Etwas über die Berechnung von Planetenwerken

Von Aug. Winkler, Niederbühl (Amt Rastatt)

II.

In Nr. 14 dieses Jahrganges (Seite 185) wurde der große Vorteil nachgewiesen, den das Kettenbruchverfahren bei der Berechnung von Planetenwerken und astronomischen Uhren bietet. Heute soll nun noch ein weiteres Beispiel zunächst einfacher Art durchgerechnet werden, um dann das Verfahren in seiner erweiterten Anwendung zu zeigen.

Nehmen wir einmal das schon im vorigen Aufsatze erwähnte einfache Planetenwerk von C. Jul. Späth zum Rechenbeispiel. Wir stellen uns die Aufgabe, eine Übersetzung zwischen dem Merkur-Rade und dem Venus-Rade zu finden, wobei nur ein Wechselrad Verwendung finden soll.

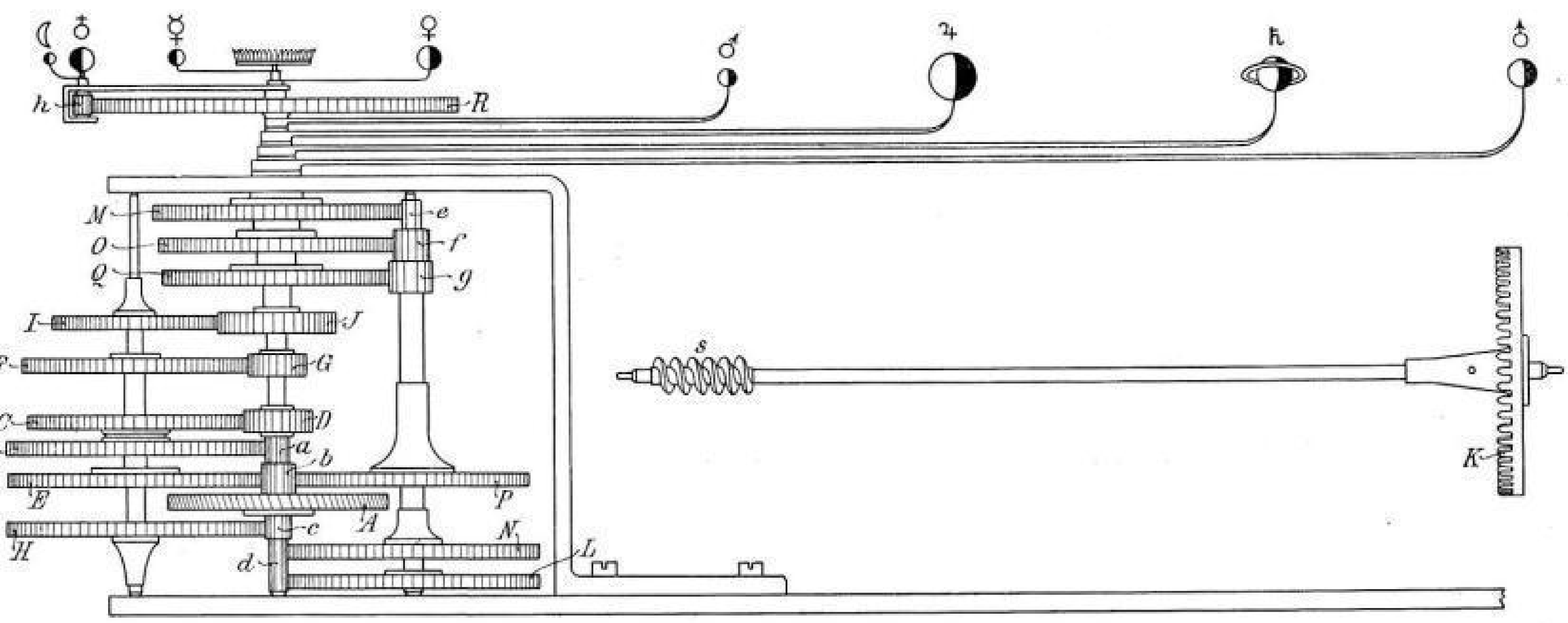
Die Umlaufszeit des Planeten Merkur ist 87,969 26 Tage; die Umdrehungszeit des Merkur-Rades dagegen ist bei diesem Werke durch die Antriebsübersetzung mit der Räderwerksgenauigkeit von annähernd 87,969 35 Tagen gegeben. Wir müssen also diese letztere Zahl in die Rechnung einsetzen, denn es wäre falsch, eine Umdrehungszeit einzusetzen, welche das Rad zwar haben sollte, aber in Wirklichkeit nicht hat. Die Umlaufszeit der Venus ist 224,700 79 Tage. Diese beiden Zahlen bilden, als Bruch angeschrieben, genau wie im vorigen Rechenbeispiel ohne weiteres die Grundlage der Rechnung.

Die ausführliche Kettenbruchentwicklung soll hier aus Gründen der Raumersparnis nicht mehr wiederholt werden. Der Bruch $\frac{87{,}969\,35}{224{,}700\,79}$ liefert zunächst die in dem folgenden Schema eingeschriebenen Näherungswerte:

		2	1	1	4	9	1	1	1
1	0	1	1	2	9	83	92	175	267
0	1	2	3	5	23	212	235	447	682

Wir verzichten einstweilen darauf, die Näherungswerte noch höher zu entwickeln. Wir interessieren uns für den achten Näherungswert $\frac{267}{682}$. Durch einige Divisionen und durch einen raschen Blick in die Faktorentafel finden wir, daß Zähler und Nenner schön teilbar sind. Wenn der Wert sich als annähernd genau erweisen sollte, so wäre die Aufgabe ja schon gelöst. Um dies zu untersuchen, setzen wir wieder, genau so wie in dem früheren Beispiel:

$$\frac{267}{682} = \frac{87{,}969\,35}{V}$$



wobei V diejenige Zahl bedeutet, die sich ergibt, wenn wir den Wert $\frac{267}{682}$ zur Bildung der Zahnzahlen verwenden. Die Gleichung nach V aufgelöst ergibt:

$$V = \frac{682\,.\,87{,}969\,35}{267} = 224{,}700\,737 \text{ Tage}$$

Der Fehler der Übersetzung ist also:

$$224{,}700\,790 - 224{,}700\,737 = 0{,}000\,053 \text{ Tage}$$

was etwa 4½ Sekunden für eine ganze Umdrehung des Venus-Rades ausmacht.

Durch Faktorenzerlegung und entsprechende Erweiterung des Bruches lassen sich nun genau die Zahnzahlen bilden, die Späth für seine Venus-Übersetzung angibt.

$$\frac{267}{682} = \frac{3\,.\,89}{2\,.\,11\,.\,31} \times \frac{2}{2} = \frac{6\,.\,89}{44\,.\,31} = \frac{\text{Zahlen der treibenden Räder}}{\text{Zahlen der getriebenen Räder}}.$$

Es ist also mittels des Kettenbruchverfahrens leicht, eine gute Übersetzung zu finden, wenn einer der genaueren Näherungswerte sowohl im Zähler als auch im Nenner Zahlen aufweist, die sich in genügend niedere Primfaktoren zerlegen lassen. In diesem Falle wird der geübte Rechner immer in einigen Stunden mit einer Arbeit fertig werden, die bei rein tastenden „Kombinationsversuchen" Monate, ja selbst Jahre lang dauern könnte.

Nicht ganz so einfach ist aber die Berechnung in allen denjenigen Fällen, wo Umlaufs- oder Differentialgetriebe in Betracht kommen, also bei der Darstellung der Achsendrehungen der Mond- und Satellitenbewegungen usw.

Als einfaches Rechenbeispiel wollen wir den Mondlauf des oben genannten Planetenwerkes heranziehen und uns die Durchführung der Rechnung an Hand der damals veröffentlichten Abbildung, die hier wiederholt ist, vergegenwärtigen. Die Mondachse ist auf den Erdenzeiger gesetzt, und am Mars-Rade ist ein Rad *R* befestigt, welches das Mondtrieb *h* antreibt.

Hier müssen zuerst die relativen Umdrehungszahlen errechnet werden, bevor der Kettenbruch für die eigentliche Mond-Übersetzung entwickelt werden kann. Diese finden wir durch die folgenden Überlegungen:

Das Erden-Rad macht in
365,256 . 686,979 Tagen 686,979 Umdrehungen

Das Mars-Rad macht in
365,256 . 686,979 „ $\underline{365{,}256}$ „

Die Differenz der beiden Umdrehungen = 321,723 Umdrehungen