

34. Zwei besondere Fälle seien noch erwähnt:

a) Tritt vor dem Totpunkte ein Stoß entgegen der Richtung ein, so folgt Verkleinerung der Amplitude und Verzögerung. Nun möge nach dem Totpunkte ein Stoß in der Richtung der Bewegung eintreten, derart, daß die Amplitude auf ihren alten Wert zurückgebracht wird. Damit ist aber wieder eine Verzögerung verbunden. Im ganzen ergibt sich also eine doppelte Verzögerung, ohne daß an der Schwingungsweite etwas zu bemerken ist (s. Art. 1).

b) Ein Stoß vor der Mitte entgegen der Bewegung bedingt Verzögerung, nach der Mitte in derselben Richtung Beschleunigung. Wenn also zu beiden Seiten der Mitte in gleichen Entfernungen von der Mitte gleich starke Stöße in derselben Richtung erfolgen,

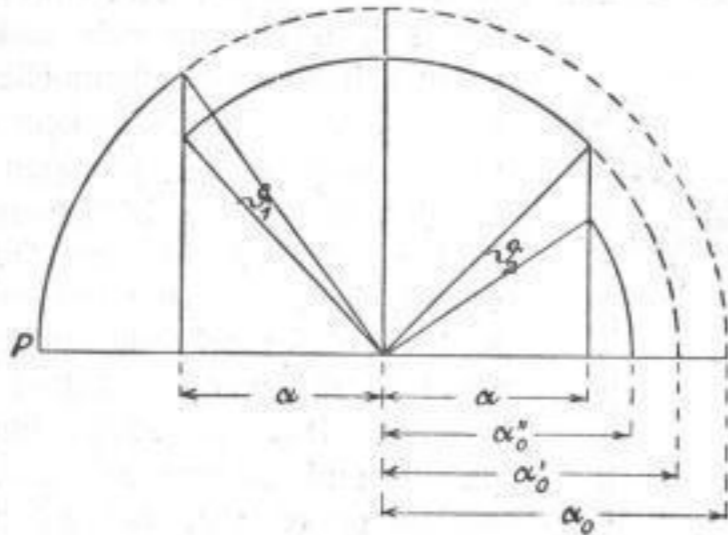


Fig. 17

so heben sich ihre Wirkungen auf. (Fig. 17.) Dies ist jedoch nicht ganz genau richtig. Die Verzögerung vor der Mitte ist

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\kappa}} \cdot \vartheta_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\kappa^3}} \cdot \frac{\alpha I}{\alpha_0 \alpha_0' \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}$$

die Beschleunigung nach der Mitte ist dementsprechend

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{\tau}{\kappa}} \cdot \vartheta_2 = \sqrt{\frac{\tau}{\kappa^3}} \cdot \frac{\alpha I}{\alpha_0' \alpha_0'' \sqrt{\alpha_0'^2 - \alpha^2}}$$

Da  $\alpha_0$  größer als  $\alpha_0'$  und dieses größer als  $\alpha_0''$  ist, so ist der Nenner des zweiten Bruches kleiner als der des ersten, d. h. die Beschleunigung ist größer als die Verzögerung, und zwar beträgt der Unterschied:

$$\Delta t_2 - \Delta t_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\kappa^3}} \cdot \frac{\alpha I}{\alpha_0'} \cdot \left( \frac{1}{\alpha_0'' \sqrt{\alpha_0'^2 - \alpha^2}} - \frac{1}{\alpha_0 \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \right)$$

Die Wirkung der beiden Stöße hebt sich also nicht vollständig auf; es bleibt eine kleine Beschleunigung übrig. Das gleiche ist der Fall, wenn beide Stöße in der Richtung der Bewegung erfolgen. Indessen ist diese Beschleunigung sehr gering; bei den normalen Störungen durch die Hemmung beträgt sie höchstens 1,5% des Fehlers. Deshalb vernachlässigen wir sie bei unseren späteren Untersuchungen. Es sei aber an dieser Stelle ausdrücklich erwähnt, daß, wenn wir später die Wirkungen der Störung aufheben, wir immer noch diesen — allerdings sehr kleinen — Fehler in der Rechnung behalten, also keinen vollkommenen Ausgleich erreichen.

35. Die willkürlichen Stöße, die wir bisher angenommen haben, bieten kein weiteres Interesse, als die Wirkung von Störungen zu erläutern. Anders ist es bei den Störungen, deren Eintreten einer Gesetzmäßigkeit unterliegt.

Wir betrachten zunächst die schädlichen Widerstände. Für diese haben wir in Kapitel II angenommen, daß sie ein Moment geben, dessen Größe auf dem ganzen Wege konstant ist. Wir könnten also ihre Wirkung in dem obigen Bilde interpretieren durch kleine, gleich große Stöße, die in gleichen Abständen wirken. Bei der Durchrechnung würde sich ergeben, daß die Schwingungsdauer vollständig unverändert bliebe. Wir können

dies sehr einfach an der Schwingungsgleichung zeigen. Zu der Gleichung für die ungestörte Schwingung (s. Art. 26)

$$(19) \quad \tau \gamma = -\kappa \alpha$$

tritt auf der rechten Seite das konstante Moment  $\mp \kappa f$ ,

und zwar gilt das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem die Unruh von  $(-\alpha_0)$  nach  $(+\alpha_0)$  schwingt (d. h. in unserer Darstellung von links nach rechts), oder umgekehrt.

Die Gleichung lautet:

$$(30) \quad \tau \gamma = -\kappa \alpha \mp \kappa f$$

$\gamma$  ist null, wenn

$$\alpha = \mp f$$

d. h. der Totpunkt ist von null nach  $\mp f$  gerückt. Nehmen wir nun diesen neuen Totpunkt als Anfangspunkt für unsere Winkelmessung, so geht Gleichung 30 in Gleichung 19 über, d. h., die Verhältnisse sind genau die gleichen wie bei der freien Schwingung. Nur ist der Totpunkt um den kleinen Winkel  $f$  nach der Seite verrückt, von der die Unruh kommt. Dies ließ sich schon rein geometrisch aus dem in Art. 22 Gesagten ableiten.

So ergibt sich der bekannte Satz:

Die Schwingungsdauer wird durch die konstante Reibung nicht beeinflusst.

Wohl aber die Amplitude. Diese ist am Ende der Schwingung nicht  $(+\alpha_0)$ , sondern  $\alpha_4$ :

$$\alpha_4 = \alpha_0 - 2f$$

36. Wir müssen nun einen gleichförmigen Schwingungszustand (*régime permanent*) fordern; der Verlust der Amplitude muß also aufgehoben werden. Dazu dient, wie schon eingangs erwähnt, die von der Hemmung übertragene Arbeit. Die Fläche der Fig. 18 stellt diese Arbeit dar; von  $\alpha_1$  bis  $\alpha_2$  negative Aus-

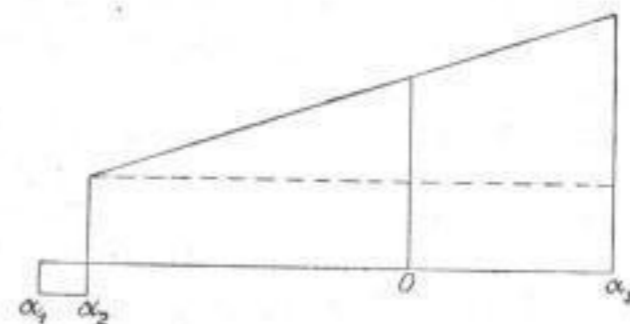


Fig. 18

lösungsarbeit, von  $\alpha_2$  bis  $\alpha_3$  positive Arbeit. Wir denken uns diese Fläche so in schmale Streifen zerlegt, daß die dadurch abgeschnittenen Arbeitsteilchen untereinander gleich sind. Jedes dieser Arbeitsteilchen denken wir uns nun durch einen gleichwertigen Stoß ( $J$ ) in dem betreffenden Punkte übertragen. Ein solcher Stoß im Punkte  $\alpha'$  wird die Schwingungsdauer verändern um das Zeiteilchen (Art. 32, Gl. 29)

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\tau}{\kappa^3}} \cdot \frac{\alpha' \cdot J}{\alpha_0 \cdot \alpha_0' \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}$$

Da der Stoß sehr klein ist, so kann mit genügender Annäherung die neue Amplitude  $\alpha_0'$  gleich der alten  $\alpha_0$  gesetzt werden.

$$(31) \quad \Delta t = \sqrt{\frac{\tau}{\kappa^3}} \cdot \frac{J}{\alpha_0^2 \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \cdot \alpha'$$

Solcher kleinen Stöße sind nun viele; sie unterscheiden sich nur durch die Verschiedenheit ihrer Angriffspunkte  $\alpha$ . Die Summe der Änderungen der Schwingungsdauer, die sie hervorrufen, ist

$$(32) \quad \Delta t = \sqrt{\frac{\tau}{\kappa^3}} \cdot \frac{J}{\alpha_0^2 \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} (\alpha_1 + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \dots + \alpha_3)$$

Dieser Zeitzuwachs  $\Delta t$  muß, wenn alle Schwingungen in der gleichen Zeit vollendet werden sollen, dauernd konstant oder null sein. Der erste Fall ist kaum realisierbar, denn im Laufe der Zeit ändern sich  $\kappa$ ,  $J$  und  $\alpha_0$ . Es wäre also ein höchst merk-