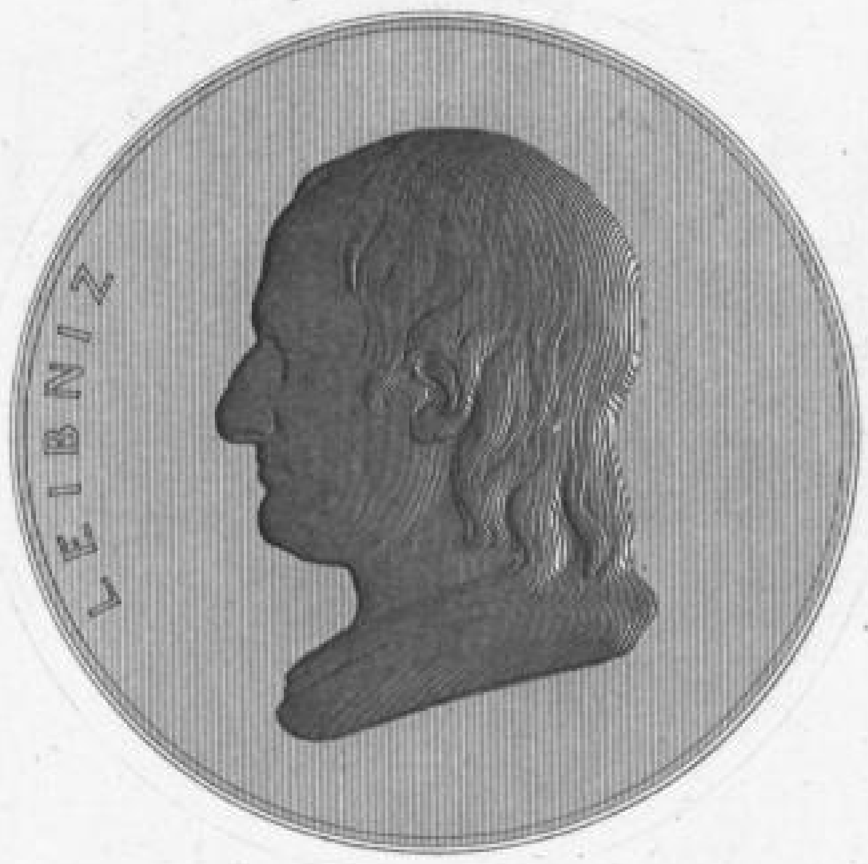
ABHANDLUNGEN

FÜNFZEHNTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



FÜNFZEHNTER BAND.

MIT SIEBEN TAFELN.

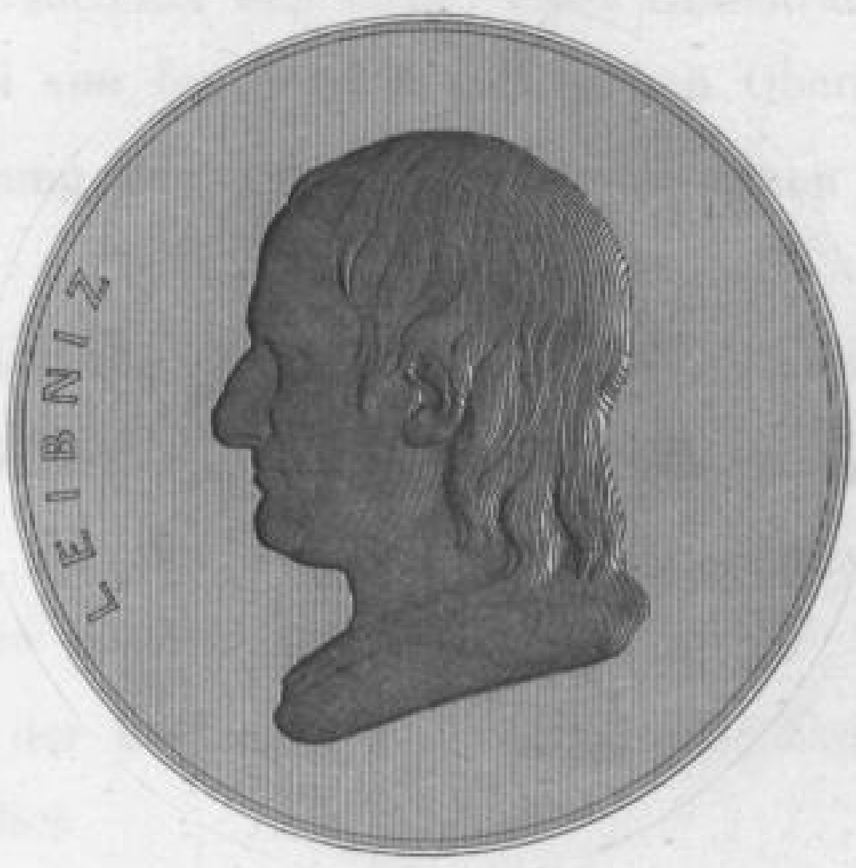
LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1874.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE
DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN
GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ZEHNTER BAND.

MIT SIEBEN TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1874.

INHALT.

DIOPTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER

FARBENZERSTREUUNG

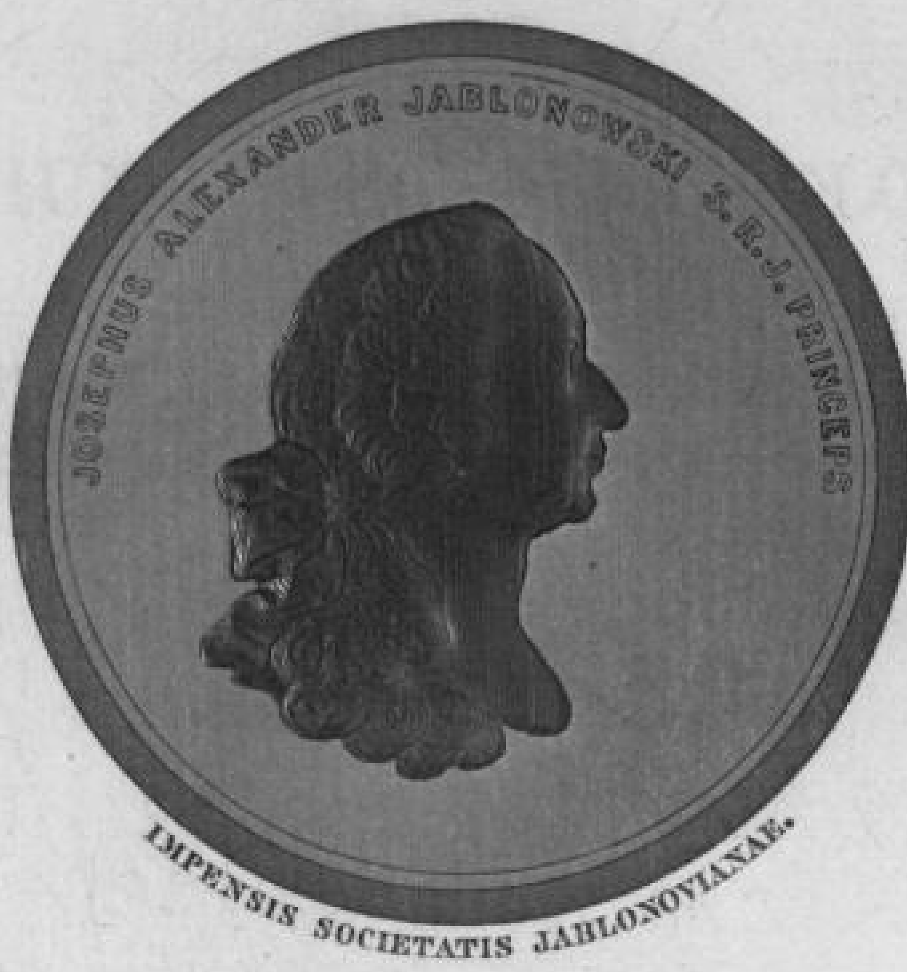
UND DER

ABWEICHUNG WEGEN KUGELGESTALT.

VON

P. A. HANSEN

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ IX.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1874.

Im Manuscript übergeben den 30. Mai 1874.
Der Abdruck vollendet den 29. Novbr. 1874.

DIOPTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER

FARBENZERSTREUUNG

UND DER

ABWEICHUNG WEGEN KUGELGESTALT

VON

P. A. HANSEN.

ZWEITE ABHANDLUNG.

Der am 28. März 1874 in seinem 79. Lebensjahre verstorbene Verfasser liefert in dieser Schrift die bereits in seiner früheren Abhandlung »Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen« (abgedruckt im X. Bande der Abhandl. der math.-phys. Classe der K. S. G. S. 65—202) in Aussicht gestellte Fortsetzung seiner dioptrischen Untersuchungen, welche sich vornehmlich auf die chromatische und sphärische Abweichung eines Linsensystems bezieht. Der Druck der Abhandlung ist noch vor seinem Ende von dem Verfasser angeordnet worden, wenn auch mit dem Bedauern, dass er weder die beabsichtigte Weiterführung seiner Untersuchungen hinzufügen, noch die letzte Hand an die Redaction des vollendeten Theils legen könne. Man wird in dieser Beziehung namentlich eine einleitende Uebersicht über die Tendenz und die Resultate der vorliegenden Arbeit vermissen, ein Mangel, dem durch die nachstehende Uebersicht der Hauptcapitel natürlich nur unvollkommen begegnet werden konnte. Wir bemerken noch, dass man geglaubt hat, sich jeder wesentlichen Redactionsänderung an dem mit halb erblindeten Augen niedergeschriebenen Manuscripte enthalten zu sollen; dass man aber von Art. 79 an, der allein in der Ueberschrift existirt, aus einem dem Manuscripte beiliegenden Brouillon einige Paragraphen über den Einfluss einer Aenderung in den Linsenkrümmungen auf die Vereinigungsweite der Strahlen entlehnt hat, die aller Wahrscheinlichkeit nach Material zur beabsichtigten Fortsetzung liefern sollten. Selbstverständlich hat die Verantwortlichkeit für die getroffene Auswahl lediglich der Unterzeichnete zu tragen, welchem der Auftrag zur Ueberwachung der Herausgabe des hinterlassenen Manuscripts geworden ist.

Scheibner.

Inhaltsübersicht.

Berichtigungen.

S. 710 Zeile 1, 3, 4 von oben lies: »$R\ R'\ R''$« statt: »$k\ k'\ k''$«.

S. 721 - 3 von oben lies: $+\dfrac{(m'-1)\,(m'+2)}{m'}\,D'+C$.

S. 723 - 16 - - fehlt im Werthe von a das Endglied $+C$.

S. — - 18 - - im Werthe von c lies: »$\dot{+}\ C'$« statt: »$+\ C$«.

S. — - 20 - - lies: »$C = 0$ und $C' = 0$«.

---

§ 1. Allgemeine Entwickelungen.

1.

Denken wir uns eine unbestimmte Anzahl von Kugeloberflächen, welche Mittel von verschiedener Brechbarkeit von einander absondern, und solche Lage haben, dass ihre Mittelpunkte alle auf Einer graden Linie liegen. Diese Linie, welche die optische Achse des Systems von brechenden Oberflächen genannt wird, soll zugleich die Abscissenachse sein; die, von einem beliebigen Anfangspunkte an gezählten, Abscissen der Durchschnittspunkte der brechenden Oberflächen mit der Abscissenachse mögen q, q', q'', etc., die der Mittelpunkte derselben Oberflächen p, p', p'', etc. genannt werden. Die Brechungsverhältnisse der verschiedenen Mittel, von dem vor der ersten Kugeloberfläche anfangend, sollen durch

$$\frac{1}{n} : \frac{1}{n'} : \frac{1}{n''} : \frac{1}{n'''} : \text{ etc.}$$

ausgedrückt werden.

2.

Betrachten wir die durch ein derartiges System von brechenden Oberflächen gehenden Lichtstrahlen, aber ziehen wir nur solche in Betracht, welche die optische Achse, oder die Abscissenachse, schneiden, da leicht einzusehen ist, dass diejenigen Lichtstrahlen, bei denen diess nicht der Fall, geringeren Abweichungen unterworfen sind als jene. Nehmen wir an, dass sich im ersten Mittel, das ist vor der ersten brechenden Oberfläche, ein leuchtender Punkt befinde, dessen Abscisse ξ und dessen Ordinate η sei, und betrachten vorläufig nur Einen der Lichtstrahlen, die der leuchtende Punkt auf die erste brechende Oberfläche sendet, und zwar denjenigen, welcher letztere in dem Punkte schneidet, dessen Abscisse a

und dessen Ordinate k ist. Es ist klar, dass die Lage dieses Lichtstrahls hiemit vollständig gegeben ist; ja dieselbe ist hiedurch mehr als hinreichend und nöthig bestimmt, da vermöge der gegebenen Beschaffenheit der brechenden Oberfläche a und k von einander abhängig sind.

3.

Die Gleichung des eben definirten einfallenden Lichtstrahls kann auf verschiedene Weise aufgestellt werden. Bezeichnen wir die laufenden Coordinaten irgend einer Linie überhaupt mit x und y, sowie die Abscisse des Punktes, in welchem die Verlängerung dieses Lichtstrahls die Abscissenlinie schneidet, mit c, so ist die Gleichung desselben

$$y - \eta = (\xi - x) \frac{\eta}{c - \xi}$$

Nennen wir den Winkel, den der Lichtstrahl mit der Abscissenachse macht α, so geht diese Gleichung über in

$$y - \eta = (\xi - x) \operatorname{tg}\alpha$$

indem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta}{c - \xi}$$

ist. Wir wollen uns nicht bei allen übrigen Formen aufhalten, die dieser Gleichung gegeben werden könnten, sondern nur noch Eine derselben hervorheben, die uns nützlich werden wird. Eliminiren wir durch Hülfe der letzten Gleichung η aus der vorstehenden, so verschwindet auch ξ, und die Gleichung des einfallenden Lichtstrahls wird

$$y = (c - x) \operatorname{tg}\alpha$$

Durch diese Gleichung wird der allgemeinere Fall, den wir zuerst eingeführt haben, nemlich der, dass der leuchtende Punkt ausserhalb der optischen Achse liegt, auf den speciellen zurückgeführt, dass er in der optischen Achse selbst, und zwar in dem Punkte c derselben liegt. Man kann betreffenden Falles durch dieselbe Analyse von dem speciellen Falle zu dem allgemeineren übergehen. Es ist auch an sich klar, dass alle leuchtenden Punkte, die auf der Linie des Lichtstrahls, die wir betrachtet haben, vor der ersten brechenden Oberfläche liegen, derselben Brechung unterworfen sind.

4.

Gehen wir zu dem durch die erste Oberfläche gebrochenen Lichtstrahl über, nennen die Abscisse, unter welcher dieser die Abscissenachse schneidet c', und den Winkel, den er mit der Abscissenachse macht α', so ist dem Vorhergehenden analog die Gleichung desselben:

$$y = (c' - x) \operatorname{tg} \alpha'$$

und für α' werden wir die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\eta'}{c' - \xi'}$$

bekommen, wenn ξ' und η' die Abscisse und die Ordinate irgend eines Punktes der Linie bezeichnen, die der gebrochene Lichtstrahl beschreibt.

5.

Die nächste Aufgabe wird nun darin bestehen, die Abhängigkeit zwischen c' und c durch bekannte Grössen auszudrücken, und die Gleichung, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, so weit zu entwickeln, dass darin das erste Glied des Unterschiedes zwischen Sinus und Bogen enthalten ist.

Nennen wir den Einfallswinkel λ und den Brechungswinkel μ, so giebt die Dioptrik, in Folge der im Art. 1 eingeführten Bezeichnungen der Brechungsverhältnisse:

$$n \sin \lambda = n' \sin \mu$$

und es sind zunächst λ und μ durch α und α' auszudrücken. Diess geschieht am einfachsten durch Zuziehung des Winkels, den der an den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt des einfallenden und des gebrochenen Lichtstrahls mit der brechenden Oberfläche gezogene Halbmesser der letzteren mit der Abscissenachse macht. Nennen wir diesen Winkel θ, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k}{p - a}$$

ist, und man findet leicht, dass θ der äussere Winkel von zwei Dreiecken ist, von welchen das eine die inneren gegenüberliegenden Winkel λ und α hat, während in dem anderen diese Winkel μ und α' sind. Hieraus folgt sogleich

$$\lambda = \theta - \alpha, \quad \mu = \theta - \alpha'$$

und die Gleichung des Brechungsgesetzes geht über in

$$n \sin(\theta - \alpha) = n' \sin(\theta - \alpha')$$

aus welcher die drei Winkel θ, α, α' zu eliminiren sind.

6.

Gleichwie in Art. 5 ξ' und η' als die Coordinaten irgend eines beliebigen Punktes auf der Linie des gebrochenen Strahls definirt wurden, können auch ξ und η als die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Linie des einfallenden Strahls definirt, und der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien als derjenige Punkt betrachtet werden, welchem sowohl ξ und η, als auch ξ' und η' angehören. Da nun die Coordinaten dieses Durchschnittspunktes auch a und k sind, so bekommen wir sogleich die drei, einander analogen Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{c-a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{k}{c'-a}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k}{p-a}$$

durch deren Hülfe sich leicht $\sin(\theta-\alpha)$ und $\sin(\theta-\alpha')$ ausdrücken lassen.

7.

Wir brauchen uns nur mit der Entwickelung des ersten der beiden eben genannten Sinus zu beschäftigen, da daraus die des anderen durch blosse Substitution von c' statt c hervorgehen wird. Die Gleichungen des vorigen Art. geben sofort

$$\sin(\theta-\alpha) = k\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{c-a}\right)\cos\theta\cos\alpha$$

und aus denselben Gleichungen erhält man

$$\cos\theta = \frac{p-a}{\sqrt{(p-a)^2+k^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{c-a}{\sqrt{(c-a)^2+k^2}}$$

oder nach den hier erforderlichen Entwickelungen:

$$\cos\theta\cos\alpha = 1 - \frac{k^2}{2(p-a)^2} - \frac{k^2}{2(c-a)^2}$$

Um aus diesen Gleichungen a fortzuschaffen bemerke ich, dass zufolge der Definitionen des Art. 1 der Halbmesser der ersten brechenden Kugeloberfläche durch $p-q$ ausgedrückt wird, und wir sowohl deshalb, als weil der Durchschnittspunkt, dessen Coordinaten a und k sind, auf dieser Kugeloberfläche liegen, die Gleichung

$$(p-q)^2 = (p-a)^2 + k^2$$

erhalten. Die obige Gleichung für $\cos\theta$ giebt in Folge dessen

$$a = q + (p-q)(1-\cos\theta)$$

und wenn die Entwickelung von $\cos\theta$ substituirt wird,

$$a = q + \frac{k^2}{2(p-q)}$$

wodurch man leicht

$$\frac{1}{p-a} = \frac{1}{p-q} + \frac{k^2}{2(p-q)^3}$$

$$\frac{1}{c-a} = \frac{1}{c-q} + \frac{k^2}{2(p-q)(c-q)^2}$$

erhält. Setzt man nun, um die Ausdrücke zusammen zu ziehen,

$$R = \frac{1}{p-q}, \quad \pi = \frac{1}{c-q}$$

so wird die obige Gleichung für $\sin(\theta-\alpha)$

$$\sin(\theta-\alpha) = k\left(R-\pi+R^3\frac{k^2}{2}-R\pi^2\frac{k^2}{2}\right)\left(1-R^2\frac{k^2}{2}-\pi^2\frac{k^2}{2}\right)$$

oder nach der Entwickelung:

$$\sin(\theta-\alpha) = k(R-\pi) + \pi(R-\pi)^2\frac{k^3}{2}$$

Setzt man ferner

$$\pi' = \frac{1}{c'-q}$$

so ergiebt sich sogleich

$$\sin(\theta-\alpha') = k(R-\pi') + \pi'(R-\pi')^2\frac{k^3}{2}$$

und aus der Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung des Brechungsgesetzes folgt ohne Weiteres:

$$n(R-\pi) - n'(R-\pi') = \{n'\pi'(R-\pi')^2 - n\pi(R-\pi)^2\}\frac{k^2}{2}$$

womit die Aufgabe gelöst ist, da π' in dieser Gleichung die einzige Unbekannte ist.

8.

Man kann dem Coefficienten von k^2 in der eben erhaltenen Gleichung verschiedene Formen geben, von denen ich die wichtigsten hier ableiten will. Setzt man zur Abkürzung

$$L = n'\pi'(R-\pi')^2 - n\pi(R-\pi)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

welches die erste Form von L ist, so wird

$$n(R-\pi) - n'(R-\pi') = L\frac{k^2}{2}$$

und wir dürfen uns, ohne den Grad der Genauigkeit zu verletzen, zur Verwandlung der Form von L der Gleichung

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad n(R-\pi) = n'(R-\pi')$$

bedienen. Eliminirt man damit ein Mal $R-\pi'$ und ein Mal $R-\pi$ aus der Gleichung (1), so bekommt man die beiden weiteren Formen:

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad L = \frac{n}{n'}(n\pi' - n'\pi)(R-\pi)^2$$

$$(3) \ldots\ldots\ldots \quad L = \frac{n'}{n}(n\pi' - n'\pi)(R-\pi')^2$$

Die Gleichung (a) kann leicht auf die beiden folgenden Formen gebracht werden

$$(b) \left\{ \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} (n'-n)(R-\pi) &= n'(\pi'-\pi) \\ (n'-n)(R-\pi') &= n(\pi'-\pi) \end{aligned} \right.$$

und benutzt man diese, um sowohl $R-\pi$ wie $R-\pi'$ aus (1) zu eliminiren, so ergiebt sich:

$$(4) \ldots\ldots\ldots \quad L = \frac{n'n}{(n'-n)^2}(n\pi' - n'\pi)(\pi'-\pi)^2.$$

Man kann endlich auch die Gleichung (a) in die beiden Ausdrücke verwandeln

$$n\pi' - n'\pi = \frac{n'-n}{n'}\{n(R-\pi) - n'\pi\}$$

$$n\pi' - n'\pi = \frac{n'-n}{n}\{n'(R-\pi') - n\pi'\}$$

und substituirt man diese, nebst den aus den Gleichungen (b) folgenden Werthen von $\pi'-\pi$ in (4), so erhält man

$$(5) \ldots\ldots \quad L = \frac{n(n'-n)}{n'^2}\{n(R-\pi)^3 - n'\pi(R-\pi)^2\}$$

$$(6) \ldots\ldots \quad L = \frac{n'(n'-n)}{n^2}\{n'(R-\pi')^3 - n\pi'(R-\pi')^2\}$$

Diese beiden Formen von L besitzen die Eigenschaft, dass in der ersten kein π' und in der zweiten kein π enthalten ist. Wir bemerken noch, dass die vorhin erhaltene Gleichung für π in der folgenden Form aufgestellt werden kann:

$$(A) \ldots\ldots\ldots \quad n'\pi' = n\pi + (n'-n)R + L\frac{k^2}{2}$$

welche verlangt wird, wenn sie auf mehrere Brechungen angewandt werden soll, und in welcher man jede beliebige der eben erhaltenen sechs Formen von L substituiren darf.

9.

Die nächste Aufgabe besteht in der Ermittelung des Orts des Bildes, oder der Bilder, die nach der ersten Brechung von dem

Gegenstande entstehen, dessen Coordinaten ξ und η sind, und wobei von der Definition ausgegangen werden muss, dass das Bild eines Gegenstandes immer in dem Durchschnittspunkte zweier gebrochenen Lichtstrahlen entsteht.

Nehmen wir vorläufig an, dass $\eta = 0$ und demzufolge $\xi = c$ werde, so giebt die Gleichung (A) des vor. Art. durch den Werth von π', welcher aus derselben folgt, schon den allgemeinen Ort der Bilder dieses Gegenstandes an. Denn da der angenommene Gegenstand in der optischen Achse liegt, und der von demselben ausgehende, in der optischen Achse liegende Lichtstrahl ungebrochen durchgeht, so wird er von allen übrigen Lichtstrahlen in dem durch π' bestimmten, auch in der optischen Achse liegenden Punkte geschnitten, und giebt folglich ein Bild des Gegenstandes. Da aber π' von k mit abhängt, und k von Null bis an die Grenze des den Lichtstrahlen zugänglich gelassenen Theils der brechenden Oberfläche ausgedehnt werden kann, so nimmt π' innerhalb gewisser Grenzen eine grosse Anzahl von Werthen an, deren jeder einem Bilde des Gegenstandes entspricht.

