Weiter sei der Kran nur im Punkte c_2 des Balkenteiles CB elastisch. Der Teil zwischen C und c_2 ist um C drehbar, während der Rest, welcher *mit dem Teile BA in fester Verbindung steht*, um B drehbar ist. Nennen wir den unendlich kleinen Drehwinkel um B $d\beta$ und die unendlich kleine Drehung, welche die Teile Cc_2 und Bc_2 gegeneinander machen, $d\gamma_2$, so gilt bekanntlich folgende Beziehung:

$$c_2C \,.\, d\gamma_2 = CB \,.\, d\beta.$$

Setzen wir $Cc_2 = x_2$, so ergibt sich hieraus:

$$x_2 \,.\, d\gamma_2 = l_2 \,.\, d\beta \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Die Kraft P leistet dabei die unendlich kleine Arbeit $P \,.\, l_1 \,.\, d\beta$. Nennen wir M_2 das Biegungsmoment in c_2, so ist die davon geleistete Arbeit gleich $M_2 \,.\, d\gamma_2$. Es muss nun sein:

$$M_2 \,.\, d\gamma_2 = P \,.\, l_1 \,.\, d\beta,$$

wobei $M_2 = EJ \cdot \frac{d\gamma_2}{dx_2}$ ist, wenn dx_2 das Element der Strecke l_2 ist. Daher entsteht auch:

$$EJ \cdot \frac{d\gamma_2^2}{dx_2} = P \,.\, l_1 \,.\, d\beta$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung 2)

$$E \,.\, J \cdot \frac{l_2^2}{x_2^2 \, dx_2} \cdot d\beta = P \,.\, l_1.$$

Nennen wir $d\sigma_2$ den unendlich kleinen von P dabei zurückgelegten Weg, so ist $d\sigma_2 = l_1 \,.\, d\beta$. Also erhalten wir aus den beiden letzten Gleichungen:

$$E \,.\, J \,.\, d\sigma_2 = P \cdot \frac{l_1^2}{l_2^2} \cdot x_2^2 \,.\, dx_2.$$

Diese Formel können wir für alle Punkte zwischen B und C bilden und alle so entstandenen $d\sigma_2$ addieren. Setzen wir die Summe gleich σ_2, so ist:

$$E \,.\, J \,.\, \sigma_2 = P \cdot \frac{l_1^2}{l_2^2} \cdot \int_0^{l_2} x_2^2 \,.\, dx_2,$$

woraus folgt:

$$\sigma_2 = \frac{P \,.\, l_1^2 \,.\, l_2}{3 \,.\, E \,.\, J} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

Aber auch σ_1 und σ_2 können wir addieren, weil sie beide Wege von oben nach unten bedeuten. Nennen wir σ_0 die Summe, so ist:

$$\sigma_0 = \frac{Pl_1^2}{3E \,.\, J}(l_1 + l_2),$$

worin $l_1 + l_2 = l$ ist. Also entsteht:

$$\sigma_0 = \frac{P \,.\, l_1^2 \,.\, l}{3 \,.\, E \,.\, J} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Dieser Ausdruck bedeutet die Senkung des Punktes A, wenn einzig und allein der Balken AC elastisch ist.

Nunmehr möge der Kran nur im Punkte c_3 des Teiles CD elastisch sein. Es liegt dann c_3D fest, $\overline{Cc_3}$ dreht sich um c_3, $\overline{DB}$ um D, während der Balken $\overline{CA}$ auch um D drehbar ist. Nennen wir $d\delta$ den unendlich kleinen Drehwinkel des Balkens $\overline{CA}$ um D, so bewegt sich A senkrecht zu $\overline{DA}$ und legt dabei den Weg $\overline{DA} \,.\, d\delta$ zurück. Von diesem Wege ist, wie man sich leicht ableiten kann, $l \,.\, d\delta$ die Senkung des Punktes A. Wir nennen sie $d\sigma_3$ und haben zunächst die Gleichung:

$$d\sigma_3 = l \,.\, d\delta \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

Die von P geleistete Arbeit ist $P \,.\, l \,.\, d\delta$. Nennen wir M_3 das Biegungsmoment in c_3, so ist die davon geleistete Arbeit $M_3 \,.\, d\gamma_3$, wenn $d\gamma_3$ der unendlich kleine Winkel ist, mit dem sich der Teil c_3C um c_3 dreht. Es muss nun sein:

$$M_3 \,.\, d\gamma_3 = P \,.\, l \,.\, d\delta.$$

Wenn x_3 der Abstand des Punktes c_3 von C ist, so ist nach der kinematischen Geometrie:

$$l_3 \,.\, d\delta = x_3 \,.\, d\gamma_3 \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Also entsteht:

$$M_3 \,.\, l_3 = P \,.\, l \,.\, x_3.$$

Da jedoch, wenn dx_3 das Element der Strecke CD bedeutet,

$$M_3 = E_1 \,.\, J_1 \cdot \frac{d\gamma_3}{dx_3}$$

ist, so hat man weiter:

$$E_1 \,.\, J_1 \,.\, d\gamma_3 = \frac{P \,.\, l}{l_3} \cdot x_3 \,.\, dx_3.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) ist zunächst:

$$d\sigma_3 = l \cdot \frac{x_3}{l_3} \cdot d\gamma_3.$$

Also folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$E_1 \,.\, J_1 \,.\, d\sigma_3 = \frac{P \,.\, l^2}{l_3^2} \cdot x_3^2 \, dx_3.$$

Diese Gleichung kann man für alle Punkte zwischen C und D bilden, ferner kann man alle so entstandenen $d\sigma_3$ addieren, weil sie sämtlich die Richtung von oben nach unten haben. Setzen wir σ_3 die Summe, so ist:

$$E_1 \,.\, J_1 \,.\, \sigma_3 = \frac{P \,.\, l^2}{l_3^2} \int_0^{l_3} x_3^2 \,.\, dx_3,$$

woraus folgt:

$$\sigma_3 = \frac{Pl^2 \,.\, l_3}{3 \,.\, E_1 \,.\, J_1} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

Jetzt soll der Kran nur im Punkte c_4 zwischen D und E elastisch sein; der Teil c_4E liegt fest, während der übrige Teil desselben um c_4 drehbar ist. Nennen wir $d\gamma_4$ den unendlich kleinen Drehwinkel um c_4, so legt dabei der Punkt A den Weg $c_4A \,.\, d\gamma_4$ zurück. Hiervon gibt die Komponente $l \,.\, d\gamma_4$ die Senkung des Punktes A an. Nennen wir sie $d\sigma_4$, so haben wir die Gleichung:

$$d\sigma_4 = l \,.\, d\gamma_4 \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

Die von P geleistete Arbeit ist $P \,.\, l \,.\, d\gamma_4$. Ist noch M_4 das Biegungsmoment in c_4, so wird davon die Arbeit $M_4 \,.\, d\gamma_4$ vollbracht; da $M_4 = E_1 \,.\, J_1 \frac{d\gamma_4}{dx_4}$ ist, wenn dx_4 das Element der Strecke DE bedeutet, so hat man:

$$P \,.\, l \,.\, d\gamma_4 = E_1 \,.\, J_1 \cdot \frac{d\gamma_4}{dx_4} \cdot d\gamma_4$$

oder auch:

$$P \,.\, l = E_1 \,.\, J_1 \frac{d\gamma_4}{dx_4}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 8) entsteht hieraus:

$$E_1 \,.\, J_1 \,.\, d\sigma_4 = Pl^2 \,.\, dx_4.$$

Diese Gleichung kann man für alle Punkte zwischen D und E bilden. Addieren wir sämtliche so entstandene $d\sigma_4$, was geschehen darf, weil sie alle die Richtung von oben nach unten haben, so ergibt sich

$$E_1 J_1 \,.\, \sigma_4 = P \,.\, l^2 \,.\int_0^{l_4} dx_4,$$

also entsteht:

$$\sigma_4 = \frac{P \,.\, l^2 \,.\, l_4}{E_1 \,.\, J_1} \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

Endlich sei auch der Stab BD im Punkte c_5 allein elastisch. Wir haben es dann mit einer viercylindrigen zwangläufigen Cylinderkette zu thun, welche CD als festliegendes Glied, CB und Dc_5 als um C bezw. D sich drehende Glieder und Bc_5 zur Kuppel hat. Man findet, falls c_5 *genau* auf der Verbindungslinie DB liegt, dass, wenn sich die Teile c_5D und c_5B um einen unendlich kleinen Winkel $d\gamma_5$ verdrehen, *die Punkte C, B und D fest liegen bleiben*, d. h. es entsteht *keine* Senkung des Punktes A, daher ist die Kenntnis des Trägheitsmoments vom Querschnitt dieses Stabes belanglos und deshalb ist es auch nicht mitgeteilt worden. Anders würden sich die Verhältnisse gestalten, wenn der Schwerpunkt c_5 des betreffenden Querschnitts auf der Geraden BD nicht liegen würde.

Wir können nun σ_0, σ_3 und σ_4 addieren. Bezeichnen wir mit σ die Summe, so ergibt sich schliesslich aus den Gleichungen 4), 7) und 9):

$$\sigma = P \,.\, l \cdot \left[\frac{l_1^2}{3 \,.\, E \,.\, J} + \frac{l}{E_1 \,.\, J_1} \cdot \left(\frac{l_3}{3} + l_4\right)\right] \cdot \quad 10)$$

Anmerkung. *Müller*-Breslau untersucht den gleichen Kran in dem Buche: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*, S. 135 und 136. Er kommt aber dabei nicht zu gleichen Ergebnissen, wie wir sie gefunden haben. Es liegen aber seinerseits *Versehen*

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/id321998147Z/26 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN