V.

DE

INSIGNI

SEMIOTICAE MATHESEOS VSV IN GEOMETRIA ET PHYSICA

DISSERIT

ET SIMVL

AD AVSPICIA

EXTRAORDINARIAE PROFESSIONIS

MATHEMATICAE

CLEMENTISSIME SIBI DEMANDATAE

AD DIEM XXXI. AVGVSTI

CAPIENDA

OMNI QVO PAR EST CVLTV AC STVDIO

INVITAT

GEORGIVS HENRICVS BORTZ

PROFESSOR MATHEMATVM PVBLICVS EXTRAORDINARIVS

Coll. BEATAE MARIAE VIRGINIS PRAEPOSITVS.

LIPSIAE

EX OFFICINA LANGENHEMIA.

Sereniſſimo ac Potentiſſimo Principe, Domino, Domino FRIDERICO AVGVSTO, Poloniarum Rege, Magno Duce Lithuaniae, Ruſſiae, Pruſſiae, Maſouiae, Samogitiae, Kyouiae, Volhyniae, Podoliae, Podlachiae, Liuoniae, Smolenskii, Seueriae et Czernicouiae: Duce Saxoniae, Iuliaci, Cliuiae, Montium, Angariae et Weſtphaliae, S. R. I. Archimareſchallo et Electore, Landgrauio Thuringiae, Marchione Miſniae et vtriusque Luſatiae, Burggrauio Magdeburgi, Principali dignitate Comite Hennebergae, Comite Marcae, Rauensbergi et Barbi, Domino Rauenſtenii etc. etc. Domino meo longe indulgentiſſimo, clementiſſime mihi munus extra ordinem docendi Matheſin publicum in hac incluta Vniuerſitate demandante, Regiam hanc munificentiam, qua ſingularis plane honor exiguis meis conatibus inſeruiendi ſtudioſae iuuentuti conſtituitur, alio cultu proſequi non poſſum, quam vt ardentiſſima pro ſalute Patris Patriae vota perſoluam ac perhonorifica mihi hac occaſione quaedam ex ea diſciplina, quam in poſterum profitebor, proponam, quae ad eam commendandam faciant.

Nescio vero quo, felici tamen opinor fato, accidit, vt, cum eo ipso tempore, quo clementissimum Regium Mandatum aduenerat, in perlegendo ac meditando celeberrimi quondam in hac Academia Geometrae, Christ. Aug. Hausenii programmate de Semiotica Matheseos, quo hanc ipsam spartam ante hos XL. annos et quod excurrit auspicatus est, occupatus essem, statim apud animum constituerim has meditationes vtpote recentissimas, quas non opus erat diu refricare, in ordinem redigere easque Lectoris beneuoli iudicio subiicere. Qua re id me consecuturum spero, vt et memoriam Viri, quae quoad Mathesi honor ac pretium inter homines statuetur, omnibus semper erit chara, renouem: et studium Semioticae Matheseos, quod prope derelictum iacet, eius insignes vsus ad certa capita, quae vbicunque haec scientia adplicatur, locum habent, reducendo ac eorum singula luculentis ex Geometria reliquisque Matheseos partibus declarando, resuscitem ac si fieri potest, commendem.

Ecquis ipse lecto Semioticae Matheseos nomine non colliget, significari eo omnem praeter verba ac voces signorum ac legum complexum ex iis quantorum limites determinandi. Vocari posset Logica vel doctrina signorum, eiusque est, characteres quantorum commodissimos inuenire, certisque legibus ac regulis dirigere. Quamuis vero ipsa haec quantorum signa sint arbitraria, atque ab arbitrio hominum pendeant, quantum tamen ingenii, quantum acuminis requirant, multis ex historia Semiotices doceri posset exemplis, e pluribus vtar hoc, denotet A quantum, quaeratur constituta multiplicationis lege, vt in producto iuxta se ponantur factores nullo interposito signo, centesima ipsius A potentia; quantum ea spatii capiet? e contrario electa ad eandem quantitatem designandam litera minuscula a et assumpta vnitate ceu exponente dignitatis primae, binario secundae, n potentiae n tae, quam commode exhibebitur ea per a^{100}? quam facile nos eiusmodi notatae potentiae deducent ad arithmeticam potentiarum, insignem Semiotices Matheseos partem? quam breue eo pandetur iter ad reducendas potentias fractorum exponentium ad integras et tandem ad eas exprimendas, quoties opus est, per Logarithmos? Signorum horum vis ac commoditas in eo maximopere elucet, vt electis signis primitiuis, aliis ad quanta cognita, aliis ad quanta incognita denotanda, quae notionum vices sustinent, simplicissimae inueniantur regulae omni, quo fieri potest, modo ea coniungendi, conferendi, separandi ac signa deriuatiua, quae propositiones referunt, eruendi. Certis itaque legibus definienda est via perueniendi a signis primitiuis ad omnia signorum deriuatiuorum genera, quae scientiarum Mathematicarum profectus requirunt et iterum eruendi, quoties necesse est ex

deriua-

deriuatiuis signis primitiua. Breuibus haec enuntiata quam sublimia Semiotices Matheseos capita continent? Datis quanti incogniti valoribus seu radicibus iisque ad zyphram reductis multiplicando facile itur ad aequationes cuiusuis gradus? Sed quantis artificiis opus est ad eruendas ex aequatione cuiusuis gradus radices? nulla difficultate ex quanto, quod ex variabilibus ac constantibus conflatum est, differentiale seu fluxio eruitur, sed ex dato quouis differentiali inuenire integrale seu fluentem, est problema, quod eminentissima ingenia inde ab inuenta hac nobilissima semiotices Mathematicae parte exercuit et adhuc exercet? Cum vero in quantis non nisi auctio ac diminutio concipi queant, atque Arithmetices sit, auctionum diminutionum species determinare, signis commodis exprimere ac legibus operationes cum iisdem institutas circumscribere, nemo non inde inferet Matheseos Semioticam esse Vniuersalem Arithmeticam?