Aber auch ausserhalb der optischen Achse liegen Bilder des in der optischen Achse befindlichen Gegenstandes. Denn die irgend zwei Werthen von k, die beide nicht Null sind, entsprechenden Lichtstrahlen schneiden einander ebenfalls, und zwar ausserhalb der optischen Achse. Der ganze Complex von Bildern, welche von dem Einen Gegenstande entstehen, nimmt also einen körperlichen Raum ein, dessen Ausdehnung grösser oder kleiner ist, je nachdem das Maximum von k grösser oder kleiner ist. Wenn der dem Lichte zugänglich gelassene Theil der brechenden Oberfläche, wie gewöhnlich, durch einen Kreis begrenzt wird, durch dessen Mittelpunkt man sich die optische Achse gehend denkt, dann ist der körperliche Raum, in welchem alle Bilder eines in der optischen Achse liegenden Gegenstandes enthalten sind, symmetrisch, und die Projection desselben auf eine durch die optische Achse gelegte, senkrechte Ebene ist auch ein Kreis. Man kann den Durchmesser dieses Kreises, sowie die Länge der darauf senkrecht stehenden Achse des genannten körperlichen Raumes, welche einen Abschnitt der optischen Achse bildet, bestimmen; aber es würde mich zu weit führen, wenn ich mich hier darauf einlassen wollte.

10.

Nehmen wir jetzt an, dass von den Coordinaten ξ und η des Gegenstandes keine gleich Null sei, und suchen den allgemeinen Ausdruck für den Ort der Bilder, welche in den Durchschnittspunkten der einander unendlich nahe liegenden Lichtstrahlen entstehen. Allgemeinen Grundsätzen zufolge erhalten wir die Coordinaten ξ' und η' dieser Bilder, wenn wir die Gleichung (A) des Art. 8 unter der Bedingung, dass sowohl ξ und η, wie ξ' und η' Constanten seien, differentiiren, und darauf ξ' und η' wechselsweise zwischen diesem Differential und der Gleichung selbst eliminiren.

Es ist dem Vorhergehenden zufolge

$$\frac{\eta}{c-\xi} = \frac{k}{c-a}$$

indem jede Seite dieser Gleichung nichts Anderes ist als ein Ausdruck für $\operatorname{tg}\alpha$; ferner sind identisch

$$c-\xi = (c-q)-(\xi-q) = \frac{1}{\pi}-\frac{1}{\lambda}$$

wenn wir

$$\lambda = \frac{1}{\xi-q}$$

setzen, und

$$c-a = (c-q)-(a-q) = \frac{1}{\pi}-R\frac{k^2}{2}$$

zufolge der im Art. 7 gegebenen Entwickelung von $(a-q)$. Die Substitution dieser Ausdrücke in die obige Gleichung giebt nach einer kurzen Entwickelung:

$$\pi = \lambda-\frac{\eta\lambda}{k}\left(1-\pi R\frac{k^2}{2}\right)$$

und ebenso erhält man

$$\pi' = \lambda'-\frac{\eta'\lambda'}{k}\left(1-\pi' R\frac{k^2}{2}\right)$$

nachdem

$$\lambda' = \frac{1}{\xi'-q}$$

gesetzt worden ist. Zu diesen Gleichungen kann man bemerken, dass η, η', k im Allgemeinen Grössen derselben Ordnung sind. Die oben angezogene Gleichung (A), nemlich

$$n'\pi' = n\pi+(n'-n)R+L\frac{k^2}{2}$$

geht durch Substitution der bez. Ausdrücke für π und π' über in

$$\text{(B)}\ \ldots\ n'\lambda' = n\lambda+(n'-n)R+n'\frac{\lambda'\eta'}{k}\left(1-\pi' R\frac{k^2}{2}\right)-n\frac{\lambda\eta}{k}\left(1-\pi R\frac{k^2}{2}\right)+L\frac{k^2}{2}$$

Sieht man in dieser Gleichung k als einzige Veränderliche an, indem die Zuziehung der Veränderung von π, π', L nur Glieder höherer Ordnung als die, welche überhaupt berücksichtigt worden sind, hervorbringen würde, so giebt das Differential derselben

$$0 = -n'\frac{\lambda'\eta'}{k^2}\left(1+\pi' R\frac{k^2}{2}\right) + n\frac{\lambda\eta}{k^2}\left(1+\pi R\frac{k^2}{2}\right) + Lk$$

woraus sogleich

$$\eta' = \eta\frac{n\lambda}{n'\lambda'}\left(1+(\pi-\pi')R\frac{k^2}{2}\right) + \frac{L}{n'\lambda'}k^3 \quad \ldots\ldots \text{(C)}$$

folgt. Die Gleichung (B) wird hierauf, nachdem η' durch Hülfe der vorstehenden Gleichung eliminirt worden,

$$n'\lambda' = n\lambda + (n'-n)R + n\lambda\eta(\pi-\pi')Rk + \tfrac{3}{2}Lk^2 \quad \ldots \text{(D)}$$

womit die Aufgabe gelöst ist, da die beiden vorstehenden Gleichungen die Coordinaten ξ' und η' des Bildes geben. Da diese Ausdrücke von k abhängen, so erkennt man, dass wieder der Gegenstand, dessen Coordinaten ξ und η sind, eine Reihe von Bildern giebt.

11.

Gehen wir zu dem Falle über, in welchem das Bild des Gegenstandes in dem Durchschnittspunkte zweier Lichtstrahlen liegt, welche die brechende Oberfläche in zwei Punkten schneiden, die in einer endlichen Entfernung von einander liegen. Diese Aufgabe wird dadurch gelöst, dass wir die Gleichung (B) des vor. Art. in Bezug auf zwei solche Punkte aufstellen, und zwischen den zwei so entstehenden Gleichungen wechselsweise η' und λ' eliminiren. Nennen wir die Ordinate des Durchschnittspunktes des zweiten Lichtstrahls mit der brechenden Oberfläche k', und behalten für den ersten Lichtstrahl die Bezeichnung k dieser Ordinate bei, so sind die beiden bezeichneten Gleichungen:

$$n'\lambda' = n\lambda + (n'-n)R + n'\frac{\lambda'\eta'}{k}\left(1-\pi' R\frac{k^2}{2}\right) - n\frac{\lambda\eta}{k}\left(1-\pi R\frac{k^2}{2}\right) + L\frac{k^2}{2}$$

$$n'\lambda' = n\lambda + (n'-n)R + n'\frac{\lambda'\eta'}{k'}\left(1-\pi' R\frac{k'^2}{2}\right) - n\frac{\lambda\eta}{k'}\left(1-\pi R\frac{k'^2}{2}\right) + L\frac{k'^2}{2}$$

aus denen man durch die bez. Eliminationen ohne Schwierigkeit

$$\eta' = \eta\frac{n\lambda}{n'\lambda'}\left(1+\tfrac{1}{2}(\pi-\pi')Rkk'\right) + \frac{L}{n'\lambda'}\frac{k+k'}{2}kk' \quad \ldots \text{(C')}$$

$$n'\lambda' = n\lambda + (n'-n)R + \tfrac{1}{2}n\lambda\eta(\pi-\pi')R(k+k') + \tfrac{1}{2}L(k^2+kk'+k'^2) \quad \text{(D')}$$

erhält, welche die Coordinaten der verlangten Bilder geben. Man sieht sogleich, dass diese Gleichungen in die Gll. (C) und (D) des vor. Art. übergehen, wenn man $k' = k$ macht; sie enthalten also auch den dort betrachteten Fall, und geben daher überhaupt die Coordinaten aller in der Ebene der xy liegenden Bilder.

Einen besonderen Fall wollen wir noch betrachten, welcher zu einer Uebersicht über die Lage der Gesammtheit aller Bilder führt. Nehmen wir an, dass der zweite Lichtstrahl die brechende Oberfläche in demselben Punkte schneide, in welchem diese letztere von der Abscissenachse, die als identisch mit der optischen Achse betrachtet wird, geschnitten wird. Es folgt hieraus $k' = 0$, und die Gleichungen (C) und (D) gehen über in:

$$(C'') \quad \ldots \quad \eta' = \eta \frac{n\lambda}{n'\lambda'}$$

$$(D'') \quad . \quad . \quad n'\lambda' = n\lambda + (n' - n) R + \tfrac{1}{2} n\lambda\eta (\pi - \pi') Rk + \tfrac{1}{2} Lk^2$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dass jetzt der Ausdruck für η' unabhängig von k ist, und folglich diese Coordinate denselben Werth behält, wie auch k beschaffen sein mag. Es folgt hieraus, dass im gegenwärtigen Falle alle Bilder auf einer graden Linie liegen, welche der Abscissenachse parallel ist. Man kann noch weiter gehen, und die Gleichungen (C'') und (D'') auf die Gesammtheit aller möglichen Bilder ausdehnen. Man kann sie vermittelst einer einfachen Betrachtung auf die Lichtstrahlen anwenden, die mit der ursprünglich angenommenen Abscissenachse nicht in Einer Ebene liegen, und gelangt dadurch zur Uebersicht über die Gestalt des Raumes, in welchem sich alle Bilder des als Punkt gedachten Gegenstandes befinden. Die hiezu anzuwendenden Betrachtungen sind so einfache, dass es genügt, ihr Resultat anzugeben. Vorausgesetzt, dass die dem Lichte zugänglich gelassenen Theile der brechenden Oberflächen durch Kreise beschränkt sind, deren Mittelpunkte in der optischen Achse liegen, so ist die Gesammtheit aller von dem eben genannten Gegenstande entstehenden Bilder in einem kleinen körperlichen Raume enthalten, welcher von einer Oberfläche begrenzt wird, die man eine abgeplattete eiförmige nennen kann. Die grosse Achse dieser Oberfläche ist der optischen Achse (wenigstens sehr nahe) parallel; die mittlere Achse liegt in der Ebene, die durch den Gegenstand und die optische Achse geht, mit anderen Worten in der xy-Ebene; die kleine Achse steht senkrecht auf jenen beiden. Die Oberfläche wird durch die xy-Ebene in zwei gleiche und ähnliche Theile zerlegt, lässt aber im Allgemeinen sonst keine symmetrische Theilung zu; ihre Projection auf eine zur optischen Achse senkrechte Ebene bildet eine eiförmige Figur, die durch ihre, nach der optischen Achse hingerichtete grosse Achse in zwei gleiche und ähnliche Theile getheilt wird. Wenn der Gegenstand in der optischen Achse liegt, so geht die jetzt besprochene Oberfläche in die im Art. 9 erhaltene Revolutionsoberfläche über.

12.

Dehnen wir jetzt die im Vorhergehenden abgeleiteten Formeln auf eine beliebige Anzahl von brechenden Oberflächen aus, so kommen vor Allem die auf der Abscissenachse gemessenen Entfernungen dieser Oberflächen von einander in Betracht, welche zufolge der im Art. 1 eingeführten Bezeichnungen durch die Unterschiede $q'-q$, $q''-q'$, $q'''-q''$, etc. ausgedrückt werden. Setzen wir zur Abkürzung

$$q'-q=d,\ q''-q'=d',\ q'''-q''=d'', \text{ etc.}$$

Gleichwie oben die Abscisse des Durchschnittspunkts des einfallenden Lichtstrahls mit der Abscissenachse c, und die des ein Mal gebrochenen Strahls c' genannt wurden, sollen von nun an diese Abscissen für den zwei Mal, drei Mal u. s. w. gebrochenen Lichtstrahl mit c'', c''', u. s. w. bezeichnet werden, und gleichwie die auf der Abscissenachse gemessenen Entfernungen der beiden ersten dieser Durchschnittspunkte von der ersten Oberfläche $c-q$ und $c'-q$ sind, werden die des zweiten und dritten von der zweiten Oberfläche $c'-q'$ und $c''-q'$, die des dritten und vierten von der dritten Oberfläche $c''-q''$ und $c'''-q''$, u. s. w. sein. Hieraus ergeben sich sofort die Gleichungen

$$\begin{aligned} c'-q &= c'-q'+d \\ c''-q' &= c''-q''+d' \\ c'''-q'' &= c'''-q'''+d'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Führt man daher, ausser den im Vorhergehenden schon vorkommenden Bezeichnungen

$$\pi=\frac{1}{c-q},\ \pi'=\frac{1}{c'-q}$$

auch

$$\pi_{,} = \frac{1}{c'-q'}, \quad \pi'' = \frac{1}{c''-q'}$$

$$\pi_{,,} = \frac{1}{c''-q''}, \quad \pi''' = \frac{1}{c'''-q''}$$

etc.

ein, so bekommt man zunächst die Relationen

$$\pi_{,} - \pi' = \pi_{,}\, \pi'\, d$$

$$\pi_{,,} - \pi'' = \pi_{,,}\, \pi''\, d'$$

$$\pi_{,,,} - \pi''' = \pi_{,,,}\, \pi'''\, d''$$

etc.

und hieraus die folgenden, auf deren rechten Seiten nur je Eine der beiden concurrirenden Reciproken der Vereinigungsweiten vorkommt:

$$\pi_{,} = \frac{\pi'}{1-\pi' d} = \pi' + \frac{\pi'^2 d}{1-\pi' d}$$

$$\pi_{,,} = \frac{\pi''}{1-\pi'' d'} = \pi'' + \frac{\pi''^2 d'}{1-\pi'' d'}$$

$$\pi_{,,,} = \frac{\pi'''}{1-\pi''' d''} = \pi''' + \frac{\pi'''^2 d''}{1-\pi''' d''}$$

etc. etc.

Es folgen aus diesen die entgegengesetzten Relationen:

$$\pi' = \frac{\pi_{,}}{1+\pi_{,} d} = \pi_{,} - \frac{\pi_{,}^2 d}{1+\pi_{,} d}$$

$$\pi'' = \frac{\pi_{,,}}{1+\pi_{,,} d'} = \pi_{,,} - \frac{\pi_{,,}^2 d'}{1+\pi_{,,} d'}$$

$$\pi''' = \frac{\pi_{,,,}}{1+\pi_{,,,} d''} = \pi_{,,,} - \frac{\pi_{,,,}^2 d''}{1+\pi_{,,,} d''}$$

etc. etc.

13.

Die Abscisse des Punktes, in welchem der Lichtstrahl die erste Oberfläche schneidet, wurde a, und dessen Ordinate k genannt; für die zweite und folgenden Oberflächen seien dieselben a' und k', a'' und k'', u. s. w. Diese Werthe sind von einander abhängig, und man findet leicht, dass ihre Abhängigkeit durch die Gleichungen

$$\frac{k'}{k} = \frac{c'-a'}{c'-a}$$

$$\frac{k''}{k'} = \frac{c''-a''}{c''-a'}$$

etc.

ausgedrückt wird. Aber im Vorhergehenden wurde k als kleine Grösse erster Ordnung eingeführt, und aus diesem Grunde sind auch

k', k'', etc. kleine Grössen erster Ordnung; es werden daher die Unterschiede $a-q$, $a'-q'$, $a''-q''$, etc. kleine Grössen zweiter Ordnung. Da nun hier nur die niedrigsten Potenzen von k, k', k'', etc. berücksichtigt werden, so dürfen wir in den vorstehenden Gleichungen q statt a, q' statt a', q'' statt a'', etc. setzen, und dieselben können daher zu Functionen der d, d', d'', etc. gemacht werden. Durch Hülfe der Gleichungen des vor. Art. verwandelt man sie in

$$k' = (1-\pi' d)\,k$$
$$k'' = (1-\pi'' d')\,k'$$
$$k''' = (1-\pi''' d'')\,k''$$
$$\text{etc.}$$

oder in

$$k = (1+\pi_{,} d)\,k'$$
$$k' = (1+\pi_{,,} d')\,k''$$
$$k'' = (1+\pi_{,,,} d'')\,k'''$$
$$\text{etc.}$$

Jedes dieser beiden Systeme kann nach Umständen angewandt werden.

14.

Nach diesen Vorbereitungen ist es ein Leichtes, die obigen Formeln auf eine beliebige Anzahl von Brechungen auszudehnen. Setzen wir noch

$$R' = \frac{1}{p'-q'},\quad R'' = \frac{1}{p''-q''},\ \text{etc.}$$

und bezeichnen in Bezug auf die zweite und folgende Brechungen mit L', L'', etc. den Coefficienten, welcher in Bezug auf die erste Brechung L genannt wurde, so entstehen neben der Gleichung (A) des Art. 8 sogleich die folgenden:

$$n'\pi' = (n'-n)\,R + n\pi + L\,\frac{k^2}{2}$$
$$n''\pi'' = (n''-n')\,R' + n'\pi_{,} + L'\,\frac{k'^2}{2}$$
$$n'''\pi''' = (n'''-n'')\,R'' + n''\pi_{,,} + L''\,\frac{k''^2}{2}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

die man fortsetzen kann soweit als man will. In Bezug auf die Ausdrücke für L', L'', etc. will ich der Deutlichkeit wegen noch bemerken, dass sie aus denen für L des Art. 8 entstehen, wenn man in den letzteren

$$n',\ n,\ k,\ \pi,\ \pi'$$

bezüglich in

$$n'',\ n',\ k',\ \pi_,,\ \pi''$$

$$n''',\ n'',\ k'',\ \pi_{,,},\ \pi'''$$

u. s. w. verwandelt, wie sich von selbst versteht.

15.

Eliminiren wir aus den im vor. Art. erhaltenen Gleichungen die Grössen $\pi_,$, $\pi_{,,}$, etc. und k', k'', etc. durch die in den Artt. 12 und 13 dafür erhaltenen Gleichungen, so stellen sie sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
n'\pi' &= n\pi + (n'-n)R + L\frac{k^2}{2}\\
n''\pi'' &= n'\pi' + (n''-n')R' + n'\pi'\pi_, d + (1-\pi'd)^2 L'\frac{k^2}{2}\\
n'''\pi''' &= n''\pi'' + (n'''-n'')R'' + n''\pi''\pi_{,,} d' + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2 L''\frac{k^2}{2}\\
n^{\text{IV}}\pi^{\text{IV}} &= n'''\pi''' + (n^{\text{IV}}-n''')R''' + n'''\pi'''\pi_{,,,} d''\\
&\qquad + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2(1-\pi'''d'')^2 L'''\frac{k^2}{2}\\
\text{etc.} &\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

welche man auch so weit fortsetzen kann, als man will.

Durch blosse Additionen erhält man hieraus eine Reihe von Gleichungen, welche in ihren Hauptgliedern nur vom ersten und letzten π abhängen, nemlich

$$\begin{aligned}
n'\pi' &= n\pi + (n'-n)R + L\frac{k^2}{2}\\
n''\pi'' &= n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + n'\pi'\pi_, d + \{L + (1-\pi'd)^2 L'\}\frac{k^2}{2}\\
n'''\pi''' &= n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + n'\pi'\pi_, d + n''\pi''\pi_{,,} d'\\
&\qquad + \{L + (1-\pi'd)^2 L' + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2 L''\}\frac{k^2}{2}\\
n^{\text{IV}}\pi^{\text{IV}} &= n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + (n^{\text{IV}}-n''')R'''\\
&\qquad + n'\pi'\pi_, d + n''\pi''\pi_{,,} d' + n'''\pi'''\pi_{,,,} d'' + \{L + (1-\pi'd)^2 L' +\\
&\qquad + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2 L'' + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2(1-\pi'''d'')^2 L'''\}\frac{k^2}{2}\\
\text{etc.} &\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

wo wieder das Gesetz des Fortganges offenbar ist.

Die zwischen dem ersten und dem letzten π liegenden π', π'', π''', etc., welche hier in den Nebengliedern vorkommen, lassen sich in den Anwendungen leicht berücksichtigen, wie man in der Folge sehen wird.

16.

Ein Umstand, welcher in den Anwendungen häufig vorkommt, besteht darin, dass die Entfernungen, entweder aller brechenden Oberflächen, oder wenigstens einer Anzahl derselben, von einander weit kleiner sind als die Halbmesser der letzteren, und daher in Bezug auf diese Halbmesser als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden können, von denen es ausreicht, nur die ersten Potenzen zu berücksichtigen. Die Einführung dieser Bedingung vereinfacht die im vor. Art. erhaltenen Gleichungen und macht sie der Anwendung leichter zugänglich. Man kann durch die Benutzung dieses Umstandes genäherte Formeln von solcher Genauigkeit erhalten, dass die durch dieselben berechneten Linsensysteme entweder gar keiner, oder doch nur sehr geringer Verbesserung durch die Anwendung der strengen, trigonometrischen Formeln bedürfen, welche den Weg, den der Lichtstrahl nach verschiedenen Brechungen durchläuft, geben.

Nehmen wir jetzt an, dass alle Entfernungen der brechenden Oberflächen von einander, das ist alle mit d, d', d'', etc. bezeichneten Grössen so klein seien, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenzen derselben ausreicht, so bekommt man aus den Gleichungen des vor. Art. sogleich die folgenden:

$$n'\pi' = n\pi + (n'-n)R + L\frac{k^2}{2}$$

$$n''\pi'' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + n'\pi'^2 d + \{L+L'-2\pi' d L'\}\frac{k^2}{2}$$

$$\begin{aligned} n'''\pi''' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d' \\ + \{L+L'+L''-2\pi' d(L'+L'') - 2\pi'' d' L''\}\frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{\mathrm{IV}}\pi^{\mathrm{IV}} = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + (n^{\mathrm{IV}}-n''')R''' \\ + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d' + n'''\pi'''^2 d'' \\ + \{L+L'+L''+L''' - 2\pi' d(L'+L''+L''') - 2\pi'' d'(L''+L''') - 2\pi''' d'' L'''\}\frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

etc. etc.

die man ebenfalls fortsetzen kann, so weit man will.

17.

Wir kommen jetzt zu dem Falle, in welchem nicht alle Entfernungen zwischen den brechenden Oberflächen so klein sind, dass sie als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden könnten, sondern wo auch solche Entfernungen vorhanden sind, die als endliche Grössen behandelt werden müssen. Die allgemeinen Gleichungen für diesen Fall lassen sich leicht aus den vorhergehenden zusammenstellen, allein es ist nicht nothwendig sie aufzuführen, sondern hinreichend, einen einfachen speciellen Fall auszuwählen, und die demselben zukommenden Gleichungen hinzuschreiben, da man von diesen leicht auf die jedem anderen Falle dieser Gattung zukommenden übergehen kann.

Es soll daher hier angenommen werden, dass sechs brechende Oberflächen vorhanden seien, und zwischen der dritten und vierten derselben sich eine so grosse Entfernung befinde, dass sie strenge berücksichtigt werden muss, während die Entfernungen zwischen den übrigen brechenden Oberflächen so klein sein mögen, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenzen derselben ausreicht. Wir bekommen nun zunächst die beiden nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} n'''\pi''' &= n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' \\ &\quad + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d' + \{L+L'+L''-2\pi' d(L'+L'') - 2\pi'' d' L''\}\frac{k^2}{2} \\ n^{\mathrm{VI}}\pi^{\mathrm{VI}} &= n'''\pi_{'''} + (n^{\mathrm{IV}}-n''')R''' + (n^{\mathrm{V}}-n^{\mathrm{IV}})R^{\mathrm{IV}} + (n^{\mathrm{VI}}-n^{\mathrm{V}})R^{\mathrm{V}} \\ &\quad + n^{\mathrm{IV}}\pi^{\mathrm{IV}2}d''' + n^{\mathrm{V}}\pi^{\mathrm{V}2}d^{\mathrm{IV}} + \{L'''+L^{\mathrm{IV}}+L^{\mathrm{V}}-2\pi^{\mathrm{IV}}d'''(L^{\mathrm{IV}}+L^{\mathrm{V}})-2\pi^{\mathrm{V}}d^{\mathrm{IV}}L^{\mathrm{V}}\}\frac{k'''^2}{2} \end{aligned}$$

welche durch folgende Relationen mit einander zu verbinden sind. Aus dem Art. 13 erhält man

$$k^2 = (1+2\pi' d + 2\pi'' d')k''^2$$

weshalb das mit k^2 multiplicirte Glied der ersten dieser beiden Gleichungen sich auch schreiben lässt:

$$+\{L+L'+L''+2\pi' dL+2\pi'' d'(L+L')\}\frac{k''^2}{2}$$

Ausserdem entnehmen wir den Artt. 12 und 13 die strengen Gleichungen

$$k'' = (1+\pi_{'''}d'')k''', \quad \pi_{'''} = \pi''' + \pi'''\pi_{'''}d''$$

Addirt man nun die beiden obigen Gleichungen, und berücksichtigt die vorstehenden Relationen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} n^{\mathrm{VI}}\pi^{\mathrm{VI}} - n\pi &= (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + \\ &\quad + (n^{\mathrm{IV}}-n''')R''' + (n^{\mathrm{V}}-n^{\mathrm{IV}})R^{\mathrm{IV}} + (n^{\mathrm{VI}}-n^{\mathrm{V}})R^{\mathrm{V}} \\ &\quad + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d' + n'''\pi'''\pi_{'''}d'' + n^{\mathrm{IV}}\pi^{\mathrm{IV}2}d''' + n^{\mathrm{V}}\pi^{\mathrm{V}2}d^{\mathrm{IV}} \\ &\quad + \left\{\begin{array}{l} \{L+L'+L''+2\pi' dL+2\pi'' d'(L+L')\}(1+\pi_{'''}d'')^2 + \\ \quad + \{L'''+L^{\mathrm{IV}}+L^{\mathrm{V}}-2\pi^{\mathrm{IV}}d'''(L^{\mathrm{IV}}+L^{\mathrm{V}})-2\pi^{\mathrm{V}}d^{\mathrm{IV}}L^{\mathrm{V}}\} \end{array}\right\}\frac{k'''^2}{2} \end{aligned}$$

welche Gleichung leicht für eine grössere oder kleinere Anzahl von Brechungen, zwischen denen endliche Entfernungen vorhanden sind, eingerichtet werden kann.

18.

Es wären noch die im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen für die Oerter der Bilder auf eine unbestimmte Anzahl von brechenden Oberflächen auszudehnen, allein da eine solche Ausdehnung auf dieselbe Weise vorgenommen werden müsste, wie die eben ausgeführte, so meine ich davon absehen zu können, um so mehr, da sie sich in den verschiedenen speciellen Fällen weit leichter ausführen lässt, als in dem allgemein aufgestellten Falle. Wir werden, ehe wir diesen Abschnitt schliessen, nur noch Etwas über die Bedeutung einiger der im Vorhergehenden angewandten Grössen anführen.

Die im Vorhergehenden durch $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\pi_{,}}$, $\frac{1}{\pi_{,,}}$, etc., so wie die durch $\frac{1}{\pi'}$, $\frac{1}{\pi''}$, $\frac{1}{\pi'''}$, etc. ausgedrückten, auf der Abscissenachse liegenden Linien nennt man die Vereinigungsweiten der Lichtstrahlen, und zwar die in der zuerst angeführten Gruppe enthaltenen, die Vereinigungsweiten vor den Brechungen, und die in der zweiten Gruppe enthaltenen, die Vereinigungsweiten nach den Brechungen. Die π, $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. π', π'', π''', etc. können also die Reciproken der Vereinigungsweiten genannt werden. Alle hier vorkommenden Vereinigungsweiten, nebst ihren Reciproken, werden vom Durchschnittspunkt der betreffenden brechenden Oberfläche mit der Abscissenachse an gezählt, und sind positiv, wenn sie an derjenigen Seite dieser Oberfläche liegen, an welcher die Abscissen überhaupt wachsen. Ich mache auf diesen Umstand besonders aufmerksam, da er in der Anwendung von wesentlicher Bedeutung ist, und man sonst in der Dioptrik die Vereinigungsweiten vor den Brechungen auf der anderen Seite der brechenden Oberflächen positiv anzunehmen pflegt.

Die mit R, R', R'', etc. bezeichneten Grössen können die Reciproken der Halbmesser der brechenden Oberflächen genannt werden, und sind immer positiv, wenn die betreffende Oberfläche ihre convexe Seite dem einfallenden Lichtstrahle zuwendet.

Die auf der Abscissenachse gemessenen Entfernungen der brechenden Oberflächen von einander, d, d', d'', etc. sind unter allen

Umständen positiv, und ein negatives d muss für eine unmögliche Grösse gehalten werden.

---

§ 2. Berechnung eines Linsensystems von drei Brechungen.

19.

In den Anwendungen werden gewöhnlich die Brechungen der Lichtstrahlen durch Glaslinsen bewirkt, deren Oberflächen man zu erhabenen oder vertieften Kugelabschnitten bearbeitet. Abgesehen von der einfachen Linse, welche zwei Brechungen verursacht, ist ein Linsensystem von drei Brechungen das einfachste, welches man sich denken kann. Man stellt ein solches durch zwei Linsen von verschiedenen Glasarten her, die verschiedene Brechungsverhältnisse besitzen, indem man den inneren Halbmessern der beiden Linsen gleiche Grösse giebt, und sie, ohne eine merkliche Entfernung zu gestatten, an einander legt. Die erste Brechung geschieht sodann von der Luft in die Glasart der ersten Linse, die zweite von der Glasart der ersten Linse in die der zweiten Linse, und die dritte Brechung von dieser letzteren wieder in die Luft.

20.

Den vorstehenden Erklärungen zufolge, und da wir annehmen, dass die beiden Linsen nicht dicker gemacht werden, als ihre Haltbarkeit erfordert, folglich in Bezug auf die Halbmesser als kleine Grössen angesehen werden können, ist es die folgende Gleichung

$$n'''\pi''' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d'$$
$$+\{L + L' + L'' - 2\pi' d(L'+L'') - 2\pi'' d' L''\}\frac{k^2}{2}$$

wo nun d und d' die in der optischen Achse gemessenen Dicken der beiden Linsen bezeichnen, welche erfüllt werden muss. Aber wegen der mit der Brechung des Lichts immer verbundenen Zerstreuung, oder der Zerlegung der Lichtstrahlen in ihre einzelnen Bestandtheile, die sich durch verschiedene Färbung ausdrücken, reicht man mit dieser Einen Gleichung nicht aus, sondern muss sie auf verschiedene Punkte des bei der Brechung des Sonnenlichts entstehenden Spectrums anwenden. Es genügt, sie auf zwei Punkte des Sonnenspectrums anzuwenden, von welchen der eine etwa einer bestimmten im rothen Theile, und der andere einer solchen im violetten Theile des Sonnenspectrums liegenden Fraunhoferschen Linie entspricht. Denn da die Zerstreuungen der verschiedenen Bestandtheile des Sonnenlichts in den verschiedenen Glasarten einander nahe proportional sind, so werden zugleich mit der zu bewirkenden Vereinigung der beiden eben angedeuteten Linien des Sonnenspectrums auch alle übrigen Linien desselben nahe mit einander vereinigt sein. Der übrig bleibende Mangel an Vereinigung verursacht wie bekannt das sogenannte secundäre Spectrum, und denkende praktische Optiker wählen für ihre zusammengesetzten Linsen immer solche zwei Glasarten aus, in Bezug auf welche das secundäre Spectrum möglichst klein ist.

Da in unserem Linsensystem die Brechungen von Luft ausgehen, und in Luft sich endigen, so wird $n''' = n$, und wir können für diese Grössen die Eins annehmen. Substituiren wir ausserdem in die obige Gleichung die Brechungsverhältnisse für die rothen Lichtstrahlen, bezeichnen den von k unabhängigen Theil der Gleichung mit P und den Coefficienten von k^2 mit Q, so ist die eine zu erfüllende Gleichung

$$\pi''' - \pi = P + Qk^2$$

Substituiren wir auch die Brechungsverhältnisse der violetten Lichtstrahlen in dieselbe Gleichung, bezeichnen hierauf den von k unabhängigen Theil derselben mit P', und den Coefficienten von k^2 mit Q', so ist auch die Gleichung

$$\pi''' - \pi = P' + Q'k^2$$

zu erfüllen. Durch die Erfüllung dieser beiden Gleichungen würden nur der rothe und der violette Lichtstrahl, welche beide unter der Ordinate k die erste brechende Oberfläche schneiden, mit einander vereinigt werden, während es erforderlich ist, dass die Vereinigung so viel als möglich über die ganze Oberfläche der Linsen bewirkt werde. Wir gelangen dahin, indem wir die Vereinigung der Central- und der Randstrahlen, jede für sich, bewirken, oder mit anderen Worten, indem wir die beiden obigen Gleichungen unabhängig von

k erfüllen, wodurch jede derselben in zwei Gleichungen zerfällt, also im Ganzen die folgenden vier

$$\pi''' - \pi = P, \quad \pi''' - \pi = P'$$
$$0 = Q, \qquad 0 = Q'$$

zu erfüllen sind. Es wird hiedurch bewirkt, dass die Gleichung für den Unterschied der Reciproken der ersten und der letzten Vereinigungsweite überhaupt die Form

$$\pi''' - \pi = P + Rk^4 + Sk^6 + \text{etc.}$$

annimmt, und da man die Oeffnung des Linsensystems immer so wählen kann, dass die mit k^4, etc. multiplicirten Glieder unmerklich werden, so kann man die Vereinigung der rothen und der violetten Lichtstrahlen mit einander als sich über die ganze Oberfläche des Linsensystems erstreckend betrachten.

Der Erfüllung aller vier obigen Gleichungen tritt jedoch in Bezug auf das hier in Betrachtung stehende Linsensystem ein unübersteigbares Hinderniss entgegen, sofern wir nur drei unbestimmte Grössen, nemlich R, R', R'' zu unserer Verfügung haben. Es können demzufolge nur drei Gleichungen erfüllt werden, und da jedenfalls die Gleichungen

$$\pi''' - \pi = P, \quad \pi''' - \pi = P'$$

erfüllt werden müssen, so können wir statt der Gleichungen $Q = 0$ und $Q' = 0$ nur eine Combination derselben erfüllen, wozu sich am besten die Summe derselben

$$Q + Q' = 0$$

eignet. Es kommt diess sehr nahe darauf hinaus, dass wir

$$Q = 0$$

mit Zugrundelegung der mittleren Brechungsverhältnisse der beiden Glasarten erfüllen, und es ist damit zugleich unter derselben Annahme auch

$$Q' = 0$$

erfüllt, da Q und Q' unter Zugrundelegung der nemlichen Brechungsverhältnisse mit einander identisch werden. Auch hat die Erfahrung gelehrt, dass man unter Zugrundelegung dieser Bestimmung sehr gut wirkende Linsensysteme zu Wege bringen kann; sie soll daher hier angewandt werden.

21.

Wir wollen nun annehmen, dass für die erste Linse, und für eine bestimmte Linie im rothen Theil des Sonnenspectrums, das Brechungsverhältniss von Luft in Glas wie $N:1$, und für die zweite Linse und dieselbe Linie des Sonnenspectrums dasselbe wie $N':1$ sei; für eine bestimmte Linie im violetten Theil des Sonnenspectrums soll das Brechungsverhältniss in der ersten Linse durch $M:1$, und in der zweiten Linse durch $M':1$ ausgedrückt werden. Demzufolge werden in die Gleichungen zu setzen sein

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ n' &= N, \text{ oder } = M, \text{ oder } = m \\ n'' &= N', \text{ oder } = M', \text{ oder } = m' \\ n''' &= 1 \end{aligned}$$

wo m und m' die mittleren Brechungsverhältnisse bedeuten, oder

$$m = \tfrac{1}{2}(N+M)$$

$$m' = \tfrac{1}{2}(N'+M')$$

sind. Die beiden zuerst zu erfüllenden Gleichungen werden nun

$$\pi''' - \pi = (N-1)\,R + (N'-N)\,R' - (N'-1)\,R'' + A$$
$$\pi''' - \pi = (M-1)\,R + (M'-M)R' - (M'-1)\,R'' + B$$

die wir zunächst auf die folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} \pi''' - \pi &= 2(N-1)\Delta + 2(N'-1)\Delta' + A \\ \pi''' - \pi &= 2(M-1)\Delta + 2(M'-1)\Delta' + B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(a)}$$

indem wir

$$2\Delta = R - R'$$
$$2\Delta' = R' - R''$$

$$\left.\begin{aligned} A &= N\pi'^2 d + N'\pi''^2 d' \\ B &= M\pi'^2 d + M'\pi''^2 d' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(a*)}$$

setzen, und im Laufe der Entwickelungen π' und π'' in A durch die Brechungszahlen N und N', in B hingegen durch M und M' ausdrücken werden.

