der hinterdrehten Zähne Z darauf, sowie für eine annähernd gewählte Steigung der Riffennuth Y ohne weiteres das Verhältniss der drei Räderpaare gefunden werden.

Die logarithmische Spirale als Rückencurve für die Zähne hinterdrehter Fräsewerkzeuge.

Damit die Rückenbegrenzung der Fräsezähne, welche als resultirende Weglinie einer gleichzeitig durchgeführten Drehung des Werkstückes und einer geradlinig radial gerichteten Schwingung des Schneidwerkzeuges eine logarithmische Spiralcurve werde, braucht bloss das Bildungsgesetz dieser Curve befolgt zu werden. Nach diesem wachsen die Curvenradien in einem geometrischen Verhältnisse, während die zugehörigen Centriwinkel dieser Radien nur in einem arithmetischen Verhältniss zunehmen.

Es werden daher den

Winkeln	$\alpha = 0$,	$1 . \alpha$,	2α,	$3\alpha \ldots$
die Radien	$\varrho . x^0$,	$\varrho . x^1$,	$\varrho . x^2$,	$\varrho . x^3 \ldots$
oder	ϱ_0,	$\varrho_1 = \varrho_0 . x$,	$\varrho_2 = \varrho_0 x^2$,	$\varrho_3 = \varrho_0 x^3 \ldots$

entsprechen.

Hiernach kann auch für den Winkel $\varphi = n . \alpha$ der Radius $\varrho_n = \varrho_0 x^n$ angenommen werden, und ebenso

$n = \frac{\varphi}{\alpha}$ gesetzt, so dass $\varrho_n = \varrho_0 . x^{\frac{\varphi}{\alpha}}$

geschrieben werden kann.[1]

Da für den Winkel $\alpha = 0$ der Radius $\varrho_0 = a$ gesetzt wird, so folgt als Gleichung für die logarithmische Spirale allgemein:

$$\varrho = a . x^{\frac{\varphi}{\alpha}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Für $\varphi = 180^0$ oder $\varphi = \pi$ entsteht ein Radius

$$b = a . x^{\frac{\varphi}{\alpha}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und durch eine entsprechende Rechnung folgt

$$\varrho = b^{\frac{\varphi}{\pi}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

als Gleichung der Curve, wobei, wie vorbemerkt, b und a gegensätzlich liegen und Radien der Spirale sind, die 180^0 von einander abstehen.

Wird die Gleichung (3) logarithmisch behandelt, so folgt

$$\log \varrho = \frac{\varphi}{\pi} . \log b$$

oder
$$\log \varrho = \varphi . \frac{\log b}{\pi} = \varphi . m,$$

und indem
$$\frac{\log b}{\pi} = m$$

gesetzt ist, so entsteht eine neue Gleichung der Spirale:

$$\log \varrho = m . \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Hierin stellt $m\varphi$ ebenso wohl den zum Winkel φ^0 zugehörigen Kreisbogen vom Halbmesser m, als auch den Logarithmus des Radius ϱ der logarithmischen Spirale vor, dessen Logarithmensystem eben

$$m = \frac{\log b}{\pi}$$

entspricht.

[1] *A. Steinhauser*, *Die Elemente des graphischen Rechnens mit besonderer Berücksichtigung der logarithmischen Spirale.* Wien 1885.

Ebenso wird

$$\log b = m . \pi$$

und
$$b = y^{m\pi}$$

und für
$$m = 1$$

auch
$$b = y^{\pi}$$

sein, sofern y die Grundzahl dieses Logarithmensystems ist.

Für das natürliche Logarithmensystem ist

$$y = e = 2{,}7183 \ldots .$$

und daher

$$b = e^{\pi} \text{ bezieh. } \log b = \pi . \log e = 3{,}14 . 0{,}4343$$

oder
$$\log b = 1{,}3637$$

woraus
$$b = 23{,}14$$

für $a = 1$ folgt.

Es kann ebenfalls

$$u = a^{\varphi} = e^{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

oder
$$\varphi . \log nat\, a = z \log nat\, e$$

sein, und weil der Logarithmus der Grundzahl stets gleich der Einheit ist, demnach

$$\log nat\, e = 1$$

sein muss, so wird

$$\varphi . \log nat\, a = z,$$

demnach
$$\log nat\, u = \varphi \log nat\, a = z$$

sein, woraus
$$u = e^{\varphi . \log nat\, a}$$

folgt.

Wird vorläufig $\log nat\, a = k$ angenommen, so erhält man

$$u = e^{k . \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

als Gleichung einer bestimmten logarithmischen Spirale (Fig. 24).

Die logarithmische Spirale hat noch die Eigenschaft, dass der Winkel, welchen der Fahrstrahl mit der Tangirenden am Curvenpunkt einschliesst, also der sogen. Kreuzungswinkel, für jede einzelne Spirale gleichbleibend ist.

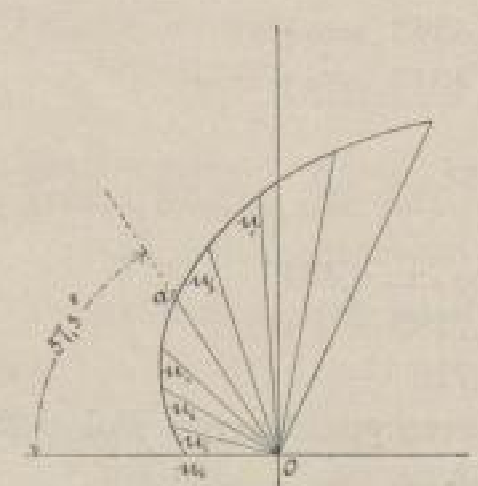

Fig. 24.

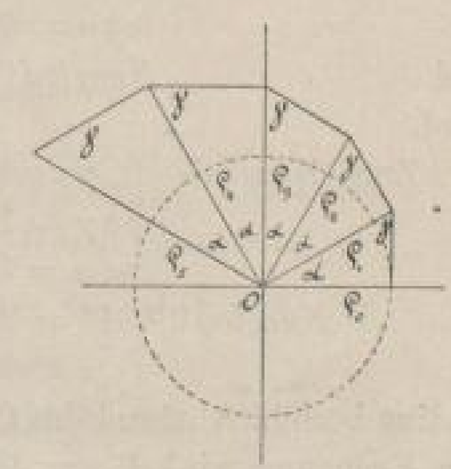

Fig. 25.

Logarithmische Spirale.

In der um den Pol O (Fig. 25) angeschlossenen Gruppe ähnlicher Dreiecke von gleichen Spitzwinkeln α und γ ist das Seitenverhältniss

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\varrho_3}{\varrho_2} = x.$$

Es ist somit

$$\varrho_1 = \varrho . x$$
$$\varrho_2 = \varrho_1 . x = \varrho . x x = \varrho x^2$$
$$\varrho_3 = \varrho_2 . x = \varrho . x^3 \ldots . \text{ u. s. w.}$$

Es wachsen hiernach diese Seitenlängen nach einer geometrischen, während die Gesammtwinkel α, 2α, 3α nach einer arithmetischen Reihe zunehmen, was dem Bildungsgesetz der logarithmischen Spirale entsprechend ist.

Um Weitläufigkeiten zu sparen, kann man sich den Winkel α sehr klein denken, so dass die Verbindung der