$$(1)\ \cos.\alpha - \cos.\beta = 2\sin.\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\ \sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$(2)\ \cos.\alpha + \cos.\beta = 2\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$(3)\ \cos.\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\cos.\alpha}{2}\right)}$$

$$(4)\ \sin.\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos.\alpha}{2}\right)}$$

Es ist nämlich, etwas umgestaltet:

$$(\mathrm{I})\ \cos.A = \frac{\cos.a - \cos.b.\ \cos.c}{\sin.b.\ \sin.c}$$

mithin $1+\cos.A = \dfrac{\sin.b.\ \sin.c - \cos.b.\ \cos.c + \cos.a}{\sin.b.\ \sin.c}$

und zusammengezogen $= \dfrac{\cos.a - \cos.(b+c)}{\sin.b.\ \sin.c}$

Die Formeln (1) und (3), auf diesen Ausdruck bezogen, geben ihm folgende Gestalt:

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b+c-a)\ \sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\sin.b.\ \sin.c}\right\}}$$

Um hingegen den Werth von A in Function des Sinus zu erhalten, setzen wir die gegebene Gleichung unter die Form

$$1-\cos.A = \frac{\sin.b.\ \sin.c + \cos.b.\ \cos.c - \cos.a}{\sin.b.\ \sin.c}$$

$$= \frac{\cos.(b-c) - \cos.a}{\sin.b.\ \sin.c}$$

und erhalten mit Zuziehung der Formeln (1) und (4)

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a-b+c)\ \sin.\tfrac{1}{2}(b-c+a)}{\sin.b.\ \sin.c}\right\}}$$

Auf dieselbe Weise verfährt man mit der letzten Hauptgleichung

$$(\mathrm{IV})\ \cos.c = \frac{\cos.C + \cos.B.\ \cos.A}{\sin.B.\ \sin.A}$$

$$1+\cos.c = \frac{\sin.A.\ \sin.B + \cos.A.\ \cos.B + \cos.c}{\sin.A.\ \sin.B}$$

$$= \frac{\cos.(A-B) + \cos.C}{\sin.A.\ \sin.B}$$

Nach den Formeln (1) und (3)

$$\cos.\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\left\{\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A-B+C)\ \cos.\tfrac{1}{2}(A-B-C)}{\sin.A.\ \sin.B}\right\}}$$