Aus der Summe und dem Unterschiede der Gleichungen (a) bekommen wir, nachdem

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}(B+A), \qquad \varkappa' = \tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$z = \frac{M-N}{m-1}, \qquad z' = \frac{M'-N'}{m'-1}$$

gesetzt worden sind:

$$(m-1)\varDelta+(m'-1)\varDelta'=\tfrac{1}{2}(\pi'''-\pi)-\tfrac{1}{2}\varkappa$$

$$z(m-1)\varDelta+z'(m'-1)\varDelta'=-\varkappa'$$

und löst man diese in der Voraussetzung auf, dass $\varkappa$ und $\varkappa'$ bekannt sind, so ergiebt sich

$$\varDelta=\tfrac{1}{2}(\pi'''-\pi)\frac{z'}{(z'-z)(m-1)}-\tfrac{1}{2}\varkappa\frac{z'}{(z'-z)(m-1)}+\frac{\varkappa'}{(z'-z)(m-1)}$$

$$\varDelta'=-\tfrac{1}{2}(\pi'''-\pi)\frac{z}{(z'-z)(m'-1)}+\tfrac{1}{2}\varkappa\frac{z}{(z'-z)(m'-1)}-\frac{\varkappa'}{(z'-z)(m'-1)}$$

In der ersten Annäherung muss man $\varkappa$ und $\varkappa'$ gleich Null setzen, und in der zweiten und den etwa nöthigen folgenden Annäherungen $\varkappa$ und $\varkappa'$ durch die Werthe von R, R', R'' berechnen, welche die zunächst vorhergehende Annäherung gegeben hat.

22.

Wenden wir uns jetzt zur Entwickelung der Gleichung $Q+Q'=0$, oder vielmehr der identisch werdenden Gleichungen $Q=0$, $Q'=0$, nachdem darin die mittleren Brechungsverhältnisse substituirt worden sind. Die einzige Gleichung, welche wir mit zu Grundelegung dieser Bedingung im gegenwärtigen Falle noch zu erfüllen haben, ist

$$0=L+L'+L''-2\pi'd(L'+L'')-2\pi''d'L''$$

Da aber, wenn d und d' gleich Null gesetzt werden, diese Gleichung sich in $0=L+L'+L''$ zusammenzieht, so kann man sie in die folgende einfachere umwandeln:

(b) . . . . $0=L+L'+L''+2\pi'Ld-2\pi''L''d'$

Zur weiteren Entwickelung wollen wir für L den Ausdruck (5), für L' den Ausdruck (1), und für L'' den Ausdruck (6) des Art. 8 anwenden, und erhalten somit im gegenwärtigen Falle die Werthe

$$L=\frac{m-1}{m^2}\{(R-\pi)^3-m\pi(R-\pi)^2\}$$

$$L'=m'\pi''(R'-\pi'')^2-m\pi_{,}(R'-\pi_{,})^2$$

$$L''=-\frac{m'-1}{m'^2}\{(R''-\pi''')^3-m'\pi'''(R''-\pi''')^2\}$$

denen wir die durch die mittleren Brechungsverhältnisse ausgedrückten Relationen zwischen den Vereinigungsweiten hinzufügen wollen. Diese sind

$$\left.\begin{aligned} m\pi' &= \pi + (m-1)R \\ m'\pi'' &= m\pi_{,} + (m'-m)R' \\ \pi''' &= m'\pi_{,,} + (m'-1)R'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

wozu noch die Gleichungen

$$\pi_{,} = \pi' + \pi'^2 d$$

$$\pi_{,,} = \pi'' + \pi''^2 d'$$

kommen.

23.

Führen wir die Hülfsgrösse π^0 durch die Gleichung

$$\pi^0 = m\pi_{,} - (m-1)R'$$

ein, dann ist auch, zufolge der Relationen (c) des vor. Art.

$$\pi^0 = m'\pi'' - (m'-1)R'$$

Aus diesen Gleichungen bekommt man ohne Mühe:

$$\pi_{,} = \pi^0 + \frac{m-1}{m}(R' - \pi^0)$$

$$\pi'' = \pi^0 + \frac{m'-1}{m'}(R' - \pi^0)$$

und

$$\pi_{,} = \pi^0 + (m-1)(R' - \pi_{,})$$

$$\pi'' = \pi^0 + (m'-1)(R' - \pi'')$$

folglich

$$R' - \pi_{,} = \frac{1}{m}(R' - \pi^0)$$

$$R' - \pi'' = \frac{1}{m'}(R' - \pi^0)$$

Hiemit verwandelt man den im vor. Art. aufgestellten Ausdruck für L' leicht in

$$\begin{aligned} L' = {} & \frac{m'-1}{m'^2}\left\{(R'-\pi^0)^3 - m'\pi^0(R'-\pi^0)^2\right\} \\ & - \frac{m-1}{m^2}\left\{(R'-\pi^0)^3 - m\pi^0(R'-\pi^0)^2\right\} \end{aligned}$$

und es hat also durch diese Substitutionen L' dieselbe Form bekommen, welche den L und L'' ursprünglich gegeben worden ist; nur besteht L' aus zwei solchen Functionen, die in L und L'' blos Ein Mal vorkommen.

Die Summe aller L wird jetzt

$$L+L'+L''=\frac{m-1}{m^2}\left\{\begin{array}{l}(R-\pi)^3-m\pi\,(R-\pi)^2\\-(R'-\pi^0)^3+m\pi^0(R'-\pi^0)^2\end{array}\right\}$$
$$+\frac{m'-1}{m'^2}\left\{\begin{array}{l}(R'-\pi^0)^3-m'\pi^0\,(R'-\pi^0)^2\\-(R''-\pi''')^3+m'\pi'''(R''-\pi''')^2\end{array}\right\}$$

und besteht also aus zwei einander ähnlichen Theilen.

24.

Erinnern wir uns der oben eingeführten Gleichungen

$$R-R'=2\varDelta,\quad R'-R''=2\varDelta'$$

und setzen ausserdem:

$$R'-\pi^0=g$$
$$D=\varDelta+\tfrac{1}{2}\pi'^2d$$
$$D'=\varDelta'+\tfrac{1}{2}\pi''^2d'$$

dann bekommen wir durch die Verbindung der Gleichungen (c) des vorvor. Art. mit denen für π^0 des vor. Art. sehr leicht

$$\pi^0=\pi+2(m-1)D+\pi'^2d$$
$$\pi^0=\pi'''-2(m'-1)D'-\pi''^2d'$$

$$\text{(d)}\;\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}R-\pi\;=g+2mD\\R''-\pi'''=g-2m'D'\end{array}\right.$$

Durch Anwendung dieser Werthe folgt

$$L+L'+L''=\frac{m-1}{m^2}\left\{\begin{array}{l}(g+2mD)^3-m\pi\,(g+2mD)^2-g^3\\+m\pi g^2+2m\,(m-1)\,Dg^2+mg^2\pi'^2d\end{array}\right\}$$
$$+\frac{m'-1}{m'^2}\left\{\begin{array}{l}-(g-2m'D')^3+m'\pi'''\,(g-2m'D')^2+g^3\\-m'\pi'''g^2+2m'\,(m'-1)\,D'g^2+m'g^2\pi''^2d'\end{array}\right\}$$

oder, nach der Entwickelung:

$$L+L'+L''=2\,\frac{m-1}{m}\left\{\begin{array}{l}(m+2)\,Dg^2+2m\,(3D-\pi)\,Dg\\+2m^2\,(2D-\pi)\,D^2+\tfrac{1}{2}g^2\pi'^2d\end{array}\right\}$$
$$+2\,\frac{m'-1}{m'}\left\{\begin{array}{l}(m'+2)\,D'g^2-2m'\,(3D'+\pi''')\,D'g\\+2m'^2(2D'+\pi''')\,D'^2+\tfrac{1}{2}g^2\pi''^2d'\end{array}\right\}$$

in welchem Ausdruck, abgesehen von den Factoren π' und π'' in den mit d und d' multiplicirten Gliedern, g die einzige Unbekannte ist.

25.

Substituirt man nun den eben erhaltenen Ausdruck in die Gleichung (b) des Art. 22, und setzt zur Abkürzung:

$$C = \frac{m-1}{2m}\pi'^2 d + \frac{m'-1}{2m'}\pi''^2 d'$$
$$C' = \pi' L d - \pi'' L'' d'$$
$$a = \frac{(m-1)(m+2)}{m} D + \frac{(m'-1)(m'+2)}{m'} + C$$
$$b = (m-1)(3D-\pi)D - (m'-1)(3D'+\pi''')D'$$
$$c = 2m(m-1)(2D-\pi)D^2 + 2m'(m'-1)(2D'+\pi''')D'^2 + C'$$

so wird die Endgleichung

$$0 = ag^2 + 2bg + c$$

aus welcher die Unbekannte g zu berechnen ist. Hat man g gefunden, so werden, zufolge der Gleichungen (d) des vor. Art.

$$R = g + 2mD + \pi$$
$$R'' = g - 2m'D' + \pi'''$$

worauf sich

$$R' = R - 2\varDelta = R'' + 2\varDelta'$$

ergiebt, welche zwei Werthe mit einander übereinstimmen müssen.

In der ersten Annäherung setzt man nicht nur, wie schon im Art. 21 in Bezug auf die Berechnung von $\varDelta$ und $\varDelta'$ gesagt wurde, $A = 0$, $B = 0$, sondern auch $C = 0$, $C' = 0$ und $D = \varDelta$, $D' = \varDelta'$, worauf g die einzige Unbekannte ist, welche die obige quadratische Gleichung enthält. In der zweiten, und wenn nöthig werden sollte, den folgenden Annäherungen berechnet man A, B, C, C', D, D' mit den Werthen der Reciproken der Halbmesser R, R', R'', die die zunächst vorhergehende Annäherung gegeben hat. Meistens wird man nach der Ausführung der zweiten Annäherung schon ein ausreichend genaues Resultat erhalten haben.

Da die Gleichung, aus welcher der Werth von g zu ermitteln ist, eine quadratische ist, so erkennt man, dass die Auflösung der Aufgabe, mit den derselben zu Grunde gelegten Daten, entweder unmöglich ist, oder dass zwei von einander verschiedene Linsensysteme sie lösen. Bei den Brechungs- und Zerstreuungsverhältnissen, welche die Glasarten besitzen, die gewöhnlich in der praktischen Dioptrik angewandt zu werden pflegen, ist die Aufgabe lösbar, und führt somit auf zwei verschiedene Linsensysteme, unter denen es am zweckmässigsten ist, dasjenige auszuwählen, dessen Oberflächen die geringsten Krümmungen darbieten.

26.

Die Ausdrücke von π' und π'', welche zur Berechnung der von d und d' abhängigen Glieder gebraucht werden, ergeben sich aus dem Vorhergehenden auf einfache Weise. Rechnet man

$$u = \pi + (N-1)R, \quad u' = \pi''' + (N'-1)R''$$
$$w = \pi + (M-1)R, \quad w' = \pi''' + (M'-1)R''$$

so findet man ohne Mühe, dass A, B, C, C', D, D' die folgenden Ausdrücke annehmen:

$$A = \frac{u^2}{N}\,d + \frac{u'^2}{N'}\,d'$$
$$B = \frac{w^2}{M}\,d + \frac{w'^2}{M'}\,d'$$
$$C = \frac{m-1}{8m^3}\,(u+w)^2 d + \frac{m'-1}{8m'^3}\,(u'+w')^2 d'$$
$$C' = \{(R-\pi) - m\pi\}(R-\pi)^2\,\frac{m-1}{2m^3}\,(u+w)\,d$$
$$+\{(R''-\pi''') - m'\pi'''\}(R''-\pi''')^2\,\frac{m'-1}{2m'^3}\,(u'+w')\,d'$$
$$D = \Delta + \frac{(u+w)^2}{8m^2}\,d$$
$$D' = \Delta' + \frac{(u'+w')^2}{8m'^2}\,d'$$

womit alle Hülfsgrössen entwickelt, und die ersten Potenzen der Linsendicken vollständig berücksichtigt sind.

