DE

COMETARVM CAVDIS

DISQVISITIO MATHEMATICA.

PARS PRIMA,

QVA

CANDIDATOS MAGISTERII

AD

SOLEMNIA EXAMINA

INVITAT

HENRICVS GVILIELMVS BRANDES

ORD. PHILOS. H. T. PROCANCELLARIVS.

Cum duabus tabulis lithographicis.

LIPSIAE

APVD E. B. SCHWICKERTVM.

MDCCCXXX.

DE COMETARVM CAVDIS.

§. I.

Quamvis opus arduum esse videatur, naturam corporum coelestium investigare et causas phaenomenorum, quibus similia in terra omnino non inveniuntur, cognoscere, haec tamen, quam nunc suscepturi sumus, de natura cometarum disquisitio non ita videtur comparata esse, ut hominum vires prorsus excedat. Duplex enim est phaenomena coelestia explicandi ratio, altera quae a similitudine phaenomenorum terrestrium argumenta petit in defendenda theoria, quae naturam corporum coelestium explicare conatur, altera quae ad mechanices leges, easque aeternas et invariabiles, respicit, et earum ope vires definire docet ad producenda illa phaenomena accommodatas. Ea vero, quam secundo loco nominavimus, naturae disquisitio, quamquam multum adhuc desiderandum relinquit, quamquam — si cometarum caudas respicimus — minime nos docet, num caudae illae in phaenomenis electricis ponendae, an pro vaporibus e cometa prorumpentibus habendae sint, et eiusmodi alia, multum tamen valet ad naturam phaenomenorum diiudicandam, et, quia certis nititur principiis, vix unquam in errores nos seducit.

Certissimum videtur, caudam cometae compositam esse e particulis motu quodam praeditis, quarum cursum si exacte observare possemus, via nobis pateret ad inveniendam vim, qua propulsae talem viam percurrere possint. Et quamvis via cuiusque particulae a nobis non perspiciatur, methodo tamen indirecta, ad eam cognoscendam pervenire licet, quum figura caudae ex observatione detur et inde concludi possit, num orbitae particularum secundum hypothesin quandam calculatae ita sint comparatae, ut particulae talem seriem, qualem cauda nobis monstrat, certo quodam temporis momento praebere possint.

Cauda cometae semper a sole aversa observatur, vis ergo adesse debet particulas caudae a sole repellens. Quae vis num soli propria sit et eodem modo ac vis attractiva in corpora agat, an potius ad levitatem corpusculorum in aethere ascendentium referenda sit, difficile est diiudicatu; attamen clare elucet, alio modo determinandam esse viam corporum, quae leviora in aethere densiore ascendunt, alio modo viam corporum vi solis in spatio vacuo propulsorum; quare, si ex alterutra hypothesi orbita corpusculorum et locus, quem corpusculum aliquod certo temporis momento obtinet, determinatur, observationes in comparationem vocandae sunt, ut de consensu calculi et observationis iudicium ferre liceat.

Hypothesis prima melius ad calculum perficiendum accommodata est; quare, quae ex ea sequantur, nunc diligentius definiamus. Soli ergo vim repellentem propriam esse ponimus, quae, quamvis in alia corpora non agat, particulas tamen caudae cometae a sole recedere cogit. Corpuscula illa in cauda conspicua sine dubio antea cum cometa coniuncta eademque celeritate atque ipse cometa praedita fuerunt; vis solis in quolibet temporis momento unum et item alterum horum corpusculorum quasi avellit a corpore cometae, atque corpuscula illa ad motum in orbita quadam accuratius determinanda incitat. Quae horum corpusculorum orbita tum e celeritate initiali tum e vi acceleratrice solis determinatur; celeritas illa initialis eadem est, qua cometam in parabola procedentem observamus, vis autem repellens vix alio modo, quam quae in ratione duplicata inversa distantiarum a sole sit, fingi potest.

§. II.

Vt vim repellentem in calculum inducamus, revocanda est ad unitatem quandam virium. Ponamus vim attrahentem solis esse $= 1$, ubi distantia $= f$, tunc pro quacunque distantia corporis a sole $= x$; efficitur vim attrahentem esse $= \frac{f^2}{x^2}$; si ergo pro eadem distantia vis repellens est $= \frac{\varphi^2}{x^2}$, haec vis repellens ad illam attrahentem sese habet ut φ^2 ad f^2. In fig. 1. sit S sol quiescens in foco orbitae parabolicae cometae, ABE parabola, in qua cometa iam ad punctum B pervenit. In eodem puncto corpusculum fingamus cometam derelinquens, motum in orbita BF incipiens, cuius via ut definiatur secundum notissima mechanices principia calculum instituamus.

Sit locus F corpusculi, quem elapso tempore $= t$ obtinet, angulo $ASF = \psi$ et radio vectore $SF = \varrho$ determinatus, notum est

$$\varrho^2 \, d\psi = A\,dt$$

esse debere, quia area sectoris a radio vectore descripti tempori proportionalis est. Vis repellens in puncto F est $= \frac{\varphi^2}{\varrho^2}$, et ex mechanices principiis efficitur,

$$d^2 \varrho - \varrho \, d\psi^2 = 2\,g \frac{\varphi^2}{\varrho^2} \, dt^2,$$

si g designat spatium, tempore $= 1$ descriptum a corpore quodam, vi acceleratrice $= 1$ sollicitato. Quae aequationes coniunctae praebent:

$$d^2 \varrho - \frac{A^2\, dt^2}{\varrho^3} = 2\,g \frac{\varphi^2}{\varrho^2} dt^2,$$

$$\text{sive } 2\, d\varrho .\; d^2 \varrho - \frac{2A^2\, d\varrho\, dt^2}{\varrho^3} = 4\, g\, d\varrho \frac{\varphi^2}{\varrho^2}\, dt^2,$$

et integrando, addita constante $B\,dt^2$,

$$d\varrho^2 + \frac{A^2\, dt^2}{\varrho^2} = B\,dt^2 - 4\,g \frac{\varphi^2}{\varrho}\, dt^2.$$

Conficitur ergo

$$dt = \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{\{B\varrho^2 - 4g\varrho\varphi^2 - A^2\}}},$$

$$\text{id est } d\psi = \frac{A\, d\varrho}{\varrho\sqrt{\{B\varrho^2 - 4g\varrho\varphi^2 - A^2\}}},$$

et integratione peracta, additaque constante indeterminata $= C$,

$$\psi - C = \text{Arc. tang.} \frac{-A^2 - 2g\varphi^2\varrho}{A\sqrt{\{B\varrho^2 - 4g\varphi^2\varrho - A^2\}}};$$

$$\text{seu tang.}\, (\psi - C) = \frac{-A^2 - 2g\varphi^2\varrho}{A\sqrt{\{B\varrho^2 - 4g\varphi^2\varrho - A^2\}}};$$

$$\text{Sin.}\, (C - \psi) = \frac{A^2 + 2g\varphi^2\varrho}{\varrho\sqrt{\{A^2B + 4g^2\varphi^4\}}}.$$

In hac aequatione omnis orbitae determinatio continetur, simul ac constantes A, B, C recte determinatae erunt. Orbitam hyperbolicam esse iam inter omnes constat; corpusculum propter vim solis repulsivam a sole recedens in ea hyperbola incedit, quae versus solem convexa est; cuius quidem situm facili negotio determinare licet.

Quum enim pro $C - \psi = 0$ idem valor quantitatis ϱ prodeat, ac pro $C - \psi = 180°$, hunc valorem

$$\varrho = -\frac{A^2}{2 g \varphi^2}$$

aequalem esse elucet semiparametro hyperbolae, cuius valor negative expressus prodit, quia pertinet ad secundam hyperbolae partem versus solem concavam, pro qua valores ipsius ϱ omnes negativi prodeunt.

Quantitates constantes A, B, C, facile determinantur. Quod enim ad primam attinet, $\frac{A}{2}$ aequalis est sectori, a corpusculo F tempore $= 1$ descripto, qui sector quum aequalis sit pro cometa in parabola progrediente et pro corpusculo nostro in hyperbola incedente e motu cometae determinatur. Sit p parameter parabolae, $\frac{1}{4}$ p distantia perihelica cometae, erit celeritas cometae in perihelio versantis $= 4 f \sqrt{\frac{g}{p}}$; sector ergo tempore $= 1$ descriptus $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} p \cdot 4 f \sqrt{\frac{g}{p}} = \frac{1}{2} f \sqrt{g p}$, ergo $A = f \sqrt{g p}$ et parameter hyperbolae $= P = \frac{f^2 p}{\varphi^2}$. Constans B definiri potest e dato valore quantitatis $\frac{\varrho d \psi}{d \varrho}$, quae tangentem trigonometricam exhibet anguli sub arcu curvae et radio vectore contenti; datur autem angulus ille ad punctum contactus hyperbolae et parabolae pertinens, quem si ponimus $= \mu$, valori $\varrho = r$ = radio vectori perabolae respondentem,

$$\text{erit tang. } \mu = \frac{A}{\sqrt{\{B r^2 - 4 g \varphi^2 r - A^2\}}}$$

$$\text{Sin. } \mu = \frac{A}{\sqrt{\{B r^2 - 4 g \varphi^2 r\}}}$$

$$= \frac{f. \sqrt{p}}{\sqrt{\left\{\frac{B r^2}{g} - 4 \varphi^2 r\right\}}}$$

In parabola autem $\mu = 90° - \frac{1}{2}$ ASB, (quia tangens parabolae BT triangulum BST aequicrurum efficit) Sin. μ = Cos. $\frac{1}{2}$ ASB = Cos. $\frac{1}{2} \omega$, ponendo ω = anomaliae cometae in eo orbitae puncto, ubi corpusculum hyperbolam decurrens e cometa egressum est. Prodit ergo

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} \omega = \frac{f \sqrt{g p}}{r \sqrt{\left\{B - \frac{4 g \varphi^2}{r}\right\}}},$$

$$\text{id est } B = \frac{4 g \varphi^2}{r} + \frac{p f^2 g}{r^2 (\text{Cos.} \frac{1}{2} \omega)^2},$$

unde quantitas B determinata exsistit, si datur punctum, ubi corpusculum a cometa avulsum motum incepit. Aequatio parabolam definiens $(\text{Cos.} \frac{1}{2} \omega)^2 = \frac{p}{4 r}$ praebet $B = \frac{4 g}{r} (f^2 + \varphi^2)$, ergo

$$\text{Sin.} (C - \psi) = \frac{g (f^2 p + 2 \varphi^2 \varrho)}{\varrho \sqrt{\left\{ \frac{4 f^2 g^2 p}{r} (f^2 + \varphi^2) + 4 g^2 \varphi^4 \right\}}}$$

$$\text{seu } \text{Sin.} (C - \psi) = \frac{\frac{1}{2} p + \frac{\varphi^2}{f^2} \varrho}{\varrho \sqrt{\left\{ \frac{p}{r} \left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right) + \frac{\varphi^4}{f^4} \right\}}}.$$

Quae aequatio quum pro puncto contactus itidem vera sit, ubi $\psi = \omega$, $\varrho = r$, nobis praebet

$$\text{Sin.} (C - \omega) = \frac{\frac{1}{2} p + \frac{\varphi^2}{f^2} r}{\sqrt{\left\{ p r \left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right) + r^2 \frac{\varphi^4}{f^4} \right\}}},$$

ergo, quia $\text{Cos.}\, C = \text{Cos.} (C - \omega) \text{Cos.}\, \omega - \text{Sin.} (C - \omega) \text{Sin.}\, \omega$,

$$\text{Cos.}\, C = \frac{\text{Cos.}\, \omega . \sqrt{\left(p r - \frac{1}{4} p^2\right)} - \text{Sin.}\, \omega \left(\frac{1}{2} p + \frac{\varphi^2}{f^2} r\right)}{\sqrt{\left\{ p r \left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right) + \frac{r^2 \varphi^4}{f^4} \right\}}},$$

sive, valoribus $\text{Cos.}\, \omega = \frac{p}{2 r} - 1$,

$$\text{Sin.}\, \omega = \sqrt{\left\{ \frac{p}{r} - \frac{p^2}{4 r^2} \right\}},$$

restitutis,

$$\text{Cos.}\, C = \frac{- r . \text{Sin.}\, \omega \left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right)}{\sqrt{\left\{ p r \left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right) + \frac{r^2 \varphi^4}{f^4} \right\}}};$$

$$\text{Sin.}\, C = \frac{\frac{1}{2} p \left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right) - \frac{r \varphi^2}{f^2}}{\sqrt{\left\{ p r \left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right) - \frac{r^2 \varphi^4}{f^4} \right\}}}.$$

