Kompensationspendel allgemein geschieht. Weiter ergibt sich das statische Moment (Gewicht mal Schwerpunktsabstand) des Pendelkörpers, auf den Drehpunkt bezogen, offenbar zu:

$$S = G_1 \cdot l_1 + G \cdot \frac{l}{2}; \qquad (2)$$

denn der Stangenschwerpunkt liegt ja bei einem überall gleich dicken Stabe in der Mitte, d. h. um $\frac{l}{2}$ von der Drehstelle entfernt. Nun beträgt die Schwingungsdauer, d. h. im Sinne des Uhrmachers die Zeit zwischen zwei Umkehrpunkten, nach einem bekannten Gesetz:

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{S}}. \qquad (3)$$

Setzt man die Werte für Θ und S aus (1) und (2) in (3) ein und beachtet, daß $g = 9{,}81$ und demgemäß $\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1{,}003$ ist, so kommt endgiltig als Schwingungsdauer:

$$T = 1{,}003 \cdot \sqrt{\frac{G_1 l^2_1 + G \frac{l^2}{3}}{G_1 l_1 + G \frac{l}{2}}} \text{ sek.} \qquad (4)$$

Meistens wird es in der Konstruktionspraxis darauf ankommen, die Strecke l_1, um die der Linsenmittelpunkt von oben entfernt sein muß, bei gegebener Schwingungsdauer zu berechnen. Man hätte also Gleichung (4) nach l_1 als Unbekannter aufzulösen, was schließlich jeder Schüler fertigbringt. Wir wollen aber das Schlußergebnis gleich in eine bequeme Näherungsformel bringen, die von der Wahrheit nur ganz unerheblich abweicht, was ja auch gar nichts ausmacht, weil man nachher mit der Pendelmutter leicht korrigieren kann. Versteht man unter n das Verhältnis vom Stangen- zum Linsengewicht, also $\frac{G}{G_1}$, so muß die Entfernung l_1 bei der Schwingungsdauer T folgende Länge in Metern bekommen:

$$l_1 = T^2 + \frac{n\,l}{6}\left(3 - 2\frac{l}{T^2}\right). \qquad (5)$$

Wie diese Annäherung aus (4) gewonnen ist, können wir hier wohl übergehen*); aber ein Zahlenbeispiel soll die Sache anschaulich klarstellen:

Die stählerne Stange sei insgesamt 40 cm lang und 0,25 cm stark; dann wiegt sie $G = 40 \cdot 0{,}25^2 \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}0078 = 0{,}0153$ kg; denn ein Kubikzentimeter Stahl wiegt etwa 7,8 Gramm. Die Linse aber wiege 0,5 kg, sei also 32,7mal so schwer als die Stange; dann ist $n = \frac{1}{32{,}7}$ oder gleich 0,0306. Soll das Pendel halbe Sekunden schwingen, so muß also nach Gleichung (5) sein:

$$l_1 = 0{,}5^2 + \frac{0{,}0306 \cdot 0{,}4}{6}\left(3 - 2\,\frac{0{,}4}{0{,}5^2}\right)\text{m} = 249{,}6 \text{ mm}.$$

Die Pendelmutter ist dabei freilich nicht mitgerechnet, aber man sieht schon aus (5), wie gering der Einfluß der dünnen Stange ist, so daß die Mutter ruhig außer acht gelassen werden kann. In noch größerer Annäherung könnte man sogar unbedenklich $l_1 = T^2$ setzen, und der Fehler betrüge in unserem Falle doch nur 0,4 mm.

Und nun zur Hauptfrage: „Wie ändert sich der tägliche Gang, wenn ich die Pendellinse um 1 Millimeter nach oben oder unten verschiebe?" Das Auge des mathematisch Geschulten entnimmt die Antwort auf diese Frage sofort ohne Schwierigkeit aus Gleichung (4). Er wird diese Gleichung logarithmieren, differenzieren und dann den Zuwachs von l_1 gleich einem tausendstel Meter, soll heißen einem Millimeter, setzen. Die so entstehende prozentuale Änderung der Einzelschwingung, mit $24 \cdot 60 \cdot 60$ multipliziert, ergibt jetzt sofort die gewünschte tägliche Gangänderung Δ bei einem Millimeter Linsenverschiebung. Das Schlußergebnis der Überlegung ist:

$$\Delta = 86{,}4\left[\frac{l_1}{l^2_1 + n\,l^2/3} - \frac{1}{2\,l_1 + n\,l}\right]. \qquad (6)$$

Wer es nicht für richtig hält, möge nachprüfen. Das ist also die Formel, auf die unsere ganze Betrachtung letzten Endes abgezielt hat. — Auf Δ haben Mutter und sonstige Kleinigkeiten noch weit weniger Einfluß als auf die Schwingungsdauer selbst; ihre Vernachlässigung ist somit gerechtfertigt.

Zur Veranschaulichung wieder unser obiges Zahlenbeispiel. Welche Änderung wird bei eben diesem Halbsekundenpendel durch ein Verschrauben der Linse um 1 mm erzielt? Es folgt:

$$\Delta = 86{,}4\left[\frac{0{,}25}{0{,}25^2 + 0{,}03 \cdot 0{,}4^2/3} - \frac{1}{2 \cdot 0{,}25 + 0{,}03 \cdot 0{,}4}\right]$$
$$= 86{,}4\,[3{,}9 - 1{,}95] = 1{,}68 \text{ sek/Tag.}$$

Je nach der Zahl der Gewindegänge je Millimeter Spindel-

---

*) Für Interessenten sei die Ableitung der Formeln (5) und (6) nachstehend gegeben: Wir setzen in Gleichung (4) den Wert 1,003 genähert gleich 1 (d. h. $\pi^2 = 9{,}81$), womit wir einen Fehler von $^3/_{1000}$ machen, der ohne weiteres zugelassen werden kann, weil unter anderem die Schwerpunktslage der Körper auch nicht schärfer bestimmt ist und wir außerdem die Pendelmutter und das Eigen-Trägheitsmoment der Linse beiseite gelassen haben; eine übermäßige Rechenschärfe wäre also hier, wie so oft, nichts weiter als Bluff. Zudem ist sie auch gar nicht nötig.

Schreiben wir wieder n für G/G_1, so wird aus (4) nach kurzer Umformung:

$$l^2_1 - T^2 \cdot l_1 = T^2 \cdot n \cdot \frac{l}{2} - n \cdot \frac{l^2}{3}; \text{ also:}$$

$$l_1 = \frac{T^2}{2} \pm \sqrt{\frac{T^4}{4} - n\left(\frac{l^2}{3} - T^2 \cdot \frac{l}{2}\right)}$$
$$= \frac{T^2}{2} \pm \frac{T^2}{2} \cdot \left[1 - n \cdot \frac{l^2/3 - T^2 \cdot l/2}{T^4/4}\right]^{1/2}.$$

Da das zweite Klammerglied gegen das erste klein ist, so dürfen wir in bekannter Weise nach dem binomischen Satz schreiben:

$$l_1 = \frac{T^2}{2} \cdot \left\{1 \pm \left[1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{l^2/3 - T^2 \cdot l/2}{T^4/4}\right]\right\}.$$

Denn für hinreichend kleines x ist $(1 + x)^k = 1 + x \cdot k$, und k ist hier gleich ½. Für uns hat nur das +-Zeichen Bedeutung, und es kommt durch Ausklammern und Ausmultiplizieren die bei genügend schwerer Linse gutgenäherte einfache Formel (5):

$$l_1 = T^2 + \frac{n \cdot l}{6}\left(3 - 2\,\frac{l}{T^2}\right). \qquad (5)$$

Das —-Zeichen lieferte gemäß dem Gesetz des Reversionspendels für l_1 den kleinen Wert $\frac{n\,l}{6}\left(2\,\frac{l}{T^2} - 3\right)$ m, der bei fast ganz oben sitzender Linse ebenfalls die Schwingungsdauer ¾ sek ergäbe. Dann hätte man in bekannter Weise Dreh- und Schwingungspunkt (Endpunkt der „reduzierten Pendellänge") vertauscht. Praktisch kommt dieser Fall nicht in Frage.

Weiter folgt Gleichung (6) aus nachstehender infinitesimalen Überlegung: Durch Logarithmieren der Beziehung (4) kommt zunächst:

$$\ln T = \ln 1{,}003 + \frac{1}{2}\ln\left(G_1 \cdot l^2_1 + G \cdot \frac{l^2}{3}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(G_1 \cdot l_1 + G \cdot \frac{l}{2}\right).$$

Auf der rechten Seite ist l_1 die Veränderliche; denn wir wollen ja wissen, wie sich T mit l_1 ändert. Daher ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Zuwachs von T und l_1 wie folgt durch Differenzieren:

$$\frac{dT}{T} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2\,G_1 \cdot l_1}{G_1 \cdot l^2_1 + G \cdot l^2/3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{G_1}{G_1\,l_1 + G \cdot l/2}\right] \cdot dl_1.$$

Diese Beziehung ist auch dann noch sehr genähert richtig, wenn man für das unendlich kleine dl_1 einen zwar endlichen, aber hinreichend kleinen Zahlenwert einsetzt, z. B. 1 mm gleich 0,001 m (die Längen in der Formel bedeuten alle Meter, weil $g = 9{,}81$ m/sek² und $\pi^2 = g$ gesetzt worden ist!). Da aber die Änderung der Schwingungsdauer sich zu dieser selbst ebenso verhält wie die Abänderung Δ des Tagesganges zu $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ sek, die die Tageslänge ausmachen, so gilt für die Änderung des täglichen Ganges je Millimeter Linsenverschiebung:

$$\frac{\Delta}{86\,400} = \frac{dT}{T} = \left[\frac{l_1}{l^2_1 + n \cdot l^2/3} - \frac{1}{2 \cdot l_1 + n \cdot l}\right] \cdot \frac{1}{1000},$$

womit für die in Gleichung (6) niedergelegte Gesetzmäßigkeit der Beweis geliefert ist.