Nulla in Veterum Geometrarum scriptis vestigia huius scientiae apparent, quae post Vietae demum tempora Hariotti ac Cartesii opera effloruit ac a Leibnitio ac Newtono aeternis in Geometria nominibus infinitorum quantorum semiotica inuenta insigniter aucta adhuc quotidie, vt ex Arithmetica sinuum aliorumque quantorum a circulo pendentium cuiuis harum rerum perito constat, continua capit incrementa. Primi mortalium, qui notiones quantorum attentius euoluentes ea ad classes reduxerunt modumque praescripserunt, quo intellectus in eorum dimensione dirigendus, nulla alia, nisi communi illa Semiotica, quam reliquae scientiae ac vita communis adhibent, quaeque vocibus ac verbis continetur, vsi omnes ingenii vires eo direxerunt, vt paucis terminis, qui Mathesi essent proprii, ad designandas ideas distincte euolutas excogitatis ac exacte definitis omnem quantorum disciplinae certitudinem ac euidentiam, quam quidem intellectus requirere posset, conciliarent. Quanta h. e. lineas, superficies, corpora schematibus iis similibus, vt ea, cum talia, qualia reuera sunt, sola ratione cognosci possint, imaginationi ac sensibus quodammodo exhiberent, repraesentarunt. Sumptis deinde paucis notitiis communibus, quas axiomata vocant et de quarum veritate nemo sanus ambigere potest, Methodo synthetica, scientiam quantorum nouis propositionibus locupletare allaborarunt. Praecipuum in hac methodo hoc est, vt a simplicissimis orsa principiis non interrupti ratiocinii, quod nulla propositio indemonstrata ingreditur, vi planissima faciat, quae ab omni cognitione remota videbantur. Superbiuerunt hac methodo primum conscripta Elementa Euclidis, Viri vere Philosophi ac inde ipsa methodus *Euclidea* dicta. Magnam ea et ingenii et acuminis et memoriae vim requirit. Quo a primis principiis remotiores propositiones ea arte demonstrandae: eo maior propositionum demonstratarum apparatus ita cognoscendus, vt quasi coram intueatur, singularumque nexus cum propositione demonstranda perspiciatur. Quanta hypotheseos resolutione, quam circumspecta singularum eius partium cum veritatibus indubitatis comparatione, quanta illatarum inde conclusionum inter se et cum veritatibus, quarum nulla precario sumpta ac indemonstrata, collatione opus est? Nectit Geometra ingentes ratiociniorum catenas, quarum altera ex altera dependet, donec inperturbato ordine ad id perueniat, quod sibi demonstrandum proposuit. Legant qui haec capere velint, Veterum Geometrarum monumenta: vel si haec desint, nostrum quondam Hausenium Parte II. Elem. Geometriae, in qua ex lineis harmonice se secantibus proprietates curuarum conicarum hac methodo demonstrat. Quodsi ea cogitatione comprehensuri sint, certus sum, eos dubios futuros, vtrum magis certitudo ac pulcritudo systematis admiranda an ingenii Hauseniani vis, quod illud tanta ratiociniorum, quorum alterum vix alteri saluo ordine vel praeposueris vel postposueris, mole exstruxit? Cum itaque habeat haec methodus, quo animum sua pulcritudine percellat et in sui admirationem rapiat, ecquid mirum eam Veteribus Geometris solam fere placuisse, et recentioribus quibusdam, Anglis inprimis adhuc adeo placere, vt vix aliam in Mathesi ferre possint? Et profecto, si qua ratione assensum extorquet, propositionibusque certitudinem conciliat, eadem etiam artificia inueniendi pariter recluderet, si Mathesis quotidie noua non caperet augumenta, nullus dubito, fore, vt sola digna haberetur, qua omnes veritates Mathematicae proponerentur.

Sed mature et quidem iam Platonis temporibus Matheseos cultores, quibus non satis erat propositionum Mathematicarum inuentarum certitudinem systematisque, in quod redactae, pulcritudinem mirari et consumpta demum maxima vitae parte in iis addiscendis tentare, vtrum ex combinatione veritatum cognitione comprehensarum aliquas incognitas eruere possent, de alia commodiori methodo solliciti erant. Sublimi illo sensu, quod ex gaudio inueniendi proprio marte etiam illas propositiones, quae se inuentores non expectarunt, incitati Analysin Geometricam inuenerunt. Haec quaesita vt inuenta ponit, ex iis consequentias, eousque deducit, donec ad propositiones perueniat, quae axiomatum loco haberi possunt et sua radiant veritate. Luculenta huius methodi in scriptis Geometrarum occurrunt, ac eiusdem iterum Hausenius Part. I. Elem. proposit. XCIV. sequentibus ac parte II. plures exhibuit. Satis haec methodus praedicari nequit. Ea animum ad conditiones Problematis atten-

attentum reddit: Ea aſſidua diagrammatum conſideratione pulcritudinem ſola ratione cognoſcendam et dependentiam quaeſitorum a cognitis ac datis ad ignoti euolutionem dirigit. In Problematis leuioribus, qualia in Hauſenii Parte I. Elem. Geom. occurrunt, haec ignoti ad cognita deductio ratiocinii vi, quod plerumque rationibus, proportionibus aliisque ſubſidiis Geometricis fit, facili negotio peragitur, ſed in difficilioribus haec incogniti euolutio res eſt immenſi laboris. Qui haec intimius cognoſcere voluerit, ſumat, vt hoc leui e pluribus adhuc grauioribus vtar, ex Analyſi Dioptrica Magni Geometrae Kaeſtneri problema III. atque tentet Veteri Analyſi Geometrica radii ex Axis puncto incidentis in corpus pellucidum ſphaerice terminatum medii denſioris, quod tenuius vndique ambit, poſt ſecundam refractionem non ſolum focos determinare, ſed et leges aberrationum a figura ortarum inuenire. Quas ingentes ſentiet difficultates? aut totus itaque fallor, aut haec ingens difficultas in euolutione incognitorum in difficilioribus Problematis illud ipſum fuit, quod occaſionem dedit inueniendorum ſignorum, quibus proportiones aliaeque quaeſitorum et cognitorum rationes Analyſeos Mathematicae Veteris ope elicitae deſignari: iis deſignatis totum Problema in ſigna transponi et ad aequationes reduci: hac reductione facta ratiocinia ex ſchematiſmi cum vniuerſo ſaepe apparatu Geometrico non ſine ingenti animi defatigatione continuanda plane ſeponi poſſent, vt ne ad ſignificatum quidem eorum animus attendere opus haberet, donec reliquum negotii ope Regularum Semioticeſ, quae ratiociniorum vices ſuſtinent, terminetur ac ad feliciſſimum finem perducatur. Egregie ſignorum eiusmodi, quibus via perueniendi ad quaeſitorum per cognita ac data determinationem ſupra quam dici poteſt facilitatur, inuentio ſucceſſit.

Palmarium in Semiotica Matheſeos eo redibat, vt conditiones auctionum et diminutionum, quae ſibi oppoſitae, oppoſitis ſignis exprimerentur. Id factum eſt, cum notata vna quantitatum, ſiue fuerit cognita ſiue incognita per $+$, ei oppoſita per $-$ deſignaretur, ipſae vero quantitates per litteras alphabeti ſignarentur. Sumptis itaque pluribus ſignis primitiuis e. g. $+a : -b : +c : -x$ ex Legibus quantitatum oppoſitarum ſummae $(a - b + c - x)$ differentiae $(a + b - c + x)$ producta $+ a\,b\,c\,x$, potentiae $+ a^{n}, - b^{n}$, quarum poſterior notante n numero pari $+$, et impari $-$. notanda, facile formatae: ex ſummis, ex productis, ex potentiis extractio $\sqrt{}$ ſuſcepta ac exiſtente n numero pari, ſi negatiuae ſimul ſumtae $>$ poſitiuis, ad quantitates imaginarias ventum eſt. Pari arte ſignis ac legibus conſtitutis reliquae quantitates vniuerſales, quarum progrediendo noua genera detecta, legibus ſubiectae. Sed Matheſeos

Semio-

Semioticae multo maior labor ſuſtinendus erat, ne, cum hoc apparatu inſtructa problematis ſoluendis ſe accingeret, eius multitudine opprimeretur. Non enim aeque ac in Methodo ſynthetica a cognitis ad incognita in ea fit progreſſus: ſed inuentionis opus a permixtis inter ſe cognitis ac incognitis quantitatibus initium capit. Non poterant non itaque ii, qui prima huius Analyſeos recentioris experimenta inſtituerunt, inuenta aequatione ad magis compoſita ac complicatiora ſigna deduci, quae reductione indigebant. Quemadmodum inuentio aequationis et qua denominationes quantorum eam ingredientium et qua eius fundamentum tota ab ingenio ac arte eius, qui problema ſoluit, dependet; ita in reſolutione eiusdem, licet regulis generalibus dirigatur, multum in caſibus ſpecialibus iterum dexteritati reſoluentis relinquitur. Reductionis aequationis negotium in ipſis Semiotices Matheſeos initiis facillime ſucceſſit, vbi Problemata ad aequationes primi gradus redibant. Multo vero difficilius, ſi eaedem ad IIdi gradus aequationes ducerent; ſuperatae tamen antiquis iam temporibus difficultates a Luca *Paciolo* circa annum 1494 quoad reſolutionis negotium; quanto vero tempore vſus radicum negatiuarum tum in primi tum IIdi ordinis reliquorumque aequationibus occurrentium latuit? Lucas Paciolo aeque ac Carteſius imo Wolfius ipſe adhuc has negatiuas radices inter radices falſas referunt, et quantis difficultatibus obſepta erat, reſolutio aequationum IIItii ordinis inprimis caſus illarum, quem irreducibilem vocant? donec tandem profundiſſimis ſpeculationibus ſummorum in hac arte virorum demonſtratum eſt: omnes aequationes inferiorum aeque ac ſuperiorum ordinum oriri ex multiplicatione ſimplicium aequationum ad zyphram reductarum tot, quot habet incognitae ſupremae aequationis ab omni irrationalitate ac fractionibus deliberatae exponens vnitates, hinc quadratica ex duabus, Cubica ex tribus etc. aequationibus ſimplicibus conſtant. Hae vero radices, quas aequationes tenent, poſſunt eſſe reales, poſitiuae vel negatiuae, eaeque commenſurabiles, quas etiam rationales dicunt vel incommenſurabiles ſeu irrationales, poſſunt etiam eſſe *imaginariae*. Vtar his

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = (x-2).(x+3)(x+4) = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = (x+3).(x^2 - 5x + 2) = (x+3).$$

$$\left(x + \frac{5 - \sqrt{17}.}{2}\right).\left(x + \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right) = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x-1).(x^2 - 2x + 4) = (x-1).$$

$$(x - 1 + \sqrt{-3}).\ x - 1 - \sqrt{-3})$$

vel

vel generalissime $x^m + rx^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} - - - -$
$\pi x^{m-n} + \varrho x^{m-n-1} - - - - fx^2 + tx + u. = (x-a)$
$(x-b).(x-c)$ - - - - tot simplicibus eiusmodi factoribus quot m habet vnitates. Quantis moliminibus demonstratae sunt regulae generales eruendi ex quauis aequatione data radices, si quas habet, rationales: irrationales? quanto ingenti labore *) inuestigatum est, vt, quemadmodum primo statim intuitu ac consideratione ex exponente incognitae supremae numerus radicum, h. e. posito exponente $m = m$, numerus terminorum, $(m+1)$ et ex successionibus ac permutationibus signorum, quibus aequationis termini iuxta ordinem exponentium ordinatae affecti, numerus radicum positiuarum et negatiuarum constet: ita etiam ex eiusmodi consideratione statim innotesceret, vtrum aequatio habeat reales an imaginarias radices. Porro demonstratum est: supra indicatae vniuersalis aequationis et consequenter omnium, sumptis radicum quantitatibus oppositis

p. Coefficientem $m-1$ f. IIdi termini = summae radicum
q - - - - - $m-2$ f. IIItii - - - = summae productorum ex singulis binis
r. - - - - - $m-3$ f. IVti - - - = summae productorum ex singulis ternis
.
.
.
.
.
.
u $m-m$ f. vltimum terminum = producto ex omnibus radicibus

In nulla aequatione ita exhibita apparent radicalitates, quia tum factores irrationales tum imaginarii, qui semper pari insunt numero, ad factores rationales quadraticos reducuntur. Tandem imaginariae ad formam $M + N\sqrt{-1}$ reductae, qua reductione insignis harum quantitum vsus innotuit, et fines semiotices Matheseos prolati. Ingens liber conscribendus esset, si hi progressus semiotices Matheseos iusto Ordine exponendi, ac singula in iis, prouti possunt, rigorosis demonstrationibus firmanda essent. Adeant

*) Vide Colin Maclaurin. Algebra. Sect. II. Cap. XIII.

Adeant qui haec ſcire volunt, analyſin fin. Celeb. Kaeſtneri qui haec ſi quis vnquam ſolide demonſtrauit *) ſimulque in Elementis analyſeos infinitorum ſemioticam infinitorum quantorum luculenter ac copioſe expoſuit.

Mihi haec ſufficiunt, vt aliquam lectores conſequantur, ideam eius ſcientiae, ob quam in virorum alias eruditiſſimorum cenſuram incurrunt Matheſeos cultores. Probe hi quidem erga ſcientias bene affecti viri norunt, intereſſe generis humani, Geometriam, Mechanicam, Aſtronomiam, artem nauticam reliquasue Matheſeos adplicatae partes cognitas perſpectasque eſſe: Probe norunt, intereſſe generis humani vt hae ſcientiae, quibus potentia viresque hominum nituntur, tam tate, quantum fieri poſſit, propagentur. Id vero ſe neſcire fatentur, cur, quo quis Matheſi ſit magis addictus, tanto magis noctes diesque excolendae Matheſeos ſemioticae impendat, mundusque voluminibus non niſi literis ac characteribus repletis obruatur? Quare nihil iis magis vſitatum, quam vt contra eandem tanquam ſubtilem inanemque artem, quae *ſolius ingenii oſtentandi temporisque fallendi gratia immenſo labore ſuſcipitur* ac colitur, magno animo feruore declament. Idque eo efficiunt, vt inter noſtrates vix vnum vel alterum exorare poſſis, qui ei addiſcendae ſe accingere velit. Magno itaque cum ſtudio expreſſi veſtigia, quibus ingenium humanum in eruendis veritatibus Mathematicis inceſſit, quaeque premendo Geometriam ad eam amplitudinem perduxit, quam hodie admiramur, vt, ſi forte haec legere dignentur, intelligant, *nullam* eſſe compendioſiorem viam ad addiſcendas, quas colunt, ac amant aut ſaltem amare prae ſe ferunt, Matheſeos omnis partes, eas excolendas, atque ad Phyſicam, artes, vitamque communem adplicandas, quam eam, quam ſemiotica Matheſeos ſternit. Lente progredimur Methodo ſynthetica: et vbi vna alteraque propoſitio memoria exciderit, nexus ſyſtematis rumpitur, et cum artificia inueniendi in ea lateant, ſemper fere in diſcentium numero verſandum: Analyſeos Veteris Geometricae artificiis inſtructa ingenia etiam non mediocria in Problematis grauioris momenti defatigantur, adeo, vt iis ſolis in omnibus ſcientiis Mathematicis graſſari liceat, qui ſemiotices Matheſeos praeſidiis inſtructi ſunt. Magno itaque foenore compenſatur iactura illius temporis, quod addiſcendae nobili huic ſcientiae impenditur. Quod vt tanto luculentius Iuuentuti Academicae pateat, vtilitates ex ſemiotice Matheſeos ſtudio expectandae exemplis

*) Confer eiusdem Viri Cl. Differt. de Theoria radicum in aequationibus Lipſ. 1739. hab.

emplis illustrabo, ad quas omnia Matheseos capita, in quibus semiotica applicatur, reduci possunt.

Considerent velim mecum, quantum Geometriae apparatum animo praesentem habere debeant, si methodo synthetica, cuius ideam in addiscendis propositionibus elemen. consequuntur plerique, vnica propositio cognoscenda. Sumamus quaeso 10 prop. XIII Elem. Euclidis, quam fig. 1. exprimendam curaui: Demonstratur in ea: latus Pentagoni regularis Circulo inscripti posse latus Decagoni et Hexagoni regularium eidem Circulo inscriptorum. Cuius veritatem perspecturus cogitet, necesse est:

Inscripto in Circulo per 11. IV Elem. pentagono regulari, cuius latus AB ac determinato p. 1, III, Circuli centro F. bifariam secto arcu AB 30 III. ac ductis Chordis AH et HB sectoque iterum arcu AH bifariam per rectam FK, quae secat etiam rectam AH in I et AB in M.

1 AF, BF esse latus Hexagoni regularis Circulo eidem inscripti	15. III.
2 $AH = HB$ et consequenter esse latus Decagoni regularis eidem Circulo inscripti	29. III.
3 Angulum $AFH =$ ang. BFH	27. III.
4 rectam $AI = IA$	4. I.
5 Ang. $BIF = FIA =$ Rectis	def. 10. I.
6 $AI = IH$	4. I.
• et $AIF = FIH =$ Rectis	
7 esse Arcum $ABCG =$ arcui $AEGD$	def. 17. I.
8 Arcum $CG = GD$, $CG = \frac{1}{2} CD$	3. et 4. Ax. I.
9 Arcum $AH =$ arc. CG.	1 Ax. I.
10 $2\,AK = CG$	1 Axiom.
11 $2\,BC = 2$ arcui BH	1.
12 Arcus CG et BC esse aeque multiplices arcuum HK, BH	1. V.
13 Arcum $BG = 2\,BK$	
14 Angulum $BFG = 2\,BFK$	33. VI.
15 Angulum $BFG = 2\,FAB$	20. III.
16 Angulum $BFK = FAB$	1. Axiom.
17 $\Delta\, ABF$ et $\Delta\, FBM$ esse aequiangula	32. I.
18 $AB : BF = BF : BM$	4. VI.

19 $AB . BM = BF^2$ — 17. VI. . A)
20 $AM = HM$ — 4. I.
• Ang. $LAM = LHM$
21 Ang. $LHM =$ Ang. HBA — 5. I.
22 Ang. $LAM =$ Ang. HBA — 1. Axiom.
23 $\Delta\ HBH$ et $\Delta\ AMH$ aequiang. — 32. I.
24 $AB : AH = AH : AM$ — 4. VI.
25 $AB . AM = AH^2$ — 17. VI. . B
26 Ex A et B) $AB . AM + AB . BM = BF^2 + AH^2$ — 2. Axiom.
27 $AB . AM + AB . BM = AB^2$ — 2. II.
28 $AB^2 = BF^2 + AH^2$ — 1. Axiom.

Eandem diligentiam, quoniam propoſito meo admodum conformis erat, in reſoluenda hac leui propoſitione Euclidea adhibui quam per integrum Euclidem adhibitam inuenies in editione nouiſſima Bataua *), adeo vt ſtatim ex intuitu pateat, quanta animi contentione ad perſpiciendam alicuius propoſitionis veritatem opus ſit. E contrario *inſtituta leui* analyſi Geometrica patet, totum negotium dependere ab inuentione laterum decagoni regularis et pentagoni. Illud eruitur facile. Eſt poſito radio Circuli $= a. = \sqrt{(\frac{5}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a$. quod pono $= b$. Pentagoni vero latus poſito $AB = x\ AG = \frac{1}{2}x. GE = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2}. FG = a \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2})$ eruitur ex $AF^2 = FG^2 + AG^2$.

$$b^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}xx}$$

per regulas ſemiotices Matheſeos eſt

$$4a^4 - a^2x^2 = b^4 - 2a^2b^2 + 4a^4$$

$$x^2 = 4b^2 - \frac{b^4}{a^2}$$

Eſt vero $b = \sqrt{(\frac{5}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a;\ b^2 = \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}.$

$$b^4 = \frac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2},$$

Ergo

$$x^2 = 4\left(\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}\right) - \left(\frac{14a^4}{4} - \frac{3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}}{4}\right) : a^2$$

$$= \frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$= a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

ſed $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = b^2$

Ergo

*) Elemens de Geometrie contenant les ſix livres D'Euclide par Mr. Le Profeſſeur Koenig augmentes de l'onzieme et douzieme livres par I. I. Blaſſiere a la Haye 1762.

Ergo $x^2 = a^2 + b^2$. h. e. latus pentagoni poteſt latera hexagoni ac decagoni eidem circulo inſcriptorum. Huc pertinent pleraeque propoſitiones Euclideae, paucis admodum elementaribus exceptis, Archimedeae, Apollonianae et omnes ſublimioris Geometriae, quarum demonſtrationes methodo ſynthetica digeſtae adeo difficiles, vt ſummi Viri, cum eas bis terque legiſſent omnesque animi vires intendiſſent, ab earum contemplatione tamen dubii receſſerint, an vim illarum totam perceperint, quae ope ſemiotices Matheſeos tractatae omni difficultate carent, adeo vt ea ipſa facilitas, quam illis haec nobilis ſcientia conciliat, in cauſa ſit, cur eam nonnulli non magni aeſtiment.

Habet vero ea et exinde ſingularem commendationem, quod ſoluendo eius artificiis problemata, in quae pleraque Theoremata conuerti poſſunt, non ſolum Analyſis, qua veteres vſi ſunt, Geometrica abrumpitur, ac intellectus a ratiocinandi contentione requieſcere poteſt; nihilo tamen minus problema ad formulam, omnes caſus, de quorum vnico tantum mens in ipſo inuentionis opere cogitauit, complectentem deducitur. Hoc illud ipſum eſt, quod mirifice percellere ſolet animos illorum, qui id primum in hac ſcientia animaduertunt. Dabo eius rei exemplum non ſublime ſed rem ipſam egregie illuſtrans. Sit propoſitum: determinare ac inuenire centrum Circuli tangentis alterum Circulum datum magnitudine ac poſitione in eodem plano ac rectam itidem poſitione datam ac tranſeuntis per punctum datum. Satisfacturus his Problematis conditionibus ſigillatim primum, poſt coniunctim non niſi vnius Circuli centrum determinandum quaerit, ac in ſchematiſmo qualem figura 2. expreſſi vel alio ſimili ponit inuentum eſſe illud centrum in N. gnarusque Geometriae colligit:

1. Ductas rectas ex Centro ad puncta contactus et ad punctum per quod tranſit Circulus. h. e. AN, NE, ac NI eſſe aequales.
2. Biſariam ſecta recta expuncto, per quod tranſit Circulus inuentus, dato ad datam BD perpendiculari in puncto M, ducta per biſariae ſectionis punctum recta ML et iunctis punctis I et A recta; hanc rectam in O biſariam ſecari. Quia BI parallela MO eſt itaque $AM : AB = AO : AI$ ſed $AM = \frac{1}{2} AB$. Ergo $AO = \frac{1}{2} AI$.
3. Eſſe Δ ANI. Δgulum aequicrurum ac NO eſſe perpendicularem.
4. Eſſe Δgula NOL et LOI aequiangula ac proinde

$$NL : OL = OL : LI \text{ ſit } OL = x \quad NL = y \text{ atque}$$
$$y : x = x : c \qquad LI = MB = AM = \tfrac{1}{2} AB = c$$

Cum

Cum duae ſint incognitae vlterius colliget.

5. Pro ducta recta NI verſus H ita vt $IH = EC$ fore. $NE + EC = NI + IH$ et connexis punctis H et C recta HC, eſſe NCH. Δgulum aequicrurum.

6. Demiſſo perpendiculo CD in rectam datam BD eoque producto donec $DG = IH = EC$, HG parallelam BD eſſe.

7. Bifariam ſecta recta CG in Q. et per punctum bifariae ſectionis ducta recta QR parallela BD, ſecare eam rectam CH in P bifariam atque rectam NP fore ad HC perpendicularem et Δgula NPK, PKH et NPC ſimilia, conſequenter eſſe

$NK : KP = KP : KH$. vocatis $BD = 2a$ $CQ = QG = KH = b$. $MR = LK = d$. Erit $PQ = KP = a - x$. ac per analogiam inuentam

$$d + y : a - x = a - x : b.$$

$$db + by = a^2 - 2ax + x^2.$$

ſed $y = \frac{x^2}{y}$ per analogiam I^mam^.

Ergo

$$a^2 - 2ax + x^2 = bd + \frac{bx^2}{c}$$

$$c(a^2 - 2ax + x^2) = bdc + bx^2$$

$$cx^2 - bx^2 - 2acx = a^2c + bdc$$

$$x^2 - \frac{2ac}{c-b} + \frac{ac - dcb}{c-b.} = 0$$ ſit $c - b : a = c$: quartam

eaque dicatur . f erit $f = \frac{ac}{c-b.}$: ſit porro $a : b = d$: quartam proportionalem

eaque dicatur g erit $g = \frac{db}{a}$ et aequatio anterior mutabitur in hanc

$$x^2 - 2fx + (a - y)f = c$$

Cumque facile inueniatur inter $a - y$ et f media proportionalis ſitque ea h. erit vltima aequatio

$$x^2 - 2fx + h^2 = 0.$$

Expo-

Exponens ipſius incognitae ſupremae, quamuis vnius ſolum in ſolutionis opere haberetur Circuli inueniendi ratio, indicat poſſe eſſe duos huiusmodi circulos, qui Problemati ſatis faciunt. A radicibus vero huius aequationis eorum centrorum ac proinde circulorum ſpecialis determinatio pendet. Radices vero determinantur determinato et ſigno termini IIdi et ſigno termini IIItii: hoc vt fiat, poteſt eſſe $c \; 7 \; b$ aut $b \; 7 \; c$ aut $c = b$. in caſu I. terminus IIdus neceſſario $-$. poſito IIdo $- 2fx$ mutabitur in $+ 2fx$ et IIItio caſu abit in hanc $- 2fx + b^2 = 0$ IIItii termini ſignum determinatur ex eo, quod $a \; 7 \; g$ tum terminus iſte neceſſario $+$. ſignabitur: vel $a \; L \; g$ tum erit $- b^2$. vel $a = g$, tum iſte terminus euaneſcit. Vnde ſequentes orientur ſolutiones.

1. $x^2 - 2fx + b^2 = 0$ radices $(x - f + \sqrt{-b^2 + f^2}) \cdot (x - f - \sqrt{b^2 + f}) = 0$
2. $x^2 - 2fx - b^2 = 0$ - - - - $(x - f - \sqrt{b^2 + f^2}) \cdot (x - f + \sqrt{b^2 + f^2}) = 0$
3. $x^2 + 2fx - b^2 = 0$ - - - - $(x + f + \sqrt{b^2 + f^2}) \cdot (x + f - \sqrt{b^2 + f^2}) = 0$
4. $x^2 + 2fx + b^2 = 0$ - - - - $(x + f + \sqrt{-b^2 + f^2}) \cdot (x + f - \sqrt{-b^2 + f^2}) = 0$
5. $x^2 - 2fx \quad = 0 \qquad (x - 0) \cdot (x - 2f) = 0$
6. $2fx - b^2 \quad = 0 \qquad x - \frac{b^2}{2f} = 0$

Sollicita haec omnium caſuum euolutio eo ſpectat, vt inſignis ac vix ab aliis Methodis tractandi Mathemata expectandus vſus ſemiotices Matheſeos declaretur. Quantum cognitionis compendium! quantum memoriae ſubſidium! vna formula complexum id, quod ne cogitatione quidem, cum in ea eruenda occupatus eras, intendebas, intueri, quod ad plenariam rei comprehenſionem neceſſarium eſt, quodque non niſi magna ingenii defatigatione ac temporis magno impendio alia via cognoſceretur, inprimis cum amplitudo ſcientiae ad vlteriora inuitet, ac vita humana arctis admodum limitibus circumſcripta vetet quaerere difficiliore via, quod breuiori aeque certe inuenitur. Quanto itaque aeſtimabunt aequi rerum iudices eorum ſcripta, qui e. g. Perſpectiuam, Catoptricam, Dioptricam, Gnomonicam, aliasque Matheſeos applicatae partes ex vaſtis voluminibus methodo ſynthetica vel veteri Analytica digeſtis ad eiusmodi formu-

las

las et aequationes reduxerunt. Eae formulae ſunt profecto fideliſſimae interpretes continuitatis Geometricae: eae exhibent ſcripturae genus, ex quo animus legibus Semiotices Matheſeos aſuetus legit, et quicquid viſui exponi et quicquid eo comprehendi nequeat, quaeque poſſibiles, quaeque impoſſibiles in dato caſu conditiones ſint. Quam illuſtria ex Geometria ſubliimiori exempla huc transferri potuiſſent? addam vnicum complexum formula $u^4 - b z u^2 - z^4 - 2 b z^3 = o$ cuius ramus expreſſus fig. 9. Haec ex legibus ſemiotices puncta multiplicia concernentibus tractata redit ad hanc

$$\frac{dz^3}{du^3} + \frac{dz}{2\,du} = o$$ Eius itaque radices erunt

$$\frac{dz}{du} = o \quad \text{et} \quad \frac{dz}{du} = + \sqrt{-\tfrac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{du} = - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}$$

Quae ſatis indicant in puncto G. adeſſe triplex punctum inuiſibile, quod ad eius rami comprehenſionem neceſſarium, quodque *non viſu, ſed ratione* ope aequationis aſſequitur. *Plura dabunt volumina* Geometrarum *). Et Kaeſtneri Viri Cl. programmata ei, qui ea intelligit, auro cariora, ſatis ſuperque, ſatis declarant, quanti in ſcientiis Mathematicis ex genuino ſemiotices vſu progreſſus expectandi.

Tandem venio ad illuſtrandum Semiotices Matheſeos vſum longe praeſtantiſſimum, qui *nouiſſimis demum temporibus innotuit.* Nobilis haec ſcientia ſuis, quas in ante memoratis commodis aliunde mutuo ſumpſit, viribus nixa ac ſuffulta nobis ad ſublimiorem Geometriam viam aperit et a cognitione longe remotiſſimas veritates docet. Ex quo enim tempore eas, quas ſupra laudaui, regulas de natura aequationum ſagax ſummorum virorum ſolertia detexit, et ex iis inprimis eas, in quibus duae incognitae ſeu variabiles vna cum conſtantibus arbitrariis, quarum altera eſt alterius functio, profundius rimata eſt, non poterat non detegere feliciſſime: eiusmodi aequationum completarum ſeu vniuerſalium ac in aequationes ſimplices irreſolubilium contineri, poſito $n.$ exponente alterutrius incognitae ſupremae, terminis numero $\frac{(n+2).(n+1)}{2.}$ hinc omnes aequationes ordinis I continentur hac

$$a + bx + cy = o$$

Ordinis

*) Gabriel Cramer introduction a l'analyſe des lignes courbes algebraiques Chap. XIII.

Ordinis IIdi termini continent primum ordinem, ac praeterea quadrata cuiusuis incognitae in ſuos coefficientes ac productum vnius incognitae in alteram ductum incoefficientem vt totus ordo complectatur formula, cui ſubſunt omnes quadraticae aequationes:

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = o$$

Ordo tertius continet IIdum ac praeterea cubos cuiusuis incognitae in ſuos coefficientes praetereaque producta ex quadrato cuiusuis incognitae in alterum in ſuos coefficientes adeo, vt prodeat IIItii ordinis

$$a + bx + cy + dx^2 + cxy + fy^2 + qx^3 + hy^2x + ix^2y + ky^3 = o$$

Vlterius ingenii ſubtilitas progreſſa demonſtrauit diuiſa aeqnatione cuiusuis ordinis per coefficientem incognitae ſupremae vniuerſales has aequationes eo non fieri incompletas ac minus vniuerſales ideoque reduxit facilitatis gratia numerum coefficientium in quauis ad $\frac{n\ (n + 3)}{2}$

et formulas ad

$$\text{I. } \frac{a}{o} \pm \frac{b}{c} x + y = o$$

$$\text{II. } \frac{a}{f} + \frac{b}{f} x + \frac{cy}{f} + \frac{dx^2}{x} + \frac{cxy}{f} + y^2 = o$$

$$\text{III. } \frac{a}{k} + \frac{bx}{k} + \frac{cy}{k} + \frac{dx^2}{k} + \frac{exy}{k} + \frac{fy^2}{k} + \frac{gx^3}{k} + \frac{hy^2x}{k} + \frac{ix^2y}{k} + y^3. = o.$$

Lexque IVti ordinis formulam, cuius ordinis curuas, et ab Abbate de Gua, et ab illuſtri Eulero *), a quo mea potiſſimum deſumpſi, et a Gabriele Cramero pertractatae, formandi reliquorumque ex antecedentibus patet.

In aſſumpta recta AB fig. 3, quae huic rei perquam eſt accommodata, quaeque vocari ſolet axis variabilis x, ſume valores ab ∞. . — 1. 0. + 1 . . . ∞ h. e. conſtituto in E puncto arbitrario, vbi $x = o$, quodque punctum vocatur origo x, cape partes arbitrarias, quarum quaeuis

*) in introductione ad analyſin infinitorum Cap. IV. ſequentibus.

quaeuis reprefentat x, appellaturque abfciffa adeo, vt omnes x repraefentari poffint. Sumptis enim dextrorfum $+x$ erunt ex natura oppofitarum quantitatum finiftrorfum $-x$. Secet iam recta AB Axin abfciffarum fub quouis angulo, cui eft nomen Axis Ordinatarum ac Angulo Anguli Coordinatarum, ac educantur ex extremitate cuiusuis abfciffae rectae parallelae Axi Ordinatarum, erunt hae rectae ipfae ordinatae, vt PM, $\pi\mu$, earumque fuperiores fi fuerint $+y$ erunt inferiores $-y$ adeo, vt hae rectae crucem *Analyticam* conftituant in qua ex hypothefi omnes $+x$, $+y$ in angulum CEB: omnes $+x$, $-y$ in angulum DEB: omnes $-x$, $+y$ in AEC, et omnes $-x$, $-y$ in AED cadant.

Quibus pofitis in quouis ordine, vt folius Semioticae Mathefeos ope figura lineae determinetur, nulla re opus, quam vt arbitrariae conftantes in in primo, $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ definiantur, hoc fit pofito $y=o$, erit enim tum $x=-\frac{a}{b}$ et pofito $x=o$ erit $y=-\frac{a}{c}$. Ex quo patet, cadere aequationem in angulum crucis analyticae AED, atque lineam duobus punctis determinari h. e. effe rectam. Sumptisque nunc valoribus x. totius lineae tractus determinatur, itaque determinatis arbitrariis conftantibus effe vnicam. Cum vero innumeris modis determinari aliis poffint, hi coefficientes: innumerae rectae eadem aequatione continentur. Sit e. g. $-b$. et $-c$ erit $-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}x+y=o$. fiue $a-bx-cy=o$. facto $y=o$ erit $x=\frac{a}{b}$ et $x=o$ erit $c=\frac{a}{c}$ hinc cadet y in angulum CEB et fig. 4tae facile aptabitur fumpta $AC=\frac{a}{b}$ et $AD=\frac{a}{c}$ $PC=\frac{a}{c}-x$. Erit $\frac{a}{c}:\frac{a}{b}=\frac{a}{c}-x:y$. hinc $a-bx-cy=o$ *)

Eadem arte lineae ordinis II. fi aequatio in factores fimplices irrefolubiles per quinque puncta determinantur, nec poffunt non effe conicae, quod vel exinde patet, quod pofito angulo coordinationis CAB: fig. $5=1$ et $f=1$, $a=c=d=e=o$: et $b=-a$.

orietur $y^2=ax$.

et

*) vide Cramer. l. c. cap. III.

et $a = c = e = o \quad f = 1 \quad d = b$ et $b = \pm \frac{b}{a}$

orientur. $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ et

$y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ ſimulque patet, imminuto numero coefficientium in ordinis IIdi aequatione infinitas dari curuas ordinis IIdi, quae per puncta haec deſcribi poſſunt. Econtrario ſeruatis omnibus quinque determinationibus, quae quinque dant puncta, per quae non niſi vnica IIdi ordinis curua duci poteſt. Determinantur vero aſſumpto angulo coordinationis CAB erectisque ſub eo angulo dD, eE, AC

ſit

$AB = m \quad AC = n$

$Ad = l \quad eE = r$ ſit aequatio $a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = o$

$Ae = q \quad dD\ p$

cum ſit

$x = o \quad y = o$ erit - - - - - $a = o$

$x = o \quad y = n$ - - - - $a + cn + fn^2. = o$

$x = m \quad y = o$ - - - - $a + bm + dm^2 = o$

$x = l \quad y = p$ - - - $a + bl + cp + dl^2 + elp + fp^2 = o$

$x = p \quad y = r$ - - - $a + bq + cr + dq^2 + eqr + fr^2 = o$

Ex tribus prioribus $a = o \quad c = -fn \ : \ b = -dm$

quibus in reliquas duas ſubſtitutis. erit

$-dmt - fnp + dlq + elp + fp^2 = o$ hac per qr

$-dmq - fnr + dq^2 + erq + fr^2 = o$ et IIda per lp multiplicatis et ſubtrahendo ſecundam ex prima fit

$$\frac{d}{f} = \frac{npqr - nlpr - pq^2r + lpr^2}{mlpq - mlqr - lpq^2 + l^2qr}$$

$d = pr\ (nq - nl - pq + tr$ et $f = lq\ (mp - mr - pq + tr$ omnes itaque coefficientes determinati ac ex aequatione inuenientur plura puncta ſatis vicina, per quae curua tranſire debet, eiusque ductus facile ſine alio ſubſidio, quam Semiotices Matheſeos cognoſcetur.

Non ſolum vero ductus IIdi ordinis curuarum ac reliquorum ordinum, vt ex antecedentibus patet, ſed et abditiſſimae earum ac generaliſſimae proprietates eruuntur. Dabo aliqua eius rei ſpecimina, cuius largam meſ-

 ſem

ſem ſuppeditant illuſtris Eulerus et Cramerus l. c. reducatur aequatio ad hanc formam.

$$y^2 + \frac{(ex + c)}{f} y + \frac{dx + bx + c}{f} = o$$

I. Cum coefficiens $y =$ ſummae omnium radicum oppoſitorum ſignorum, ſi ſunt reales, quod fit ſi ordinata bis occurrit curuae, ſumpta itaque AEF pro Axe abſciſſarum fig. 6. ac A origine abſciſſarum ac MP et PN pro ordinatis erit $PM + PN = \frac{-ex - e}{f} = \frac{-eAP - c}{f}$ ducantur aliae ordinatae ſub eodem angulo, erit cum vna ſit negatiua altera poſitiua $np - pm = \frac{-eAp - c}{f}$, hac a praecedenti ſubtracta erit $PM + PN - pn + pm = \frac{e. Ap - AP}{f} = \frac{e\,Pp}{f}$ ex m et n ducantur parallelae axi abſciſſarum, quae occurrent ordinatis in h. et l. et $PM + PN - pn + pm = Mh + Nl$. Ergo $Mh + Nl = \frac{e.\,Pp}{f}$, qua in analogiam reſoluta habebitur elegans proprietas curuarum IIdi ordinis

$$Mh + NL : \begin{Bmatrix} Pp \\ mh \\ nl \end{Bmatrix} = e : f.$$

Si ex extremitatibus maximae ex duabus ordinatis in curuis ordinis IIdi educantur parallelae axi donec occurrant alteri ordinatae productae ſi opus: ſumma partium interceptarum inter parallelas et ramos curuae, quibus occurrunt, erit ad partem parallelae inter ordinatas interceptae in ratione conſtante. Quam ingens ex ea deduci poſſet numerus aliarum propoſitionum easdem curuas concernentium.

II. Terminus aequationis vltimus aequatur producto omnium radicum. Tertius itaque terminus huius:

$$y^2 + \frac{(ex + c)}{f} y + \frac{dx + bx + c}{f} = o$$ h. e. vltimus aequabitur

Producto ex duabus radicibus h. e. $\frac{dx^2 + bx + c}{f} = PM.\ PN.$ fig. 6.

cuius radices AE et AF, proinde $\frac{dx^2 + bx + c}{f} = \frac{d}{f}\,(x - AE).$

$(x - AF)$

$(x - AF) = \frac{d}{f} PE. PF$ Hinc $PM. PN = \frac{d}{f} PE. PF.$ quae in analogiam resoluta dabit alteram bene multorum propositionum foecundam propositionem. Est enim

$$PM. PN : PE. PF = d : f.$$

III. Sumpta aequatione

$$y^2 + \frac{(ex + e)}{f}.y + \frac{dx^2 + bx + a}{f} = o$$

in qua $-\frac{(ex + c)}{f} = PM + PN = 2\,Pl$ si (fig. 7.) $Ml = \frac{1}{2} MN$. Per praecepta Semiotices Matheseos eliminetur IIdus eius terminus, quod in nullo casu fieri poterit, quam illo, in quo negatiua radix = positiuae. Fiat

$$y = z - \frac{(ex + c)}{2f.}$$

Erit $y^2 = z^2 - \frac{(ex + c)}{f}.z + \frac{(ex + c)^2}{4f2}$

$\frac{(ex + c)}{f}y = + \frac{(ex + c)}{f}.z - \frac{(ex + c)^2}{2f^2.}$

$\frac{dx^2 + bx + a}{f} = \frac{dx^2 + bx^2 + a}{f}$

terminis $+ \frac{(ex + c)^2}{4f^2} - \frac{(ex + c)^2}{2f^2}$ reductis prodibit aequatio

$z^2 * - \frac{(ex + c)^2}{4f^2} + \frac{dx^2 + bx + a}{f} = o$ quae continet duas radices aequales h. e. $y - Pl = \pm z$ ac erit

$+ z = PN - Pl = lN.$

$- z = PM - Pl = -lM$

ducatur $Pl = u.$ erit $u = - \frac{ex + c}{2f}$ aequatio pro recta, quae est locus omnium l. et posito $u = o$ Erit $- \frac{ex + c}{2f} = o$ hinc $- ex + c = o$ et $x = - \frac{c}{e}$ cum $u = o$ in Puncto O (fig. 7.) Erit $AO = - \frac{c}{e}$ proinde $PO = - \frac{c}{e} - x = \frac{-c - cx}{c.}$ et Tangens anguli $\frac{PL}{PO} = -$

$\frac{-(cx+c.)}{2f} : -\frac{c-ex}{c} = \frac{c}{2f.}$ Poſitio itaque Diametri bifariam ſecantis ordinatas curuarum IIdi ordinis erga axin abſciſſarum determinata et quidem ope ſolius Semiotices Matheſeos. Determinari poſſet vlterius *KH* deinde *IG*² aliaque maxime recondita ſublimioris Geometriae capita, inprimis ſi poſthaec in vlteriori diſquiſitione in ſubſidium vocaretur Parallelogrammum Newtonianum Analyticum, felix Semiotices Matheſeos proles et ingens eius inſtrumentum.

At dicet forte aliquis, declaraſti praeſtantiam ſemiotices Matheſeos in Geometria, ſed quantum vſum ex ea reliquae ſcientiae ac vita communis capient? Ego multis rationibus inductus in ſcientiis ſolo rationis ductu cognitis poſt morum doctrinam praeſtantiorem ſcientiam praeter Philoſophiam naturalem ſeu phyſicam noui nullam. Quanta ex illa in omnes diſciplinas ac inprimis in artem ſalutarem, a qua multa ſperamus, et in vitam communem redundant commoda? *Quodſi itaque in* ea ſemiotica Matheſeos parem ac eandem exerat vſum, *nullus dubito*, fore, vt quisque credat immenſa eius eſſe in omnes diſciplinas commoda. Rationibus vndique conquiſitis ac conſideratis eorum Phyſices doctorum ſententiam probo, qui phoenomena corporum naturalium ex experientia et experimentis ſumma cum cura inſtitutis colligunt: Collectorum phoenomenorum rationes ex conditionibus virium motricium, quibus corpus in alia corpora agit, vel quibus ab illis ſollicitatur, et ex conditionibus denſitatis, raritatis, figurae, ſtructurae et reliquorum, quibus organiſmus continetur, vel ſi eouſque cognoſcendo penetrare nequeunt, ex phoenomenis generalibus et Legibus motus explicant. Palmariam itaque Phyſices partem abſoluit accurata Legum motus cognitio. Hae enim Claues ſunt, quibus pandectae aeui et liber Dei *) arbitri ſeculorum recluduntur. Hae vero ſumma Virorum ſumorum ſubtilitate ad eiusmodi formulas ſ. aequationes iam diu reductae ſunt, quibus in Geometria illa inſignia commoda ope ſemiotices obtinentur. Eccui ignotum differentiale celeritatis corporis ſe vi quadam ſecundam legem datam variante mouentis, eſſe in fine temporis dati vt rectangulum ex vi illa in fine temporis dati in differentiale temporis praeterlapſi. Cogitetur figura 8. ſolum mixtilineum *ABPM*. Exprimat *AP* abſciſſa tempus; ſitque *AB*: *PM* = Vis in initio motus: vim in fine temporis *AP*, ſit curua *BM* locus

*) Account of Sir. Iſaac Newtons. Philoſophical Diſcouveries by Colin Maclaurin p. 54.

cus Geometricus omnium *M*. *AMBP* ſpatium exprimet ſummam omnium ſolicitationum vis agentis tempore *AP*. eritque conſequenter celeritas acquiſita. Eſto vis $= P$ celeritas $= c$ aequiſita tempore $= t$ et $s =$ ſpatio emenſo: erit $dc = Pdt$. Eccui porro ignotum: differentiale ſpatii emenſi a corpore celeritate ſecundum aliquam legem datam variante eſſe vt rectangulum ex celeritate in fine temporis in differentiale temporis elapſi ita ſi figura 8. fuerit $AB : PM =$ celeritas in initio motus : celeritatem in fine temporis *AP*. ſpatium *APMB* erit integrale omnium celeritatum conſequenter ſpatium emenſum durante tempore *AP*, in ſubſidium vocatis anterioribus ſignis erit $ds = cdt$.

$$\text{eſt } dc = Pdt \quad \text{multipl.}$$

$$\overline{Pdtds = cdcdt}$$

$$\overline{Pds = cdc}$$

porro ſumpta $ds = cdt$ ac $dt = 1$. erit $dds = dcdt$. quae ſi per $dc = pdt$ multiplicetur erit $dds = Pdt^2$. Quibus aequationibus aſſumptis ponatur $c =$ conſtanti, qualis eſt in motu vniformi, curua *BM* ſit recta *MK* et $\int (cds = cdt) = s = ct =$ rectangulo *AKMP*. vnde veritas theorematum de motu aequabili deduci poteſt. Sit $P = 1 =$ conſtanti vt in lapſu grauium corporum prope ſuperficiem terrae. Curua *BM* ſit recta *Am* (fig. 8.) quae cum baſi *Ap* angulum datum conſtituit eique in *A* occurrit, ſi corpus motum a quiete incipit. Integralia itaque aequationum et quidem ipſius $pdt = dc$ erit $pt = c$. ipſius $pds = cdc$ erit $2ps = c^2$ quod indicio eſt, ſi *Ap* exprimit tempus et perpendicularis *pm* celeritatem, et ſi ex puncto aliquo *m* baſis vt *P* ducatur *PM*. parallela ipſi *pm* Erit tempus *Ap* in motu grauium: tempus $AP =$ celeritas *pm* in fine temporis *Ap*: Celeritatem *PM* in fine temporis *AP*. Et quia $2Ps = c^2$ eſt ſpatium emenſum quadrato celeritatis aequale. Erit $APM : Apm = PM^2 : pm^2. = AP^2 : Ap^2$.

Ita porro a motu vniformi, accelerato eundo ad vires centripetas oſtendi poſſet, quomodo ope ſemiotices ex his formulis tota Phyſica coeleſtis euolui poſſet. Sed haec ſufficiant.

Paucis adhuc adiiciam ſingularem Semiotices vſum in illuſtrandis per experimenta doctrinis ad Phyſicam ſpectantibus iis, quae formulis iam ſunt complexae. Noui equidem probe, bene multa adhuc occurrere in nobiliſſima hac diſciplina, quae legibus ſemiotices nondum ſubiecta, ſtudioque ac operae ſeculorum inſequentium relicta: at id noui etiam, inſignes iam eius partes Geometrarum induſtria ad eum perfectionis culmen

eſſe

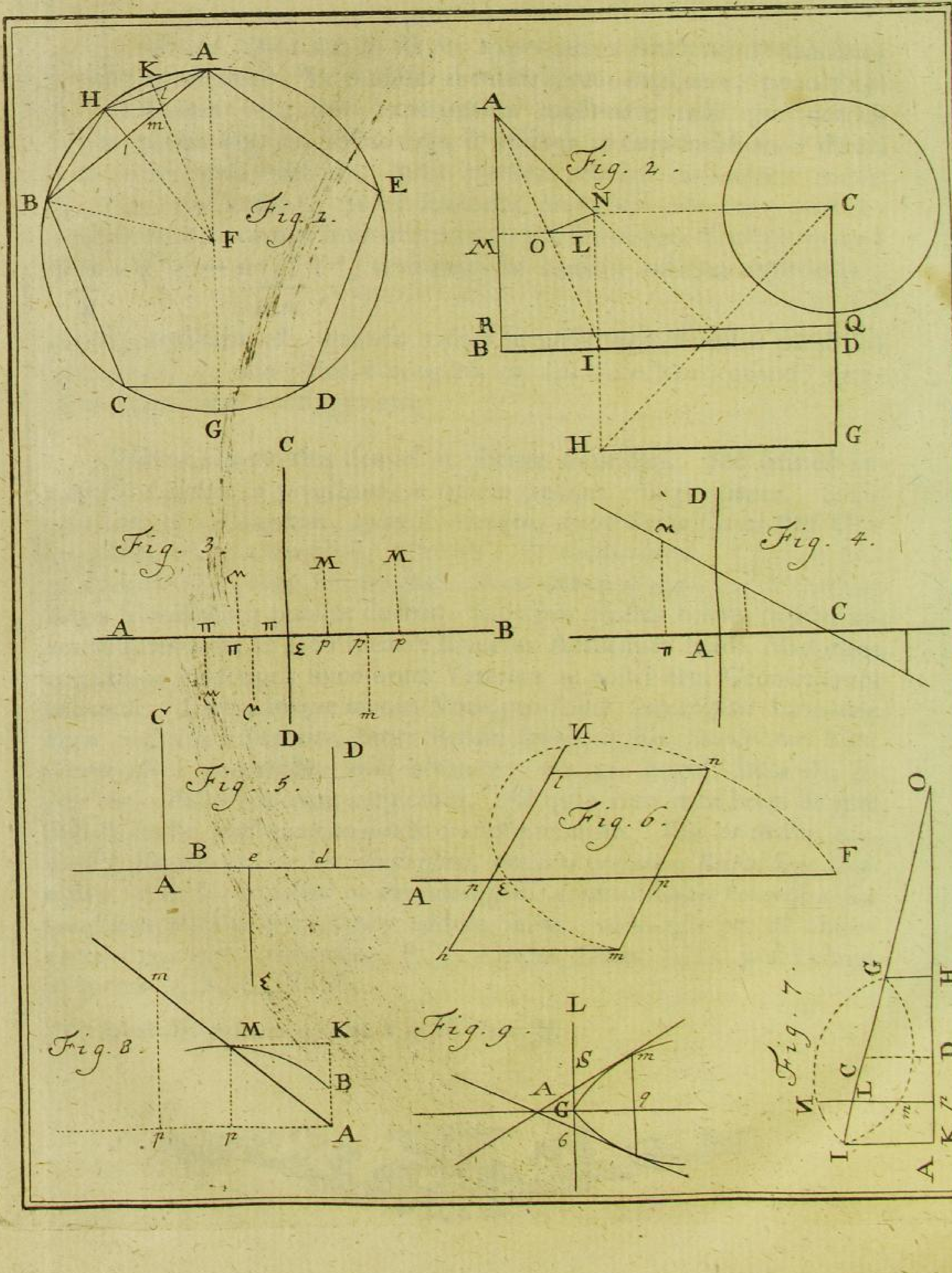
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

eſſe perductas. Quae iam in iis per experimenta confirmandis ſemiotica praeſtat commoda? Vt breuiter mentem meam explicem, pono Phyſices doctorem velle per experimenta confirmare radii per corpus duobus planis, quorum poſitio erga ſe et erga radium incidentem datur, terminatam medii denſioris, quam medium tenuius vndiquaque ambit, refractiones ſecundas. Si ex ſemiotica Matheſeos ſcit radii poſt ſecundam refractionem exitum determinari per formulam: $f. \sqrt{(1 - uu)} + \frac{mu}{n} \sqrt{1 - \frac{nnff}{mm}}$ *) non caſu ſed conſilio inſtituet experimenta atque praeuiſurus eſt, quando radius ſecunda vice refractus parallelus egredietur, quando plane non egredietur ſed reflectetur, quando egrediens ſuperficiem continget etc.

Poſſent iſta vlterius deduci ac vberius dilucidari. Sed ſatis eſt intendiſſe digitum in praecipua, e quibus reliqua colligi queunt. Sufficiunt iſta ad indicandum, quae in munere, quod *Sereniſſimus Rex* Clementiſſime mihi demandauit, obeundo, ſim meditaturus. Quamuis imbecillitatis meae probe ſim conſcius, bono tamen in eam, quam poſthac Regia Munificentia publice docebo, ſcientiam affectus omnes ingenii vires eo intendam, vt Deo Iuuante Iuuentus Academica ſolida Matheſeos cognitione ex ſcriptis ſummorum Veterum ac noſtri aeui Geometrarum imbuatur. Laetus itaque munus Votis pro ſalute *Potentiſſimi Sarmatum Regis ac Electoris Saxoniae, Patris Patriae indulgentiſſimi, Domini mei longe Clementiſſimi gratioſiſſime mihi* oblatum, die 31. Auguſti hora IX. in Auditorio Philoſophorum auſpicabor. Ad quae viam mihi breui de praeiudiciis ſtudio Mathematico noxiis oratione muniam. Cui, *vt Rector Academiae Magnificus, comites illuſtriſſimi, proceres vtriusque Reipublicae Grauiſſimi vt et Generoſiſſimi ac Praenobiliſſimi Academiae ciues honorifica ſua praeſentia decus ac ornamentum* addere velint, omni qua par eſt obſeruantia rogo atque contendo. P. P. Lipſiae, Dom. XIII. poſt Feſtum Trinitatis MDCCLXIII.

*) Kaeſtneri ſyſtema opticae Cap. II. Prop. II.