irgend eine Grösse nehmen, welche der Zeichnung entspricht hier z. B. das Centimeter. Bemerken wir auf der Abcissenachse einen Punkt a, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte o gleich α ist. Der Werth von α muss mit der gleichen Einheit, mit welcher α_0 aufgetragen ist, genommen werden; ziehen wir die Ordonate a b, den Radius b o und eine Parallele zu der Abcissenachse b c, so haben wir

$$\frac{bc}{bo} = \sin boc. = \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

Wenn wir jetzt einen zweiten Halbkreis ziehen mit dem Radius $= \sqrt{\frac{A}{M}}$ dessen Längeneinheit wir auch beliebig annehmen können z. B. wie in Fig. 10 gleich 500 mm.

Aus Gleichung (18) ziehen wir

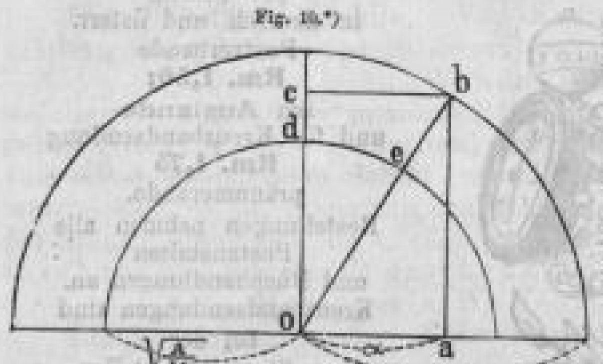
$$\sqrt{\frac{A}{M}} = \frac{T}{\pi} = 0{,}063662.$$

Wenn wir T = 0,2 setzen.

Da die Längeneinheit = 500 mm. ist, so haben wir

$$\sqrt{\frac{A}{M}} = 500 \times 0{,}063662 = 31{,}831 \text{ mm.}$$

Fig. 10.*)



Die Zeit wird ausgedrückt durch den Bogen d e, dessen Radius $= \sqrt{\frac{A}{M}}$ ist, und dessen sinus $= \frac{bc}{bo} = \frac{\alpha}{\alpha_0}$ ist.

Wollen wir nach Gleichung (17) den Zeitabschnitt berechnen, welchen die Unruhe einer Ankeruhr braucht, um die Winkel von 30° zu durchlaufen, während welchem die Unruhe mit der Hemmung in Berührung ist. Berechnen wir zuerst die Zeitdauer der Hälfte dieses Winkels, und verdoppeln dann das erhaltene Resultat. Wir haben dann $\alpha = 15$ Grad und nehmen wir $\alpha_0 = 270°$ an.

Es ist also

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{15}{270} = 0{,}05555. = \sin 3^\circ\ 11'\ 5''$$

Der Bogen dessen sin = 0,0555 . . oder der Bogen eines Winkels von 3° 11′ 5″ ist = 0,0555839.

Wir haben also

$$t = 2\left(\sqrt{\frac{A}{M}} \operatorname{arc\,sin} \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) = 0{,}063662 \times 0{,}0555839 \times 2 = 0{,}007077 \text{ Sec.}$$

Setzen wir in Gleichung (18) für A und M die in Gleichung (1) und (14) gefundenen Werthe, so erhalten wir

$$\text{(19)} \qquad T = \pi \sqrt{\frac{\frac{P}{g} R^2 L}{E \frac{1}{12} e^3 h}}$$

$\frac{P}{g}$ bezeichnet die Masse der Unruhe; dieser Werth ist constant; es wird daher die Zeitdauer einer Schwingung nicht geändert, wenn eine Uhr oder ein Seechronometer vom Aequator dem Pole näher gebracht wird.

Ist die Zeitdauer T einer Unruheschwingung gegeben, und ist das Trägheitsmoment der Unruhe $A = \frac{P}{g} R^2$ ermitttelt, so kann nach Gleichung (19) die Dicke des Spiraldrahtes, aus welchem die Spiralfeder hergestellt werden muss, berechnet werden.

Gleichung (19) geht zu diesem Zweck über in

$$\text{(20)} \qquad e = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 P R^2 L\, 12}{T^2 E h g.}}$$

Dieser Werth von e kann sehr leicht mit Hülfe der Logarithmen gefunden werden.

Man bestimmt zuerst die Länge der Spiralfeder, sei es wie z. B. für eine cylindrische Spiralfeder nach dem vorhandenen Platz und dem Durchmesser der Unruhe, oder für eine flache Spiralfeder nach dem Durchmesser der Unruhe und der Anzahl der Umgänge, welche man der Spiralfeder geben will. Ferner muss man sich die Höhe derselben als gegeben denken, was in der Praxis mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist.

Nehmen wir ein Beispiel an.

$$\begin{aligned} \text{Sei } P &= 0{,}6 \text{ gr.} \\ R &= 8{,}25 \text{ mm.} \\ L &= 265 \text{ mm.} \\ h &= 0{,}22 \\ T &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Log. π^2 = 0,9942997	
+ Log. P = 0,7781513—1	Log. T^2 = 0,6020600—2
+ Log. R^2 = 1,8329078	+ Log. E = 7,4149733
+ Log. L = 2,4232459	+ Log. h = 0,3434227—1
+ Log. 12 = 1,0791812	+ Log. g = 8,9916159
Log. d. Zähl. = 6,1077859	Log. d. Nenn. = 9,3510719
—Log. d. Nenn. = 9,3510719	
Log. e^3 = 2,7567140—6	
Log. e = 0,9189047—2	

und daher

e = 0,082966 mm.

Bei dieser Berechnung haben wir angenommen, dass der Querschnitt der Spiralfeder ein Rechteck bildet. Sind aber die beiden kleineren Seiten dieses Querschnittes abgerundet, so müsste die Form dieses Querschnittes vorher bestimmt werden, und dann der Werth von M in Gleichung (14) hiernach berechnet werden. Die Abweichung dieses Querschnittes vom Rechteck ist unbedeutend.

Gehen wir zu Gleichung (19) zurück und setzen uns die Aufgabe, zu berechnen, um wieviel eine Spiralfeder verlängert oder verkürzt werden muss, um in dem täglichen Gange einen Unterschied von α Secunden hervorzubringen.

Sei T die Zeitdauer einer Schwingung, welche man durch die Veränderung hervorbringen will. N die Anzahl der Schwingungen, welche die Uhr in 24 Stunden machen soll, und L die Länge der Spiralfeder, welche diese Zeitdauer hervorbringen soll.

T′ die Zeitdauer einer Schwingung der Uhr, N′ die Anzahl der Schwingungen, welche die Uhr mit der Länge L′ der Spiralfeder macht.

Wir haben also

$$\text{(21)} \quad \left\{ \begin{aligned} T &= \pi \sqrt{\frac{\frac{P}{g} R^2 L}{E \frac{1}{12} e^3 h}} \\ &\text{und} \\ T' &= \pi \sqrt{\frac{\frac{P}{g} R^2 L'}{E \frac{1}{12} e^3 h.}} \end{aligned} \right.$$

Wenn wir eine der beiden vorstehenden Gleichungen durch die andere dividiren, so erhalten wir

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{L}{L'}}$$

Wir haben

$$T = \frac{86400}{N} \text{ und } T' = \frac{86400}{N'}$$

$$\text{also } \frac{T}{T'} = \frac{N'}{N}$$

Es ist aber $N' = N \pm a n$

n bezeichnet die Anzahl der Schwingungen, welche die Uhr in einer Secunde machen soll. a ist positif, wenn die Uhr vorgeht und negatif, wenn sie nachgeht. Also:

$$\frac{T}{T'} = \frac{N \pm a n}{N} = 1 \pm \frac{a n}{N} = 1 \pm \frac{a}{86400} = \sqrt{\frac{L}{L'}}$$

$$\text{und } L = L' \left(1 \pm \frac{a}{86400}\right)^2$$

Woraus wir die verlangte Veränderung der Länge der Spiralfeder mit aller Strenge berechnen können.

Ist aber a klein im Verhältniss zu 86400 so können wir setzen

$$\left(1 \pm \frac{a}{86400}\right)^2 = 1 \pm \frac{2a}{86400}$$

also

$$\text{(22)} \qquad L = L' \pm L' \frac{2a}{86400}$$

Sei a = 60 Secunden so erhalten wir

$$L = L' \pm \frac{L'}{720}$$

Die Veränderung der Länge also

$$L - L' = \pm \frac{L'}{720}$$

Nehmen wir L′ = 265 mm an, was ungefähr die Länge der Breguet-Spiralfeder einer 19 linigen Uhr ist, deren Unruhe 19 mm Durchmesser beträgt, so haben wir

$$L - L' = \pm \frac{265}{720} = 0{,}368 \text{ mm.}$$

Bei einer Länge von 216 mm würden wir erhalten

$$L - L' = 0{,}3 \text{ mm.}$$

Dies ist bei dem sogenannten Durchziehen der Spiralfeder von praktischem Werth.

Die Länge L einer Archimedischen (flachen) Spirale lässt sich sehr genau berechnen. Dieselbe ist.

$$\text{(23)} \qquad L = \frac{r}{2}\left(\sqrt{\Theta^2 + 1} + \frac{\text{Log. nep. } (\Theta + \sqrt{\Theta^2 + 1})}{\Theta}\right)$$

in welcher Gleichung r den Radius vector des Endpunktes der Spirale bezeichnet und Θ den Winkel, welchen dieser Radius vector mit der Achse macht, welche durch den Anfangspunkt der Spirale gelegt ist und an diesem Punkte eine Tangente bildet.

Wird aber keine absolute Genauigkeit verlangt, so kann man die Länge der Spirale sehr annähernd finden durch die Gleichung

$$\text{(24)} \qquad L = (r'' + r')\, \pi\, n$$

in welcher r″ und r′ den grössten und den kleinsten Radiusvector bezeichnen, und n die Anzahl der Umgänge der Spirale.

Es kommt auch vor, dass man die Veränderung im täglichen Gange durch eine Vermehrung oder Verminderung des Gewichtes der Unruhe hervorbringen will. Wir haben dann

$$A = \frac{P}{g} R^2 \pm \frac{p}{g} r^2$$

In welcher Gleichung p das hinzuzufügende Gewicht und r die Entfernung des Platzes, an welchem die Hinzufügung stattfindet, vom Mittelpunkt bezeichnet.

*) Fig. 10 hat nur ⅕ der Grösse der angeführten Einheiten.