Wir erhalten demnach:

$$\Delta b_1 = \frac{X l}{F . E} \cdot \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

II.

Die Kraft K in D zerlege man in zwei Seitenkräfte, von denen die eine in $D C$ und die andere in $B D$ zu liegen kommt. Da $K = \frac{X}{\cos \varphi}$ ist, so ist erstere Seitenkraft $2 X . tg \varphi$ und letztere Seitenkraft gleich $\frac{X}{\cos \varphi}$.

Man stelle sich vor, dass $B D$ allein elastisch ist, so bewirkt die im Punkte D wirkende Kraft K, dass sich D auf einem Kreisbogen um C als Mittelpunkt im Sinne des Zeigers einer Uhr dreht und dadurch die Stange $B D$ verlängert wird. Bezeichnet man mit E_1 den Elastizitätsmodul, mit F_1 den Querschnitt der Stange $B D$, bedenkt dass ihre Länge $\frac{l}{\cos \varphi}$ ist und die Verlängerung derselben von der Kraft $\frac{X}{\cos \varphi}$ hervorgebracht wird, so ist letztere nach dem *Hooke*'schen Gesetze: $\frac{X . l}{F_1 E_1 . \cos^2 \varphi}$. Ist nun e der Abstand des Punktes C von $B D$ und $\Delta \alpha$ die sehr kleine Veränderung des Winkels $B C D$, so ist die Verlängerung auch gleich: $e . \Delta \alpha$. Da der Abstand des Punktes C von $A D$ ebenfalls gleich e und die sehr kleine Veränderung des Winkels $A C D$ gleich $- \Delta \alpha$ ist, so ist die Verkürzung der Entfernung des Punktes A von D auch gleich $e . \Delta \alpha$. Nennen wir sie Δb_2, so ergibt sich:

$$\Delta b_2 = \frac{X . l}{F_1 . E_1 . \cos^2 \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Nunmehr stelle man sich vor, dass $C D$ allein elastisch ist. Die Kraft K in D bewirkt, dass sich der Punkt D um B als Mittelpunkt im Sinne des Zeigers einer Uhr drehen muss. Hierdurch wird die Länge der Strebe $C D$ verkürzt. Wir nennen E_2 den Elastizitätsmodul und F_2 den Querschnitt dieser Strebe. Da ihre Länge $l . tg \varphi$ ist und sie von der Kraft $2 X . tg \varphi$ beansprucht wird, so ist nach dem *Hooke*'schen Gesetze die Verkürzung gleich:

$$\frac{2 X . l . tg^2 \varphi}{F_2 . E_2}.$$

Ist weiter $\Delta \varphi$ die sehr kleine Veränderung des Winkels $C B D$, welche bei der Verkürzung des Stabes entsteht, so ist die Verkürzung auch gleich: $l . \Delta \varphi$. Wir haben demnach die Gleichung:

$$l . \Delta \varphi = \frac{2 X . l . tg^2 \varphi}{F_2 . E_2}.$$

Ist f der Abstand des Punktes B von $A D$, so verkürzt sich die Entfernung der Punkte A und D um $f . \Delta \varphi = 2 l . \sin \varphi . \Delta \varphi$. Setzen wir letztere gleich Δb_3, so ergibt sich:

$$\Delta b_3 = \frac{4 X . l . tg^2 \varphi}{F_2 . E_2} \cdot \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Wenn demnach der Träger $A B$ infolge der Einwirkung der Kräfte K nicht gebogen werden könnte, so würde sich die Entfernung der Punkte A und D um $\Delta b_1 + \Delta b_2 + \Delta b_3$, d. h. um:

$$\frac{X l}{F E} \left(1 + \frac{E . F}{E_1 . F_1} \cdot \sec^3 \varphi + 4 \cdot \frac{E . F}{E_1 . F_1} \cdot tg^3 \varphi \right) \cos \varphi$$

verkürzen. Indem wir b diese Verkürzung nennen, erhalten wir endlich:

$$b = \frac{X l}{F E} \cdot \cos \varphi$$

$$\left(1 + \frac{E . F}{E_1 . F_1} \cdot \sec^3 \varphi + \frac{4 E . F}{E_1 . F_1} \cdot tg^3 \varphi \right) \quad . \quad . \quad 4)$$

III.

Nunmehr stellen wir uns vor, dass der Balken $A B$ in Fig. 2 *allein* elastisch ist, also sowohl die Strebe $C D$, als auch die Zugstange $B D$ starr sind; wir untersuchen zunächst den Teil zwischen A und C und es sei V der Schwerpunkt irgend eines Querschnitts davon, welcher letzterer von $A D$ in V_1 getroffen wird. Man verlege die Kraft K von A nach V_1 und zerlege sie in zwei Seitenkräfte, von denen die eine entlang dem Querschnitte und die andere, welche übrigens gleich X ist, senkrecht zum Querschnitte wirkt. Erstere beansprucht die in der Nähe vom Querschnitte befindlichen Faserstücke auf Scherfestigkeit; da dieselbe jedoch bedeutungslos ist, so wird sie, wie es üblich ist, vernachlässigt. In V denke man sich zwei parallele zu X und dazu gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte angebracht. Die von der gleichgerichteten Kraft erzeugte Formänderung des Trägers $A B$ haben wir bereits festgestellt, brauchen sie also nicht mehr zu untersuchen; die andere jedoch bildet mit der Kraft X in V_1 ein Kräftepaar und beansprucht den Balken auf Biegung. Setzt man $V V_1 = y$, so ist das Moment dieses Kräftepaares, welches den Balkenteil $A V$ im entgegengesetzten Sinne des Zeigers einer Uhr dreht: $X . y$. Es drehen dagegen im Sinne des Zeigers einer Uhr diesen Balkenteil die äusseren Kräfte. Nennen wir M_0 das Moment, welches von den äusseren Kräften erzeugt wird, so wird der Balkenteil $A V$ von dem Momente

$$M = X . y - M_0$$

beansprucht. Je nachdem nun M positiv oder negativ ist, wird eine Zu- oder Abnahme der Entfernung der Punkte A und D erzielt. Hierbei möge sich der Querschnitt mit dem Schwerpunkte V um $\Delta \gamma$ drehen, es ist dann, wenn Δx das Element der Strecke $A C$ ist, bekanntlich

$$E . J \cdot \frac{\Delta \gamma}{\Delta x} = M.$$

Es entsteht demnach aus den beiden Gleichungen:

$$E J . \Delta \gamma = X . y . \Delta x - M_0 . \Delta x.$$

Hierbei möge sich die Entfernung der Punkte A und D um $\Delta \lambda_1$ verändert haben. Es ist dann, wenn z der Abstand des Punktes V von $A D$ ist: $\Delta \lambda_1 = z . \Delta \gamma$. Es ist jedoch: $z = y \cos \varphi$. Wir erhalten demnach zunächst: $\Delta \lambda_1 = y . \cos \varphi . \Delta \gamma$ und dann:

$$\Delta \lambda_1 = \frac{\cos \varphi}{E . J} \left(X y^2 . \Delta x - M_0 . y . \Delta x \right).$$

Auf diese Weise können wir $\Delta \lambda_1$ für jeden Querschnitt zwischen A und C ermitteln. Alle diese $\Delta \lambda_1$ müssen nun addiert werden und geben als Summe die Strecke λ_1, um die sich die Entfernung der Punkte A und D verändert, wenn der Balkenteil $A C$ infolge der äusseren Belastung und der Kraft K sich biegt.

Wir erhalten:

$$\lambda_1 = \frac{\cos \varphi}{E . J} \cdot \left(X . \sum_o^l y^2 . \Delta x - \sum_o^l M_0 . y . \Delta x \right).$$

Man setze $V A = x$, so ist $y = x \cdot \frac{h}{l}$ und es entsteht auch:

$$\lambda_1 = \frac{h}{l} \cdot \frac{\cos \varphi}{E . J} \left(X \sum_o^l x . y \Delta x - \sum_o^l M_0 x . \Delta x \right).$$

Hierin ist nun $\sum_o^l x y . \Delta x$ nichts anderes, als das statische Moment des Dreiecks $A C D$ in Bezug auf A als Momentenpunkt und dasselbe ist: $\frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{2} h l$.

Es ist demnach:

$$\sum_o^l x y . \Delta x = \frac{1}{3} h l^2.$$

Weiter zeichne man für das System der gegebenen Belastungen mit einem beliebigen Polabstande H die Momentenfläche $a p_1 p_2 p_3 p_4 b$, welche von der mit $C D$ zusammenfallenden Geraden in c und d getroffen wird, und nennen s_1 den Abstand des Schwerpunktes S_1 des Flächenteiles $a c d p_2 p_1$ von der durch A zu den Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 parallel gelegten Geraden. Bezeichnet man noch diesen Flächenteil mit $\overline{F_1}$, so ist bekanntlich:

$$\sum_o^l M_0 . x . \Delta x = \overline{F_1} . s_1 . H.$$

Hierdurch ergibt sich schliesslich:

$$\lambda_1 = \frac{h . \cos \varphi}{l . E . J} \left(\frac{1}{3} h l^2 . X - H . \overline{F_1} . s_1 \right) \quad . \quad 5)$$

Sächsische Landesbibliothek - Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/id321098825Z/20
gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG
HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN