s+n)}.\varphi_s(z,n)$$

gesetzt werden kann; wo wir unter den α_s die Charakteristiken aller algebraisch singulären Punkte a_s verstehen, welche auf einer keinen singulären Punkt von $f(z)$ einschliessenden Kreislinie $\mathfrak{K}$ liegen, und deren (α_s+n) für die gedachte Nummer n schon $> o$ geworden ist. Dabei soll diese Nummer n überhaupt nicht grösser genommen werden, als nöthig ist, damit irgend ein $(\alpha_s+n) > o$ werde (so dass bei dem Vorkommen eines positiven α_s die Nummer $n = o$ gedacht wird); und zwar zu dem Zweck, um von allen sonst noch möglichen Singularitäten möglichst wenige auszuschliessen, wenn wir verlangen, dass $\psi(z)$ auf $\mathfrak{K}$ endlich bestimmt sei.

Wird nehmlich der letzten Forderung Genüge geleistet, so ist, wie wir in der schon oben citirten Abhandlung gezeigt haben, jederzeit

$$\underset{\omega=\infty}{Lim} \,.\, \frac{(\zeta - t)^{\omega}\, \psi^{(\omega)}(t)}{(\omega - 1)!} = o,$$

wenn wir unter $z = t$ den Mittelpunkt des Kreises $\mathfrak{K}$ und unter ζ einen Punkt seiner Peripherie verstehn. Und deshalb verschwindet für unendlich grosse ω das erste Glied auf der rechten Seite der aus (2.) folgenden Gleichung;

$$(3.)\quad \frac{(t-\zeta)^{\alpha+\omega} f^{(\omega)}(t)}{\binom{-\alpha}{\omega} . \omega!} = \frac{(t-\zeta)^{\alpha+n}}{(n+1)\binom{-\alpha}{\omega}\binom{\omega}{n+1}} \cdot \frac{(t-\zeta)^{\omega-n}\, \psi^{(\omega-n)}(t)}{(\omega-n-1)!}$$
$$+ \Sigma \frac{\binom{-\alpha_s}{\omega}}{\binom{-\alpha}{\omega}} \cdot \frac{(t-\zeta)^{\alpha+\omega}}{(t-a_s)^{\alpha_s+\omega}} \cdot \chi_s(t,\omega),$$

zumal da

$$\binom{-\alpha}{\omega}\binom{\omega}{n+1} = \pm\, Const. \,\omega^{\alpha-1} . \,\omega^{n+1} = \pm\, Const. \,\omega^{\alpha+n} = \infty$$

wird, wenn nur $\alpha + n > o$ ist. Die hier durch $\chi_s(t,\omega)$ bezeichneten Functionen gehen aus den $\varphi_s(z,n)$ ohne Vermehrung der Glieder hervor, wenn man $z = t$, $n = \omega$ substituirt, weshalb

$$\underset{\omega=\infty}{Lim} \,.\, \chi_s(t,\omega) = A_s$$

ist.

Da über α, ausser dass $\alpha + n > o$ sei, noch keine Festsetzung getroffen wurde, so ist es gestattet, dadurch den grössten Werth zu bezeichnen, welcher unter den α_s vorkommt, so dass

$$\frac{\binom{-\alpha_s}{\omega}}{\binom{-\alpha}{\omega}}$$

entweder constant $= 1$ oder im Grenzfalle $= o$ wird, weil

$$Const. \frac{\omega^{\alpha_s-1}}{\omega^{\alpha-1}} = Const. \,\omega^{\alpha_s-\alpha}$$

ein Aequivalent dieses Quotienten ist.

Bezeichnen wir noch

$$\zeta - t = re^{i\varrho},\ a_s - t = re^{i\varrho_s},$$

d. i., benennen wir durch r den Radius des Kreises $\mathfrak{K}$, und durch ϱ und ϱ_s die Richtungswinkel der nach den Punkten ζ und a_s führenden Radien, so erhellt daher die Richtigkeit des folgenden Satzes. Um ihn bequemer aussprechen zu können, geben wir aber zuvor die

Definition.

Der um den Mittelpunkt $z = t$ mit dem Radius r gezogene Kreis $\mathfrak{K}$, in dessen Fläche die monogene Function $f(z)$ zugleich mit ihrer Ableitung überall endlich, eindeutig bestimmt und stetig ist, während auf seiner Peripherie singuläre Punkte liegen, soll der *Convergenzkreis* des Punktes t heissen.

Der Convergenzkreis heisst ein *s-fach algebraischer von der Ordnung* α: 1.) wenn auf ihm s Unendlichkeitspunkte z' von der Beschaffenheit liegen, dass bei jeder Annäherungsrichtung

$$\lim_{z=z'} . (z-z')^{\alpha} f(z)$$

dieselbe bestimmte, endliche, nicht verschwindende Grösse ist, während dieser Ausdruck in jedem andern Punkte z' von $\mathfrak{K}$ verschwindet;

2.) wenn $f(z)$ in jedem Punkte von $\mathfrak{K}$ endlich bleibt, und

$$\lim_{z=z'} . (z-z')^{\alpha+n} f^{(n)}(z)$$

für irgend eine Nummer n diese Eigenschaft hat.

Lehrsatz.

Besitzt der Punkt $z=t$ in Folge der Nachbarschaft von Unendlichkeits- oder Verzweigungspunkten einen s-fach algebraischen Convergenzkreis von der Ordnung α, so ist stets

$$(4.)\quad \frac{(t-\zeta)^{\alpha+\omega} . f^{(\omega)}(t)}{\binom{-\alpha}{\omega} . \omega!} = \psi(t,\omega) + \Sigma A_s e^{i(\varrho-\varrho_s)(\alpha+\omega)},$$

wo $\psi(t,\omega)$ eine für $\omega=\infty$ verschwindende Function, die A_s endliche, nicht verschwindende Constanten bedeuten, und die Summation über alle diejenigen Punkte a_s des Convergenzkreises zu erstrecken ist, welche ihm die Ordnung α ertheilen. — Ob auf ihm noch mehr singuläre Punkte von niedrigerer Ordnung liegen, ist ohne Belang.

Ferner lässt sich durch eine etwas umständlichere Betrachtung leicht zeigen und geht theilweise aus dem Obigen hervor, dass die letzteren auch nicht algebraische Natur zu haben brauchen, wenn nur ihre Anzahl endlich ist.

Die zuletzt ausgesprochene Beschränkung, dass die Anzahl aller singulären Punkte auf dem Convergenzkreise eine endliche sein müsse können wir jedoch nicht vermeiden, weil wir bei dem gegenwärtigen Standpunkt unserer Kenntniss sonst das Verschwinden des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (3.) nicht zu behaupten vermögen.

In der weiteren Untersuchung unterscheiden wir einfach und mehrfach algebraische Convergenzkreise.

I. Einfach algebraischer Convergenzkreis.

Giebt es auf dem Convergenzkreis nur einen Punkt $z=a$ mit der höchsten Charakteristik α, so stellt sich die Gl. (4.), indem wir den allgemeinen Coefficienten der Taylor'schen Reihe

$$\frac{f^{(\omega)}(t)}{\omega!} = f_\omega$$

bezeichnen, unmittelbar in der Form dar:

$$(5.)\quad \frac{(t-a)^{\alpha}}{(-1)^{\omega}\binom{-\alpha}{\omega}} . (a-t)^{\omega} f_\omega = A + \psi(t,\omega);$$

oder weil $(t-a)^{\alpha}$ nicht von ω abhängt, und der Grenzwerth von

$$\frac{(-1)^{\omega}\binom{-\alpha}{\omega}}{\omega^{\alpha-1}}$$

eine bestimmte, endliche, nicht verschwindende Grösse ist, so wird für unendlich grosse ω:

$$(6.)\quad (a-t)^{\omega} \cdot f_{\omega} = C \cdot \omega^{\alpha-1},$$

indem C eine leicht zu berechnende Constante bedeutet.

Aus der für jedes ω geltenden Gleichung (5.) schliesst man auf ersichtliche Weise, dass für jedes ω

$$(7.)\quad a-t = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}} \cdot \frac{\omega+\alpha}{\omega+1} \cdot \frac{A+\psi(t,\omega+1)}{A+\psi(t,\omega)}$$

ist, und dass deshalb durch Weglassung der sich der Einheit nähernden Factoren eine Anzahl berechenbarer Näherungsausdrücke für α aufgestellt werden kann. — Daher der

Lehrsatz.

Ist der Convergenzkreis 𝔎 *des Punktes $z = t$ einfach algebraisch von der Ordnung α, und z ein beliebiger Punkt desselben, so fehlt in der Taylor'schen Entwickelung von $f(z)$ nach Potenzen von $(z-t)$ kein Glied $(z-t)^n f_n$, dessen n gross genug ist; vielmehr nähert sich der Quotient*

$$f_n : f_{n+1}$$

von dieser Stelle an stetig dem Werthe von $(a-t)$, indem $z = a$ denjenigen der auf 𝔎 *liegenden singulären Punkte bedeutet, welchem die Charakteristik α zukommt.*

Ist $\alpha = 1$, so wird

$$\lim_{n=\infty} \cdot (a-t)^n f_n = \frac{A}{t-a} = \lim_{z=a} . \frac{(z-a) f(z)}{t-a}$$

eine bestimmte, endliche, nicht verschwindende Grösse; und die Taylor'sche Reihe oscillirt auf ihrer Convergenzgrenze mit Ausnahme der Unendlichkeitspunkte von $f(z)$, in denen sie divergirt.

Ist $\alpha > 1$, so divergirt die Taylor'sche Reihe in jedem Punkte z ihrer Convergenzgrenze, da deren Glieder so ins Unendliche wachsen, dass ihre Moduln immer mehr der Potenz $n^{\alpha-1}$ proportional werden, und ihre Argumente sich dem Richtungswinkel von

$$\lim_{z=a} . \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{\alpha} f(z)$$

*als Grenze nähern.**)

Stellen wir die zur Berechnung von a aus (7.) und (6.) folgenden Näherungsformeln zusammen, so erhalten wir die Ausdrücke:

$$(8.)\quad a-t = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}} = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}} \cdot \frac{\omega+\alpha}{\omega+1} = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\alpha-1}.$$

Der durch den ersten gefundene Näherungswerth von a heisse $a^{(\omega)}$, und es werde

$$\frac{a^{(\omega)}-t}{a^{(\omega-1)}-t} = \frac{f_{\omega}}{f_{\omega+1}} : \frac{f_{\omega-1}}{f_{\omega}} = b^{(\omega)}$$

gesetzt.

---

*) In der schon früher citirten Abhandlung ist gezeigt worden, dass die Taylor'sche Reihe in jedem Punkte der Convergenzgrenze den Werth von $f(z)$ wiedergiebt, wenn $\alpha < 1$ ist, wobei aber der Convergenzkreis nicht einfach algebraisch zu sein, sondern in seinen singulären Punkten z' nur der Bedingung $\lim_{z=z'} . (z-z') f(z) = o$ zu genügen braucht.

Dann folgt aus (8.) weiter, dass für unendlich grosse ω

$$(9.)\quad \alpha - 1 = \frac{(\omega+1)\,\omega\,(b^{(\omega)}-1)}{1-\omega\,(b^{(\omega)}-1)} = \frac{\log b^{(\omega)}}{\log \frac{\omega^2}{\omega^2-1}} = \omega^2 \,.\, l b^{(\omega)}$$

sein müsse, so dass auch die Charakteristik des Punktes $z = a$ aus den f_ω berechnet werden kann.

Von anderen, minder bequemen Näherungsformeln für a und α sehen wir hier ab, bemerken aber, dass *die aufgezählten desto schneller wirken müssen, je näher t an a liegt*, und dass man deshalb häufig gut thut, den ursprünglich willkürlich gewählten Punkt t in einen berechneten Näherungswerth $a^{(\omega)}$ zu verlegen. Denn das $\psi\,(t,n)$ der Gl. (7.) ist eine bei der Annäherung von t an a stetige, für $t = a$ verschwindende Function, und der zweite Ausdruck (8.) würde nach (7.) den Werth von a völlig genau geben, wenn $\psi\,(t,n)$ und $\psi\,(t,n+1) = o$ wären.

Wiederholt man die Verlegung des Punktes t in berechnete Näherungswerthe t_1, t_2, t_3, ... von a nachdem man ein f_n derselben Ordnung erreicht hat, so geht der zweite Ausdruck (8.) über in:

$$(10.)\quad t_{n+1} - t_n = \frac{\omega+\alpha}{\omega+1} \cdot \frac{f_\omega\,(t_n)}{f_{\omega+1}\,(t_n)},$$

wo ω als endlich gedacht wird, und $\omega + \alpha > o$ sein muss. Ist $z = a$ ein Unendlichkeitspunkt ($\alpha > o$), so genügt es schon, $\omega = o$ zu wählen und daher nach der Formel

$$(11.)\quad t_{n+1} - t_n = \frac{\alpha\, f\,(t_n)}{f'\,(t_n)}$$

zu rechnen. — Auf die nahe liegende Vergleichung mit dem vorigen Abschnitt und der Newton'schen Näherungsmethode brauchen wir wohl nicht erst hinzuweisen.

Die Berechnung der Nullpunkte einer Function $\varphi\,(z)$ — und die Auflösung der Gleichungen überhaupt — lässt sich selbstverständlich leicht auf das Obige zurückführen, da

$$(12.)\quad f(z) = \frac{1}{\varphi\,(z)}$$

in den Wurzelpunkten von $\varphi\,(z)$ unendlich wird. Man hat zu der hierbei erforderlichen Berechnung der Grössen f_n aus den

$$\varphi_n = \frac{\varphi^{(n)}\,(t)}{n!}$$

die Formeln:

$$(13.)\quad f_n\,\varphi_0 + f_{n-1}\,\varphi_1 + f_{n-2}\,\varphi_2 + \cdots + f_0\,\varphi_n = o,$$

$$(14.)\quad (-1)^n\,\varphi_0^{\,n+1} \,.\, f_n = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_0 & & \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n & \varphi_{n-1} & \varphi_{n-2} \cdot & \varphi_1 \end{vmatrix},$$

welche, wenn $\varphi\,(z)$ eine ganze rationale algebraische Function ist, im Ganzen schnell zum Ziele führen.

Beispiele.

1.) Die Wurzeln z der quadratischen Gleichung

$$\varphi\,(z) = 1 - z - uz^2 = o,$$

welche sich unter der Form

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4u}}{2u}$$

darstellen, sind gleich gross, wenn $u = -\frac{1}{4}$ ist, und haben übrigens nur dann gleiche Moduln, wenn u eine den Werth $-\frac{1}{4}$ nicht erreichende negative Zahl, d. i., wenn $-\infty < u < -\frac{1}{4}$ ist.

Daher folgt aus dem ersten Ausdruck (8.) die Convergenz des unendlichen Kettenbruchs

$$1 / 1 + u / 1 + u / 1 + u / 1 + \cdots\cdots$$

für jedes reelle oder complexe u zu der mit dem kleineren Modul versehenen Wurzel z der obigen Gleichung, wenn u nur nicht eine negative Zahl bedeutet, deren absoluter Werth den Bruch $\frac{1}{4}$ übersteigt, während der Werth $u = -\frac{1}{4}$ noch gestattet ist.

(An einer andern Stelle ist daraus abgeleitet, dass jeder Kettenbruch

$$u_1 / 1 + u_2 / 1 + u_3 / 1 + u_4 / 1 + \cdots$$

zu dem Werthe der entwickelten Function convergirt, wenn bei wachsendem n der Modul von $u_n < \frac{1}{4}$ bleibt. Z. B. der Gauss'sche Quotient hypergeometrischer Reihen.)

2.) Nimmt man $\varphi(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ an, so ergiebt sich, wenn man von der Reihenentwickelung für e^z ausgeht und dann die Formel (14.) für $t = o$ benutzt, sofort:

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{B_1}{2!} z^2 - \frac{B_2}{4!} z^4 + \frac{B_3}{6!} z^6 - \ldots,$$

und zugleich erhält man zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen B_n den Ausdruck:

$$2 \cdot \frac{B_n}{(2n)!} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & & & \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & & \\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & . & \\ . & . & . & . & 1 \\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & . & \frac{1}{3!} \end{vmatrix} .$$

Setzt man aber in der letzten Reihenentwickelung iz für z, so geht sie über in

$$\frac{1}{2} z \cot \frac{1}{2} z = 1 - \frac{B_1}{2!} z^2 - \frac{B_2}{4!} z^4 - \frac{B_3}{6!} z^6 - \ldots$$

Und da die hier entwickelte Function von z^2 auf dem Convergenzkreise des Punktes $z^2 = o$ nur an der Stelle $z^2 = (2\pi)^2$ (und zwar von der ersten Ordnung) unendlich wird, so ist in Folge der Gl. (8):

$$(2\pi)^2 = \underset{n=\infty}{Lim} . (2n + 1)(2n + 2) B_n : B_{n+1} .$$

— Die numerische Rechnung giebt schon für $n = 8$ den auf 5 Stellen richtigen Werth: $\log \pi = 0{,}49\,715$.

3.) Um die schon einmal aufgesuchte Wurzel der Gleichung

$$\varphi(z) = z^7 + 28\,z^4 - 480 = 0$$

auch nach dieser Methode zu berechnen, setzen wir $t = 2$, also:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= t^4(t^3+28) - 480 = \ \ 96, & \varphi_4 &= 7\,(5\,t^3+4) = 308,\\
\varphi_1 &= 7\,t^3(t^3+16) \qquad = 1344, & \varphi_5 &= 21\,t^2 \qquad = \ \ 84,\\
\varphi_2 &= 21\,t^2(t^3+8) \qquad = 1344, & \varphi_6 &= 7\,t \qquad\ \ = \ \ 14,\\
\varphi_3 &= 7\,t\,(5\,t^3+16) \qquad = \ \ 784, & \varphi_7 &= 1,\ \varphi_{7+n} \ \ = \ \ \ 0.
\end{aligned}$$

Demnach folgt aus (12.) und (13.) oder (14.):

$$f_0 = +\frac{1}{96}, \quad f_2 = +\frac{91}{48}, \qquad f_4 = +\frac{734\,531}{2\,304},$$

$$f_1 = -\frac{7}{48}, \quad f_3 = -\frac{14\,161}{576}, \quad f_5 = -\frac{1\,058\,337}{256}, \text{ u. s. w.}$$

und, indem die Genauigkeit der Näherungswerthe $a^{(n)}$ mit den Indices wächst, aus dem ersten Ausdrucke (8.):

$$\begin{aligned}
a^{(0)} - 2 &= f_0 : f_1 = -\frac{1}{14} & &= -\,0{,}071\,428\,571\,428,\\
a^{I} - 2 &= f_1 : f_2 = -\frac{1}{13} & &= -\,0{,}076\,923\,076\,923,\\
a^{II} - 2 &= f_2 : f_3 = -\frac{156}{2\,023} & &= -\,0{,}077\,113\,198\,220,\\
a^{III} - 2 &= f_3 : f_4 = -\frac{8\,092}{104\,933} & &= -\,0{,}077\,115\,873\,939,\\
a^{IV} - 2 &= f_4 : f_5 = -\frac{104\,933}{1\,360\,719} & &= -\,0{,}077\,115\,848\,3125;
\end{aligned}$$

d. i.:

$$\begin{aligned}
a^{(0)} &= 1{,}928\,571\,428\,571; & a^{III} &= 1{,}922\,884\,126\,061;\\
a^{I} &= 1{,}923\,076\,923\,077; & a^{IV} &= 1{,}922\,884\,151\,6875;\\
a^{II} &= 1{,}922\,886\,801\,780; & & \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Es ist augenscheinlich, dass a^{IV} noch über die 8te Ziffer hinaus richtig sein wird.

Für die Anzahl α dieser Wurzeln $z = a$ erhalten wir, weil

$$b^{III} = \frac{a^{III}-2}{a^{II}-2} = 1 + \frac{25}{771\,134}, \quad b^{IV} = \frac{a^{IV}-2}{a^{III}-2} = 1 - \frac{26}{7\,115\,874}$$

ist, aus dem ersten Ausdrucke (9.) die Näherungswerthe:

$$\alpha^{III} - 1 = \frac{300}{771\,059}, \quad \alpha^{IV} - 1 = -\frac{520}{77\,115\,978}.$$

Jeder von ihnen reicht, da α eine ganze Zahl sein muss, hin, $\alpha = 1$ zu bestimmen. — Wo α einen andern Werth hat, wird die Correction von $a^{(n)}$ durch den Factor $\frac{n+\alpha}{n+1}$ bei niedrigen Werthen von n offenbar einen merklichen Einfluss ausüben, und ihre Berücksichtigung deshalb unnöthige Rechnung ersparen.

II. Mehrfach algebraischer Convergenzkreis.

Ist der Convergenzkreis des Punktes $z = t$ ein s- fach algebraischer von der Ordnung α, so folgt, indem man

$$f_{n,m} = \frac{(n+1)(n+2) \ \ \ldots \ \ \ (n+m)}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)\ldots(n+\alpha+m-1)}\, f_{n+m},\ f_{n,0} = f_n$$

und die reciproken Werthe der in Betracht kommenden Differenzen

$$\frac{1}{a_s - t} = u_s$$

bezeichnet, mit Vernachlässigung der für unendlich grosse n verschwindenden Functionen ψ aus (4.) ohne Mühe:

$$\begin{vmatrix} u_1^0 & u_2^0 & \ldots & u_s^0 \\ u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_s^1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_1^{s-1} & u_2^{s-1} & \ldots & u_s^{s-1} \end{vmatrix} A_1 u_1^{\alpha+n} = \frac{(-1)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} \begin{vmatrix} f_{n,0} & u_2^0 & \ldots & u_s^0 \\ f_{n,1} & u_2^1 & \ldots & u_s^1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{n,s-1} & u_2^{s-1} & \ldots & u_s^{s-1} \end{vmatrix}.$$

Die hier links stehende Determinante ist bekanntlich das Product aller Differenzen, welche man durch Subtraction jedes Gliedes der Reihe $u_1, u_2, \ldots, u_s$ von allen folgenden erhält. Und da sich die rechts stehende nur durch die Elemente der ersten Columne von ihr unterscheidet, so ist klar, dass beide Seiten der Gleichung das aus $u_2, \ldots, u_s$ auf gleiche Weise gebildete Differenzenproduct als gemeinschaftlichen Factor besitzen, nach dessen Weglassung die symbolisch zu verstehende Gleichung

$$A_1 u_1^{\alpha+n} \cdot \prod_{m=2}^{m=s} (u_m - u_1) = \frac{(-1)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} f_n \cdot \prod_{m=2}^{m=s} (u_m - f)$$

übrig bleibt. In dieser Gleichung muss nehmlich nach ausgeführter Multiplication $f_{n,k}$ für $f_n \cdot f^k$ gesetzt werden.

Wegen der Identität

$$u_m - u_1 = \frac{a_1 - a_m}{(a_1 - t)(a_m - t)}$$

kann man daher auch schreiben:

$$(15.) \quad A_1 \cdot \prod_{m=2}^{m=s} (a_m - a_1) = \frac{(t-a_1)^{\alpha+n+s-1}}{\binom{-\alpha}{n}} f_n \prod_{m=2}^{m=s} (1 + (t-a_m) f),$$

so dass die rechte Seite einen Ausdruck — analog (5.) — darstellt, welcher sich bei unendlichem n einer bestimmten endlichen, nicht verschwindenden Grenze nähert und nach der Bestimmung der a_m eben so zur Berechnung der A_m verwandt werden kann, wie (5.) zur Berechnung von A. Dass etwas Aehnliches in Betreff der Berechnung von α gilt, ist augenfällig.

Wir wollen hier auf die letztgenannten Zwecke in Ansehung ihrer geringeren Wichtigkeit nicht weiter eingehen, zumal die Resultate leicht zu extrahiren sind, und erörtern aus demselben Grunde auch nicht das Verhalten der Taylor'schen Reihe auf ihrer Convergenzgrenze und das periodische Schwanken ihrer Glieder, worüber die Gl. (4.) unmittelbare Auskunft giebt.

Was uns hier noch näher beschäftigen soll, ist die Berechnung der Grössen $(a_m - t)$, und zwar wollen wir dabei wieder von der Gl. (4.) ausgehn, indem wir $\varrho = o$ setzen. Dann lautet dieselbe:

$$r^{\alpha+n} \cdot \left\{ \frac{(-1)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} f_n - A_1 u_1^{\alpha+n} - A_2 u_2^{\alpha+n} - \ldots - A_s u_s^{\alpha+n} \right\} = \psi(t,n),$$

so dass, wenn man n nach und nach bis $(n+s)$ erhöht und aus den so erhaltenen $(s+1)$ Gleichungen die A_m eliminirt, durch ähnliche Schlüsse, wie oben, das Verschwinden des symbolischen Ausdrucks:

$$\frac{(-r)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} f_n \prod_{m=1}^{m=s} (1 - (a_m - t) f)$$

für unendlich grosse n hervorgeht. Bezeichnet man daher der Kürze wegen das endlich bleibende

$$\frac{(-r)^{\alpha+n}}{\binom{-\alpha}{n}} \cdot f_{n,m} = F_{n,m},$$

so folgt, immer für unendlich grosse n:

$$(16.)\quad F_{n,0} - C_1 F_{n,1} + C_2 F_{n,2} - \cdots + (-1)^s C_s F_{n,s} = 0;$$

und diese C_m sind ihrer Bildungsweise nach zugleich die Coefficienten einer Gleichung

$$(17.)\quad w^s - C_1 w^{s-1} + C_2 w^{s-2} - \cdots + (-1)^s C_s = 0,$$

deren s Wurzeln w mit den Grössen $(a_m - t)$ übereinstimmen.

Es kommt demnach nur noch darauf an, die C_m zu berechnen; was aber keiner Schwierigkeit unterliegt, da man nur dem n der Gl. (16.) s auf einander folgende Werthe zu ertheilen braucht, um s lineare Gleichungen für die Unbekannten C_m zu erhalten. In den durch die Elimination hervorgehenden Ausdrücken erscheinen die C_m als Quotienten zweier Determinanten s-ten Grades, weshalb man durch das Product der Factoren von der Form $(-r)^{\alpha+n} : \binom{-\alpha}{n}$ heben, d. i. die $F_{n,m}$ mit den $f_{n,m}$ vertauschen darf. Nachdem dieses geschehen, ist das Resultat folgendes:

$$(18.)\quad (-1)^{m-1} C_m \cdot \begin{vmatrix} f_{n,s} & \cdot\cdot & f_{n,m} & \cdot\cdot & f_{n,1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{n+s-1,s} & \cdot\cdot & f_{n+s-1,m} & \cdot\cdot & f_{n+s-1,1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_{n,s} & \cdot\cdot & f_{n,0} & \cdot\cdot & f_{n,1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{n+s-1,s} & \cdot\cdot & f_{n+s-1,0} & \cdot\cdot & f_{n+s+1,1} \end{vmatrix}$$

Dass hier auch allgemein f_{n+m} für $f_{n,m}$ gesetzt werden darf und, bevor man den Werth von α kennt, sogar gesetzt werden muss, braucht wohl kaum erst erwähnt zu werden.

Ist im Besonderen $s = 2$, so ergeben sich demnach $(a_1 - t)$ und $(a_2 - t)$ als die beiden Wurzeln w der quadratischen Gleichung:

$$(19.)\quad (f_{n,2} f_{n+1,1} - f_{n,1} f_{n+1,2})\, w^2 - (f_{n,2} f_{n+1,0} - f_{n,0} f_{n+1,2})\, w$$
$$+ (f_{n,1} f_{n+1,0} - f_{n,0} f_{n+1,1}) = 0,$$

oder auch:

$$(20.)\quad (f^2_{n+2} - f_{n+3} f_{n+1})\, w^2 - (f_{n+2} f_{n+1} - f_{n+3} f_n)\, w + (f^2_{n+1} - f_{n+2} f_n) = 0.$$

In Ansehung des praktischen Interesses wollen wir bei diesem Falle noch etwas verweilen, indem wir weiter voraussetzen, dass die Function $f(z)$ mit allen ihren Ableitungen im reellen Punkte $z = t$ reell, die Punkte $z = a_1$ und $z = a_2$ aber nicht reell seien. Da dann die Gleichungen (19.) und (20.) unter der Form

$$\varkappa w^2 - \lambda w + \mu = 0$$

mit reellen Coefficienten erscheinen, und der Sinus des Richtungswinkels ϱ von $w = re^{i\varrho}$ nicht verschwindet, so folgt:

$$\varkappa r^2 \cos 2\varrho - \lambda r \cos\varrho + \mu = 0,\quad 2\varkappa r \cos\varrho - \lambda = 0;$$

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{\varkappa}},\quad \cos\varrho = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varkappa\mu}};\quad w = \frac{\lambda \pm i\sqrt{4\varkappa\mu - \lambda^2}}{2\varkappa}.$$

U. A. ergiebt sich daher aus unsern Betrachtungen der folgende

Lehrsatz.

Ist der Convergenzkreis des Punktes $z = t$ ein s-fach algebraischer, so lassen sich aus den Coefficienten der Taylor'schen Reihe die Coefficienten (18.) einer Gleichung s-ten Grades (17.) berechnen, durch deren Wurzeln $w_m = a_m - t$ die s singulären Punkte $a_1, a_2, \dots, a_s$ des Convergenzkreises bestimmt werden.

Zusatz.

Bei einem zweifach algebraischen Convergenzkreise, dessen singuläre Punkte nicht in der reellen Axe liegen, während t, $f(t)$ und alle Ableitungen $f^{(n)}(t)$ reell sind, ergiebt sich für unendlich grosse n:

$$(21.)\quad \begin{cases} r = \sqrt{\dfrac{f_{n,1}\, f_{n+1,0} - f_{n,0}\, f_{n+1,1}}{f_{n,2}\, f_{n+1,1} - f_{n,1}\, f_{n+1,2}}}, \\[2ex] \cos\varrho = \dfrac{f_{n,2}\, f_{n+1,0} - f_{n,0}\, f_{n+1,2}}{2\sqrt{(f_{n,1}\, f_{n+1,0} - f_{n,0}\, f_{n+1,1})\,(f_{n,2}\, f_{n+1,1} - f_{n,1}\, f_{n+1,2})}}; \end{cases}$$

oder einfacher:

$$(22.)\quad r = \sqrt{\frac{c_n}{c_{n+1}}},\ \cos\varrho = \frac{h_n}{2\sqrt{c_n\, c_{n+1}}},\ a - t = \frac{h_n \pm i.\sqrt{4\, c_n\, c_{n+1} - h_n^2}}{2\, c_{n+1}},$$

indem

$$(23.)\quad c_n = f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1},\ h_n = f_n f_{n+1} - f_{n-1} f_{n+2}$$

gesetzt ist.

Beispiele.

1.) Während die im ersten Beispiel zum vorhergehenden Abschnitt besprochene Kettenbruchentwickelung nicht zu einer Wurzel z der quadratischen Gleichung $\varphi(z) = 1 - z - uz^2 = o$ convergirt, wenn u eine zwischen $-\infty$ und $-\frac{1}{4}$ liegende reelle Zahl ist, ergeben sich die Wurzeln aus dem Kettenbruch mit Hülfe von (22.) bei jedem n genau. Denn weil die f_n, welche seine Näherungsnenner sind, den Relationen $f_n = f_{n-1} + u f_{n-2}$, $c_{n+1} = f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = -u\,(f_n^2 - f_{n-1} f_{n+1}) = -u\,.\,c_n$, $h_n = c_n$ genügen, so wird:

$$r = \frac{1}{\sqrt{-u}},\ \cos\varrho = \frac{1}{2\sqrt{-u}};$$

wie auch nicht anders vorausgesetzt werden kann, da von der Gl. (20.) d. i. von $c_{n+1} w^2 - h_{n+1} w + c_n = o$ nach Division mit c_n nur $-uw^2 - w + 1 = o$ übrig bleibt.

2.) Es bedarf keiner subtilen Untersuchung, um zu erkennen, dass eine Gleichung von der Form

$$\varphi(z) = z^3 - mz^2 - 1 = o,$$

wenn $m > o$ ist, ausser der zwischen m und $(m+1)$ liegenden positiven, die Einheit übersteigenden Wurzel zwei conjugirte complexe Wurzeln besitzt, deren zwischen $\sqrt{\frac{1}{m}}$ und $\sqrt{\frac{1}{m+1}}$ liegender Modul < 1 ist; weshalb der Convergenzkreis des Punktes $z = o$ für die Function $f(z) = [\varphi(z)]^{-1}$ zweifach algebraisch sein muss.

Um daher die complexen Wurzeln obiger Gleichung zu finden, berechnen wir die f_n nach der aus (13.) für $t = o$ folgenden Formel:

$$f_n = -m f_{n-2} + f_{n-3},$$

unter deren Bedingung $h_n = -c_{n-1}$ hervorgeht; so dass, wenn wir jetzt die Näherungswerthe

$$z_n = r_n e^{i\varphi_n}$$

der Wurzeln z mit den Nummern der c in den Zählern von r versehen, aus (22.) erhalten wird:

$$r_n = \sqrt{\frac{c_n}{c_{n+1}}},\ cos\varphi_n = -\frac{c_{n-1}}{2\sqrt{c_n c_{n+1}}},$$

$$z_n = x_n \pm iy_n = \frac{-c_{n-1} \pm i\,.\sqrt{4\,c_n\,c_{n+1} - c^2_{n-1}}}{2\,c_{n+1}}.$$

Nehmen wir z B. $m = 10$ an, so berechnet sich:
$f_0 = -1,\ f_1 = o,\ f_2 = +10,\ f_3 = -1,\ f_4 = -100,\ f_5 = +20,\ f_6 = +999,$
$f_7 = -300,\ f_8 = -9970,\ f_9 = +3999,\ f_{10} = +99\,400,\ f_{11} = -49\,960,\ f_{12}$
$= -990\,001,\ f_{13} = +599\,000,\ f_{14} = +9\,850\,050,\ f_{15} = -6\,980\,001,\ f_{16}$
$= -97\,901\,500,\ f_{17} = +79\,650\,060,$ u. s. w.

Weil demnach

$$c_4 = 10\,020,\ c_5 = 100\,300,\ c_6 = 1\,004\,001$$

ist, so ergiebt sich:

$$z_5 = \frac{-10\,020 \pm i\sqrt{100\,676\,200\,200}}{2\,.\,1\,004\,001} = -0{,}049\,900\,3487 \pm i\,.\,0{,}158\,038\,8875;$$

und dieser Werth, zu welchem die f nur bis f_7 berechnet zu sein brauchen, ist noch in den 9ten Decimalstellen richtig.

Rechnet man aber so genau, wie es mit den aufgeführten Werthen der f möglich ist, benutzt also die Werthe

$$c_{13} = 10\,110\,360\,350\,050,$$
$$c_{14} = 101\,204\,505\,601\,500,$$
$$c_{15} = 1\,013\,055\,084\,035\,001,$$
$$c_{16} = 10\,140\,661\,200\,700\,060;\text{*)}$$

so kann ein Fehler erst in der Stelle eintreten, in welcher

$$x_{14} = -\frac{c_{13}}{2c_{15}} \text{ und } x_{15} = -\frac{c_{14}}{2c_{16}}$$

von einander abweichen.

Da nun, wie man leicht findet — und zwar immer unter der Voraussetzung der Relation

$$f_n = -m f_{n-2} + f_{n+3}$$

— die Gleichung

$$c_{n+1}\,c_{n+2} - c_n\,c_{n+3} = f_{n+3}$$

Statt hat, so ist

$$2\,.\,(x_{14} - x_{15}) = -\left(\frac{c_{13}}{c_{15}} - \frac{c_{14}}{c_{16}}\right) = \frac{f_{16}}{c_{15}\,c_{16}}$$

$$= -\frac{97\,901\,500}{1\,013\,055\,084\,035\,001\,.\,10\,140\,661\,200\,700\,060},\ abs\,.\,(x_{14} - x_{15}) < 10^{-23}.$$

---

*) Es ist $c_{n+1} = mc_n + c_{n-2}$, worauf sich auch der Ausdruck $Lim\,.\,\frac{c_{n+1}}{c_n}$ für die reelle Wurzel gründet.

Ohne eine noch grössere Genauigkeit in der Abschätzung der Fehler anzustreben, sehen wir daher, dass z_{14} noch in den 23^{ten}, z_{15} noch in den 25^{ten} Decimalstellen ihrer reellen Theile richtig erhalten werden müssen, und finden auch die Genauigkeit des berechneten z_5 in den 9^{ten} Stellen bestätigt. — Der Werth von x ist in den 25 Ziffern

$$x = 0{,}049\,900\,348\,507\,113\,792\,740\,0740$$

genau.

GRIECHISCHE LIEDER

THEILS UEBERTRAGUNG THEILS ORIGINAL

VON

IULIUS RICHTER

ΕΙΣ ΓΟΙΘΙΟΝ

Ἡ φῦλ' ἀοιδῶν μοῖσ' Ἐρατὼ τρέφει,
τὶν Γοίθι' οἷον Κυπρογένει' ἔλεν
    κάρυκα· νῦν δ' Ἔρωτ' ἀείδων
    μικκὸν ἅπας ἅμα γοιθιάσδει.
οἷος τὺ Παρνασῶ κορυφᾶν θίγες,
ἁ Κύπρις οἵῳ καὶ χαρίεν τεῒν
    Ἀνακρέοντος σκῶμμ' ἀεῖδεν
    καὶ γλυκερὸν πόρεν ᾆσμα Σαπφοῦς.

Iulius Richterus Eduardo Bonnellio s.

Ex quo salutem dixi plurimam tibi,
cum dedicaui opusculum quod scripseram
de distribuendis personis tragoediae,
anni laborum casuum discriminum
plenissimi triginta fugerunt prope.
tunc omnis arridebat mundus comiter,
— ne comice eum fauisse dicam comico —
uentoque secundo tum sperabam altum mare
ad Hesperidum me transuolaturum insulas.
nunc post labores infinitos iam senex,
— senem uocari fas sit, cui canum caput —
cum suspicarer insulas, non cernerem,
uotis fugatis cellam seruo muneris,
cui nauiganti perierit uis luminum.
nunc ultimum, uir optime, hoc dico uale,
ut dixero propediem muneri meo,
quod Lynceos quos, non Demodocos expetit,
at hoc manebit naufrago solatium
meaeque uitae uariis iactatae malis
cuique ademta melior pars est uirium,
per carmina quod priorum reminisci potest
studiorum amorum gaudiorumque omnium.
ergo hos benigne testes hilares otii
non expetiti, neutiquam hilaris accipe.
clamabit, heus tu, quam pusilla haec! Zoilus
seu philologus quis alius, instar Zoili.
at syllabarum quid moramur aucupes?
praestabit aliquid de proposito dicere.
iam tu poetas nostros nobilissimos
graiae tenui Camoenae canere spiritu

simulque eam seruari legem senties,
ut more nostro uersus sibi respondeant,
ut fiat id quod uere utrique nesciunt.
nec quid sibi nostrum — Reim — uelit, Graeci docent,
Musisque Romanorum plane aliena uox.
ut cederet res, ego cogebar omnibus
uti dialectis graecis, ac monitos uelim
uiros philologos, carmina aliter ut putent
germanica posse nostra graece non loqui.
sic facile formas, quales sunt *δῦ κνᾷ χρυσῆν*,
probabit omnis lector beneuolus satis.
ac prima carmina quattuor praeter metrum
cuiusque uerbi graecum conseruant sonum,
accentus ut sit index ipsius metri.
fuit labor, quid dicam? difficillimus,
eoque ueniam docti facilius dabunt
formas inusitatas uisuri et nouas
certe dialecto quam sequebar atticae.
iam quae secuntur carmina Goethii duo
metro poetae reddita sunt, graeco sono
tantum retento, si fors ita secum tulit.
inque omnibus uidebis legem iambici
trochaiciue sedulo expressam metri.
quod sequitur, unum carmen logaoedos habet,
postrema uersu scripta sunt anapaestico,
sed qui poetae consilio respondeat.
item additurus parua frustula de meis,
de Boeckhianis laudibus, quas carmine
aliquoties celebrare contigit mihi,
addo rogoque hoc unum, ut, quidquid praebui,
lubens et ipse perlegas et insuper
moneas, ut animo quiuis aequo iudicet
memorque sit praecepti: tute candidus,
si rectius his, imperti, si non, utere his!
quod est super, rogo te uerbis his meis,
ne me putes Nasonis instar scribere,
cultam Ciceronis periodum quod fugerim:
praestat iocari, praestat desipere in loco.

Scr. Berolini d. $\overline{\text{XV}}$ m. Februar. a. $\overline{\text{MDCCCLXX}}$.

1. Erlkönig.

*Κρατερὸς τὸ κῆρ νυκτὶ στυγερᾷ
τὸν παῖδα φορῶν ὁ πατὴρ ἐλᾷ,
ἀγκὰς περιεῖλε παῖδ' ἑόν,
ἀγκὰς δὲ θάλπει φίλτατον.*

*τί παθὼν καλύπτεις ὄμματα;
— βαλῆνα νάννων εἴρεσα·
— ταρβῶ τιάραν πάνυ μακράν.
ταρβεῖς ὁμίχλην καὶ σκιάν.*

*„οὐ δεῦρο τέκνον εἶ μετ' ἐμοῦ;
„πορίῶ δ' ἀθύρματα πανταχοῦ,
„λειμῶνος ἄνθεα πάντ' ἐγώ,
„ἐσθῆια κορῶν χρυσῆν κομιῶ.*

*— ἀκήκοας ὥς μοι παντοδαπὰ
— ὑπέσχετο νάννος ἀγάλματα;
ἔχ' ἥσυχος, τάχ' Αἴολος
κινεῖ λαλῶν τι φύλλα δρυός.*

*„οὐ δεῦρο τέκνον εἶ μετ' ἐμοῦ;
„τάχ' εἶσι κορῶν χορὸς μετὰ σοῦ,
„μετὰ σοῦ δὲ χορεύσουσιν θοῶς,
„αὐταὶ θεραπεύσουσίν σε καλῶς.*

*— χορὸν δὲ κορῶν οὐκ εἶδες ἐκεῖ,
— ὡς παῖζον ἄλσει ἐν εὐθαλεῖ;
φαντάσματ' ἔστι παῖ κενά,
τάδ' αὖα δένδρα καὶ πολιά.*

*„φιλῶ σε, ποθῶ σε, δεῦρο παῖ,
„ὡς ῥεῖα κρατοῦσι χεῖρες ἐμαί.
— ὦ πάτερ, ἰοὺ ὢ δὴ θίγ' ἐμοῦ,
— δηλήσαιο δή μ' ἰοὺ ἰού.*

*εἰλιγγιῶν ὁ πατὴρ ἀπελᾷ,
θρηνεῖ, στενάζει παῖς, βοᾷ.
ὡς κεῦθε δῶμ' αὐτὸν φοβερόν,
ὣς κεῦθε κόλπῳ παῖδα νεκρόν.*

2. König in Thule.

*Σεμνός ποτ' ἔσκε Θούλῃ
πιστῶς τ' ἐρῶν βαλήν,
βαλῆνι κύλικα δούλη
θανοῦσα πόρε χρυσῆν.*

*οὐδ' ἄλλον ἶσα τίει
δαιτὸς παρήορον,
καὶ δάκρυ' ἂν καθίει
λαρὸν πιὼν ποτόν.*

*ὅτ' Ἄτροπος παρέστη,
τὰ χρήματ' ἀναριθμεῖ,
καὶ τἄλλ' ἐῶν ἑλέσθαι
τῆς κύλικος αὖ φθονεῖ.*

*δαιτί ῥ' ἐκεῖ 'ν θαλείᾳ,
ὅτ' ἦν μετὰ συμποτῶν
ἐν ἀνδρεῶνι, ῥεῖα
ἐς κύματ' εἰσορῶν*

*στῆ δῶρον ἐκροφήσας
διονυσιακοῦ πυρός,
τὴν κύλιχ' ὁμοῦ φιλήσας
ἐς βένθεα ῥῖψ' ἁλός.*

*αὐτὴν δ' ὅτ' εἶδε δῦσαν
ἐς ἁλμυρὸν βαθύ,
αἱ Κῆρες αἶψα λῦσαν
οὐδ' ἐκροφοῦντα γρῦ.*

3. Der Sänger.

Πρὸ τῶν θυρῶν τί δὴ ψοφεῖ;
τί δὴ 'πὶ τῇ γεφύρᾳ;
ἰών τις ἄνδρ' ἡμῖν καλεῖ;
ὡς χαίρομέν γε λύρᾳ.
θεῖ ὁ ἄγγελος ταχεῖ ποδί·
δευρὶ, καλεῖ βαλήν, ἰθὺ
ἐς ἀνδρεῶνα πρέσβυν.

ὦ χαίρετ' ἄνδρες εὐγενεῖς,
ὦ χαίρεθ' ὡς σελήνη
καλὴ γυναῖκες εὐπρεπεῖς,
αἰδοῖ σχεδὸν κεχήνη.
ὡσεὶ τυπεὶς πολλῷ πυρὶ
τυφλὸς φανοῦμαι ἐνθαδὶ
ὁρῶν τοσοῦτο κάλλος.

ἦ χῶς τις ἄλλος Φήμιος
καλὸν καλῶς ἀείδει·
ἀνδρός τ' ὀρίνεται βιός,
γυνή τε κρᾶτ' ἐρείδει.
ᾠδῇ χαρεὶς τεκμήριον
χαρᾶς βαλὴν αὐτῷ καλὸν
πορεῖν ἐφῆκεν ὅρμον.

μὴ τῆσδ' ἐᾷς με λίσσομαι
τῆς δωρεᾶς λαβέσθαι,
οἷς δ' ἡ πατρὶς μάλ' αὔξεται,
τοισδὶ δός ἐξελέσθαι.
σῷ δ' ἀρχιβούλῳ γ' εὐμενῶς
δὸς δωρεὰν χρυσῆν, σαφῶς
φιλεῖ φορεῖν τόδ' ἄχθος.

λίγ' ᾖδον ὡς τοὐρνίθιον
αὐγὰς ὑπ' οὐρανοῖο,
οὐ δή ποτ' ᾆσμα δεῖ γ' ἐμὸν
μισθοῦ τυχεῖν χρυσοῖο.
ἀλλ' ἓν ποθῶν σ' αἰτῶ βαλήν,
ἐᾶν με κύλιχ' ἁπλῶς χρυσῆν
χρυσοῦ λαβεῖν μετ' οἴνου.

ἦ καὶ λαβὼν ῥοφεῖ ταχύ·
ὦ χαῖρε χαῖρε δῶμα,
ἐν ᾧ ποτὸν τοδὶ γλυκὺ
οὐδέν γε κλεῖε πῶμα·
ὦ χαῖρ' ἐπιμνησθεὶς ἐμοῦ
καὶ χαῖρε δωρεᾷ θεοῦ.
τῇ δωρεῶν ἀρίστῃ.

4. Lied von Heine.

Ὡς ἄνθος εἶ καλόν τε
καθαρόν τε καὶ γλυκύ,
ἐς κῆρ ἀγανόν τι πένθος,
ὥς σ' εἶδον, αἶψα δῦ.

αἲ μακαριῶν σ' ἐπιθείην
σὴν χεῖρας ἐς κεφαλήν,
σῶσαί τε θεόν σ' ἱκετεύσων
καλὴν καθαρὰν ἀγανήν.

5. Heidenröslein.

Ἐν χλόῃ τέρεν ῥόδον
παῖς ἰδὼν ἰάνθη·
ὡς ἕως γὰρ ἦν νέον,
ἐρυθριῶν τε πάγκαλον
ὡς ἕως ἐφάνθη.
  ἐρυθρὸν ὦ ῥόδον ῥόδον,
  σοὶ τὸ κῆρ ἰάνθη.

ὦ ῥόδον χαῖρ', εἴ σ' ἕκλων,
κῆρ ἂν αἶψ' ἰάνθη.
— ἔρρε θᾶσσον ἐκποδών.
— ἴσθι πολλὰ νῦν παθών,
— τἀμὰ κέντρ' ἐφάνθη.
  ἐρυθρὸν ὦ ῥόδον ῥόδον,
  σοὶ τὸ κῆρ ἰάνθη.

παῖς ὑβρίζων αἶψα κλᾷ,
καὶ τὸ κῆρ ἰάνθη.
ἐκπλαγὲν ῥόδον φθορᾷ
φεῦ μάτην εἰλιγγιᾷ,
καὶ τὸ κῆρ ἐχράνθη.
  ποῦ ῥόδον; ποῦ τοὐρυθρόν;
  φεῦ σαπρὸν γ' ἐφάνθη.

6. Vanitas vanitatum vanitas.

Οὐδὲν μέλει μοι τἀπὶ γῆς, εὐοῖ
καὶ παντελῶς εἰμ' εὐτυχής, εὐοῖ
τύχης μεθέξων κάρτα σὺ
ῥόφει, πρόπιν' ἐμοὶ μέθυ
  χαρεὶς τοδὶ γλυκύ.

πλουτεῖν ἐμοὶ τὸ πᾶν ποτ' ἦν, εὐοῖ
κἀπώλεσ' εὐθὺς ἡδονήν, αἰβοῖ
χρυσὸς δ' ἀπέδρα πανταχοῦ,
τάχ' εἶπον· ἔστι τῇδ' ἰδού,
  ὁ δ' ἔσκεν οὐδαμοῦ.

ὡς δὴ γυναικῶν ἠράμην, εὐοῖ
καὶ δυστυχέστερος τότ' ἦν, αἰβοῖ
καλὴ μεταλλαγῶν ἐρᾷ,
ἁπλῆ δ' ἁπλῷ βίῳ με κνᾷ,
  ἄψαυστος ἦν μία.

τρόπιν δ' Ὀδυσσέως ἑλών, εὐοῖ
ἀπῆα πατρίδ' ἐκλιπών, αἰβοῖ
οὐδ' ἤρεσ' οὐδέν οὐδαμῶς,
πίον κακῶς, φάγον σαπρῶς,
  πᾶς ἦν ἄνους λεώς.

τιμῆς τυχεῖν ἐγλιξάμην, εὐοῖ
τιμὴν τάχ' εἶχέ τις διπλῆν, αἰβοῖ
ὡς πράξεσιν μετέπρεπον,
πάντες λόγοισί μ' ἔψεγον
  καὶ κάρδαμ' ἔβλεπον.

πολέμου δ' ἐραστὴς καὶ μαχῶν, εὐοῖ
ἔχαιρον ἐνιαχοῦ κρατῶν, εὐοῖ
στρατεύσαμεν δ' ἐς πολεμίαν,
ἄγειν τε καὶ φέρειν ἅπαν,
  σχεδὸν δ' ἀπωλόμαν.

νῦν δ' οὐ μέλει μοι τἀπὶ γῆς, εὐοῖ
καὶ παντελῶς εἰμ' εὐτυχής, εὐοῖ
πᾶν χρῆμ' ἔχει τέλος ταχύ.
ἄγε δὴ 'κροφεῖτε νῦν μέθυ
  λιπόντες οὐδὲ γρῦ.

7. Wanderers Nachtlied.

Ὕπνος ἄνθεα πάντ᾽ ἔχει,
οὐδ᾽ αἴγειρος ἔτι θροεῖ,
ἶς εὕδει Ζεφύροιο.
πάντ᾽ ὀρνίθια πανταχοῦ
εὕδει, θυμὲ σὺ δ᾽ οὐδαμοῦ
παύσεαι καμάτοιο;

8. Des Mädchens Klage von Schiller.

Ἡ δρῦς βορέῃ πληγεῖσα τρέμει,
ἐπὶ ῥηγμῖνος δὲ κόρη θάσσει,
ῥοχθεῖ δὲ τὸ κῦμα βίῃ μεγάλῃ
ἡ δ᾽ οἰμώζει νυκτὶ δνοφερῇ
δακρύοισι τακεῖσα παρειάν.

φροῦδος κόσμος, κενὸς, ὤ, θυμός,
οὐδ᾽ ἂν φαίην· τοῦτ᾽ ἔτι μοι δός.
ἄγε δὴ κάλεσον σὴν παῖδ᾽ Ἄγνη,
χάρισι στίλβουσαν καὶ πινυτῇ,
χαρίτων ἀπολώλεκα λείαν.

— συνεχῶς κλάουσα μάτην κλάεις,
νεκρὸν τὸν Ἔρωτ᾽ οὐκ ἐξεγερεῖς·
ὁ δὲ κῆρ δύναται θέλγειν τὸ νοσοῦν
μετὰ τὸν Κύπριδος καὶ Ἔρωτος πλοῦν,
λέξω σοι φάρμακον ἐσθλόν. —

κλάουσα μάτην κλαυσοῦμαι ὅμως,
κἄνπερ ἐν ᾅδου μείνῃ μοι ἔρως·
ὁπόταν θυμὸν θρήνοις τέρψω,
ὁπόταν δακρύοις τὸ κέαρ κορέσω,
ἕξω μοι φάρμακον ἐσθλόν.

9. Ergo bibamus!

Πράξει ᾽πὶ καλῇ συναγειρόμενοι
Βάκχου, φίλοι, εἶτα πίωμεν.
τὰ κύπελλα λαλεῖ, σιγῶσι λόγοι,
ἐνθυμεῖσθ᾽· εἶτα πίωμεν.
ἔπος ἐκ πατέρων ἔτι νῦν ἄρχει,
καὶ παντοδαποῖς καιροῖς πρέψει,
τῆς δ᾽ εἰλαπίνης ἠχώ τις ἀεὶ
ἀπαμείβεται· εἶτα πίωμεν.

λιπαράν ποθ᾽ ἑταίραν ἀσπασίως
κατιδὼν λέγον· εἶτα πίωμεν·
ὅτε δὴ προσιόντ᾽ ἔφυγέν μ᾽ αἰσχρῶς,
γελάσας λέγον· εἶτα πίωμεν.
ὑμεῖς θ᾽ ὁπόταν φιλόφρων κύσσῃ,
ὁπόταν τε μεγαίρουσ᾽ ἄψ ἀπίῃ,
ἐμμείνατέ γ᾽ εἰς ὅ κε λῷον ἔχῃ,
χρηστῷ τῷδ᾽· εἶτα πίωμεν.

ἐθέλει με τύχη πιστῶν ἑτάρων
χωρίζειν· εἶτα πίωμεν.
ὡς πελταστὴς δ᾽ ἀποδημήσων
διπλοῦν καλῶ· εἶτα πίωμεν.
καίπερ μάλα ῥωγαλέας χλαίνης,
κῆρ γηθόσυνος φίλος ἐστὶ τύχης,
χαρίεντι δ᾽ ἀεὶ χαρίεις χρήστης·
εὐοῖ, φίλοι, εἶτα πίωμεν.

ἕταροι, πῶς εἴπωμέν γε ταχὺ
τὴν τήμερον· εἶτα πίωμεν.
ἀρέσει πᾶσιν, δεπάεσσι μέθυ
ἐγχεύομεν, εἶτα πίωμεν.
προσάγει δὲ χαρὰν διὰ τῶν προθύρων,
νὺξ φεύγει, κὰκ χρυσέων νεφελῶν
εἴδωλ᾽ ἐφάνη τῶν ἀθανάτων·
ὁμοθυμαδόν· εἶτα πίωμεν!

10. An August Boeckh, den neunundsiebzigjährigen,

zum 24. November 1864.

Σήμερον σιγᾷ κροταλισμὸς ὕμνων;
οἷς ἂν ὑμνοῦμεν λιπαρὸν γέροντα
Βοίκιον καὶ κουριδίην δάμαρτα
μνήμονι θυμῷ;
ἧς μέτ᾽ ὀλβιώτατος ᾤετο ζῶν
ῥεῖα γήραος τολυπεῦσαι ἄχθος,
φίλτατον λιποῦσ᾽ ἰότητι θείᾳ
οὐρανὸν ἵκει.

ἀλλ᾽ ὅμως πάντες κροταλίζομέν σοι
Βοικίῳ διδασκάλῳ εὐχάριστοι
καὶ νεηνίαι προγενέστεροί τε
καὶ πολιοὶ δέ.
σήμερον πάντες μακαρίζομέν σε,
ὡς νεηνικῶς κρατέεις Ἀθηνῶν
Ἑλλάδος πάσης Ἀγαθαρχίδης ὢν
καὶ Φιλοποίμην.

καὶ θεὸν πάντες μεγάλ᾽ εὐχόμεσθα,
ὥς σ᾽ ἐᾷ συχνὸν χρόνον οἶνον ἐγχεῖν
Ἑλλάδος λαρώτατον ἀττικιστὶ
σοῖσι μαθηταῖς.

11. An August Boeckh, den einundachtzigjährigen,

zum 24. November 1866.

Νέστορ᾽ ἴδμεν, τῷ σε μάλιστ᾽ ἐίσκω,
Ἑλλάδος πάσης γενεὰς ὑπὲρ τρεῖς
καὶ λόγοισι καὶ πινυτῇ κρατοῦντα,
κῦδος Ἀχαιῶν.
Νέστορος δ᾽ αἶνον, Πυλίου γέροντος,
εἰδότος παλαιά τε πολλά θ᾽ ὑμνεῖ
καὶ πεποίηκ᾽ ἀθάνατον γενέσθαι
θεῖος Ὅμηρος.
οὐδὲ σοὶ δεῖ Βοίκιε τοῦ Ποιητοῦ·
εἰνάκις Μουσῶν γὰρ ἀριθμὸν ἱρὸν
αὐτὸς ἡγεμὼν ἐτέλεσσας αὐτῶν,
αὐτὸς Ὅμηρος.

καὶ γὰρ Ἑλλάδ᾽ ἤραρες, ἐν δ᾽ Ἀθηνῶν
πάντα δῆμον ἐξανέγειρας ᾄδου,
παγκάλως τ᾽ ἀνοικοδόμησας αὐτὴν
πατρίδ᾽ ἀοιδοῦ.
σήμερόν σε Βοίκιε προσκαλοῦμεν
Πινδάρου σωτῆρα πρόμον τ᾽ Ἀθηνῶν
χαίρομέν θ᾽ ὡς σωφροσύνῃ σὺ πάσης
Ἑλλάδος ἄρχεις.
ἔλπομέν θ᾽ ὡς ἱρὸν ἀριθμὸν ὥσπερ
ὠκύπους ὑπερβαλέεις Ἀχιλλεὺς
κἀπὶ τέρμα κεῖνο τὸ Νεστόρειον
ἥσυχος ἵξει.

12. August Boeckh's sechzigjähriges Doctoriubilaeum
am 15. März 1867.

῎Ακουε πᾶς φιλέλλην!
πίθεσθ᾿ ὑπερβόρειοι,
ὅσοι θεᾶσθ᾿ ᾿Αθήνας,
ὅσοι τὸ κλεινὸν ἄκρον,
ὅσοι τε Παλλάδ᾿ ἱρὴν
ἄγασθε Παρθενῶνος,
ὅσοι τε τὸν Ποιητήν,
τὸ θεῖον ἀκρόαμα,
πολλῇ χαρᾷ σέβεσθε
καὶ Πινδάρου κόθορνον
σὺν Βοικίῳ νοεῖτε,
φιλεῖτέ τ᾿ ἐννυχεύειν
χοροῖσι τῶν τραγῳδῶν,
καὶ Κωμικοῦ γελῶντος
τοῦ Σωκράτους γελᾶτε,
κεῖνον δὲ τὸν Πλάτωνος
πάσῃ δέχεσθε τιμῇ,
ὅσοι γλυκεῖαν ᾠδὴν
Σαπφοῦς ᾿Ανακρέοντος
᾿Αλκμᾶνος ἴστ᾿ ἀείδειν,
Δημοσθένους δὲ δεινοῖς
Φιλιππικοῖς τραφέντες
μισεῖτε τοὺς τυράννους·
πίθεσθε, δεῦτε πάντες
καὶ Βοικίῳ γέροντι
τῷ φιλτάτῳ φέροντες
πολλὴν χάριν πάρεστε!
καλῶς γὰρ ἐκδιδάσκων
ἑλληνικὸν τὸ κάλλος
ἡμᾶς νεηνίας τε
χἠμᾶς γέροντας ἤδη,
τάχ᾿ ὥς Γερήνιός τις
βροτῶν γένη ᾿πὶ δοιὰ
λαὸν μαθητιώντων
ἑλληνικῶς ἔθρεψεν.
θρεπτήριόν γ᾿ ἅπαντες
ὀφείλομεν κράτιστον
διαμπερές, μαθηταί,
διδασκάλῳ κρατίστῳ.
σπεύδωμεν, ὡς ἄριστος
καὶ γνήσιος πολίτης
ὁ Βοίκιός γ᾿ ᾿Αθηνῶν
ὥς θ᾿ ἡγεμὼν παλαιᾶς
τῆς ῾Ελλάδος πέφυκεν,
ὣς ἔμμεν οἱ μαθηταὶ
διδασκάλου μέτοικοι
καὶ προστάτην σέβεσθαι
τὸν φίλτατον γέροντα.

Schulnachrichten.

I. Prima.

Ordinarius: Prof. Dr. Jungk I.

Religion. 2 St. Coet. A. der Director. Die Glaubenslehre u. Augsburgische Confession; Coet. B. im S. ord. Lehrer Paul, im W. der Director. Kirchengeschichte, mit Benutzung des Hülfsbuchs für den evangel. Religionsunterricht von Hollenberg. Auswendiglernen von Kirchenliedern.

Deutsch. 3 St. Prof. Dr. Jungk. Coet. A. im S. Deutsche Literaturgeschichte von Goethe bis auf die neueste Zeit; im W. Logik. — Coet. B. im S. Deutsche Literaturgeschichte von 1500 bis Klopstock; im W. Geschichte der Literatur des Mittelalters. In beiden Coetus freie Vorträge und Stilübungen.

Latein. 8 St. Coet. A. der Director, 2 St. Horaz Oden Lib. III. u. IV.; 1 St. Quintilian Lib. X. Im S. 2 St. Stilübungen. 3 St. Cic. de Or. I.; im W. 1 St. Stilübungen. Professor Dr. Richter. 3 St. Cic. Off., 1 St. Extemporalien. — Coet. B. Prof. Dr. Wolff. Horaz O. I. II. 2 St.; Cic. Philipp. I. II. div. in Caec. in Verr. Lib. IV. 2 St.; Tac. Ann. I. II. Hist. III. und IV. 2 St. Extemporalien, häusliche Aufsätze und mündliche Uebersetzungen aus Zumpts Aufgaben 2 St. — Am Schlusse jedes Quartals wurden in beiden Coetus einzelne Stunden der Controle der Privatlectüre (Hor. A. P. Tac. Germ. u. a.) vom Director u. Prof. Dr. Wolff gewidmet.

Griechisch. 6 St. Prof. Salomon. Coet. A. Hom. Ilias XIV. u. XVI.—XXIV. 2 St.; Soph. Antig. u. Plat. Gorg. 3 St. — Coet. B. Hom. Ilias I.—IV., VI.—X. u. XII. 2 St.; Thucyd. Lib. II., Plat. Protagoras 3 St. In beiden Coetus die wichtigsten Theile aus der Syntax u. Extemporalien 1 St.

Französisch. 2 St. Ord. Lehrer Paul. Wiederholung der Grammatik, Extemporalien. Lectüre Coet. A.: im S. L'avare par Molière. — Coet. B. im W. Avant, pendant et après par Scribe 1 St, Lectüre: Mignet la rév. franç. 1 St.

Geschichte und Geographie. 3 St. Prof. Dr. Jungk. Die allgemeine Geschichte mit besonderer Berücksichtigung der geograph. Verhältnisse. Coet. A. die Geschichte von 1493—1815; Coet. B. das Mittelalter 3 St. — Repetition der alten Geschichte u. Geographie in jedem Coetus.

Mathematik. 4 St. Dr. Worpitzky. Coet. A. Kettenbrüche, unbestimmte Gleichungen, Ergänzungen der Geometrie, der binomische Satz und Anwendungen desselben. — Coet. B. Stereometrie, Combinationen u. Lehre von den Gleichungen. Aufgaben aus verschiedenen Theilen der Mathematik.

Physik. 2 St. Dr. Worpitzky. Coet. A. im S. Optik; im W. Mathem. Geographie, Akustik. — Coet. B. im S. Mechanik flüssiger u. luftförmiger Körper; im W. Mechanik fester Körper.

Zeichnen. 1 St. Professor C. F. Schmidt für die Primaner, welche daran theilzunehmen wünschten. Es wurden Baumstudien, ausgeführte Landschaften und Köpfe gezeichnet und von denen, welche später davon Gebrauch zu machen denken, Uebungen im Planzeichnen vorgenommen.

Hebräisch. 2 St. ord. Lehrer Paul. Wiederholung und Vervollständigung der Formenlehre, besonders der Declinationen, Lectüre ausgewählter Abschnitte aus den histor. Büchern des A. T. und leichter Psalmen nebst Durchnahme schriftlich bearbeiteter in der Classe nicht gelesener Psalmen.

II. Ober-Secunda.

Ordinarius: Coet. A. Professor Salomon; Coet. B. im S. Dr. Marquard, im W. Prof. Dr. Richter.

Religion. 2 St. Coet. A. ord. L. Jacobsen. Coet. B. ord. L. Paul. Im S. Lectüre und Erklärung der Apostelgeschichte; im W. des Ev. Lucae, nach dem Griechischen Texte. Auswendiglernen von Kirchenliedern.

Deutsch. 2 St. Coet. A. u. B. Dr. Hoche. Schriftliche Aufsätze und freie Vorträge; die Hauptmomente der Deutschen Literatur mit besonderer Beziehung auf das Drama.

Latein. 10 St. Coet. A. Prof. Salomon. Im S. Cic. Rosc. Am. u. Man.; im W. Livius XXIII. bis XXV. in 5 St. Die Lehre vom Imperativ, Infinitiv, Participium, Gerundium und Supinum, mit schriftlichen Ausarbeitungen und aus der Lectüre gewählten Beispielen, Exercitien und Extemporalien in 3 St. — Dr. Hoche Virgil's Aeneis IV.—VI. 2 St. — Coet. B. im S. ord. L. Dr. Marquard Cicero Am. u. Sen.; im W. ord. L. Dr. Eyssenhardt Livius XXI. XXII. 4 St.; grammatische Uebungen wie Coet A. — Im S. Dr. Hoche. im W. Prof. Dr. Richter Virg. Aen. I.—IV. 2 St.

Griechisch. 6 St. Coet A. Dr. Kühne, Hom. Od. IV. — VIII ; XIII. — XVI. 2 St.; im S. Platos Apologie u. Crito, im W. Plut. Them. u. Perikles 2 St. — Coet. B. im S. Prof. Dr. Wolff Hom. Od. XVII. — XXII. 2 St.; Platos Apologie und Crito 2 St. Im W. Prof. Dr. Richter, Hom. Od. XXIII., XXIV., I. — IV. 2 St.; im W. Dem. Ol. I. — III., de Pace 2 St. — In beiden Coetus Grammatik und Extemporalien 2 St.

Französisch. 2 St. Coet. A. Dr. Kühne, Coet. B. Dr. Hoche. Im S. in Coet. A. Rollin, Alexandre le Grand II.; im W. Plutarque, César, trad. de Ricard; in Coet. B. im S. Rollin, Vies des hommes illustres; im W. Rollin, Alexandre le Grand. Wiederholung und Vervollständigung der Syntax der Modi. Extemporalien.

Geschichte und Geographie. 3 St. Coet. A. Oberl. Beeskow, Coet. B. Dr. Müller I. Römische Geschichte bis zur Regierung Justinians I. nebst Geographie des Römischen Reichs.

Mathematik. 4 St. Coet. A. u. B. Oberl. Dr. Jungk II. Trigonometrie 2 St.; Logarithmen, quadratische Gleichungen, die arithmetische und geometrische Reihe 2 St.

Physik. 1 St. Coet. A. u. B. Oberl. Dr. Jungk II. Im S. Einleitung in die Physik; im W. Wärmelehre.

Zeichnen. 1 St. S. Prima.

Hebräisch. 2 St. ord. Lehrer Jacobsen. Wiederholung und Vervollständigung des regelmässigen Verbi, die Verba mit Suffixis, die unregelmässigen Verba und die Declinationen, verbunden mit schriftlichen Uebungen; Lectüre historischer Stücke nach dem Lesebuch von Gesenius.

III. Unter-Secunda.

Ordinarius: Coet. A. Oberl. Beeskow; Coet. B. Prof. Dr. Wolff.

Religion. 2 St. Coet. A. Schulamtscandidat Bieck, Coet. B. ord. Lehrer Jacobsen. Einleitung und Einführung in den Inhalt der Bücher der heiligen Schrift, nach dem Hülfsbuch von Hollenberg, im S. des A. T., im W. des N. T. Auswendiglernen von Kirchenliedern.

Deutsch. 2 St. Coet. A. Prof. Dr. Jungk I., Coet. B. ord. Lehrer Jacobsen. Lectüre der vorzüglichsten epischen Dichtungen, namentlich des Nibelungenliedes in der Ursprache. Lehre von den Tropen. Anfangsgründe der Laut- und Flexionslehre des M. H. D. Schriftliche Stilübungen und freie Vorträge.

Latein. 10 St. Coet. A. Oberl. Beeskow, Coet B. Prof. Dr. Wolff. Curtius de gestis Alexandri ganz in 4 St., Syntax der Modi u. Extemporalien in 3 St., mündliches Uebersetzen aus Zumpts Aufgaben 1 St. — im S. Dr. Kühne, im W. Prof. Dr. Wolff. Ausgewählte Stücke aus Ovid. Met. VII.—XV. Prosodie. Auswendiglernen einzelner Abschnitte 2 St.

Griechisch. 6 St. Coet. A. Oberl. Beeskow, Coet B. ord. Lehrer Dr. Hiecke. Odyss. IX.-XII. 2 St.; Xen. Anab. III.—VII. 2 St.; Verba anomala und Extemporalien 2 St.

Französisch. 2 St. Coet. A. im S. Dr. Hoche, im W. Dr. Kühne, Coet. B. im S. Dr. Kühne, im W. Dr. Hoche. Extemporalien. Syntax der Pronomina nach Knebels Gramm. Uebersetzen aus Fränkels tableaux historiques.

Geschichte und Geographie. 3 St. In beiden Coetus Prof. Dr. Jungk I. Geschichte der Orientalischen Staaten des Alterthums und der Griechen bis 146 v. Chr., verbunden mit der Geographie der alten Welt.

Mathematik. 4 St. Coet. A. Dr. Worpitzky, Coet. B. Oberl. Dr. Jungk II. Gleichungen ersten Grades, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, 2 St. Aehnlichkeit und Ausmessung der Figuren, Berechnung des Kreises 2 St.

Physik. 1 St. Coet. A. Dr. Worpitzky, Coet. B. Oberl. Dr. Jungk II. Magnetismus und Electricitätslehre.

Zeichnen. 1 St. S. Prima.

Hebräisch. 2 St. Schulamtscand. Bieck. Elementarlehre mit Leseübungen; Conjugation bis zu den Guttural-Verben mündlich und schriftlich eingeübt; zuletzt Lectüre historischer Stücke nach dem Lesebuche von Gesenius.

IV. Ober-Tertia.

Ordinarius: Coet. A. im S. Dr. Kühne, im W. Dr. Eyssenhardt; Coet. B. Oberl. Dr. Langkavel.

Religion 2 St Coet A. im S. Schulamtscand. Bieck, im W. Dr. Eyssenhardt, Coet. B. Dr. Langkavel. Im W. Psalmen mit besonderer Berücksichtigung der messianischen Verheissung. Ausgewählte Abschnitte aus den Sprüchen und der Weisheit Salomonis. — Im S. Erklärung der messianischen Stellen des Jesaias; Repetition der Geschichte des Israelitischen Volkes nach Jesus Sirach c. 43. sqq. Psalmen und Kirchenlieder wurden gelernt und die fünf Hauptstücke des Lutherischen Katechismus wiederholt

Deutsch. 2 St. Coet. A. Dr. Müller I., Coet. B. im S. Dr. Förster, im W. Dr. Langkavel. Aufsätze, meist Erzählungen und Beschreibungen; Vorträge historischer Stücke und auswendig gelernter Gedichte; Erklärung von classischen Gedichten und von Proben mustergültiger Darstellungen aus der Deutschen Literatur; Repetition der Grammatik mit besonderer Berücksichtigung der Lehre vom Periodenbau.

Latein. 10 St. Coet. A. im S. Dr. Kühne, im W. Dr Eyssenhardt, Coet. B. Dr. Langkavel. Caes. bell. Gall. I.—VII. in 4 St.; die Lehre von der indirecten Rede, der Consecutio temporum und das Wichtigste vom Conjunctiv nach Zumpts Grammatik, Extemporalien 4 St. — Ovid. im S. Dr. Förster, im W. Met. ausgewählte Stücke aus Lib. I.—VI., Anfänge der Prosodie 2 St.

Griechisch. 6 St. Coet. A. im S. Schulamtscand. Dr. Hohenberg, im W. Dr. Müller II., Coet. B. im S. Dr. Langkavel, im W. Dr. Marquard. Die Abweichungen von der regelmässigen Conjugation, Verba auf μι und die wichtigsten Anomala nebst Extemporalien 3 St.; Xenophons Anabasis, im S. Lib. II., im W. Lib. I. 3 St.

Französisch. 2 St. Coet. A. Dr. Müller I. (im S. Dr. Langkavel), Coet. B. Dr. Langkavel. 1 St. Lectüre. 1 St. Regeln über die Pronomina nach Knebels Gramm. Uebersetzen aus Fränkels Cours de leçons Curs. II und Extemporalien.

Geschichte und Geographie. 3 St. Coet. A. u. B. Dr. Müller I. Uebersicht der mittlern und neuern Geschichte mit besonderer Hervorhebung der Deutschen und Brandenburgisch-Preussischen, in Verbindung mit einer Uebersicht der Geographie Europas. (Lehrbuch von Dr. C. Wolff.)

Mathematik. 3 St. Coet. A. ord. Lehrer Kossak, Coet. B. im S. Schulamtscand. Wulfinghoff, im W. Dr. Jungk II. 1 St. Arithmetik, die vier ersten Rechenoperationen in gebrochenen Buchstabenformeln, Zerlegung mehrgliedriger Formeln in Factoren; 2 St. Geometrie, die Lehre von den Parallelogrammen und den Linien und Winkeln im Kreise, Gleichheit der Figuren nach Kambly §. 60—127.

Naturkunde. 2 St. Coet. A. u. B. Dr. Langkavel. Im S. Botanik; die grössten und wichtigsten Pflanzenfamilien wurden an lebenden Pflanzen in der Classe und die Arten auf Excursionen gelehrt. Im W. Zoologie nach dem Lehrbuch von Leunis. Die Sinnesorgane und dann besonders ausgewählte Abschnitte.

Zeichnen. 1 St. Prof. C. F. Schmidt. S. Prima.

V. Unter-Tertia.

Ordinarius: Coet. A. im S. Dr. Müller I., im W. ord. L. Paul; Coet. B. Dr. Hiecke.

Religion. 2 St. Coet. A. im S. Dr. Förster, im W. ord. L. Paul, Coet. B Dr. Hiecke. Geschichte des Jüdischen Volkes nach dem A. T. Auswendiglernen von Kirchenliedern.

Deutsch. 2 St. Coet. A. im S. Dr. Fuchs, im W. Dr. Müller I., Coet. B. Dr. Hiecke. 1 St. Declamation und Lesung classischer Stellen geschichtlicher Prosa; 1 St. Aufsätze, Lehre von den Casus, besonders nach Praepositionen.

Latein. 10 St. Coet. A. im S. Dr. Müller I., im W. ord. L. Paul, Coet. B. Dr. Hiecke. 1 St. Extemporalien; 3 St. Einübung der Casuslehre nach Zumpts Grammatik; 4 St. Lectüre der alten Geschichte nach röm. Quellen als Lat. Lesebuch von Bonnell; 2 St. Phaedrus.

Griechisch. 6 St. Coet. A. im S. Dr. Förster, im W. Dr. Hoche, Coet. B. im S. Dr. Hohenberg, im W. (Prof. Dr. Richter) Dr. Bormann. Repetition des Pensums von Quarta.

Verba liquida und contracta, anomale Declination und Comparation, Exercitien nach der Beispielsammlung von Gottschick Heft I. 2 St.; Lectüre a. Gottschicks Griech. Lesebuch 3 St.; Extemporalien 1 St.

Französisch. 2 St. Coet. A. im S. Dr. Hohenberg, im W. Dr. Müller I., Coet. B. im S. Dr. Hohenberg, im W. Dr. Fuchs. Unregelm. Verba; Extemporalien; Lectüre aus Fränkel's Cours de leçons 1. Cursus.

Geschichte und Geographie. 3 St. Coet A. im S. Dr. Fuchs, im W. Dr. Müller I. Coet. B. im S. Dr. Hoche, im W. Dr. Fuchs. Im S. Griechische Geschichte; im W. Römische in Verbindung mit der Geographie.

Mathematik. 3 St. Coet. A. ord. Lehrer Kossak, Coet. B. im S. Schulamtscand. Wulfinghoff, im W. Dr. Worpitzky, 2 St. Arithmetik, die Rechnung mit Decimalbrüchen, mit relativen Zahlen und Buchstaben in ganzen Formeln; 1 St. Geometrie, die Planimetrie bis zu der Lehre von den Dreiecken incl. nach Kambly bis §. 60 und Anwendung derselben auf Lösung von Aufgaben.

Naturkunde. 2 St. Coet. A. u. B. im S. Schulamtscand. Wulfinghoff, im W. Bieck. Im S. Pflanzenterminologie und Beschreibung lebender Pflanzen mit Berücksichtigung des Linnéschen Systems. Auf Excursionen lernten die Schüler die Pflanzen der Umgegend kennen. Im W. nach dem Lehrbuche von Leunis Allgemeine Uebersicht über die Classen des Thierreichs. Beschreibung der wichtigsten Organe, verbunden mit dem Besuch des Königl. Zool. Museums.

Zeichnen. 1 St. Prof. C. F. Schmidt für die Schüler, welche sich weiter auszubilden wünschten. Es wurden Baumstudien, Landschaften und Köpfe gezeichnet.

VI. Quarta.

Ordinarius: Coet. A. im S. ord. Lehrer Paul, im W. Dr. Kühne. Coet. B. Dr. Marquard.

Religion. 2 St. Coet. A. im S. ord. Lehrer Paul, im W. Schulamtscand. Bieck. Coet. B. im S. Dr. Förster, im W. Schulamtscand. Bieck. Die evangelischen Perikopen des Kirchenjahres und der Lutherische Katechismus. Auswendiglernen von Kirchenliedern.

Deutsch. 2 St. Coet. A. Dr. Fuchs; Coet. B. im S. Dr. Förster, im W. Dr. Marquard. Aufsätze, Extemporalien. Lehre von dem zusammengesetzten Satze und der Wortbildung; Stücke aus Wackernagels Deutschem Lesebuche Theil I. gelesen, verbunden mit grammatischen Uebungen; Declamiren.

Latein. 10 St. Coet. A. im S. ord. Lehrer Paul, im W. Dr. Kühne; Coet. B. Dr. Marquard. Wiederholung der Formenlehre, Verba anomala, conjugatio periphrastica, das Wichtigste der Wortbildung mit Zugrundlegung des Abschnitts von den unregelmässigen Zeitwörtern in Bonnells Vocabular. 4 St. Extemporalien und Exercitien 2 St., Cornelius Nepos mit Anfertigung schriftlicher Uebersetzung. 4 St.

Griechisch. 6 St. Die jüngern Schüler vereinigt (Graeca quinta) im S. Dr. Förster, im W. Dr. Bormann. Lautlehre, die regelmässige Declination und Comparation, εἰμί, Pronomina, Zahlwörter, das Verbum purum non contractum. Uebersetzen aus Gottschicks Lesebuch, wöchentlich abwechselnd Exercitien und Extemporalien. — Die älteren Schüler beider Coetus vereinigt (Graeca quarta) im S. Schulamtscand. Wulfinghoff, im W. Dr. Fuchs. Wiederholung der Declination, Pronomina, Zahlwörter, unreg. Comparation, Verbum mutum, nach Krüger; Lectüre aus Gottschicks Lesebuch; Exercitien aus Gottschick's Beispielsammlung Heft I.; Extemporalien.

Französisch. 2 St. Im S. in beiden Coetus Dr. Hohenberg, im W. Coet. A. Dr. Kühne, Coet. B. Dr. Marquard. Uebersetzen aus Fränkels Lesebuch; das regelmässige Zeitwort fragend, verneinend und im Passiv; Extemporalien, Exercitien.

Geschichte und Geographie. 3 St. Im S. in Coet. A. Dr. Fuchs, Coet. B. Dr. Hoche; im W. Coet. A. u. B. Dr. Hoche. Geschichte des Brandenburgisch-Preussischen Staats nebst einer Uebersicht der Geographie von Nord-Deutschland.

Mathematik und Rechnen. 3 St. Coet. A. ord. L. Kossak, Coet. B. im S. Dr. Worpitzky, im W. ord. L. Kossak. 1 St. die bürgerlichen Rechnungen und Decimalbrüche; 2 St. planimetrische Vorübungen.

Zeichnen. 2 St. In beiden Coetus Prof. C. F. Schmidt. Uebungen im freien Handzeichnen nach grossen Vorhänge- und Vorlegeblättern. Häusliche Arbeiten nach Vorlegeblättern.

VII. Quinta.

Ordinarius: im S. Schulamtscand. Bieck, im W. Dr. Müller II.

Religion. 3 St. Schulamtscand. Bieck. Das Leben Jesu; im S. nach Matthäus, im W. nach Lucas. Auswendiglernen der 3 ersten Hauptstücke des Luther. Katechismus nebst Kirchenliedern und Bibelsprüchen.

Deutsch. 3 St. Im S. Schulamtscand. Bieck, im W. Dr. Müller II. 1 St. Orthographische und leichte stilistische Uebungen, Einübung des Hauptsächlichsten aus der Satzlehre und Rection des Zeitworts; 1 St. Lesen aus Augusts Lesebuch; 1 St. Vortrag auswendig gelernter Gedichte.

Latein. 9 St. Im S. Schulamtscand. Bieck, im W. Dr. Müller II. 5 St. Uebersetzen aus den Lateinischen Uebungsstücken von Bonnell. 4 St. Einübung der Formenlehre, hauptsächlich der unregelmässigen Verba nach Bonnells Vocabularium, der Comparation, der Pronomina und der Ausnahmen von den Hauptregeln über das Genus; Exercitien und mündliche Uebungen aus den Uebungsstücken von Beeskow; Extemporalien.

Französisch. 3 St. Im S. Dr. Hohenberg, im W. Dr. Müller II. 1 St. Lesen und Uebersetzen a. Fränkels Lesebuch für den ersten Unterricht; 1 St. Einübung der Anfangsgründe der Grammatik, namentlich der regelmässigen Declination und Conjugation im Activ; 1 St. Exercitien und Extemporalien.

Geographie. 3 St. Im S. ord. L. Kossak, im W. Schulamtscand. Bieck. Im S Orographie u. Hydrographie von Asien, Africa, America, Australien; im W. von Europa, nach Voigts Leitfaden 2. Cursus.

Rechnen. 4 St. ord. Lehrer Kossak. Bruchrechnung nach Fölsings Rechenbuch Th. I.

Zeichnen. 2 St. Prof. C. F. Schmidt. Uebungen im freien Handzeichnen nach grossen Vorhänge- und Vorlegeblättern. Häusliche Arbeiten nach Vorlegeblättern.

Schreiben. 3 St. Lehrer Zietzki.

VIII. Sexta.

Ordinarius: Ord. Lehrer Jacobsen.

Religion. 3 St. ord. Lehrer Jacobsen. Alttestamentliche Geschichte bis David nach ausgewählten Abschnitten aus den betreffenden Büchern des A. T., Auswendiglernen von Bibelversen und Kirchenliedern.

Deutsch. 3 St ord. Lehrer Jacobsen. Die Wortarten und der einfache Satz (Schwartz Leitfaden für den deutschen Unterricht, auch in den folgenden Classen). Uebungen im Lesen und Wiedererzählen nach dem Berlinischen Lesebuche 2 St.; Extemporalien zur Einübung der Rechtschreibung und Declamiren 1 St.

Latein. 9 St. ord. Lehrer Jacobsen. Die regelmässige Declination und Conjugation, die Comparation der Adjectiva und die Präpositionen nach Zumpts Grammatik. Uebersetzen aus den lateinischen Uebungsstücken von Bonnell, Vocabellernen nach Bonnells Vocabularium, I. Sachlicher Theil, 7 St. Extemporalien 1 St. — Der Director: Repetition des in der Woche Gelernten 1 St.

Geographie. 4 St. Dr. Fuchs. Horizontale Beschaffenheit der Erdoberfläche. Voigts Leitfaden 1. Cursus.

Rechnen. 4 St. ord. Lehrer Kossak. Die vier Species mit unbenannten und benannten Zahlen nach Fölsing Th. I.

Zeichnen. 2 St. Prof. C. F. Schmidt. Uebungen im freien Handzeichnen nach Vorlegeblättern. Häusliche Arbeiten nach des Lehrers Vorlegeblättern (Heft I.).

Schreiben. 3 St. Lehrer Zietzki.

Der Gesang-Unterricht am Gymnasium wurde vom Musik-Director Küster in 12 St. ertheilt. In der ersten Gesangclasse wurden geübt: vierstimmige Choräle und Lieder, besonders Mendelssohn's Frühlingslieder; Motetten und Chöre von Palestrina, Grell, Haydn, Mozart, Rungenhagen, Schnabel, B. Klein und Küster. 4 St. w.

Die Mittelclasse (bestehend aus Schülern von Unter-Tertia bis Prima, welche bereits mutirt haben, aber noch gesangsunkundig sind) wurde in den Vorkenntnissen nach Küster's „Methode" unterrichtet. Gesungen wurden ein-, zwei- und dreistimmige Uebungen und Lieder. 2 St. w.

Quarta wurde bis zur Molltonleiter und ihrer Vorzeichnung geführt. Gesungen wurden einstimmige Choräle (aus der dritten Abtheilung von Küster's Sammlung, Heft 1) und zweistimmige Lieder (aus Erk's Liederkranz, Heft 1). — Im S. Coet. A. u. B. combinirt, 2 St., im W. jeder Coetus besonders, 1 St.

Quinta kam bis zur Durtonleiter und deren Vorzeichnung. Geübt wurden einstimmige Choräle (aus der zweiten Abtheilung obiger Sammlung) und zweistimmige Lieder (aus Erk's Liederkranz, Heft 1). 2 St. w.

Sexta wurde in Tonbildung, Aussprache, Intervallen-, Noten- und Taktkenntnissen (nach Küster's „Methode") unterrichtet. Gesungen wurden einstimmige Choräle (aus der ersten Abtheilung obiger Sammlung) und einstimmige Lieder (aus Erk's Liederkranz, Heft 1). 2 St. w.

Der Turn-Unterricht wurde vom Turnlehrer Ballot mit Unterstützung von Hülfslehrern, im S. auf dem Turnplatz bei Moabit, im W. im Turnsaale, Dorotheenstrasse 60, unter Aufsicht eines ord. Lehrers, im S. Dr. Hiecke, im W. Dr. Müller II. geleitet.

Die Vertheilung der Stunden unter die Lehrer im Winter-Semester 1869—1870.

Lehrer.	Ordin. von	Prima A.	Prima B.	Ober-Secunda A.	Ober-Secunda B.	Unter-Secunda A.	Unter-Secunda B.	Ober-Tertia A.	Ober-Tertia B.	Unter-Tertia A.	Unter-Tertia B.	Quarta A.	Quarta B.	Quinta.	Sexta.	Summa.
Director Dr. **Bonnell.**		2 Religion 4 Latein	2 Religion												1 Latein	9 (12)
Professor **Salomon.**	Ob. II. A.	6 Griech.	6 Griech.	8 Latein												20
Prof. Dr. **Jungk I.**	I. A. u. B.	3 Deutsch 3 Gesch.	3 Deutsch 3 Gesch.			3 Gesch. 2 Deutsch	3 Gesch.									20
Oberlehrer **Beskow.**	Unt. II. A.			3 Gesch.		10 Latein 6 Griech.										19 (20)
Prof. Dr. **Richter.**	Ob. II. B.	4 Latein			2 Latein 6 Griech.						6 Griech. (Bormann)					18 (20)
Oberl. Dr. **Jungk II.**				4 Mathem. 1 Physik	4 Mathem. 1 Physik		4 Mathem. 1 Physik		3 Mathem.							18 (20)
Prof. Dr. **Wolff.**			8 Latein				10 Latein									18 (20)
Oberl. Dr. **Langkavel.**	Ob. III. B.							2 Naturgeschichte	2 Religion 10 Latein 2 Naturgesch. 2 Deutsch 2 Französ.							20
ord. Lehrer Dr. **Eyssenhardt.**	Ob. III. A.				8 Latein			2 Religion 10 Latein								20
ord. Lehrer Dr. **Worpitzky.**		4 Mathem. 2 Physik	4 Mathem. 2 Physik			4 Mathem. 1 Physik					3 Mathem.					20
ord. Lehrer Dr. **Hecke.**	Unt. III. B.						6 Griech.				2 Religion 10 Latein 2 Deutsch					20
ord. Lehrer **Paul.**	Unt. III. A.	2 Französ. 2 Hebräisch	2 Französ.		2 Religion					2 Religion 10 Latein						20
ord. Lehrer Dr. **Marquard.**	IV. B.								6 Griech.				2 Deutsch 10 Latein 2 Französ.			20
ord. Lehrer Dr. **Kühne.**	IV. A.			6 Griech. 2 Französ.		2 Französ.						10 Latein 2 Französ.				22 (20)
ord. Lehrer Dr. **Müller I.**					3 Gesch.			2 Deutsch 3 Gesch. u. Geogr. 2 Französ.	3 Gesch. u. Geogr.			2 Deutsch 2 Französ. 3 Gesch.				20
ord. Lehrer **Kossak.**								3 Mathem.		3 Mathem.		3 Mathem. u. Rechnen	3 Mathem. u. Rechnen	4 Rechnen	4 Rechnen	20
ord. Lehrer Dr. **Müller II.**	V.							6 Griech.						9 Latein 3 Deutsch 3 Französ.		21 (20)
ord. Lehrer Dr. **Hoche.**				2 Deutsch 2 Latein	2 Deutsch 2 Französ.		2 Französ.			6 Griech.		3 Gesch. u. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.			22 (20)
ord. Lehrer **Jacobsen.**	VI.			2 Religion 2 Hebräisch			2 Religion 2 Deutsch								3 Religion 8 Latein 3 Deutsch	22 (20)
Schulamtscandidat Dr. **Fuchs.**											3 Gesch. u. Geogr. 2 Französ.	2 Deutsch 6 Griech.			4 Geogr.	17
Schulamtscandidat Dr. **Bormann.**													6 Griech.			6
Schulamtscandidat **Bleck.**						2 Religion	2 Hebräisch			2 Naturgeschichte	2 Naturgeschichte	2 Religion	2 Religion	3 Religion 3 Geogr.		18
Zeichenlehrer **C. F. Schmidt.**		1 Zeichnen						2 Zeichnen				2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	11
Musikdirector **Küster.**		4 in der I. Gesangclasse						2 in der Mittelclasse		2 in der II. Gesangclasse				2 Gesang	2 Gesang	12
Schreiblehrer **Zietzki.**														3 Schreiben	3 Schreiben	6
																439

I. Themata zu den freien Deutschen und Lateinischen Aufsätzen,
welche von den Schülern der Prima im Laufe des Schuljahres geliefert worden sind.

A. Deutsche Aufsätze in beiden Coetus.

Im Sommer 1869.

1. Ist die Lehre des Sokrates, dass die einzige Bedingung der Sittlichkeit die Erkenntniss des Guten und Bösen sei, und dass diese die Ausübung der Tugend zur nothwendigen Folge habe, ohne Einschränkung wahr?
2. Ueber die tragische Idee in Schillers falschem Demetrius.
3. Ueber die Fahrten und Züge der Deutschen nach Italien.
4. Ueber die Vaterlandsliebe und ihre Motive.

Im Winter 1869/70.

1. Welchen Einfluss hat die Erinnerung einer ruhmvollen Vergangenheit auf die Macht und den sittlichen Charakter eines Volks?
2. Gedanken über die Nothwendigkeit des Bösen.
3. Betrachtungen über das goldene Zeitalter.
4. in A. Gewalt geht vor Recht.
   in B. Ueber Antik und Romantisch.

B. Lateinische Aufsätze.

a) Häusliche Arbeiten.

In Cötus A.

1. *Res gestae Ciceronis ejusque de literis Romanis merita, antequam libros de oratore scripserit, breviter exponantur.*
2. *Maecenatis oratio in senatu habita, ne Caesar Octavianus imperium deponeret, neve sedem ejus in Orientem transferret (adh. Hor. C. I, 14. III, 3).*
3. *Justos ac tenaces propositi viros fuisse Regulum et Hannibalem.*
4. *Quomodo Sulla et quomodo Caesar Augustus victoriis in bellis civilibus partis usi sint.*
5. *Pietatem erga parentes a Romanis semper plurimi aestimatam esse illustretur exemplis Aeneae, T. Manlii Torquati, Horatii Flacci (cf. Serm. I, 6, 87—98).*
6. *Horatii sententia Carm. IV, 4, 29—36. exemplis Philippi et Alexandri Macedonum confirmetur, Germanici et Caligulae refutetur.*
7. *Oratio ad pueros puellasque habita, qui jussi erant carmen seculare a. u. 737 dicere.*
8. *Disputetur de illo: Summum jus, summa injuria (Cic. Off. I, 10, 8) atque exemplis veteris historiae examinetur.*

In Cötus B.

1. *Atheniensis alicuius in Socratis accusatores oratio post eius mortem Athenis habita.*
2. *Qui non reverentur homines, fallunt deos. Curtius VII, 35. Chria.*
3. a. *De Roma aeterna.*
   b. *De orationibus apud historicos Latinos.*
   c. *De orationibus apud veteres historicos.*
4. *Qua ratione Romani Aeneam ad se rettulerint.*
5. *De viris ab Horatio carmine libri I duodecimo celebratis.*
6. *C. Julius Caesar aedilicius rogat, ut C. Mari tropaea restituantur. Oratio. (cf. Sueton d. Jul. XI.)*
7. Ὁ Σόλων ἐρωτηθεὶς πῶς ἥκιστα ἀδικοῖεν οἱ ἄνθρωποι· εἰ ὁμοίως, ἔφη, ἄχθοιντο τοῖς ἀδικουμένοις οἱ μὴ ἀδικούμενοι *(Diog. La. I, 59). Chria.*
8. *Graeci cum Romanis comparantor.*

b) Extemporal-Aufsätze in Cötus A.

1. *Quas virtutes Horatius in sex primis carminibus libri III. civibus suis commendet.*
2. *Dictum Ciceronis (Or. I, 30, 134): „Sine studio et ardore quodam amoris in vita nihil quisquam egregium unquam assequetur" explicetur et exemplis historiae confirmetur.*
3. *Disputetur de Ciceronis dicto (Off. I, 22, in.): „cum plerique arbitrentur, res bellicas majores esse quam urbanas, minuenda est haec opinio".*

II. Themata zu d. freien Deutschen u. Lateinischen Aufsätzen u. d. mathem. Aufgaben,
deren Bearbeitung bei dem Abiturienten-Examen im letzten Schuljahre gefordert worden ist.

A. Deutsche Aufsätze.

Michaelis 1869: Welchen Einfluss hat die Erinnerung an eine ruhmvolle Vergangenheit auf die sittliche Kraft eines Volks und auf seine Haltung anderen Völkern gegenüber?

Ostern 1870: „Undank ist der Welt Lohn". Ist dieses Sprüchwort in der Wirklichkeit begründet und wie lässt es sich aus der sinnlichen und geistigen Natur des Menschen erklären, dass Dankbarkeit schwerer zu üben und seltner ist als Wohlthätigkeit?

B. Lateinische Aufsätze.

Michaelis 1869: *Explicetur illud Horatii (C. I, 34, 12): „Valet ima summis mutare et insignem attenuat deus".*

Ostern 1870: *Nonnumquam etiam bello victos laude dignos esse, veteris historiae exemplis illustretur.*

C. Mathematische Aufgaben.

Michaelis 1869.

1. Zwischen den Schenkeln eines Winkels soll durch Construction ein Punkt von solcher Lage gefunden werden, dass seine Entfernung vom Scheitel und die Summe seiner Entfernungen von den Schenkeln gegebenen Strecken gleich sind.
2. Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten beträgt $a^2 + b^2 = 6 = 374{,}98$ Fuss, der eingeschlossene Winkel $\gamma = 44^0 20'$ und der Durchmesser des umschriebenen Kreises $d = 15$ Fuss. Wie gross sind die übrigen Winkel und die Seiten des Dreiecks?
3. Welcher ist unter der Schaar von graden Kegeln, die sich um eine gegebene Kugel beschreiben lassen, derjenige mit dem kleinsten Volumen?
4. $\sqrt{19}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln, die fünf ersten Näherungswerthe zu berechnen und den Fehler des letzten von diesen zu beurtheilen.

Ostern 1870.

1. Es soll das grösste Trapez gefunden werden, welches einem Kreise über einem Durchmesser eingeschrieben werden kann.
2. Von einem Dreieck sind die Winkel $\alpha = 23^0 16'$, $\beta = 112^0 14'$ und die Gegenseite des ersteren $a = 2^m, 345$ gegeben. Wie gross ist der Abstand der Mittelpunkte des um- und des eingeschriebenen Kreises von einander?
3. Zwei Kugelcalotten, deren Radien das Verhältniss $1 : 2$ und deren gekrümmte Oberflächen das Verhältniss $4 : 1$ haben, sind mit ihren gleichen Grundkreisen an einander gelegt. Wie drückt sich der Inhalt des so entstandenen Körpers durch den Radius der kleineren Kugel aus?
4. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + 12x - 9 = 0$ in Kettenbrüche zu entwickeln, deren acht erste Näherungswerthe zu berechnen und den Fehler der letzten von diesen zu beurtheilen.

B. Verordnungen

des Königl. Hohen Ministeriums und des Hochlöblichen Schulcollegiums der Provinz Brandenburg.

Vom 13. Januar 1869. Durch Ministerialverfügung werden die Aufsichtsbehörden der höheren Schulen veranlasst, auf den photographischen Relief-Atlas von Raatz im Interesse des geographischen Unterrichts aufmerksam zu machen.

Vom 22. Februar 1869. Die kirchliche Beaufsichtigung und Revision des evangelischen Religionsunterrichts an den höheren Lehranstalten gehört nach der Instruction vom 24. Mai 1829 zu den Obliegenheiten der K. General-Superintendenten.

Vom 31. März 1869. Innerhalb des Probejahrs eines Schulamts-Candidaten bedarf ein Wechsel der Anstalt in jedem Falle der Genehmigung der Aufsichtsbehörde derjenigen Anstalt, bei welcher der Candidat das Probejahr begonnen hat.

Vom 12. April 1869. Durch Ministerialverfügung wird das K. Provinzial-Schulcollegium veranlasst, die Beamten seines Ressorts darauf aufmerksam zu machen, wie es sich in ihrem eignen Interesse empfiehlt, ihr Mobiliar angemessen zu versichern.

Vom 30. April 1869. Darauf zu achten, dass durch Oeffnen der Fenster, namentlich während der Zwischenpausen, die Classenzimmer gehörig gelüftet werden.

Vom 11. Mai 1869. Um einzelnen Lehrern auch an höheren Lehranstalten die Möglichkeit nicht zu verschliessen, sich am 20. Mai an der allgemeinen Deutschen Lehrerversammlung hierselbst zu betheiligen, wird ihnen anheimgegeben, sich für etwa zu ertheilende Unterrichtsstunden durch Collegen nach gütlicher Uebereinkunft vertreten zu lassen.

Vom 7. Juni 1869. Die Einführung des Lehrbuchs der alten Geschichte von Dr. Carl Wolff wird genehmigt.

Vom 19. Juli 1869. Aufforderung zu gutachtlichen Aeusserungen über etwaige Abänderungen in dem bisher geltenden Abiturienten-Reglement.

Vom 31. August 1869. Nachricht über die mit dem 1. October 1869 eintretende Umwandlung der hiesigen Seminarschule.

Vom 9. September 1869. Auf den Antrag des hiesigen Magistrats wird genehmigt, dass an der feierlichen Inaugurirung eines Humboldt-Hains am 14. September von Seiten der städtischen

Behörden, Deputationen von Lehrern und Schülern der hiesigen höheren Lehranstalten theilnehmen. Den Directoren wird anheimgegeben, am Morgen des gedachten Tages vor Beginn des Unterrichts eine Schulfeier stattfinden zu lassen, in welcher auf die hervorragende Bedeutung Humboldts für die Wissenschaft hinzuweisen sei.

Vom 9. October 1869. Genehmigung der Einführung des 2. Theils der allgemeinen Geschichte von Dr. Carl Wolff.

Vom 4. November 1869. Die Directoren werden aufgefordert, die Nachweisung derjenigen wehrpflichtigen Lehrer, welche im Falle einer Mobilmachung als unabkömmlich zu bezeichnen sind, in vollständiger Form und rechtzeitig zu bewirken, im Uebrigen aber die Begründung der Unabkömmlichkeit auf die dringendsten Fälle zu beschränken, auch dabei zu beachten, dass für Lehrer, welche nur diätarisch beschäftigt werden, und für die eine Offiziercharge bekleidenden Lehrer Reclamationen überhaupt unzulässig sind.

Vom 4. November 1869. Ausfall des Unterrichts am 10. November, damit den evangelischen Lehrern und Schülern Gelegenheit gegeben werde, sich an dem Gottesdienste des von des Königs Majestät angeordneten ausserordentlichen Bettages zu betheiligen. Die Schüler sind zugleich auf die Wichtigkeit der in der Mehrzahl der Provinzen bevorstehenden Synodalversammlungen für die weitere Entwicklung der evangelischen Kirche hinzuweisen.

Vom 11. November 1869. Erneuerte Hinweisung auf die Verfügung vom 19. April 1855 über die Benutzung der Schullocale zu anderen als Anstaltszwecken.

Vom 10. December 1869. Möglichst bald auf Einführung der neuen Masse und Gewichte für den Norddeutschen Bund bei dem Rechenunterricht Bedacht zu nehmen, namentlich den Rechenunterricht zu dem Zwecke vom nächsten Semester ab zu ordnen.

Vom 7. Januar 1870. Anordnungen über die Postsendungen in Staatsdienst-Angelegenheiten.

Vom 19. Januar 1870. Auf die Anschaffung der in Halle erscheinenden Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften, zum ermässigten Preise von 4 Thlrn., wird in Betracht ihres anerkannten wissenschaftlichen Werthes und des Nutzens, welches sie insbesondre auch den Lehrern gewähren kann, aufmerksam gemacht.

Vom 29. Januar 1870. Anempfehlung der das Turnwesen in Preussen betreffenden Verordnungen und amtlichen Bekanntmachungen von Dr. Euler und Eckler.

Vom 7. März 1870. Anempfehlung der von dem Verein Deutscher Zeichenlehrer beabsichtigten Ausstellung für Zeichenunterricht.

Zur Erinnerung. Die Anmeldung zum einjährigen freiwilligen Militairdienst darf frühestens im Laufe desjenigen Monats erfolgen, in welchem das 17. Lebensjahr zurückgelegt wird, und muss spätestens bis zum 1. Februar desjenigen Kalenderjahres stattfinden, in dem das 20. Lebensjahr vollendet wird. Bis zum 1. April des letztgedachten Jahres muss der Nachweis der Berechtigung geführt sein.

C. Chronik des Gymnasiums.

1. Eröffnung des Schuljahres.

Das laufende Schuljahr, welches am 6. April mit der Censur sämmtlicher Classen geschlossen wird, wurde am 7. April v. J. mit einer den Schulstunden vorangehenden angemessenen Feierlichkeit eröffnet.

2. Veränderungen im Lehrerpersonale.

Zu Ostern v. J. wurde durch Berufung eines Hochedlen Magistrats der 7. Oberlehrer unsers Gymnasiums Herr Dr. Klemens an das Luisenstädtische Gymnasium als 2. Oberlehrer versetzt. Wir bedauern das Ausscheiden dieses eifrigen und kenntnissreichen Lehrers aus unserm Collegium, der mit seltener Treue und Hingebung weit über die nächsten Kreise seines Berufes hinaus die Fortschritte und das sittliche Wohl seiner Schüler zu befördern bemüht war. Diese widmen ihm das dankbarste Andenken und wir sind überzeugt, dass er auch in der erweiterten Wirksamkeit an der neuen Lehranstalt seine vielbewährte Anhänglichkeit an uns bewahren werde.

In die erledigte Oberlehrerstelle rückte Herr Dr. Langkavel, für die durch das Aufrücken der folgenden ordentlichen Lehrer vacant gewordene 9. Lehrerstelle wurde Herr Dr. Johannes Hermann Müller erwählt.

Er ist geboren im April 1844 zu Putbus auf der Insel Rügen, besuchte das Königl. Pädagogium zu Putbus und widmete sich nach Erlangung des Zeugnisses der Reife seit Ostern 1861 philosophischen Studien auf den Universitäten Halle und Greifswald. Auf Grund seiner Dissertation „de generibus verbi“ wurde er im August 1864 von der philosophischen Facultät zu Greifswald zum Doctor promovirt; im November 1864 absolvirte er die Prüfung pro facultate docendi. Michaelis 1864 trat er als Cand. prob. bei dem Königl. Pädagogium zu Putbus ein, Ostern 1866 wurde er als 4. ordentl. Lehrer am Progymnasium zu Charlottenburg angestellt. Nach mehrmonatlichem Besuche der Königl. Central-Turnanstalt zu Berlin bestand er im April 1869 die Turnlehrer-Prüfung und trat sein hiesiges Lehramt zu Michaelis 1869 an.

Die zu Ostern 1869 von den städtischen Behörden neu gegründeten 11. und 12. ordentliche Lehrerstellen erhielten:

1) Herr Dr. Albert Hermann Hoche, den 31. Januar 1828 zu Stettin geboren. Nach Vollendung seiner Universitätsstudien privatisirte er bis 1856, in welchem Jahre er zu Greifswald das Examen pro facultate docendi ablegte. Von 1856—1858 war er Mitglied des Königl. Seminars für gelehrte und höhere Bürgerschulen zu Stettin und leistete gleichzeitig am Gymnasium daselbst sein Probejahr ab. Im Jahr 1858 wurde er als 1. ordentlicher Lehrer an die höhere Bürgerschule zu Neustadt-Eberswalde berufen, welche Stelle er 1864 niederlegte, um in Berlin eine Anstellung an einer höheren Lehranstalt zu suchen, die er an unserm Gymnasium, nach 4½ jähriger Thätigkeit als Hülfslehrer, fand. Die philosophische Doctorwürde erwarb er rite zu Kiel im Jahre 1861.

2) Herr Ernst Albrecht August Jacobsen, geboren den 15. December 1842 zu Güstrow in Mecklenburg-Schwerin, besuchte bis Ostern 1862 das Gymnasium seiner Vaterstadt, studirte bis Michaelis 1866 in Berlin Theologie und Philologie und übernahm von Michaelis 1865 bis Neujahr 1869 hier in Berlin eine Hauslehrerstelle. Er absolvirte im Juli 1867 das erste theologische Examen, im Mai 1868 das pro facultate docendi, im December 1868 das zweite theologische. Gleich nach bestandenem Lehrerexamen trat er sein pädagogisches Probejahr an unserm Gymnasium an und im Januar 1869 wurde er Mitglied des Königl. Seminars für gelehrte Schulen.

Von den Hülfslehrern schieden zu Michaelis v. J. die Schulamtscandidaten 1) Herr Dr. Hohenberg, welcher seit Ostern 1865 eine vielseitige und erfolgreiche Thätigkeit ausgeübt hatte, und zur Königl. Realschule übergegangen ist; 2) Herr Wulfinghoff, seit Ostern 1865 als Mitglied des Königl. Seminars für gelehrte Schulen bei uns beschäftigt; seine Lehrthätigkeit hatte 1866 eine Unterbrechung durch seine Theilnahme an dem Kriege in Böhmen erlitten. Seine Lehrfächer waren Mathematik, Naturgeschichte und die Anfänge des Griechischen; er zeigte überall viel Lehrgeschick und anerkennungswerthe Verständlichkeit beim Unterricht. Er ist zu Neujahr in eine ordentliche Lehrerstelle am Luisenstädtischen Gymnasium erwählt worden; 3) Herr Dr. Förster, der in seiner kurzen Wirksamkeit als Mitglied des Königl. Seminars für gelehrte Schulen seit Ostern pr. unter uns sich die Zuneigung seiner Amtsgenossen und Schüler zu erwerben wusste, wurde an das Friedrichs-Gymnasium mit Aussicht auf eine ordentliche Lehrerstelle berufen.

Zur Ableistung seines pädagogischen Probejahrs ist zu Ostern v. J. Herr Dr. John Raimund Fuchs eingetreten; als Mitglied des Königl. Seminars für gelehrte Schulen zu Michaelis v. J. Herr Dr. Bormann.

3. Jetzige Lehrer des Gymnasiums.

1.				Dr. Bonnell, Director und Professor.
				I. Etatsmässige Oberlehrer.
2.	1.			Salomon, Prorector und Professor.
3.	2.			Dr. Jungk I., Conrector und Professor.
4.	3.			Beeskow.
5.	4.			Dr. Richter, Professor.
6.	5.			Dr. Jungk II.
7.	6.			Dr. Wolff, Professor.
8.	7.			Dr. Langkavel.
				II. Etatsmässige ordentliche Lehrer.
9.		1.		Dr. Eyssenhardt.
10.		2.		Dr. Worpitzky.
11.		3.		Dr. Hiecke.
12.		4.		Paul.
13.		5.		Dr. Marquard.
14.		6.		Dr. Kühne.
15.		7.		Dr. A. Müller I.
16.		8.		Kossak.
17.		9.		Dr. H. Müller II.
18.		10.		Dr. Gesell.
19.		11.		Dr. Hoche.
20.		12.		Jacobsen.
				III. Wissenschaftliche Hülfslehrer.
21.			1.	Dr. Bormann, Schulamtsc. u. Mitglied des K. Seminars für gelehrte Schulen.
22.			2.	Bieck, Schulamtscandidat.
23.			3.	Dr. Fuchs, desgl., Candidatus probandus.
				IV. Technische Hülfslehrer.
24.			1.	C. F. Schmidt, Professor, Zeichenlehrer.
25.			2.	Küster, Musikdirector, Gesanglehrer.
26.			3.	Zietzki, Schreiblehrer.

Ausserdem 27) Professor Dr. Rudorff, Geheimer Justizrath als Lehrer für die stiftungsmässige juristische Propädeutik. 28) Musikdirector und Professor Schneider, als Lehrer des mit dem Gymnasium verbundenen liturgischen Chors der Friedrichs-Werderschen Kirche.

D. Statistische Nachrichten.

Die Zahl der Schüler betrug im ersten Semester des abgelaufenen Schuljahrs 546, im zweiten 552. Davon befinden sich in Prima Coet. A 41, Coet. B 47, in Ober-Secunda Coet. A 29, Coet. B 28, in Unter-Secunda Coet. A 35, Coet. B 36, in Ober-Tertia Coet. A 38, Coet. B 35, in Unter-Tertia Coet. A. 34, Coet. B 35, in Quarta Coet. A 44, Coet. B. 42, in Quinta 58, in Sexta 50.

Von Ostern 1869 bis zum Anfange des letzten Quartals wurden 148 Schüler aufgenommen, 132 entlassen; unter diesen mit dem Zeugniss der Reife:

Zu Ostern 1869:

1) Johannes Theoder Gustav Bösche, 18 Jahr alt, aus Perleberg, evangl., 6½ Jahr v. IV. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Theologie und Philologie.

2) Wilhelm Salomon, 18 Jahr alt, aus Berlin, jüdisch, 8½ Jahr v. VI. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, widmet sich dem Kaufmannsstande.

3) Felix Liebermann, 17 Jahr alt, aus Berlin, jüdisch, 8 Jahr v. V. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, widmet sich dem Kaufmannsstande.

4) Oscar August Hugo Theophil Kümmritz, 20 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 6 Jahr von Ober-Tertia an auf der Anstalt, 2½ Jahr in Prima, widmet sich dem Baufach.

5) Günther Theobald Pfeil, 20 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 9½ von V. an auf der Anstalt, 2½ Jahr in Prima, widmet sich der Forstwissenschaft.

6) Carl August Johannes Wildenhayn, 19 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 5½ Jahr v. O. III. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Philologie und Geschichte.

7) Siegmund Ernst Magnus, 18 Jahr alt, aus Berlin, jüdisch, 9½ Jahr v. V. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Jura und Cameralia.

8) Oscar Blumenthal, 16 Jahr alt, aus Berlin, jüdisch, 5½ Jahr v. U. III. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Philologie.

9) Otto Engel, 21 Jahr alt, aus Collm, Kr. Rothenburg, evangl., 5½ Jahr v. O. III. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Jura.

10) Hermann Julius Martin Nathanael Gemberg, 20 Jahr alt, aus Reinfeld bei Schivelbein, evangl. 6½ Jahr v. U. III. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Mathematik.

11) Wilhelm Gustav Hermann Nowack, 19 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 8 Jahr v. V. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Theologie.

12) Johann Carl Franz Heinrich, 20 Jahr alt, aus Neudamm i. N., evangl., 9 Jahr v. VI. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, widmet sich der Landwirthschaft.

13) Paul Emil Robert Warnecke, 21 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 8 Jahr v. IV. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Philologie.

14) Herbert Nikolaus Heinrich Ferdinand Graf von Bismarck-Schönhausen, 19 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 3 Jahr v. O. II. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, widmet sich dem Soldatenstande.

15) Wilhelm Albrecht Otto Graf von Bismarck-Schönhausen, 16½ Jahr alt, aus Frankfurt a. M., evangl., 3 Jahr v. O. II. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, widmet sich dem Soldatenstande.

16) Richard Sckerl, 19 Jahr alt, aus Magdeburg, evangl., 7 Jahr v. IV. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, widmet sich dem Baufach.

17) Carl Ernst Nottebohm, 18 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 8 Jahr v. IV. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Jura.

18) Paul Otto Theodor von Dechend, 19¾ Jahr alt, aus Berlin, evangl., 7½ Jahr v. VI. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, davon 1 Jahr auf dem Gymnasium in Potsdam, studirt Jura und Cameralia.

19) Carl Ernst Heinrich von Sybel, 20½ Jahr alt, aus Düsseldorf, evang., ½ Jahr auf der Anstalt, vorher auf dem Gymnasium in Düsseldorf, 2 Jahr in Prima, widmet sich dem Soldatenstande.

20) Ernst Graf zu Stollberg-Wernigerode, 20 Jahr alt, aus Sannovitz Kr. Schönau, evangl., ½ Jahr auf der Anstalt, vorher auf dem hiesigen Friedrich-Wilhelms Gymnasium, 1866 Soldat im Freicorps seines Vaters behufs des Kampfes gegen Oesterreich, 1¾ Jahr in Prima, davon 1¼ Jahr auf dem Gymnasium zu Neisse, widmet sich dem Soldatenstande.

21) Paul Arthur Friese, 18½ Jahr alt, aus der Plaueninsel bei Potsdam, evangl., 10 Jahr v. VI. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Chemie.

Zu Michaelis 1869:

1) Hermann Carl Hans Botho Dietrich von Hülsen, 17 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 6 Jahr v. U. III. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, widmet sich dem Soldatenstande.

2) Ernst Paul Lehmann, 21 Jahr alt, aus Wrietzen a. O., evangl., 6½ Jahr v. IV. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima studirt Medicin.

3) Isidor Fränkel, 19 Jahr alt, aus Fordon bei Bromberg, jüdisch, 5 Jahr v. O. III. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Philologie.

4) Gottlob Max Müller, 21 Jahr alt, aus Alsleben a. S., evangl., 7 Jahr v. IV. an auf der Anstalt, 2½ Jahr in Prima, studirt Jura und Cameralia.

5) Friedrich Paul Carl Hermann Grosse, 22 Jahr alt, aus Charlottenburg, evangl., 7½ Jahr v. IV. an auf der Anstalt, 2½ Jahr in Prima, studirt Jura.

6) Carl Ferdinand Otto Hugo Börner, 17 Jahr alt, aus Calbe a. S., evangl., 5 Jahr v. O. III. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Philologie.

7) Joseph Neumann, 19 Jahr alt, aus Strasburg W. Preuss., jüdisch, 5 Jahr v. O. III an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Medicin.

8) Johannes Heinrich Emil Felix Gerloff, 18 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 10 Jahr v. VI. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Naturwissenschaften.

9) August Hermann Johannes Hans Wegscheider, 18 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 8 Jahr v. V. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Medicin.

10) Johannes Franz Kriesen, 20 Jahr alt, aus Berlin, evangl. 4½ Jahr v. U. II. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, widmet sich dem Postfach.

11) Samuel Julius Paul Hartz, 19 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 9½ Jahr v. V. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Jura und Cameralia.

12) Traugott Friedrich Carl Schultze, 19 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 5½ Jahr von O. III. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt die Forstwissenschaft.

13) Otto Albert Hermann Schmidt, 17 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 7½ Jahr von IV. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, widmet sich dem Kaufmannsstande.

14) Wilhelm Ferdinand Oscar Nonnig, 21 Jahr alt, aus Dom-Havelberg, evangl., 3½ Jahr v. U. II an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Jura.

15) Berhard Wilhelm Gustav Sonntag, 18½ Jahr alt, aus Berlin, evangl., 7½ Jahr v. IV. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima widmet sich dem Schiffsbaufach.

16) Ludwig Hermann Bernhardi, 23½ Jahr alt, aus Berlin, evang., 10 Jahr v. VI. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Philologie.

17) Carl Hermann Ernst Maschke, 20 Jahr alt, aus Berlin, evangl., 9½ Jahr v. V. an auf der Anstalt, 2 Jahr in Prima, studirt Medicin.

Durch den Tod verloren wir den 31. März 1869 den Sextaner Johann Gebhardt, einen freundlichen Knaben von 11 Jahren, am Scharlachfieber; den 26. December den Obersecundaner Richard Israel, einen viel versprechenden Schüler von 16 Jahren, an der Diphtheritis.

E. Lehrapparat des Gymnasiums und eingegangene Geschenke.

Für die Lehrer-Bibliothek wurden ausser der Fortsetzung grösserer Werke und den wissenschaftlichen Zeitschriften durch Kauf erworben: Hans Sachs ernstliche Trauerspiele, biblische Schauspiele etc. von Büsching. Hoffmannswaldau, der sterbende Sokrates. Das Kloster. Weltlich und geistlich 20 Bde. von Scheible. Das Schaltjahr von dems. Zur Geschichte der Berliner Gesangbücher von Bachmann. Bollert, Lieder-Concordanz. Die Gesetzgebung auf dem Gebiete des Unterrichtswesens in Preussen von 1817—1868. Römische Geschichte von Ihne. Brambach, die Neugestaltung der Lat. Orthographie. Kühner, Ausführliche Grammatik der Griechischen Sprache. Friedlein, die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen u. Römer. Itala u. Vulgata von Rönsch. Maehly, Richard Bentley, eine Biographie. O. Ribbeck, des Horatius Episteln und Buch von der Dichtkunst. O. Jahn, E. Gerhard, ein Lebensbild. Corpus Reformatorum ed. Bretschneider et Bindseil, nebst anderen kleineren Schriften zum Bedürfnisse des Unterrichts.

An Geschenken erhielt dieselbe: vom K. Hochlöbl. Schulcollegium: Novus codex diplom. Brandenburg. Namenregister II. chronol. Register III. Vom Hochedlen Magistrat: Die Berliner Volkszählung vom 3. December 1867. Berlin u. seine Entwicklung 2. u. 3. Jahrg. Nachweisung der in der Berliner Gemeindeverwaltung beschäftigten Personen. A. v. Humboldts Reisen in die Aequinoctial-Gegenden. dess. Ansichten der Natur. Von der Direction der Haupt-Bibelgesellschaft: Geschichte der Preuss. Haupt-Bibelgesellschaft in ihrem ersten Halbjahrhundert. Von den Herren Verfassern oder Verlegern: John Fuchs, die Schlacht bei Nördlingen. Förster, Abhandlungen über Geschichte u. Politik von Wilh. v. Humboldt u. Quaestio de Platonis Phaedro. (Habel) Lehrbuch der Geschichte von C. Wolff; ausserdem Exemplare zum Handgebrauche d. Geschichtslehrer. Das Weltall von Adami mit Atlas. (Teubner) Griech. Schulgrammatik von Koch. Sämmtliche Schulausgaben Griechischer u. Lateinischer Classiker mit Deutschen Anmerkungen. Die Litteratura gymnasii erhielt neuen Zuwachs durch die harmonischen Fragmente des Aristoxenus Griech. und Deutsch von P. Marquard. Historia miscella u. Apuleji metamorphoseon libri XI. rec. Eyssenhardt. — Die Literatura discipulorum gymnasii wurde vermehrt durch: Richard Böckh, der Deutschen Volkszahl u. Sprachgebiet in den europäischen Staaten. Dr. H. E. Bonnell, Auswahl deutscher Gedichte systematisch geordnet in Anschluss an ein Lehrbuch der Poetik. K. Ruge, Einige Beiträge zur Lehre von der Tuberculose. P. Ruge, Zwanzig Fälle geheilter Schädelverletzungen, diss. inaug.

Für die unter Aufsicht des Herrn Dr. Müller I. stehende Schülerbibliothek wurden angeschafft: Brandrupp, Wihelm der Erste, 1—4. — Brehm's Illustrirtes Thierleben. Lief. 33—50. — R. Töpfer, Genfer Novellen. — Lewis, Leben Göthe's, 2 Bde. — G. Freytag, Soll u. Haben, 2 Bde. — G. Freytag, Bilder aus dem grossen Kriege. — P. Heyse, Moralische Novellen. — F. Arndt, Eduard Hildebrandt, der Maler des Kosmos. — G. v. Seckendorff, Meine Erlebnisse. — Grässe, Sagenbuch des Preussischen Staates, Lief. 11—16. — Aus dem Leben des Generals von Brandt, Bd. 2. — O. Ule, Alexander von Humboldt. — K. v. Reinhard, Sagen und Märchen aus Potsdams Vorzeit. — K. Müller von Halle, das Buch der Pflanzenwelt. — H. Göll, das gelehrte Alterthum. — F. Adami, Fürsten und Volksbilder aus der vaterländ. Geschichte. — G. Hertzberg, Rom und König Pyrrhos. — Jul. Schiller, Vater und Sohn. — A. Kleinschmidt, Aus Deutschlands Vergangenheit. — Camoens, die Lusiade. — B. Auerbach, das Landhaus am Rhein, 3 Bde. — K. W. Osterwald, Euripides-Erzählungen.

Geschenkt wurden: a) vom hochlöbl. Magistrat: A. v. Humboldt, Kosmos, 4 Bde. b) vom Verlagsbuchh. Habel 2 Exempl. des Lehrbuchs der Geschichte von C. Wolff. c) von Schülern der Anstalt: Auerbach, Volkskalender für 1869. Henning, Vaterländische Geschichte für die deutsche Jugend. Dräger, die Wunder des Hochgebirges. Dicke, Robinson. Vogel, Deutsche Geschichten. Fern und Nah. Lebensbilder und Naturschilderungen. Nieritz, Wilhelm Tell. Belisar. Die Hussiten vor Naumburg. Reiser, Charakterbilder aus der preuss. Geschichte. Schmidt, Von Rheinsberg bis Königgrätz. Schmidt, Dichter, Handwerker und Kaufmann. Mayer, Kaiser Heinrich IV. Marryat, Valerie. Marryat, der Kaperschiffer. Andrée, Hamm u. Müller, Ost und West. Lebensbilder und Naturschilderungen.

Der Verlagsbuchhändler Herr Gerstmann schenkte 10 Exemplare von Herders Legenden und morgenländischen Sagen als Weihnachtsgeschenk für fleissige Schüler.

Die Landcharten-Sammlung erhielt ausser den Lieferungen zu Reimanns Charte Deutschland: Graeciae antiquae tabula in usum scholarum von H. Kiepert ed II. (dasselbe noch einmal als Geschenk des Verf.). Charte für Heimathskunde von Brüllow. Als Geschenke: Histor. geogr. Schulatlas der alten Welt von H. Kiepert, 16. Aufl. Imperii Romani tabula geogr. in usum scholarum von H. Kiepert, vom Verf.; Adami's Schulatlas, 4. Aufl. von H. Kiepert bei D. Reimer, vom Verleger; die Musikalien-Sammlung erhielt als Geschenk: von der Verlagsbuchhandl. Musica sacra für Höhere Schulen, Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht's Verlag.

Die Naturwissenschaftliche Sammlung wurde sowohl durch den Ersatz des Abgangs und Vervollständigung der vorhandenen Apparate in brauchbarem Stande erhalten als auch durch einzelne Apparate vermehrt, darunter Modell eines Barometer-Aeroid.

Naturhistorische Sammlung. Durch die Aufstellung eines grossen Glasschrankes im naturhistorischen Zimmer und acht Glaskasten für die entomologische Sammlung ward die auch in diesem Jahre bedeutend vermehrte Sammlung gegen Staub, Insecten und mancherlei andre schädliche Einflüsse bewahrt. Die Umstellung der mineralogischen und geognostischen Abtheilung übernahmen die Primaner Wegscheider und Gallenkamp, die Lepidoptera ordnete und bereicherte durch neue Exemplare der Primaner Bauke, die Coleoptera (ungefähr 500) waren durch Staub und Milbenfrass fast ganz unbrauchbar geworden; zu der neuen Sammlung, die jetzt in 5 Kasten untergebracht ist, schenkten zahlreiche Exemplare u. a. die Ober-Tertianer Krüger, Ewald, Meissner, Tubenthal, Elsner, Rosenfeld, Engel, der Secundaner Dressel und der Unterzeichnete; sie wurden geordnet von dem Secundaner Kafka und den Tertianern Meissner und Nicolai. Kleine Pappkasten für verschiedene Objecte lieferten Königsberger 200, Meissner 152, Krieger 220, Mühsam 190, Napp 175, Quehl 100, Engel, Jahn, Voss, Mittmann, Selke je 50, Behrend 80, Hermann 60, Wolff 120. Das dem Hochl. Magistrat übersandte Inventar der Sammlung schloss ab mit dem 26. Juni 1869.

I. die mineralogische Abtheilung. Sie wurde vermehrt um 98 Nummern durch Oscar u. Siegfr. Schönlank. Delbrück, Eberhard, Fr. Körte, Riedel, Stubenrauch, v. Dechend, Rich. Wolff, Georg Meyer, Meissner, Körner, Braune, Ewald, Schulz (3 Stücke aus Rom), Nicolai. Der Director übergab ein schönes Exemplar einer Blitzröhre, der Dr. med. Liebreich schöne Kristalle des von ihm entdeckten Chloral-hydrat, verschiedenes andre der Unterzeichnete.

II. botanische Abtheilung. a. Fruchtsammlung, vermehrt um 12 Nummern durch die Schüler Selke, Riedel, Ewald und den Unterzeichneten. b. Droguen, 11 neue Stücke vom Unterzeichneten. c. Holzsammlung, 18 neue Stücke, die meisten vom Tertianer Quehl. d. ein Album von Alpenpflanzen schenkte Georg Meyer.

III. zoologische Abtheilung.

1. Mammalia. a. Skelette und Schädel. Zugang 50 Nummern. 4 vom Unterzeichneten geschenkte americanische Affen präparirten die Schüler Meissner, Kafka, Selke. Verschiedene Schädel wurden geschenkt von Wetzel, Delbrück, Berg, Krieger, Selke, Altgelt, Riedel, Meyer, Wolff, E. Schulz, Engel, Gerhard, Voss, Henrici, Hermann, Ewald, Tubenthal, Emmerich, Nicolai u. a. b. in Spiritus. Zugang 13 Nummern, meist vom Unterzeichneten. c. ausgestopft wurde der vom Unterz. geschenkte Cercopithecus Sabaeus und gekauft Sciurus vulgaris.

2. Aves. a. Skelette und Schädel. Zugang 35 Nummern. Den vom Unterz. geschenkten schwarzen Schwan aus Neu-Holland skelettirte der Schüler Kafka, ebenso eine Columba livea. Verschiedene Schädel schenkten besonders die unter 1a aufgeführten Schüler. b. in Spiritus.

Zugang 13 Nummern, 10 tropische Vögel vom Unterz. 3 Exemplare von Gallus domesticus im Ei von E. Gothan. c. ausgestopft wurden die vom Ober-Tertianer Dann geschenkten: Turdus merula, charadrius Vanellus, Alauda arvensis, Plectrophanes nivalis, geschenkt: Ardea cinerea vom Verlagsbuchhändler H. Habel. d. die zoologische Sammlung wuchs um 80 Nummern, geschenkt von Georg Meyer, Bräutigam, Engel, Meissner, Kühn. e. zur Nester-Sammlung kamen 4 Nummern durch Wolff, A. Jahn, H. Müller.

3. Reptilia. a. in Spiritus. Zugang 38 Nummern, darunter schöne Exemplare von Tropidonotus natrix und Anguis fragilis geschenkt von Frl. P. Bonnell, den Schülern Gothan, Is. Baruch, und andere von A. Jahn, Emmerich, Scabell, Bräutigam, Selke, Meyer, Ewald.

4. Pisces. a. ausgestopfte Exemplare (6 Nummern) schenkten Eberhard, Wolff, Meyer, Meissner. b. in Spiritus. Zugang 18 Nummern, darunter einige sehr schöne Exemplare vom Tertianer Meissner, je 1 von Fr. Körte, Selke, Ewald.

5. Insecta. Ein neues Verzeichniss der Lepidoptera verfertigte der Primaner Bauke.

6. Crustacea. a. Balanus sulcatus vom Unterz. b. in Spiritus. Ein Einsiedler Krebs von Fr. Körte.

7. Vermes. 5 neue Nummern, 3 von E. Gothan.

8. conchyliologische Sammlung aus 885 Nummern bestehend, wurde wissenschaftlich geordnet und etiquettirt vom Unterz. Die Zahl der Nummern wuchs in diesem Schuljahre um 502 und besonders trugen zu diesem so reichlichen Zuwachs bei die Schüler O. und S. Schönlank, Meyer, Kafka, Selke, Hermann, Krieger, Wolff, Engel, Bräutigam, Behrend, v. Dechend, Elsner, Voss, Schütze, Tubenthal, Riedel, Mühsam, Delbrück. Exemplare in Spiritus übergab Unterz. 10.

9. Radiata. 4 neue Exemplare von Wolff, Meissner, Voss, Engelhard.

10. Polypi. 10 Exemplare von Hermann, Bräutigam, Schönlank, Wolff, Königsberger, Meyer, Behrend, v. Dechend.

Langkavel.

Von dem Vorstande des hiesigen Vereins der Kunstfreunde sind uns durch den Magistrat 10 Vereinsblätter zur Aufstellung in der Zeichenclasse überwiesen.

Der Verlagsbuchhändler Herr Habel schenkte 12 Tafeln zu Kuhn's Meter-Masse auf Pappe gezogen und lackirt, welche in den einzelnen Classen aufgehängt sind.

Geldgeschenke zur Unterstützung hülfsbedürftiger Schüler wurden gegeben 1) von einem Vater, nach Abgang seines letzten Sohnes, 25 Thlr. zur gleichen Vertheilung an christliche und jüdische Schüler zu einer dauernden Stiftung; 2) von dem Comité des Festes der alten Werderaner 8 Thlr.; für jüdische Schüler von dem Vorstande der jüdischen Gemeinde 30 Thlr.

Für alle auch in diesem Jahre uns gewährten Geschenke sage ich unsern hochgeehrten Gönnern und Freunden den verbindlichsten Dank und wünsche, dass das sittliche Verhalten und die wissenschaftlichen Leistungen unserer Schüler dem unserer Anstalt vielfach geschenkten Vertrauen und Wohlwollen immer mehr entsprechen mögen.

F. Ereignisse.

Am 14. September v. J. wurde zur Feier des hundertsten Geburtstages A. von Humboldt's im Schulsaale vor den versammelten Schülern der beiden obersten Classen ein Actus mit Gesang, einer Rede des Oberlehrers Herrn Dr. Jungk II. und Vertheilung der vom Magistrat zu diesem Zweck übersandten Schriften Humboldt's, veranstaltet. Den Festzug zur Einweihung des zu stiftenden Humboldthaines begleiteten einige Lehrer und ein Theil der Primaner.

Die jährliche Erinnerung an das dritte Jubelfest der Kirchenreformation in der Mark Brandenburg wurde in gewohnter Weise von den Lehrern und Schülern, soweit es der Raum zuliess, am 1. Nov. v. J. gefeiert. Die Festrede hielt der Primus omnium Paul Völlgold „über den Einfluss, welchen die grossen Kirchenversammlungen zu Costnitz, Basel und Trident auf die Kirchenreformation gehabt haben". Die vom Hochedlen Magistrat überschickten zwei Denkmünzen und eine Anzahl geeigneter Schriften vertheilte der Director an dazu auserlesene Schüler der verschiedenen Classen. — An diese Feier schloss sich die Verkündigung der Witte'schen Preise; die Prämie erhielt der Primaner Ernst Krüger, das Accessit Bernhard Dove.

Am 5. und 6. Februar d. J. fand im engeren Kreise der Schule und deren Gönner die alljährliche musikalisch-dramatische Abendunterhaltung statt.

Am 22. März d. J. fand die Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs mit Gesang Declamation und Rede statt. Die Festrede hielt der ord. Lehrer Herr Dr. Worpitzkyi

Der fortdauernd ungünstige Gesundheitszustand des ord. Lehrers Herrn Dr. Gesell erlaubte ihm leider während des ganzen vergangenen Schuljahres nicht seine amtliche Thätigkeit wieder aufzunehmen. Herr Prof. Dr. Richter musste gleichfalls wegen seines Augenübels während des ganzen Sommerhalbjahrs beurlaubt werden.

Nachweis der im vergangenen Schuljahre freigegebenen Tage und diesjährigen Ferienzeiten:
1) 1869: 20. und 21. September mündliche Prüfung der Abiturienten. — 1. November Reforma-

tionsfest. — 10. November Bettag. — 1870: 22. März Feier des Geburtstages Sr. Maj. des Königs. — 23. u. 24. März mündliche Prüfung der Abiturienten.

2) Vom 7—20. April Osterferien. — Vom 4—8. Juni Pfingstferien. — Vom 10. Juli bis 7. August Sommerferien. — Vom 29. September bis 12. October Michaelisferien. — Vom 22. December bis 4. Januar 1871 Weihnachtsferien.

Ordnung der öffentlichen Prüfung, Dienstag den 5. April.

Vormittags von 9 Uhr an.

I. Gesangclasse unter Leitung des Musikdirectors Wagner (stellvertretend für Musikdirector Küster):
1) Choral: Nie bist Du Höchster von uns fern.
2) Machet die Thore weit, Psalm von Küster.

Abschiedsrede des Abiturienten Ernst Krüger in lateinischer Sprache: *Utcunque defecere mores, indecorant bene nata culpae* (Hor. Carm. IV, 4, 35. 36).

Vertheilung von Prämien an Schüler der oberen und mittleren Classen.

Rede des Directors zur Entlassung der Abiturienten.

Schlussgesang der I. Gesangclasse: Der Herr ist mein Hirt, Psalm von B. Klein.

Nachmittags 2½ Uhr.

Sexta: Latein ord. Lehrer Jacobsen. — Geographie Schulamtscandidat Dr. Fuchs.
Quinta: Deutsch ord. Lehrer Dr. Müller II. — Geographie Schulamtscandidat Bieck.
Quarta B.: Latein ord. Lehrer Dr. Marquard. — Geschichte ord. Lehrer Dr. Hoche.
Quarta A.: Französisch ord. Lehrer Dr. Kühne. — Mathematik ord. Lehrer Kossak.
Schlussgesang der Quintaner unter Leitung des Dr. Müller II. (stellvertretend für Musikdirector Küster).

Zu dieser Feier habe ich die Ehre, die Hohen und Hochgeehrten Königlichen und Städtischen Schulbehörden, die Eltern unserer Zöglinge, so wie alle Gönner und Freunde der Anstalt gehorsamst und ergebenst einzuladen.

Der Anfang des Sommercursus erfolgt Donnerstag, den 21. April. Die Versetzungen und Censuren werden den Schülern am 6. April mitgetheilt.

Zur Aufnahme neuer Schüler, soweit es zulässig ist, bin ich am 7., 8., 9. und 20. April von 10—12 Uhr Vormittags in meiner Wohnung (Kurstrasse 53, 2 Tr.) bereit.

Auswärtige Schüler müssen zur besonderen Fürsorge einem geeigneten Aufseher übergeben werden, welcher über ihren Privatfleiss und ihr sittliches Betragen ausser der Schule eine ernste und gewissenhafte Aufsicht zu führen hat. Die Wahl desselben bedarf der Genehmigung des Directors; ein Wechsel der Wohnung und des Aufsehers darf nicht ohne vorherige Anzeige beim Director und ausdrückliche Einwilligung desselben erfolgen. (Ministerial-Verfügung v. 31. Juli 1824 und 9. März 1843. Instruction für die Directoren 1868.)

Dr. Bonnell, Director.