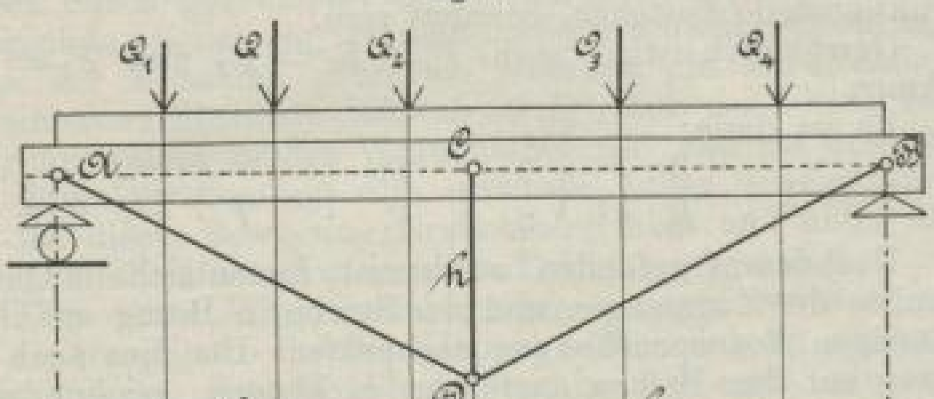
IV.

Wir untersuchen jetzt endlich den Teil des Balkens zwischen C und B. W sei der Schwerpunkt irgend eines Querschnittes davon und möge AD in W_1, dagegen DB in W_2 treffen. Dieser Querschnitt wird nicht nur von dem Momente M_0 der äusseren Kräfte und von X, letztere Kraft senkrecht zum Querschnitte in W_1 wirkend, sondern auch von der Kraft $2X \cdot tg\,\varphi$ in C, senkrecht zum Balken wirkend, beansprucht. Diese Kraft ist jedoch eine Komponente von der in D wirkenden Kraft K, also nicht von der in A wirkenden. Diese Kraft, also auch die Komponente $2X\,tg\,\varphi$ als Ersatz derselben, dreht nun den Trägerteil CD im Sinne des Zeigers einer Uhr, also gerade so wie die äusseren Kräfte. Es muss nun sein:

Fig. 3.



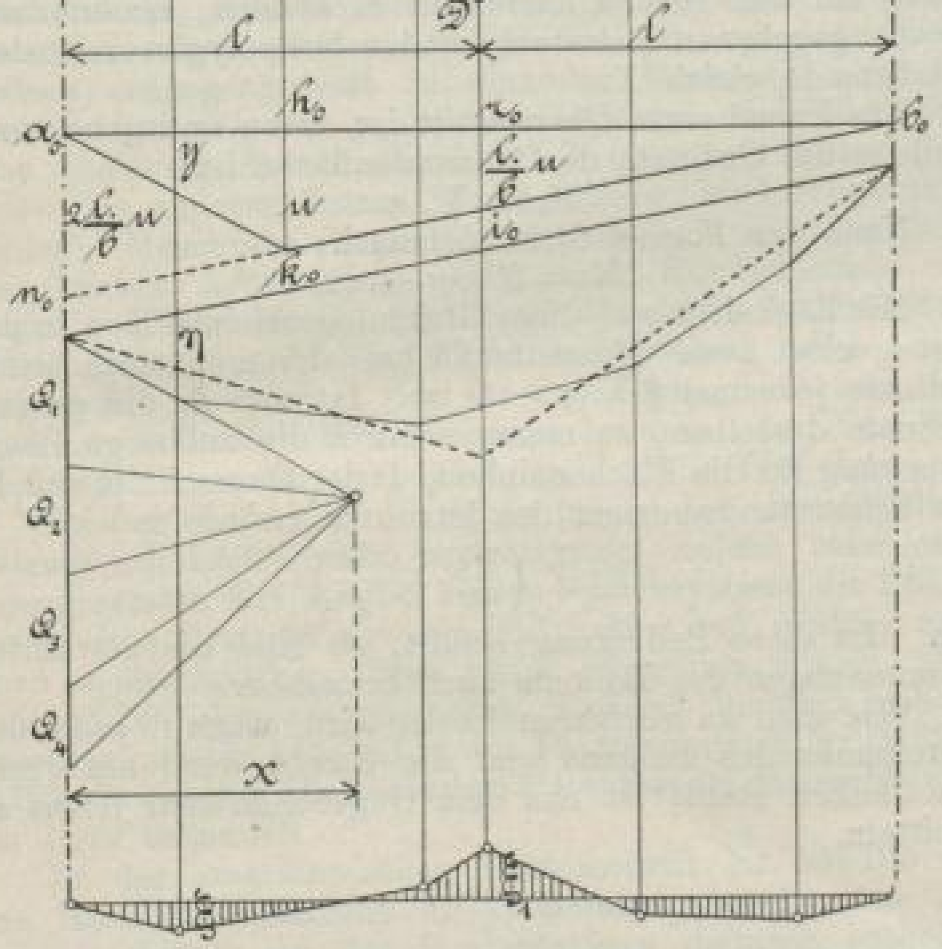


Fig. 4.

$$M = X \cdot \overline{WW_1} - 2X \cdot tg\,\varphi \cdot \overline{CW} - M_0.$$

Hierin ist jedoch

$$2\,\overline{CW} \cdot tg\,\varphi = W_1 W_2.$$

Setzen wir $\overline{WW_2} = y$, so entsteht

$$M = X \cdot y - M_0 \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Dies ist aber der Form nach *genau* dieselbe Formel, wie für den anderen Trägerteil AC.

Benennt man daher mit λ_2 die Aenderung, um welche die Entfernung der Punkte A und D infolge der Biegung des Trägerteiles CB geschieht, so ergibt sich, ähnlich wie vorhin:

$$\lambda_2 = \frac{h \cdot \cos\varphi}{l \cdot EJ}\left(X \cdot \sum_{o}^{l} xy \cdot \varDelta x - \sum_{o}^{l} M_0 x \cdot \varDelta x\right)^{1)}$$

Hierin ist wiederum $\sum\limits_{o}^{l} xy \cdot \varDelta x = \frac{1}{3}\,hl^2$. Bezeichnet man die Fläche $c\,b\,p_4\,p_3\,d$ mit $\overline{F_2}$, den Abstand ihres Schwerpunktes S_2 von den durch B zu den gegebenen Lasten gelegten Parallelen mit s_2, so ist hier:

$$\sum_{o}^{l} M_0 x \cdot \varDelta x = H \cdot \overline{F_2} \cdot s_2.$$

Es ergibt sich daher:

$$\lambda_2 = \frac{h\cos\varphi}{l \cdot EJ}\left(\frac{1}{3} \cdot hl^2 \cdot X - H \cdot \overline{F_2} \cdot s_2\right) \quad . \; 6)$$

Die Gleichungen 4), 5) und 6) kann man nun addieren, weil sie ja alle eine *Verkürzung* der Entfernung der Punkte A und D bedeuten. Wir setzen $b + \lambda_1 + \lambda_2 = b_1$. Es ist dann:

$$b_1 = \cos\varphi\left(\left[\frac{Xl}{FE}\;1 + \frac{EF}{E_1F_1}\sec^3\varphi + \frac{4EF}{E_2F_2}\cdot tg^3\,\varphi\right] + \frac{2}{3}\,\frac{h^2 l X}{EJ} - \frac{H(\overline{F_1}s_1 + \overline{F_2}s_2)}{l \cdot \frac{EJ}{h}}\right).$$

Bezeichnen wir nun mit E_2 den Elastizitätsmodul und mit F_2 den Querschnitt des Stabes AD, also genau so wie des Stabes BD, so ist die Verlängerung der Entfernung der Punkte A und C, welche von der Stange AD[2]) hervorgebracht wird, nach dem *Hooke*'schen Gesetze gleich:

$$\frac{X}{\cos\varphi} \cdot \frac{l}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{F_1E_1} = \frac{Xl}{F_1E_1}\cos\varphi \cdot \sec^3\varphi.$$

Dieselbe muss nun gleich $-\,b_1$ sein, weil ja $+\,b_1$ eine Verkürzung bedeutet. Es entsteht demnach aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{Xl}{EF}\left(1 + \frac{2EF}{E_1F_1}\cdot\sec^3\varphi + \frac{4EF}{E_2F_2}\,tg^3\varphi + \frac{2}{3}\,h^2\,\frac{F}{J}\right) = \frac{H \cdot (\overline{F_1}s_1 + \overline{F_2}s_2)}{EJ \cdot \frac{l}{h}}$$

und hieraus folgt endlich, wenn man

$$1 + 3\,\frac{J}{Fh^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{E \cdot F}{E_1 \cdot F_1}\sec^3\varphi + 2\,\frac{EF}{E_2F_2}\cdot tg^3\varphi\right) = \mu \quad 7)$$

setzt:

$$X = \frac{3 \cdot \frac{h}{l}\,(\overline{F_1}s_1 + \overline{F_2}s_2)}{2\mu \cdot h^2 \cdot l} \quad . \; . \; . \; . \quad 8)$$

Diese Gleichung stimmt mit der von Herrn Prof. *Müller-Breslau* in dem Buche: „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre“, Leipzig, Baumgärtner's Buchhandlung, Jahrgang 1893, Seite 98, gefundenen für X überein. Was jedoch die Koeffizienten μ anbelangt, so hat Herr Prof. *Müller-Breslau*

$$\mu = 1 + 3\,\frac{J}{Fh^2}\,(1 + \ldots)$$

statt

$$\mu = 1 + 3\,\frac{J}{Fh^2}\left(\frac{1}{2} + \ldots\right)$$

erhalten. Dies rührt daher: Ich habe angenommen, dass wenn die Kraft X auf die Balken AB in Richtung der Achse wirkt, *alle* Teile desselben eine elastische Formänderung erfahren, so dass wenn in der Fig. 1 der Punkt A nach A_1 gelangt, der Punkt C nach C_1 gekommen sein muss, so zwar, dass $\overline{CC_1} = \frac{1}{2}\,\overline{AA_1}$ ist. Hätte ich jedoch angenommen, dass *nur* der Teil des Balkens bei A allein eine Längenveränderung erfährt, so dass also der Punkt C seine Lage *nicht* ändern kann, so hätte ich genau dasselbe Ergebnis wie Herr Prof. *Müller-Breslau* für μ erhalten. Es ist dies eine Angelegenheit, welche nur durch den Versuch, meiner Ansicht nach, entschieden werden kann.

---

[1]) Ist nämlich $\Delta\lambda_2$ die Veränderung der Entfernung der Punkte A und D, wenn sich der Balkenteil von A bis W mit $\Delta\gamma$ um W dreht, und ist ferner $\Delta\varepsilon$ die Veränderung des Winkels ACD, welche hiermit zugleich geschieht, so ist zunächst $\Delta\lambda_2 = e \cdot \Delta\varepsilon$, wenn, wie bereits gesagt worden ist, e der Abstand des Punktes C von AD ist. Es ist jedoch, wie sich leicht ableiten lässt, $CB \cdot \Delta\varepsilon = WB \cdot \Delta\gamma$. Hieraus folgt:

$$\Delta\lambda_2 = e \cdot \frac{WB}{CB} \cdot \Delta\gamma.$$

Es ist jedoch auch e der Abstand des Punktes C von BD. Daher ist:

$$e \cdot \frac{WB}{CB} = \overline{WW_2} \cdot \cos\varphi = y \cdot \cos\varphi.$$

Wir erhalten deswegen: $\Delta\lambda_2 = y\cos\varphi \cdot \Delta\varphi$. Nun ist

$$\Delta\gamma = \frac{M}{EJ} \cdot \Delta x \text{ und daher}$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{\cos\varphi}{E \cdot J} \cdot (Xy^2\,\Delta x - M_0 y \cdot \Delta x).$$

Die übrige Entwickelung ist genau so, wie vorher, so dass diese Gleichung für λ_2 entsteht.

[2]) Daher ist AD thatsächlich eine Zugstange.