Aequatio ergo

$$\text{Sin.}\,(C-\psi)=\frac{\frac{1}{2}\,p\,r+\frac{\varphi^2}{f^2}\,r\,\varrho}{\varrho\surd\left\{p\,r\left(1+\frac{\varphi^2}{f^2}\right)+\frac{r^2\,\varphi^4}{f^4}\right\}},$$

transit in

$$\text{Cos.}\;\psi\left\{\tfrac{1}{2}\,p\left(1+\frac{\varphi^2}{f^2}\right)-r\,\frac{\varphi^2}{f^2}\right\}+\text{Sin.}\;\psi.\;r.\;\text{Sin.}\;\omega\left(1+\frac{\varphi^2}{f^2}\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\,p\,r}{\varrho}+r\,\frac{\varphi^2}{f^2};$$

seu $\text{Cos.}\;\psi+\text{Cos.}\;\psi\;\text{Cos.}\;\omega\left(1+\frac{\varphi^2}{f^2}\right)+\text{Sin.}\;\psi\;\text{Sin.}\;\omega\left(1+\frac{\varphi^2}{f^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{p}{\varrho}+\frac{\varphi^2}{f^2},$$

id est $\varrho=\dfrac{\frac{1}{2}\,p}{\text{Cos.}\;\psi+\left(1+\frac{\varphi^2}{f^2}\right)\text{Cos.}\,(\psi-\omega)-\frac{\varphi^2}{f^2}}.$

Curva a quocunque corpusculo in cauda cometae conspicuo descripta hac aequatione definita est, ita ut hyperbolae omnes orbitam cometae in quocunque puncto tangentes eius ope describi possint. Eadem autem aequatio e dato valore quantitatum ψ, ϱ, angulum ω determinare docet, id est, si pro cognita habenda esset ratio virium repulsivarum et attractivarum, $\varphi^2 : f^2$, e dato loco corpusculi cuiusdam in cauda observati, et locus daretur, ubi e cometa egressum est, et tempus ad percurrendum spatium BF accommodatum.

Quarum orbitarum indoles ut melius perspiciatur, et asymptotorum et axis situm assignemus. Parametrum cuiusque hyperbolae $=P$ determinatam esse formula $P=\frac{p.\,f^2}{\varphi^2}$, iam antea dictum est. Situs asymptoti e formula

$$\text{Sin.}\,(C-\psi)=\frac{\frac{1}{2}\,p+\frac{\varphi^2}{f^2}\,\varrho}{\varrho\surd\left\{\frac{p}{r}\left(1+\frac{\varphi^2}{f^2}\right)+\frac{\varphi^4}{f^4}\right\}}$$

eruitur, ponendo $\varrho=\infty$, qui valor praebet

$$\text{Sin.}\,(C-\psi^{I})=\frac{1}{\surd\left\{1+\frac{p}{r}\,\frac{f^2}{\varphi^2}\left(1+\frac{f^2}{\varphi^2}\right)\right\}};$$

axis hyperbolae autem respondet angulo $C - \psi^{III} = 90°$, quare, si T angulum designat sub axe et asymptoto contentum, efficitur

$$\text{Cos. } T = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \frac{p}{r}\frac{f^2}{\varphi^2}\left(1 + \frac{f^2}{\varphi^2}\right)\right\}}}$$

$$\text{Tang. } T = \frac{f}{\varphi}\sqrt{\left\{\frac{p}{r}\left(1 + \frac{f^2}{\varphi^2}\right)\right\}}.$$

Valoribus $C - \psi^{III} = 90°$, et $C - \psi^{IV} = 270°$ respondeant radii vectores $= \varrho^{III}$, ϱ^{IV}, qui ita determinantur:

$$\varrho^{III} = \frac{-\frac{1}{2}p}{\left\{\frac{\varphi^2}{f^2} - \sqrt{\left[\frac{p}{r}\left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right) + \frac{\varphi^4}{f^4}\right]}\right\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}r\left\{\frac{\varphi^2}{f^2} + \sqrt{\left[\frac{p}{r}\left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right) + \frac{\varphi^4}{f^4}\right]}\right\}}{1 + \frac{\varphi^2}{f^2}};$$

$$\varrho^{IV} = \frac{\frac{1}{2}r\left\{\frac{\varphi^2}{f^2} - \sqrt{\left[\frac{p}{r}\left(1 + \frac{\varphi^2}{f^2}\right) + \frac{\varphi^4}{f^4}\right]}\right\}}{1 + \frac{\varphi^2}{f^2}};$$

ergo $\varrho^{III} + \varrho^{IV} = $ axi hyperbolae $= \frac{r\varphi^2}{f^2 + \varphi^2} = \frac{r}{1 + \frac{P}{p}} = 2a.$

Notissimum est, excentricitatem $= E$ hyperbolae esse $=$ Sec. T, ergo. Sin. $(C - \psi) = \frac{P + 2\varrho}{2E\varrho}$, ita ut e valoribus quantitatum E, P, C, cuiuslibet corpusculi orbita facile determinetur.

§. III.

Quum ex observata cometae cauda loca dentur, in quibus certo quodam momento corpuscula e cometa iam egressa omnia inveniuntur, formulae quaerendae sunt, quae locum cuiusque corpusculi pro quocunque temporis puncto determinent.

Si particula caudae cometam in B derelinquens eadem, qua ipse cometa, praedita fuit celeritate, sectores a radio vectore descripti aequales erunt pro cometa et pro particula caudae. Sit ergo sicut adhuc ϱ radius vector particulae illius, quae in puncto, cuius radius vector $= r$, a cometa avellebatur, (ϱ) autem ille huius quantitatis ϱ valor, quem eodem momento obtinet cui radius vector cometae $= (r)$ respondet, ita ut $SF = (\varrho)$, $SE = (r)$, et eodem modo $ASF = (\psi)$, $ASE = (\omega)$ sint, si eodem temporis momento et cometa punctum E, et caudae particula punctum F attingit. Sectorem parabolae, sub radiis vectoribus r et (r) contentum, esse

$$= \tfrac{1}{16} p^2 \left\{ \text{tang.} \tfrac{1}{2}(\omega) - \text{tang.} \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{3}(\text{tang.} \tfrac{1}{2}(\omega))^3 - \tfrac{1}{3}(\text{tang.} \tfrac{1}{2}\omega)^3 \right\},$$

notissimum est; eum ergo aequalem esse oportet sectori, sub radiis vectoribus r et (ϱ) contento, quia BSF, BSE sectores sunt ad idem temporis intervallum pertinentes.

Vt sectorem BSF inveniamus, formula utamur $\text{Sin.}(C - \psi) = \frac{P + 2\varrho}{2E\varrho}$, e qua differentiando efficitur $d\psi \, \text{Cos.}(C - \psi) = \frac{P\,d\varrho}{2E\varrho^2}$,

$$d\psi = \frac{\tfrac{1}{2} P \, d\varrho}{\varrho \sqrt{\{(E^2 - 1)\varrho^2 - P\varrho - \tfrac{1}{4}P^2\}}},$$

aut ponendo $E^2 - 1 = \frac{P}{2a}$, (ubi $2a =$ axi hyperbolae),

$$d\psi = \frac{d\varrho \sqrt{\tfrac{1}{2}Pa}}{\varrho \sqrt{\{\varrho^2 - 2a\varrho - \tfrac{1}{2}aP\}}}.$$

Sectoris quaesiti differentiale est $= \frac{1}{2}\varrho^2 \, d\psi$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}\varrho \, d\varrho \sqrt{\tfrac{1}{2}Pa}}{\sqrt{\{\varrho^2 - 2a\varrho - \tfrac{1}{2}aP\}}}, \text{ et sector ipse}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{aP}{2}} \sqrt{\left\{\varrho^2 - 2a\varrho - \tfrac{1}{2}aP\right\}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{aP}{2}} \text{ log. nat.} \left\{\varrho - a + \sqrt{[\varrho^2 - 2a\varrho - \tfrac{1}{2}aP]}\right\},$$

quo valore inter limites $\varrho = r$ et $\varrho = (\varrho)$ sumto prodit:

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{aP}{2}} \left\{\sqrt{[(\varrho^2) - 2a(\varrho) - \tfrac{1}{2}aP]} - \sqrt{[r^2 - 2ar - \tfrac{1}{2}aP]}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{aP}{2}} \text{ log. nat.} \left\{\frac{(\varrho) - a + \sqrt{[(\varrho^2) - 2a(\varrho) - \tfrac{1}{2}aP]}}{r - a + \sqrt{[r^2 - 2ar - \tfrac{1}{2}aP]}}\right\}.$$

Quae formula verum sectoris valorem praebet, si (ϱ) et r in uno eodemque hyperbolae quadrante sunt; si contra vertex hyperbolae situs est inter radios vectores (ϱ) et r, tum quantitas $\sqrt{(r^2 - 2ar - \frac{1}{2}aP)}$ signo contrario in calculum vocanda est, cuius rei rationem facile perspicies, si animadvertas sectores inde ab axe sumtos tum invicem addendos esse.

Formulae concinniores redduntur, si in subsidium vocamus substitutiones a cel. Gauss in opere de motu corporum coelestium traditas. Erat enim $\varrho = \frac{\frac{1}{2} P}{-1 + E \operatorname{Sin.} (C - \psi)}$, $\operatorname{Cos.} T = \frac{1}{E}$; ponamus $v = 90° - (C - \psi)$ et $\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F = \operatorname{Tang.} \frac{1}{2} v \operatorname{Cotang.} \frac{1}{2} T$, unde

$$\operatorname{Sin.} (C - \psi) = \operatorname{Cos.} v = \frac{1 - (\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F)^2 (\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} T)^2}{1 + (\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F)^2 (\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} T)^2};$$

$$\text{sive } \operatorname{Cos.} v = \frac{E + 1 - (E - 1)(\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F)^2}{E + 1 + (E - 1)(\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F)^2}; \text{ unde}$$

$$-1 + E \operatorname{Cos.} v = \frac{(E^2 - 1)(1 - (\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F)^2)}{1 - (\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F)^2 + E(1 + (\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F)^2)}$$

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2} P}{E^2 - 1} \left\{ 1 + \frac{E}{\operatorname{Cos.} F} \right\};$$

F autem determinatur aequatione $\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F = \operatorname{Tang.} \frac{1}{2} v . \sqrt{\frac{E+1}{E-1}}$ $= \operatorname{Tang.} (45° - \frac{1}{2}(C - \psi)) \sqrt{\frac{E+1}{E-1}}$. Sectoris area $= \frac{1}{2} \int \varrho^2 \, d\psi$ $= \frac{1}{2} \int \varrho^2 \, dv$ nunc, quum sit $dv (\operatorname{Sec.} \frac{1}{2} v)^2 = dF . \sqrt{\frac{E-1}{E+1}}$ $(\operatorname{Sec.} \frac{1}{2} F)^2$, vel $dv = \frac{dF (\operatorname{Sec.} \frac{1}{2} F)^2 \sqrt{(E-1)}}{E + 1 + (E - 1)(\operatorname{Tang.} \frac{1}{2} F)^2}$,

$$= \frac{dF \sqrt{(E^2 - 1)}}{(E+1)(\operatorname{Cos.} \frac{1}{2} F)^2 + (E-1)(\operatorname{Sin.} \frac{1}{2} F)^2}$$

$$= \frac{dF \sqrt{(E^2 - 1)}}{E + \operatorname{Cos.} F},$$

exsistit formula $\frac{1}{2} \int \varrho^2 \frac{dF . \sqrt{(E^2 - 1)}}{E + \operatorname{Cos.} F}$

$$= \frac{1}{8} \frac{P^2}{\sqrt{(E^2 - 1)^3}} \int \frac{dF . (E + \operatorname{Cos.} F)}{(\operatorname{Cos.} F)^2},$$

qua integrata efficitur esse sectorem

$$= \text{Const.} + \frac{1}{8} \frac{P^2}{\sqrt{(E^2 - 1)^3}} \left\{ E . \operatorname{Tang.} F + \operatorname{Log.} \operatorname{Tang.} (45° + \tfrac{1}{2} F) \right\}$$

Vt constantem inveniamus, ad limitem sectoris, ubi $\varrho = r$, $\psi = \omega$ respiciamus; quaerendus est valor $F = [F]$ limiti illi respondens, quo invento et valore ipsius F quantitatibus $\varrho = (\varrho)$, $\psi = (\psi)$ respondente posito $= (F)$, habemus sectorem

$$= \tfrac{1}{2} a \sqrt{\frac{aP}{2}} \left\{ E\,\mathrm{Tang.}(F) - E\,\mathrm{Tang.}[F] + \mathrm{Log.} \left\{ \frac{\mathrm{Tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}(F))}{\mathrm{Tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}[F])} \right\} \right\}$$

Ex hac formula quantitas (F) invenienda est, quae quidem dato valore sectoris et dato valore quantitatis [F] methodo indirecta determinatur; e valore ipsius (F) invento prodeunt (ψ) et (ϱ), id est locus particulae caudae pro certo quodam temporis momento aut pro dato cometae situ.

Inverso etiam modo formulae iam elatae adhiberi possunt. Si enim ex observatione locus particulae caudae datur et locus, ubi a cometa egrediens orbitam hyperbolicam percurrere coepit, quaeritur, tunc (ψ) et (ϱ) cognitae sunt quantitates, e quibus r et ω determinare debemus. Quem in finem meliore successu formulae, quae a substitutione quantitatis F liberae sunt, adhibentur, et methodo indirecta, ut dicere solemus interpolando, valor ipsius r determinatur.

§. IV.

Ex iam dictis clare elucet, fieri non posse, ut lineam, quae figuram caudae pro quocunque casu et pro quocunque temporis momento ob oculos ponat, aequatione definiamus, quia aequatio talis, si eam invenire liceret, nimis complicata evaderet Calculo ergo numerico utamur, ut pro casu quodam dato qualis futura sit caudae figura explicemus, quod si pro pluribus casibus factum fuerit, ad observationes in comparationem vocandas progrediamur.

Datam ergo ponamus vim repellentem solis, eique diversos valores tribuamus, ut appareat, quantum figura caudae mutetur mutato virium valore. Primum exemplum petamus e valore $\frac{\varphi^2}{f^2} = 1$, qui vim particulas caudae repellentem aeque magnam ac vim corpora coelestia attrahentem statuit. Parametrum parabolae $= p = 1$ faciamus, ut unitatem linearem repraesentet. Formulae nostrae iam induunt formam hancce:

$$\varrho = \frac{0{,}5}{-1 + \mathrm{Cos.}\,\psi + 2\,\mathrm{Cos.}\,(\psi - \omega)}$$

$$P = \frac{pf^2}{\varphi^2} = 1;\ 2a = \frac{r\varphi^2}{f^2 + \varphi^2} = \tfrac{1}{2} r;\ a = \tfrac{1}{4} r;$$

$$E = Sec.\ T = \sqrt{\left\{1 + \frac{2}{r}\right\}},$$

$$Sin.\ (C - \omega) = \frac{0,5 + r}{\sqrt{\{2r + r^2\}}} = \frac{\frac{1}{2r} + 1}{E}$$

$C - 90°$ aequalis est angulo, ad quem inclinatur axis hyperbolae ad axem parabolae, — hyperbolae, inquam, quam percurrit corpusculum a cometa in eo puncto, ubi radius vector $= r$, quasi avulsum.

Vt figura caudae, qualis esse debet ante perihelium cometae, in perihelio, post perihelium, cognoscatur, eam definiamus pro valoribus $(r) = \frac{1}{2}$ p ante perihelium, $(r) = \frac{1}{4}$ p in perihelio, $(r) = \frac{1}{2}$ p post perihelium. Sed priusquam figuram caudae determinare possumus, orbitas particularum definiamus necesse est. Particulas autem eas eligamus, quae propter aequalia temporis intervalla praecipue dignae sunt, quarum orbitis determinandis diligentiam nostram advertamus. Cometa eodem fere temporis intervallo a $r = 0{,}8221$ ad $(r) = 0{,}5$ perveuit, quo indiget percurrendo arcum inde a $r = 0{,}5$ ad $(r) = 0{,}25$, aut inde a $r = 0{,}25$ ad $(r) = 0;5$; quae ergo intervalla temporis sibi invicem respondere dici possunt. Eodem modo parum aberrant ab aequalitate tempora, quae respondent valoribus $r = 0{,}6$, $(r) = 0{,}5$, et $r = 0{,}5$, $(r) = 0{,}4$, et propius adhuc ad aequalitatem accedunt tempora, quae valoribus $r = 0{,}5$, $(r) = 0{,}4$ et $r = 0{,}25$, $(r) = 0{,}287$ respondet. Quare ut caudam, qualis esse debet, si cometae radius vector est $= (r) = 0{,}5$ ante perihelium, definiamus, corpusculorum orbitas in $r = 0{,}8221$ et $r = 0{,}6$ parabolam contingentes determinemus; pro situ cometae in perihelio valores $r = 0{,}5$ et $r = 0{,}287$ in calculum inducamus, pluribus tamen valoribus additis; et eodem modo pro situ cometae post perihelium plures valores respiciamus.

Tabula subsequens omnes continet quantitates, quae ad determinandas orbitas pertinent; orbitae ipsae autem descriptae inveniuntur in tabula lithographica prima, ubi in fig. 2. cADI est orbita cometae, curvae cC, bB, AHR, gGQ et ceterae orbitas particularum ob oculos ponunt.

Valores quantitatum r | ω puncta definientes, ubi particulae caudae a cometa egrediuntur		Angulus, qui sub axe hyperbolae a quadam particula percursae et axe parabolae continetur	Semiaxis hyperbolae	Distantia centri hyperb. a sole	Angulus sub asymptoto et axe hyperbolae contentus
r.	ω.	$C - 90°$	a.	$a. E.$	T.
0,25.	0°. 0′. 0″.	0°. 0′. 0″.	0,0625.	0,1875.	70°. 31′. 44″.
0,2563.	18. 2. 25.	12. 2. 58.	0,064075.	0,190113.	70. 18. 13.
0,27.	31. 35. 11.	19. 23. 40.	0,0675.	0,19572.	69. 49. 32.
0,287.	42. 55. 56	29. 11. 51.	0,07175.	0,202541.	69. 15. 10.
0,3.	48. 11. 22.	32. 34. 15.	0,075.	0,20766.	68. 49. 43.
0,4.	75. 30. 38.	52. 14. 20.	0,1.	0,24495.	65. 54. 18.
0,46.	85. 0. 41.	59. 29. 36.	0,115.	0,265942.	64. 22. 42.
0,5.	90. 0. 0	63. 26. 4.	0,125.	0,27950.	63. 26. 6.
0,6.	99. 35. 39.	71. 19. 18.	0,15.	0,31225.	61. 17. 22.
0,7.	106. 36. 6.	77. 23. 44.	0,175.	0,3437.	59. 23. 28.
0,8.	112. 1. 28.	82. 19. 14.	0,2.	0,37416.	57. 41. 19.
0,8221.	113. 4. —	83. 8. 9.	0,205525.	0,380792.	57. 20. 6.

Tempus elapsum inde ab initio motus particulae cuiusdam usque dum ad punctum quantitatibus (ψ), (ϱ) definitum pervenit ex area sectoris, radios vectores r, (r), interiacentis, definiri notissimum est, quamobrem tempus elapsum inter anomaliam cometae $\omega = 90°$ et anomaliam $\omega = 0°$ ponimus $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\, p \cdot \frac{1}{2}\, p. = \frac{1}{12}\, p^2 = 0{,}083333$, et simili modo cetera temporum intervalla determinamus.

Tabulae subsequentes tres quantitatum (ψ), (ϱ), valores praebent, quos obtinent eo tempore, quo cometa ad radium vectorem (r) in fronte tabulae appositum attingit. Numeri in primo tabulae loco scripti punctum determinant, ubi motum incepit particula caudae cuius locum, situi cometae in radio (r) respondentem, quaerimus.

Tabula I. figuram caudae exhibens pro situ cometae in radio vectore $(r) = \frac{1}{2}$ p, versantis ante perihelium.

Valores ipsius r, quibus definiuntur puncta, ubi particulae, quorum locus quantitatibus (ψ), (ϱ) determinatur, a cometa avellebantur.	Area sectoris parabolici sub radiis vectoribus r, (r) contenti.	Valores quantitatum (ϱ) | (ψ) quibus datur locus particulae eo temporis momento, in quo cometa ad radium vectorem $= (r)$ pervenit.	
r.		(ϱ)	(ψ)
0,8221.	0,08333344.	0,605.	92°. 57′. 52″.
0,6.	0,0251281.	0,5156.	90. 11. 17.
0,5.	0.	0,5.	90. 0. 0.

Tabula II. pro situ cometae in ipso perihelio, $(r) = \frac{1}{4}$ p.

r.	*Sector parab.*	(ϱ)	(ψ)
0,5.	0,08333333.	0,4833.	38°. 55′. 23″.
0,4.	0,0580947.	0,419.	25. 48. 6.
0,3.	0,0298142.	0,327.	8. 32. 56.
0,287.	0,0252304.	0,30946.	7. 6. 33.
0,2563.	0,0100049.	0,2633.	fere omnino = 0°. 0′. —.
0,25.	0.	0,25.	0. 0. 0.

Tabula III. pro situ cometae in $(r) = \frac{1}{2}$ p post perihelium.

r.		*Sector parab.*	(ϱ)	(ψ)
0,5.	ante perihelium.	0,1666667.	0,9404.	— 16°. 40′. 10″.
0,4.		0,1414231.	0,9676.	— 0. 29. 51.
0,3.		0,1131475.	0,993.	24. 32. 25.
0,25.		0,0833333.	0,9075.	58. 52. —.
0,27.	post perihelium.	0,0651843.	0,7650.	74. 37. 29.
0,3.		0,0535191.	0,6565.	83. 3. 36.
0,4.		0,0252386.	0,5273.	89. 27. —.
0,46.		0,0100121.	0 5035.	fere omnino = 90°.
0,5.		0.	0,5.	90°.

Tabula lithographica tres caudas horum numerorum ope determinatas descriptas ostendit, ABC pro primo temporis momento, DEFGH pro secundo, IKLMNOPQR pro tertio. ABC ea corpuscula continet, quae temporis intervallo = 0,0833 a cometa avulsa sunt; DEFGH ad aequale temporis intervallum pertinet; IKLMN itidem ea tantum corpuscula continet, quae tempore = 0,0833 cometam dereliquerunt.

§. V.

Caudas ergo cometae habemus, quales esse deberent, si vis repellens quadratis distantiarum inverse proportionalis et, quod ad intensitatem, eadem esset ac vis attrahens. Quae sententia, quamvis incerta sit, occasionem tamen praebet ad comparationem instituendam cum phaenomenis observatis. Elucet enim ex calculo nostro, caudam brevem esse ante perihelium et maiorem evadere circa perihelium et post perihelium, quod ex parte quidem observationibus consentaneum est. Sed ut severiore calculo definiamus, quae pars caudae visibilis, luce satis clara praedita futura sit, animadvertamus oportet, eam tantum caudae partem conspici posse, in qua numerus corpusculorum aut lucentium aut lucem reflectentium satis magnus contineatur. Determinemus ergo intensitatem lucis pro singulis caudarum partibus, quod quidem hypothesi quadam in auxilium vocata fieri debet. Ponamus primo, numerum corpusculorum a cometa in caudam transeuntium tempori proportionalem esse; tum intensitas lucis pro qualibet caudae parte longitudini ipsius inverse proportionalis est, si quidem eam partem, quae aequali temporis spatio orta est, consideramus. Calculus brevis, sed ad hunc finem satis accuratus monstrat, eam partem caudae, quae tempore = 0,0833 orta est, esse

AC = 0,11. p.
DGH = 0,36. p.
ILN = 0,58. p;

ea pars, quae respondet tempori = 0,0251 est,

AB = 0,015. p.
DEF = 0,07. p.
IK = 0,027. p;

pars tempori = 0,010 respondens

in D, = 0,013. p.
in I, = 0,004. p.

Quamobrem si pro quocunque cometae situ numerum particularum tempori proportionalem esse ponere liceret, caudam in perihelio longiorem quidem, sed parum lucentem inveniremus. Alteram autem hypothesin naturae legibus magis respondentem sequi nobis satius esse videtur. Sumamus nempe numerum particularum cometae ereptarum in ratione composita esse temporum et virium repellentium; iam habemus: 1. temporis spatio $= 0{,}0252$ respondentem

longitudinem caudae $AB = 0{,}015$, splendorem $= 0{,}96$.
longit. caud. $DF = 0{,}07$, spl. $= 1{,}00$.
long. caud. $IK = 0{,}027$, spl. $= 0{,}08$.

2. temporis spatio $= 0{,}100$ respondentem longitudinem
in $D = 0{,}013$, splendorem $= 2{,}15$.
in $I = 0{,}004$, splendorem $= 2{,}14$.

Vnde elucet, ante perihelium in A caudam splendore $= 1$ praeditam vix quintam partem eius longitudinis attingere, quam habet in D, et eodem fere modo, sicut ante perihelium crevit longitudo caudae certo quodam splendore instructae, eam post perihelium decrescere. Quae conclusiones tam bene observationibus institutis congruunt, ut, hypotheses nostras non omnino a veritate aberrare, demonstrare videantur.

§. VI.

Secundum exemplum adiiciamus, in quo, valore ipsius $\frac{\varphi^2}{f^2} = 48$ posito, $P = \frac{1}{48}$; $a = \frac{24.\,r}{49}$; $E = \sqrt{\left\{1 + \frac{49}{48^2\, r}\right\}}$ exsistit. Quibus valoribus substitutis prodeunt pro determinandis particularum orbitis numeri in tabula sequente contenti.

r.	*ω.*	*C* — 90°	*a.*	*a. E.*	*T.*
0,25.	0°. 0′. 0″.	0°. 0′. 0″.	0,122449.	0,12755.	16°. 15′. 25″.
0,2563.	18. 2. 25.	17. 40. 55.	0,125535.	0,130639.	16. 4. 10.
0,27.	31. 35. 11.	30. 59. 10.	0,132245.	0,137354.	15. 40. 34.
0,287.	42. 55. 56.	42. 9. 41.	0,140571.	0,145686.	15. 13. 40.
0,3.	48 11. 22.	47. 19. 47.	0,146939.	0,152058.	14. 54. 33.
0,4.	75. 30. 38.	74. 23. 3.	0,195918.	0,20106.	12. 59. 10.
0,46.	85. 0. 41.	83. 50. 56.	0,225306.	0,230456.	12. 8. 5.
0,5.	90. 0. 0.	88. 49. 50.	0,244898.	0,250052.	11. 39. 58.
0,6.	99. 35. 39.	98. 26. 15.	0,293878.	0,299039.	10. 39. 50
0,7.	106. 36. 6.	105. 28. 29.	0,342857.	0,348027.	9. 53. 17.
0,8221.	113. 4. —.	111. 58. 58.	0,402661.	0,407836.	9. 8. 15.

Tabularum sequentium ratio eadem est atque in primo exemplo.

Tabula I. figuram caudae exhibens pro situ cometae in puncto, a valore (r) = $\frac{1}{2}$ p determinato, ante perihelium.

r.	*Sector parab.*	(ϱ)	(ψ)
0,8221.	0,08333344.	2,010.	104°. 55′. 36″.
0,6.	0,0251281.	0,8196.	92. 50. 6.
0,5.	0.	0,5.	90. 0. 0.

Tabula II. figuram caudae exhibens pro situ cometae in perihelio, (r) = $\frac{1}{4}$ p.

r.	*Sector parab.*	(ϱ)	(ψ)
0,5.	0,0833333.	2,7420.	78°. 16′. 13″.
0,29.	0,0263333.	1,1247.	29. 1. 24.
0,256.	0,0097599.	0,4816.	6. 42. 25.
0,25.	0.	0,25.	0. 0 0.

Tabula III. pro situ cometae in (r) = $\frac{1}{2}$ p post perihelium.

r.	*Sector parab.*	(ϱ)	(ψ)
0,25.	0,0833333.	4,279.	15°. 45′. 26″.
0,3.	0,0535191.	2,4230.	61. 17. 2.
0,4.	0,0252386.	1,0029.	84. 28. 13.
0,46.	0,0100121.	0,588.	89. 30. 33.
0,5.	0.	0,5.	90. 0. 0.

Vt splendorem caudae recte determinemus, eadem in usum vocantur subsidia, de quibus antea locuti sumus; quare facilia erunt intellectu, quae hic paucis adiicimus. *Invenimus longitudinem caudae temporis* intervallo = 0,0833 ortae,

pro primo cometae situ = 1,53.
pro secundo = 2,84.
pro tertio = 4,02.

Longitudinem tempori = aut 0,025, aut 0,026 respondentem,

pro primo cometae situ, tempore = 0,0251, = 0,32,
pro secundo comet. situ, tempore = 0,0263, = 0,95,
pro tertio cometae situ, tempore = 0,0252, = 0,52.

Longitudinem tempori = 0,0097, aut 0,01 respondentem

pro secundo cometae situ, temp. = 0,0097, = 0,24,
pro tertio cometae situ, tempore = 0,0100, = 0,084.

Splendorem eius partis caudae, quae cometae *proxima* est, invenimus numeris sequentibus expressum. Si splendorem medium eius partis caudae, quae sub tempus perihelii, temporis *intervallo* = 0,025 orta est, = 1 ponimus, obtinemus:

pro primo situ cometae splendorem eius partis caudae, quae tempori = 0,025 respondet = 0,61, longitudinem = 0,32;

pro secundo cometae situ splendorem medium eius partis, quae eidem tempori respondet = 1,00, longitudinem = 0,95, et eius partis quae tempori 0,010 respondet, splendorem = 1,58, longitudinem = 0,24;

pro tertio cometae situ splendorem eius partis, quae tempori = 0,025 respondet = 0,56, longitudinem = 0,52, splendorem eius partis, quae tempori = 0,010 respondet, = 1,46, longitudinem = 0,08.

Si ergo primum, secundum et tertium situm numeris I, II, III, insignimus, habemus

I, caudam inde a cometa usque ad longitudinem = 0,32, splendore = 0,6, praeditam;

II, caudam inde a cometa usque ad longitudinem = 0,24, splendore = 1,6; caudam inde a dist. = 0,24 ad 0,95, splendore = 0,8 praeditam; ita ut prima pars splendore triplo fere maiore instructa sit, quam situ I, et secunda pars, quamvis multum distans a cometa, tamen splendore totam caudam, quae situ I. apparebat, superet;

III, splendor = 1,5, qui situ II. pertinebat ad longitudinem inde a cometa usque ad 0,24 sumtam, nunc trienti tantum huius longitudinis tribuitur, et secunda pars inde a = 0,08 usque ad = 0,52 splendore tantum = 0,4 praedita est. Comparatione ergo instituta inter situm I et III, caudae, medio splendore = 0,6 praeditae longitudinem in situ III. invenimus = $\frac{5}{3}$ longitudinis in situ I. observandae; et, comparatione inter II. et III. instituta, splendor in II. in puncto, cuius distantia = 0,6 a cometa, duplo fere maior prodit, quam in III. in puncto, cuius distantia = 0,3.

Quae conclusiones omnes commonstrant, post perihelium caudam splendore maiore instructam esse, quam ante perihelium, multo autem breviorem et luce debiliori apparere, quam circa perihelium. Sine dubio cauda splendidissima est, si cometa iam a perihelio recedere coepit; sed huius temporis determinatio accurata non nisi prolixiore calculo absolvi potest.

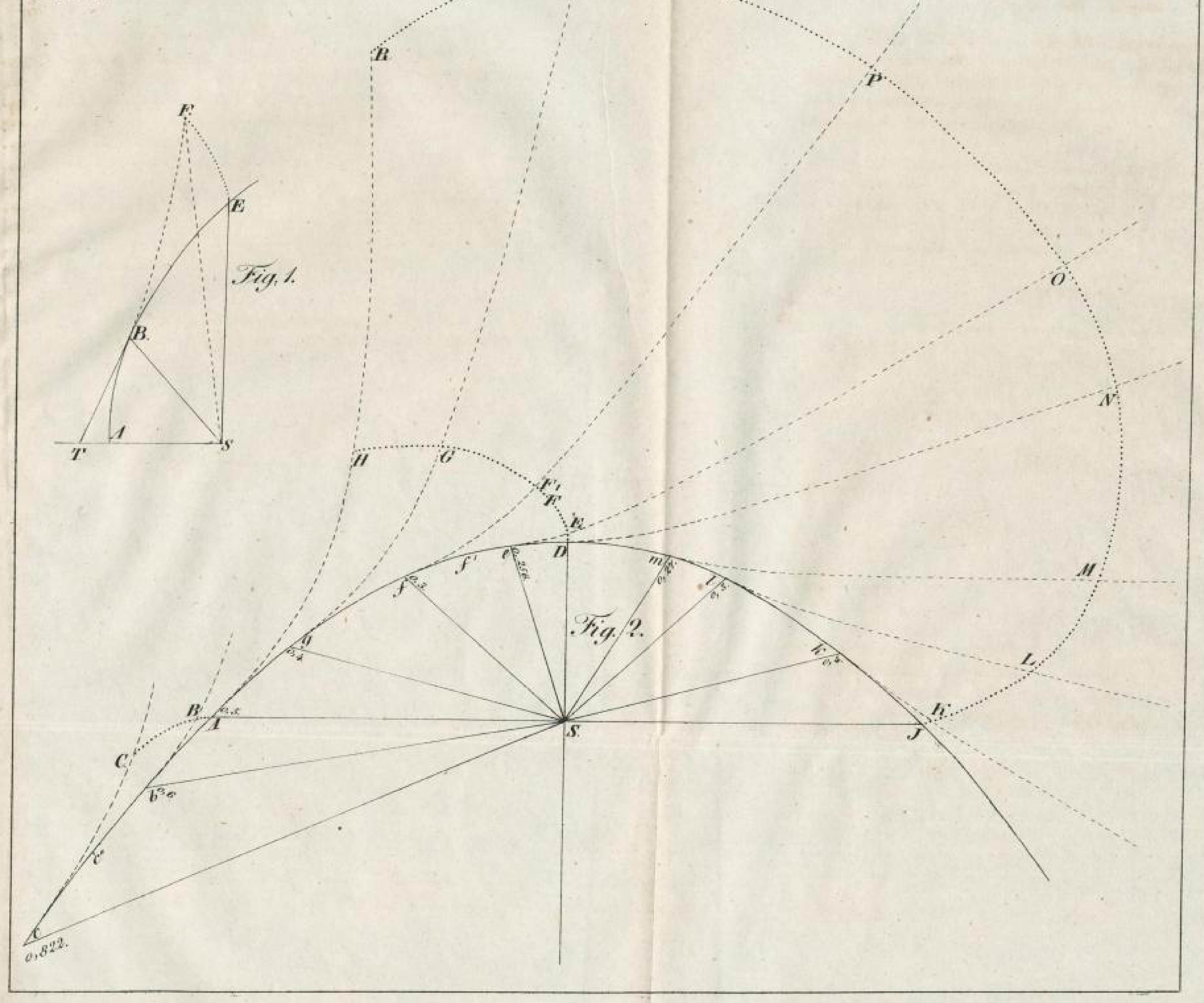
§. VII.

Quae hucusque perscrutati sumus, ad eas pertinebant caudae particulas, quae in orbitam hyperbolicam transeuntes eadem, qua cometa, celeritate praeditae fuerant; sed facile elucet, hanc celeritatem non omnibus particulis propriam esse, quia si in omnibus eadem esset, cauda minime apparere posset in latitudinem extensa. Secunda ergo adiicienda est disquisitio de figura caudae e particulis compositae, quae non omnes eadem celeritate, qua cometa, praeditae fuerunt, et tunc tandem ad tertiam disquisitionis partem pervenire licebit, quae ex observationibus in comparationem vocatis monstrabit, utrum conclusiones ex hypothesi nostra profluentes phaenomenis consentaneae sint, an ab iis aberrent. Sed quum harum disquisitionum ordine pertractandarum hic non sit locus, eas alio tempore edendas reservamus.

Reliquum est, ut indicemus, quae fuerit has disquisitiones litteris mandandi occasio. Indicendus enim est dies, quo qui ab Ordine Philosophorum Lipsiensi summis honoribus condecorari cupiunt, ad solemnia examina conveniant. Is dies erit XXIV. Januarii proximi anni. Ad quae examina admitti si cui Vestrum, Commilitones praenobilissimi, in votis est, litterae petitionis mihi tradendae sunt ante diem XXII. Januarii, quo quidem die petitio solemnis locum habebit. Admonemus Vos, ut tunc tantum huic examini subeundo periculum faciatis, si studiis philosophicis operam eam impendistis, ut desideriis Ordinis amplissimi respondere possitis. Decet enim virum doctum, praecipue eum, qui philosophiae doctor nuncupari cupit, non ad ea tantum studia, arcto limite circumscripta, quibus indiget ad munus quoddam administrandum, incubuisse, sed in rebus etiam philosophicis, philologicis, historicis et mathematicis bene esse versatum; quapropter speramus, Vos nobis talia eruditionis documenta daturos et ea de morum integritate testimonia esse adlaturos, ut Ordini de honoribus Vobis decernendis nulla superesse possit dubitatio.

P. P. in Acad. Lipsiensi Dom. I. Advent. Domini N. J. C. A. MDCCCXXX.

Tab. I.



Tab. II.