Man hat statt dieser einfachen Reductionsart eine zweite, dem Anschein nach strengere, in Vorschlag gebracht, die aber — wenn man die Kleinheit der Dreiecke in Betracht zieht, — ungeachtet

nen von cos. und sin. entwickeln, wobei indessen wegen der Kleinheit von $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ die späteren Glieder der Entwickelung vernachlässigt werden dürfen. Demnach ist:

$$\cos. \frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2.3.4.r^4}$$

$$\cos. \frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2.3.4.r^4}$$

$$\cos. \frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2.3.4.r^4}$$

$$\sin. \frac{b}{r} = \frac{b}{c} - \frac{b^3}{2.3.r^3}, \quad \sin. \frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2.3.r^3},$$

und nach der Einführung dieser Werthe:

$$\cos. A = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)}$$

Durch Multiplication mit $\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2}\right)$ im Zähler und Nenner erhält man:

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24bcr^2}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{bc}{6r^2}\left\{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2\right\}$$

d. i. wenn wir auf den obigen Werth von $\cos. A'$ zurückblicken

$$\cos. A = \cos. A' - \frac{bc}{6r^2} (\sin. A')^2.$$

Sey nun $A = A' + x$, so zieht sich wegen der Kleinheit der Differenz x der Ausdruck $\cos. A = \cos. A'. \cos. x - \sin. A'. \sin. x$ auf $\cos. A' - x. \sin. A'$ zusammen. Die Vergleichung beider Werthe von $\cos. A$ giebt $x = \frac{bc}{6r^2} \sin. A'$, mithin

$$A = A' + x = A' + \frac{bc}{6r^2} \sin. A'.$$

Da der Flächeninhalt eines Dreiecks (F) durch $\frac{1}{2} bc. \sin. A'$ ausgesprochen wird, so kann man ebenfalls setzen:

$$A = A' + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{F}{r^2} \text{ oder } A' = A - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{F}{r^2}.$$

Eben