Seiten und Neigungswinkeln durch folgende geometrische Construction zu vermitteln. Der Neigungswinkel A (Fig. 1.) werde bestimmter durch zwei, an seinen Scheitelpunkt gelegte Tangenten dargestellt, und aus dem Mittelpunkt der Kugel durch die Punkte B und C nach jeder dieser Tangenten eine Linie gezogen. Dann entstehen zwei neue Durchschnittspunkte, β und γ, und durch deren Verbindung mit A das geradlinigte Dreieck $A\beta\gamma$, dessen Seite $\beta\gamma$ zugleich dem Dreieck $M\beta\gamma$ angehört. Durch Gleichsetzung der für sie, einerseits in Function von $A\beta$, $A\gamma$, und dem Neigungswinkel A, andernseits in Function von $M\beta$, $M\gamma$ und dem eingeschlossenen Seitenwinkel a gewonnenen Werthe gelangen wir nun zu einer Gleichung, welche die Relation unter drei Seiten und einem Winkel des sphärischen Dreiecks zu erkennen giebt. Denn es ist, wenn MA als Einheit betrachtet wird,

$$A\beta = \text{tang. c} \qquad A\gamma = \text{tang. b}$$
$$M\beta = \text{sec. c} \qquad M\gamma = \text{sec. b}$$

Folglich: 1) $\beta\gamma = \sqrt{(\text{tg. b}^2 + \text{tg. c}^2 - 2\,\text{tg. b. tg. c. cos. A})}$

2) $\beta\gamma = \sqrt{(\text{sec. b}^2 + \text{sec. c}^2 - 2\,\text{sec. b. sec. c. cos. a})}$

Hieraus ergiebt sich, mit der Vereinfachung $\text{sec.}^2 - \text{tg.}^2 = 1$:

$$1 + \text{tg. b. tg. c. cos. A} = \text{sec. b. sec. c. cos. a.}$$

und wenn tang. und sec. durch ihre Werthe $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$ und $\frac{1}{\text{cos.}}$ ersetzt werden:

$$\text{(I) cos. a} = \text{cos. b. cos. c} + \text{sin. b. sin. c. cos. A}$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\text{(A) cos. b} = \text{cos. a. cos. c} + \text{sin. a. sin. c. cos. B.}$$

Diese beiden Gleichungen, unter der Form

$$\text{cos. a} - \text{cos. b. cos. c} = \text{sin. b. sin. c. cos. A}$$
$$\text{cos. b} - \text{cos. a. cos. c} = \text{sin. a. sin. c. cos. B}$$

zum Quadrat erhoben und von einander abgezogen, ergeben als Zusammenhang unter zwei Seiten und den beiden, ihnen gegenüberliegenden Winkeln des sphärischen Dreiecks:

$$\text{cos. a}^2 - \text{cos. b}^2 + \text{cos. c}^2\,(\text{cos. b}^2 - \text{cos. a}^2)$$
$$= \text{sin. c}^2\,(\text{sin. b}^2\ \text{cos. A}^2 - \text{sin. a}^2.\ \text{cos. B}^2)$$

Zusammengezogen, wird diese Gleichung

$$(\text{cos. a}^2 - \text{cos. b}^2)\ \text{sin. c}^2 = \text{sin. c}^2\ (\text{sin. b}^2\ \text{cos. A}^2 - \text{sin. a}^2\ \text{cos. B}^2)$$

und vereinfacht durch die Substitution $1 - \text{sin.}^2 = \text{cos.}^2$:

$$\text{(II) sin. b. sin. A} = \text{sin. a. sin. B.}$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn32810003X/14 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG