an diesen Ergebnissen ist nur statthaft, wenn die Unrichtigkeit der mathematischen Ableitung erwiesen wird. Dies aber dürfte schwer fallen, wie aus der nachfolgenden zusammenfassenden Darstellung hervorgeht.[3])

Wir beziehen die Bewegung auf das rechtwinklige Koordinatensystem YOZ (Abb), welches mit der Winkelgeschwindigkeit der stationären Bewegung ω um O rotiert, und verzichten auf die Zerlegung von P, so daß nur eine Kraft G vorhanden ist und in S angreift. Die elastischen Kraftkomponenten sind $\alpha(y - e_y)$; $\alpha(z - e_z)$; also lauten die Schwerpunktsgleichungen, wenn wir durch Punkte die Ableitungen nach der Zeit andeuten:

$$m\ddot{y} = m y \omega^2 + 2 m \omega \dot{z} - \alpha(y - e_y) - m g \sin \omega t \quad (1)$$

$$m\ddot{z} = m z \omega^2 - 2 m \omega \dot{y} - \alpha(z - e_z) - m g \cos \omega t \quad (2)$$

wo die zwei ersten Glieder rechts die bekannten Ergänzungskräfte der relativen Bewegung bedeuten. Als Drehungsgleichung um den Schwerpunkt erhält man mit Θ als dem Massenträgheitsmoment

$$\Theta \ddot{\tau} = -\alpha(y - e_y) e_z + \alpha(z - e_z) e_y \quad . \quad . \quad (3)$$

Es sei nun $W_0 S_0$ die Lage von WS bei stationierter Bewegung und unendlich großem Θ und Abwesenheit der Schwere. Dann gilt die Gleichung $m y_0 \omega^2 = \alpha(y_0 - e)$, woraus mit $\alpha = m \omega_k^2$

$$y_0 = -\frac{\omega_k^2}{\omega^2 - \omega_k^2} e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

folgt. Im Sinne der Theorie der kleinen Schwingungen setzen wir $y - y_0 = \eta$; $z = \zeta$ und τ als kleine Größen voraus, so daß $e_y = e$; $e_z = e\tau$ gesetzt und höhere Potenzen oder Produkte der η, ζ, τ vernachlässigt werden können. Gleichung (1) bis (3) lauten dann mit $\Theta = m q^2$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\eta} &= (\omega^2 - \omega_k^2)\eta + 2\omega\dot{\zeta} - g \sin \omega t \\ \ddot{\zeta} &= (\omega^2 - \omega_k^2)\zeta - 2\omega\dot{\eta} + \omega_k^2 e \tau - g \cos \omega t \\ q^2 \ddot{\tau} &= -\omega_k^2 y_0 e \tau + \omega_k^2 e \zeta \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Um die den periodischen Gliedern $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ entsprechende partikuläre Lösung dieses Systems zu erhalten, wird sich offenbar der Ansatz

$$\eta = B \sin \omega t; \; \zeta = C \cos \omega t; \; \tau = A \cos \omega t \quad . \quad (6)$$

empfehlen, dessen Einführung in (5) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -(2\omega^2 - \omega_k^2) B + 2\omega^2 C + 0 &= -g \\ 2\omega^2 B - (2\omega^2 - \omega_k^2) C - \omega_k^2 e A &= -g \\ 0 - \omega_k^2 e C + \left(-q^2\omega^2 + \frac{\omega_k^4 e^2}{\omega^2 - \omega_k^2}\right) A &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (7)$$

liefert. Bekanntlich ergeben sich unendlich große Werte für B, C, A, wenn die Determinate D der Beizahlen dieser Gleichungen verschwindet. Man findet

$$D = \frac{\omega^2 \omega_k^2 q^2}{\omega^2 - \omega_k^2} D_0 \text{ mit } D_0 = (\omega^2 - \omega_k^2)(4\omega^2 - \omega_k^2) + \frac{e^2}{q^2}\omega_k^2 (2\omega^2 + \omega_k^2) \quad . \quad . \quad (8)$$

Durch Auflösung der Gleichung $D = 0$ oder $D_0 = 0$ ergeben sich zwei Werte für das Quadrat der neuen kritischen Geschwindigkeit, die wir mit ω_g bezeichnen.

$$\omega_g^2 = \frac{\omega_k^2}{4}\left[\left(\frac{5}{2} - \varepsilon^2\right) \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \varepsilon^2\right)^2 - 4(1 + \varepsilon^2)}\right] \quad (9)$$

mit $\varepsilon^2 = \dfrac{e^2}{q^2}$.

Da ε im allgemeinen klein ist, können wir die Quadratwurzel entwickeln und erhalten für das untere Vorzeichen den praktisch wichtigen Wert:[4])

$$\omega'^2_g = \frac{\omega_k^2}{4}(1 + 2\varepsilon^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Dem $+$-Zeichen der Wurzel entspricht

$$\omega''^2_g = \omega_k^2 (1 - \varepsilon^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Ist ε streng $= 0$, so wird

$$\omega'_g = \frac{\omega_k}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Um zu beurteilen, wie es sich in letzterem Fall mit den Auslenkungen verhält, lösen wir Gleichung (7) allgemein nach B, C, A auf.

Der Ausdruck von C ist:

$$C = \frac{g\gamma(4\omega^2 - \omega_k^2)}{D} \text{ mit } \gamma = -q^2\omega^2 + \frac{\omega_k^4 e^2}{\omega^2 - \omega_k^2} \quad (13)$$

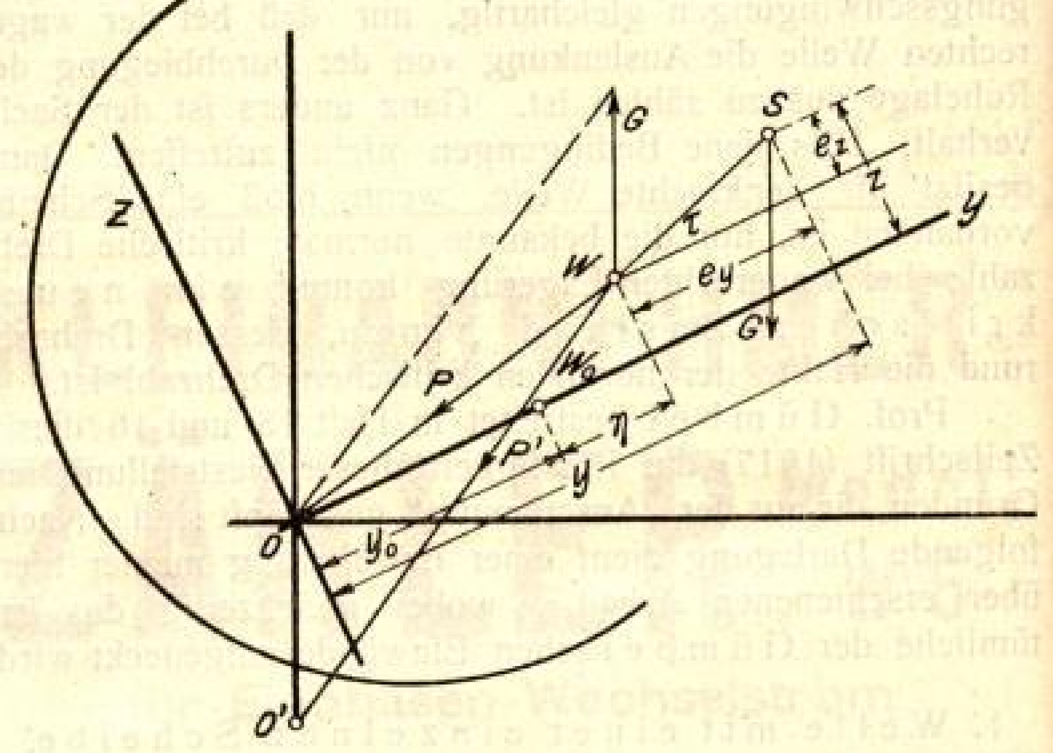
Lassen wir $e/q = 0$ werden, so wird

$$C = -\frac{g(4\omega^2 - \omega_k^2)}{\omega_k^2(4\omega^2 - \omega_k^2)}$$

So lange $4\omega^2 - \omega_k^2 \gtrless 0$, haben wir $C = -g/\omega_k^2$. Wenn aber $4\omega^2 - \omega_k^2 = 0$, so wird $C = 0/0$, jedoch mit demselben Grenzwert. Genau dasselbe gilt für B. Die relative Einsenkung in senkrechter Richtung $h = \eta \sin \omega t + \zeta \cos \omega t$

$$= -g/\omega_k^2 \cdot (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = -\frac{g}{\omega_k^2}$$

ist also unveränderlich, und wie ersichtlich gleich der Durchbiegung der Welle unter dem Eigengewicht der



Scheibe. Da die wagerechte Verschiebung $\eta \cos \omega t + \zeta \sin \omega t = 0$ ist, so beschreibt der Schwerpunkt eine Kreisbahn mit dem Halbmesser y_0 um den Mittelpunkt O' in der Abbildung.

Die auf $\varepsilon = 0$ bezug habenden Sätze sind das Ergebnis, zu welchem ich in meiner Entgegnung auf die Arbeit von Kerr gelangt bin, und es geht nicht an, wie Gümbel es tut, obige einwandfreie Darlegung mit den gänzlich falschen Rechnungen von Kerr auf dieselbe Stufe zu stellen. Zur besseren Klarlegung empfiehlt es sich noch, C in der Umgebung von $\omega = \omega_k/2$, wie folgt, umzuformen:

Es werde

$$\frac{\omega^2}{\omega_k^2} = \lambda^2 = \frac{1}{4} + \delta \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

gesetzt, wo δ ebenso wie ε^2 kleine Größen bedeuten, deren höhere Potenzen man vernachlässigt. Gleichung (13) liefert dann nach entsprechender Reduktion

$$C = -\frac{g}{\omega_k^2}\,\frac{\delta}{\frac{\varepsilon^2}{2} - \delta} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ähnlich findet man:

[3]) Wir wiederholen hier die Ableitung in rechtwinkligen Koordinaten, damit die Leser den Beweis nicht aus den zerstreuten Artikeln in der Schweiz. Bauzeitung und meinem Buche über Dampfturbinen zusammensuchen müssen.

[4]) Gleichung (10) meines Aufsatzes ist gemäß den obigen Formeln (10) und (11) zu berichtigen.