der Schwachstromanlage durch schwächere Drähte dargestellt. Die Drähte sind blank, durch Anlegen der Zuleitungen zum Voltmeter kann die Größe der Spannung an jedem beliebigen Punkt der Anlage festgestellt werden. Im linken Teil, über dem Voltmeter, kann in der Rückleitung auf bequeme Weise eine Unterbrechung hergestellt werden. Die Abbildung zeigt, daß an der Unterbrechungsstelle des Schwachstromschalters ein Spannungsunterschied von 110 Volt herrscht, wenn der Stromkreis unterbrochen ist. Ich empfehle, in Zweifelsfällen eine ähnliche Versuchsanordnung anzufertigen.

Etwas über die Berechnung von Planetenwerken

Von Aug. Winkler, Niederbühl (Amt Rastatt)

IV.

(Schluß zu Seite 315)

Nehmen wir nun einmal die Zahlen des elften, zehnten und neunten N. W. zusammen:

$$\frac{11\,406 + 3125 + 2031}{18\,235 + 4996 + 3247} = \frac{16\,562}{26\,478}$$

Der Zähler ist sehr gut zerlegbar in 2 . 7 . 7 . 13 . 13; der Nenner enthält leider den Primfaktor 1471. Beim elften, zehnten und achten ist die Sache ähnlich:

$$\frac{11\,406 + 3125 + 1094}{13\,235 + 4996 + 1749} = \frac{15\,625}{24\,980} = \frac{3125}{4996}$$

Der Wert dieses neu gebildeten Bruches ist gleich dem zehnten N. W., er ist also ebenfalls nicht brauchbar.

Etwas mehr Glück haben wir beim Zusammenfügen des zehnten, neunten und sechsten N. W.

$$\frac{4996 + 3247 + 251}{3125 + 2031 + 157} = \frac{8494}{5313} = \frac{2 \,.\, 31 \,.\, 137}{3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 23} = \frac{62 \,.\, 137}{77 \,.\, 69}$$

Der höchste hier vorkommende Primfaktor 137 ist durchaus nicht zu groß. Hohe Zahnzahlen kommen fast an allen Planetarien vor. Selten nur kann man mit niederen Zahlen ein „krummes Verhältnis" näherungsweise darstellen.

Der zuletzt erhaltene Bruch verspricht übrigens auch ziemlich genau zu sein, denn er weist die Eigenschaften auf, die jeder natürliche N. W. aufweist: er ist nicht kürzbar, d. h. die Faktoren des Zählers sind andere als die des Nenners. Hierauf ist besonders zu achten, denn sobald ein auf diese Art gebildeter Bruch kürzbar ist, wird er meistens ungenau sein. Zwei Lehrsätze aus der Lehre der Kettenbrüche sind hier zu beachten:

„Die N. W. sind in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. Zähler und Nenner sind relative Primzahlen."

„Kein Bruch, dessen Nenner kleiner ist, als der Nenner eines N. W., kommt dem wahren Wert des Kettenbruches näher als dieser N. W."

Es erübrigt sich also, die neu gebildeten Näherungsbrüche auf ihre Genauigkeit zu untersuchen, wenn sie nach ihrer Kürzung kleinere Nenner aufweisen als ein ungenauer N. W. Der Wert des zuletzt gefundenen Bruches geht nur um einen kleinen Betrag fehl; er liefert:

$$\frac{365{,}2422 \,.\, 8494}{5313} = 583{,}920\,053 \text{ statt } 583{,}9200.$$

Das Ziel ist also erreicht, denn wir wollten einen Fehler von 0,00006 Tagen zulassen.

Aus den heutigen Darlegungen geht hervor, daß auch das Kettenbruchverfahren unter Umständen recht zeitraubend sein kann. Nie aber wird die dafür verwendete Zeit und Mühe so groß sein, wie bei der versuchsweisen Zusammenstellung von Zahnzahlen. Ein mir bekannter Kollege hat z. B. zur Berechnung der Antriebsübersetzung für ein nicht allzu verwickeltes Planetenwerk ein ganzes Jahr seiner freien Zeit opfern müssen. Er hat dabei alle Zahlen bis zu einer gewissen Höhe versuchsweise eingesetzt, vergrößert, verkleinert oder vertauscht, bis es seiner Unermüdlichkeit gelang, eine brauchbare Zusammenstellung zu finden. Mit dem hier gezeigten Verfahren hätte man das gleiche Ergebnis in wenigen Tagen erreichen können. Zu der im ersten Abschnitt (Seite 185 d. Jhrg.) behandelten Merkur-Übersetzung waren z. B. nur wenige Stunden nötig.

Es ist vielleicht interessant und unterhaltend zugleich, wenn wir hier zum Schlusse einmal feststellen, wie viele Versuchsrechnungen im schlimmsten Falle nötig wären, wenn wir den oben gefundenen Bruch $\frac{62 \,.\, 137}{77 \,.\, 69}$ durch versuchsweise Zusammenstellung von je vier Zahnzahlen hätten finden wollen. Es sei angenommen, daß er mit der gleichen Genauigkeit durch kleinere Zahlen nicht ausgedrückt werden kann. Der Wert des Bruches sei mit D bezeichnet. Die niedersten vier Zahnzahlen, mit denen wir beginnen, mögen mit x, b, c und d bezeichnet sein. Die drei Zahlen b, c und d stellen wir als willkürlich angenommene niedere Zahnzahlen in die Gleichung $\frac{x \,.\, c}{b \,.\, d} = D$ ein und betrachten die Zahl x als die gesuchte vierte Zahnzahl. Wenn sich für x eine ganze Zahl ergibt, so ist die Zusammenstellung brauchbar. Die niederste Zahl, mit der ein Versuch gemacht werden soll, sei zu 6, und die höchste zu 137 angenommen. Die Differenz beider Zahlen ist 137 — 6 = 131; es müssen also für den schlimmsten Fall 131 . 131 . 131 = 2 248 091 Gleichungen gelöst werden, bis eine davon für x die Zahl 62 liefert. Dies trifft dann ein, wenn man zufällig c = 137, b = 77 und d = 69 gewählt hat.

Diese 131^3 = 2 248 091 Gleichungen wären überflüssig, wenn man durch einen „glücklichen Griff" die Zahlen 137, 77 und 69 gleich gewählt hätte. Ein solcher Fall wird sich aber wohl nie ereignen. Man wird vielmehr der Reihe nach folgende Gleichungen lösen müssen:

$$\frac{x \,.\, c}{b \,.\, d} = D,\ \frac{x \,.\, (c+1)}{b \,.\, d} = D,\ \frac{x \,.\, (c+2)}{b \,.\, d} = D,\ \frac{x \,.\, (c+3)}{b \,.\, d} = D \text{ und so fort,}$$

bis $\frac{x \,.\, (c+131)}{b \,.\, d} = D$. Nun müßten aber für b im schlimmsten Falle auch 131 Zahlen eingesetzt werden, ebenso für d, und die Anzahl aller möglichen Zusammenstellungen wächst auf $(137 - 6)^3$ = 2 248 091. Die wahrscheinlichste Anzahl von Versuchen ist allerdings viel kleiner. Man wird sie wohl etwa = (137 — 6) . (77 — 6) . (69 — 6) = 585 963 setzen können. Das folgende Schema möge dies etwas verständlicher machen:

$$\begin{array}{llll}
\frac{x \,.\, c}{b \,.\, d} = D; & \frac{x \,.\, (c+1)}{b \,.\, d} = D; & \frac{x \,.\, (c+2)}{b \,.\, d} = D; \ldots . & \frac{x \,.\, (c+131)}{b \,.\, d} = D; \\
\frac{x \,.\, c}{(b+1) \,.\, d} = D; & \frac{x \,.\, (c+1)}{(b+1) \,.\, d} = D; & \frac{x \,.\, (c+2)}{(b+1) \,.\, d} = D; \ldots . & \frac{x \,.\, (c+131)}{(b+1) \,.\, d} = D; \\
\frac{x \,.\, c}{(b+2) \,.\, d} = D; & \frac{x \,.\, (c+1)}{(b+2) \,.\, d} = D; & \frac{x \,.\, (c+2)}{(b+2) \,.\, d} = D; \ldots . & \frac{x \,.\, (c+131)}{(b+2) \,.\, d} = D; \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{x \,.\, c}{(b+71) \,.\, d} = D; & \frac{x \,.\, (c+1)}{(b+71) \,.\, d} = D; & \frac{x \,.\, (c+2)}{(b+71) \,.\, d} = D; \ldots . & \frac{x \,.\, (c+131)}{(b+71) \,.\, d} = D.
\end{array}$$

Es sind also allein 131 Zahlen einzusetzen für c. Ändert man b um eine Einheit, so sind wieder 131 Zusammenstellungen denkbar, ebenso für $(b+2)$, $(b+3)$ bis $(b+71)$; folglich ist die Anzahl der Zusammenstellungen 131 . 71. Wenn d dann auch mit $(d+1)$ vertauscht wird, sind wieder 131 . 71 Zusammenstellungen denkbar. Und da für d auch alle Zahlen von 6 bis 69 in Betracht kommen können, so ist die Zahl der Versuche auf 131 . 71 . 63 zu erhöhen.

Es bedarf wohl keines weiteren Hinweises mehr, daß dieses „Verfahren der tastenden Kombinationsversuche" über jedes Maß zeitraubend ist. Das weiter oben gezeigte Kettenbruch- und Additionsverfahren ist auf alle Fälle vorzuziehen.