27.

Es soll jetzt, um die Genauigkeit des im Vorstehenden entwickelten Verfahrens zu zeigen, ein Objectiv nach demselben berechnet werden, wobei wir die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse von zwei Fraunhoferschen Glasarten zu Grunde legen werden. Die gegebenen Stücke seien die folgenden:

$$N = 1.51870$$
$$M = 1.53956$$
$$N' = 1.61800$$
$$M' = 1.660242$$
$$\pi = 0$$
$$\pi''' = 1$$

Die Bedingung $\pi = 0$ ist die des Objectivs, oder der Ausdruck dafür, dass die einfallenden Lichtstrahlen von einem unendlich weit entfernten Gegenstande kommen, während die Bedingung $\pi''' = 1$ Nichts weiter als die gewählte Maasseinheit ausdrückt, die nach ausgeführter Rechnung in jede andere, beliebige Maasseinheit verwandelt werden kann. Aus den vorstehenden Daten bekommt man zunächst

$$M-N = 0.020860$$
$$M'-N' = 0.042242$$
$$m = 1.52913$$
$$m' = 1.63912$$
$$z = 0.0394232$$
$$z' = 0.0660939$$
$$z'-z = 0.0266707$$

Die erste Annäherung giebt nun, nachdem $A = B = 0$ gesetzt worden, die genäherten Werthe

$$\varDelta = +2.34172$$
$$\varDelta' = -1.15639$$

und allgemein

$$a = (0.086786)\,D + (0.151969)\,D'$$
$$b = (0.200684)\,D^2 - (9.805583)\,(3D'+1)\,D'$$
$$c = (0.510066)\,D^3 + (0.321223)\,(2D'+1)\,D'^2 + C$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind. Setzt man in diesen Ausdrücken jetzt $C = 0$, so wie $D = \varDelta$ und $D' = \varDelta'$, so ergiebt sich die Endgleichung

$$0 = g^2 + 2(0.751630)\,g + (1.492480)$$

deren Wurzeln

$$g = -6.52838, \text{ und } g = -4.76074$$

sind. Da nun ausserdem hier

$$2m\varDelta = +7.16158,\quad 2m'\varDelta' = -3.79093$$

ist, so bekommen wir für die beiden Objective, die aus diesem Verfahren hervorgehen, die genäherten Werthe

1stes Objectiv.	2tes Objectiv.
$R = +0.63323,$	$R = +2.40085$
$R' = -4.05021,$	$R' = -2.28259$
$R'' = -1.73743,$	$R'' = +0.03019$

womit die erste Annäherung ausgeführt ist.

28.

Um zur zweiten Annäherung überzugehen müssen zuerst die Dicken der Linsen festgesetzt werden, die wir wie folgt annehmen wollen:

$$\log d = 7.72596, \qquad \log d' = 7.54987$$

und es muss jedes der beiden eben erhaltenen Objective für sich behandelt werden. Nehmen wir zuerst das erste Objectiv vor, so erhalten wir

$$u = +\ 0.3284, \qquad u' = -\ 0.0738$$
$$w = +\ 0.3417, \qquad w' = -\ 0.1471$$
$$\tfrac{1}{2}(u+w) = +\ 0.3351, \qquad \tfrac{1}{2}(u'+w') = -\ 0.1105$$

und hieraus zunächst

$$A = 0.0003897, \qquad \varkappa = 0.0004197$$
$$B = 0.0004497, \qquad \varkappa' = 0.0000300$$

Es wurden hierauf die Verbesserungen

$$\text{von } \varDelta = \begin{Bmatrix} -0.00098 \\ +0.00213 \end{Bmatrix} = +\ 0.00115$$

$$\text{und von } \varDelta' = \begin{Bmatrix} +0.00048 \\ -0.00176 \end{Bmatrix} = -\ 0.00128$$

gefunden, womit sich die genaueren Werthe

$$\varDelta = +\ 2.34287, \qquad \varDelta' = -\ 1.15767$$

ergaben. Weiter berechnet man

$$D = \varDelta + 0.00016, \quad D' = \varDelta' + 0.00001$$

mithin

$$D = +\ 2.34303, \qquad D' = -\ 1.15766$$

Es werden ferner, wenn wir wieder die Werthe der einzelnen Glieder ansetzen:

$$C = \begin{Bmatrix} +0.00006 \\ 0.00000 \end{Bmatrix} = +\ 0.00006$$

$$C' = \begin{Bmatrix} +0.00007 \\ +0.00187 \end{Bmatrix} = +\ 0.00194$$

und die Endgleichung

$$0 = g^2 + 2(0.751992)\,g + (1.493179)$$

deren einzig hier anzuwendende Wurzel

$$g = -\ 6.53479$$

ist. Da ferner hier

$$2mD = +\ 7.16558, \qquad 2m'D' = -\ 3.79508$$

sind, so erhalten wir schliesslich

$$R = +\ 0.63079$$
$$R' = -\ 4.05500$$
$$R'' = -\ 1.73971$$

die von den Werthen der ersten Annäherung wesentlich verschieden sind.

29.

Unter Anwendung derselben Linsendicken wie vorher, ergeben sich in Bezug auf das zweite Objectiv in der zweiten Annäherung weit grössere Abweichungen der Werthe der R, R', R'' von denen der ersten Annäherung, wie die folgenden Rechnungen zu erkennen geben. Es wurden erhalten

$$u = +1.2453, \qquad u' = +1.0187$$
$$w = +1.2954, \qquad w' = +1.0199$$
$$\tfrac{1}{2}(u+w) = +1.2704, \quad \tfrac{1}{2}(u'+w') = +1.0193$$
$$A = 0.0077080, \qquad \varkappa = 0.0078647$$
$$B = 0.0080214, \qquad \varkappa' = 0.0001567$$

$$\text{die Verb. von } \Delta = \left\{\begin{matrix} -0.01842 \\ +0.01111 \end{matrix}\right\} = -0.00731$$

$$\text{die Verb. von } \Delta' = \left\{\begin{matrix} +0.00909 \\ -0.00919 \end{matrix}\right\} = -0.00010$$

Man sieht, dass schon diese Verbesserungen wesentlich grösser ausgefallen sind, als die des ersten Objectivs, und Ähnliches wird man in den folgenden Zahlenwerthen finden. Es ergeben sich ferner

$$\Delta = +2.33441, \qquad \Delta' = -1.15649$$
$$D = \Delta + 0.00184, \qquad D' = \Delta' + 0.00069$$
$$D = +2.33625, \qquad D' = -1.15580$$
$$C = \left\{\begin{matrix} +0.00064 \\ +0.00027 \end{matrix}\right\} = +0.00091$$
$$C' = \left\{\begin{matrix} +0.01387 \\ -0.00129 \end{matrix}\right\} = +0.01258$$
$$0 = g^2 + 2(0.750954)g + (1.491114)$$
$$g = -4.75278$$
$$2mD = +7.14487, \qquad 2m'D' = -3.78898$$
$$R = +2.39209$$
$$R' = -2.27675$$
$$R'' = +0.03620$$

Hiemit können die Berechnungen im Grunde als geschlossen betrachtet werden.

30.

Führt man die im Vorhergehenden erhaltenen Werthe der Halbmesser der beiden Objective auf die Brennweite des von mir in der Abhandlung: »Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls u. s. w.«*) untersuchten Objectivs des Königsberger Heliometers hin, so wird man finden, dass das erste Objectiv nahe mit diesem übereinkommt, während das zweite davon wesentlich unterschieden ist. Aus diesem Grunde, und da das zweite hier berechnete Objectiv dem ersten vorzuziehen ist, weil es kleinere Krümmungen der Linsenoberflächen darbietet, will ich jenes hier nicht weiter berücksichtigen, aber für dieses eine dritte Annäherung durchführen, um zu zeigen, dass die Resultate der letzteren von denen der zweiten Annäherung nur sehr geringe Verschiedenheiten darbieten.

31.

In der dritten Annäherung in Bezug auf das obige zweite Objectiv ergaben sich die folgenden Zahlenwerthe:

$$u = +1.2408, \qquad u' = +1.0225$$
$$w = +1.2907, \qquad w' = +1.0240$$
$$\tfrac{1}{2}(u+w) = +1.2658, \qquad \tfrac{1}{2}(u'+w') = +1.0233$$
$$A = 0.0076863, \qquad \varkappa = 0.0078421$$
$$B = 0.0079978, \qquad \varkappa' = 0.0001558$$

die Verbesserung von $\varDelta = \left\{\begin{matrix} -0.01836 \\ +0.01104 \end{matrix}\right\} = -0.00732$

die Verbesserung von $\varDelta' = \left\{\begin{matrix} +0.00907 \\ -0.00914 \end{matrix}\right\} = -0.00007$

$$D = \varDelta + 0.00182, \qquad D' = \varDelta' + 0.00069$$
$$\varDelta = +2.33440, \qquad \varDelta' = -1.15646$$
$$D = +2.33622, \qquad D' = -1.15577$$
$$C = \left\{\begin{matrix} +0.00063 \\ +0.00027 \end{matrix}\right\} = +0.00090$$
$$C' = \left\{\begin{matrix} +0.01366 \\ -0.00127 \end{matrix}\right\} = +0.01239$$
$$0 = g^2 + 2(0.750970)\,g + (1.491124)$$
$$g = -4.75207$$
$$2mD = +7.14477, \qquad 2m'D' = -3.78889$$

*) Abgedruckt S. 65—202 dieses Bandes.

$$R = +\ 2.39270$$
$$R' = -\ 2.27610$$
$$R'' = +\ 0.03682$$

Die Vergleichung dieser Resultate mit denen der zweiten Annäherung zeigt nur geringe Unterschiede.

32.

Es soll nun, um die Abweichungen von der strengen Vereinigung der von einem Punkt ausgehenden Lichtstrahlen, die das zweite Objectiv darbietet, kennen zu lernen, der Gang verschiedener Lichtstrahlen durch dasselbe vermittelst strenger Formeln berechnet, und dazu die Verfahrungsarten, die ich in der Abhandlung: »Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls u. s. w.« entwickelt habe, angewandt werden. Da man im gegenwärtigen Falle von der Berechnung der Hauptpunkte absehen kann, so werde ich mich in Bezug auf die Centralstrahlen des Gaussischen Verfahrens in der Gestalt bedienen, welche ich demselben in den Artt. 37 u. f. der angezogenen Abhandlung gegeben habe.

In Bezug auf die Lichtstrahlen, die in solcher Entfernung von der optischen Achse des Linsensystems einfallen, dass man nicht die Sinus ihren Bögen gleich setzen darf, und die ich überhaupt Randstrahlen nennen werde, habe ich in der angezogenen Abhandlung zwei allgemeine Verfahrungsarten vollständig entwickelt, die für jede beliebige Lage des einfallenden Lichtstrahls gelten, und nicht voraussetzen, dass dieser letztere mit der optischen Achse in einer und derselben Ebene liege.

Die Grundidee der ersten dieser beiden Verfahrungsarten gehört Gauss, welcher sie in seinen »Dioptrischen Untersuchungen« niedergelegt hat. Das zweite a. a. O. gegebene Verfahren ist mir dagegen völlig eigenthümlich, und so viel mir bekannt, ist kein Vorbild davon vorhanden. Dieses zweite Verfahren ist auch in der Anwendung dem ersten wesentlich vorzuziehen, und ich habe mich desselben immer ausschliesslich bedient. Aus jeder dieser beiden allgemeinen Verfahrungsarten folgt das sehr einfache specielle Verfahren, welches sich auf die Fälle erstreckt, in denen der einfallende Lichtstrahl mit der optischen Achse des Linsensystems in Einer Ebene liegt. Letzteres Verfahren ist sehr bequem, und ich muss es auch für neu halten, da ich es vorher bei keinem Schriftsteller gefunden habe.

33.

Ehe ich zur Anwendung meines strengen Verfahrens auf das oben berechnete zweite Objectiv übergehe, muss ich einen Umstand erörtern, der dabei eintreten kann. Wenn der Halbmesser der letzten brechenden Oberfläche des Linsensystems, auf welches man dieses Verfahren anwenden will, sehr gross ist, so wird der Bogen oder Winkel θ^{m-1} sehr klein, und die Gleichung

$$k^{m-1} = (p^{m-1} - q^{m-1}) \sin \theta^{m-1}$$

(Artt. 24 u. 31 der früheren Abh.) giebt für k^{m-1} keinen hinreichend genauen Werth, weil $\sin \theta^{m-1}$ für diese Bestimmung nicht hinreichend genau erhalten werden kann, wenngleich der dafür sich ergebende Werth für andere Bestimmungen ausreichend genau ist, und namentlich a^{m-1} mit weit mehr als hinreichender Genauigkeit dadurch erhalten wird.

Man muss in diesem Falle zur Bestimmung von k^{m-1} von der vorletzten Brechung ausgehen, durch welche man, vermittelst der Gleichungen, die überhaupt die Identität zwischen irgend einem gebrochenen Lichtstrahl und dem zunächst einfallenden bedingen, die Bestimmung von k^{m-1} auch leicht ableiten kann. Diese Gleichungen sind im Art. 21 der früheren Abh. unter verschiedenen Formen aufgestellt worden; wählen wir die erste Form und wenden dieselbe auf den vorletzten gebrochenen Lichtstrahl an, so werden sie:

$$0 = k^{m-1} \cos \psi^{m-1} - k^{m-2} \cos \psi^{m-2} + (a^{m-1} - a^{m-2}) \operatorname{tg} \alpha^{m-1} \cos \beta^{m-1}$$
$$0 = k^{m-1} \sin \psi^{m-1} - k^{m-2} \sin \psi^{m-2} + (a^{m-1} - a^{m-2}) \operatorname{tg} \alpha^{m-1} \sin \beta^{m-1}$$

woraus man leicht

$$(a) \ldots \left\{ \begin{aligned} k^{m-1} \sin(\psi^{m-1} - \beta^{m-1}) &= k^{m-2} \sin(\psi^{m-2} - \beta^{m-1}) \\ k^{m-1} \cos(\psi^{m-1} - \beta^{m-1}) &= k^{m-2} \cos(\psi^{m-2} - \beta^{m-1}) \\ &\quad + (a^{m-2} - a^{m-1}) \operatorname{tg} \alpha^{m-1} \end{aligned} \right.$$

erhält. Hiemit sind k^{m-1} und ψ^{m-1} gegeben, nachdem k^{m-2} und ψ^{m-2} ermittelt worden sind. Aus der oft angez. Abh. findet man aber leicht, dass wenn man

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\Phi &= \operatorname{tg}\mu^{m-2}\cos\omega^{m-1}\\ \sin\varphi &= \sin\mu^{m-2}\sin\omega^{m-1}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(b)$$

setzt, man

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta^{m-2}\sin(\psi^{m-2}-\beta^{m-1}) &= \sin\varphi\\ \sin\theta^{m-2}\cos(\psi^{m-2}-\beta^{m-1}) &= \cos\varphi\sin(\alpha^{m-2}-\Phi)\end{aligned}\right\}\ldots(c)$$

erhält. Hat man hieraus $\operatorname{tg}(\psi^{m-2}-\beta^{m-1})$ und $\sin\theta^{m-2}$ berechnet, so ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}k^{m-2} &= (p^{m-2}-q^{m-2})\sin\theta^{m-2}\\ a^{m-2} &= q^{m-2}+2(p^{m-2}-q^{m-2})\sin^2\tfrac{1}{2}\theta^{m-2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(d)$$

Zur Berechnung von a^{m-1} aus der der vorstehenden ähnlichen Gleichung

$$a^{m-1} = q^{m-1}+2(p^{m-1}-q^{m-1})\sin^2\tfrac{1}{2}\theta^{m-1}\ \ldots\ldots\ldots(e)$$

dient die im gegenwärtigen Falle mehr als hinreichend genäherte Gleichung

$$\theta^{m-1} = H-\lambda^{m-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(f)$$

worauf die Gleichungen (a) k^{m-1} und ψ^{m-1} mit Genauigkeit geben. Bei der Anwendung dieses Verfahrens werden die Gleichungen für

$$\sin\theta^{m-1}\sin(\psi^{m-1}-\beta^{m-1})\ \text{und}\ \sin\theta^{m-1}\cos(\psi^{m-1}-\beta^{m-1})$$

(Art. 24 der früheren Abh.), die im gegenwärtigen Falle keine ausreichend genauen Werthe für θ^{m-1} und ψ^{m-1} geben können, gänzlich überflüssig, und brauchen nicht berechnet zu werden. Es sind also im gegenwärtigen Falle von den Gleichungen der Schlussrechnung nur die vier zu berechnen, welche die Werthe von H, η, β^m und $\sin\alpha^m$ geben.

In den Fällen, in denen die Lichtstrahlen mit der optischen Achse in Einer Ebene liegen, kürzen sich die vorstehenden Formeln wesentlich ab. Da jetzt die Winkel θ^{m-2} und θ^{m-1} ohnehin, und zwar mit einer für ihre übrigen Verwendungen hinreichenden Genauigkeit, erhalten werden, so fallen die vorstehenden Gleichungen (b), (c) und (f) weg, und man kann ohne Weiteres k^{m-2}, a^{m-2} und a^{m-1} aus den Gleichungen (d) und (e) berechnen. Die Gll. (a) ziehen sich im gegenwärtigen Falle in die einzige

$$k^{m-1} = k^{m-2}+(a^{m-2}-a^{m-1})\operatorname{tg}\alpha^{m-1}\ \ldots\ldots\ldots(g)$$

zusammen, in welcher alle Grössen rechter Hand bekannt sind, und welche k^{m-1} mit aller erforderlichen Genauigkeit giebt.

34.

Bei der strengen Berechnung des Weges verschiedener Lichtstrahlen, die das oben berechnete zweite Objectiv durchlaufen, werde ich zwei Hauptgattungen von Lichtstrahlen vornehmen: nemlich zuerst solche, die parallel mit der optischen Achse einfallen, und darauf solche, die mit der optischen Achse einen Winkel von 16′ machen. Da bei grossen Fernröhren und starken Vergrösserungen das Gesichtsfeld immer wesentlich kleiner gemacht werden muss als der Sonnendurchmesser, und 16′ dem halben Sonnendurchmesser entsprechen, so ist diese Annahme mehr als hinreichend, und die Abweichungen, die aus dieser Annahme folgen, werden grösser sein, als diejenigen, welche das Objectiv bei seiner Anwendung zu erkennen giebt.

Ich werde ferner bei jeder der beiden oben genannten Gattungen von Hauptstrahlen einen rothen und einen violetten Centralstrahl und Randstrahl in Rechnung ziehen. Es ist bereits erwähnt, dass, wenn die rothen und die violetten Strahlen des Sonnenspectrums mit einander zur Vereinigung gebracht worden sind, auch alle übrigen Strahlen sich nahe mit einander vereinigen, und der übrig bleibende Mangel an Vereinigung dieser letzteren das sogenannte secundäre Spectrum hervorruft, welches nur dann vermieden werden kann, wenn es gelingt zwei Glasarten aufzufinden, deren Zerstreuungen in allen Punkten des Sonnenspectrums einander proportional sind.

35.

Da den hier angewandten Bezeichnungen zufolge

$$R = \frac{1}{p-q}, \quad R' = \frac{1}{p'-q'}, \quad R'' = \frac{1}{p''-q''}$$

und die Linsendicken

$$d = q' - q, \quad d' = q'' - q'$$

sind, so geben die Resultate des Art. 31 und die Linsendicken, die bei ihrer Berechnung angewandt worden sind:

$$\begin{aligned} p - q &= + \ 0.417938, & q' - q &= 0.005321 \\ p' - q' &= - \ 0.439348, & q'' - q' &= 0.003547 \\ p'' - q'' &= + \ 27.1591 \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir, wenn $q = 0$ gesetzt wird,

$$p = +\ 0.417938$$
$$p' = -\ 0.434027, \quad q' = 0.005321$$
$$p'' = +\ 27.1680, \quad q'' = 0.008868$$

Es werden ferner dem Art. 31 der früheren Abhandlung entsprechend

$$\log A = 9.978303\,n, \quad \log B = 0.287613$$
$$\log A' = 8.208893\,n, \quad \log B' = 0.007025$$

gefunden, während aus den oben benutzten numerischen Werthen der Brechungsverhältnisse sich ergeben:

für die rothen Strahlen	für die violetten Strahlen
$\log n = 0$	$\log n = 0$
$\log n' = 0.181472,$	$\log n' = 0.187397$
$\log n'' = 0.208979,$	$\log n'' = 0.220171$
$\log n''' = 0$	$\log n''' = 0$

Endlich werde ich für die Randstrahlen

$$k = 0.03$$

setzen, welche Annahme sehr nahe der halben Oeffnung entspricht, die man grossen Objectiven zu geben pflegt.

36.

1. Die parallel mit der Achse einfallenden rothen Centralstrahlen.

In Bezeichnungen des Art. 37 u. f. der oft genannten Abhandlung fanden sich:

$$\log u = 0.093804$$
$$\log u' = 9.354140\,n, \quad \log t' = 7.544448\,n$$
$$\log u'' = 8.357072\,n, \quad \log t'' = 7.340891\,n$$
$$\log A = 0.093804$$
$$\log A' = 9.998108$$
$$\log A'' = 0.006919$$
$$\log A''' = 9.997135$$
$$\log A^{\mathrm{IV}} = 9.997148$$

*) und hieraus die Entfernung des Brennpunktes von der letzten brechenden Oberfläche, oder

$$\xi''' - q'' = 0.999970$$
$$\eta''' = 0$$

---

*) Die Berechnung der a. a. O. mit B', B'', etc. bezeichneten Grössen ist hier nicht erforderlich.

2. Die mit der Achse parallel einfallenden violetten Centralstrahlen.

$$\log u = 0.110928$$
$$\log u' = 9.438843\,n, \quad \log t' = 7.538563\,n$$
$$\log u'' = 8.385787\,n, \quad \log t'' = 7.329699\,n$$
$$\log A = 0.110928$$
$$\log A' = 9.998058$$
$$\log A'' = 0.007553$$
$$\log A''' = 9.997109$$
$$\log A^{\text{iv}} = 9.997123$$

und hieraus

$$\xi''' - q'' = 0.999970$$
$$\eta''' = 0$$

3. Die unter einem Winkel von 16′ mit der Achse einfallenden rothen Centralstrahlen.

$$\xi''' \text{ wie oben}$$
$$\eta''' = -0.0046849$$

4. Die unter einem Winkel von 16′ mit der Achse einfallenden violetten Centralstrahlen.

$$\xi''' \text{ wie oben}$$
$$\eta''' = -0.0046851$$

5. Die mit der Achse parallel einfallenden rothen Randstrahlen.

Für diese nach dem Verfahren des Art. 31 der früheren Abhandlung, und mit Benutzung der hier nothwendigen im obigen Art. 33 erklärten Abänderung, zu berechnenden Lichtstrahlen sind die numerischen Werthe der constanten Grössen schon im vor. Art. gegeben. Hinzuzufügen ist nur, dass im gegenwärtigen Falle

$$\alpha = 0, \quad k = 0.03$$

sind, woraus

$$\theta = +\, 4^0\, 6'\, 58''63$$

folgt. Hiemit bekommt man:

$$\alpha' = +1^0 24' 25''95, \quad \theta' = -3^0 54' 18''08$$
$$\alpha'' = +1 \;\; 4 \;\; 49.17, \quad \theta'' = +0 \;\; 3 \;\; 46.58$$
$$\alpha''' = +1 \;\; 42 \;\; 33.16$$
$$a' = 0.004301, \quad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.475973, \quad \log k'' = 8.474717$$

und die Gleichung des ausfahrenden Lichtstrahls wird

$$y = (0.008884 - x) \operatorname{tg} \alpha''' + 0.0298344$$

wo

$$\log \operatorname{tg} \alpha''' = 8.474802$$

ist.

6. Die mit der Achse parallel einfallenden violetten Randstrahlen.

Hier sind wieder

$$\alpha = 0, \quad k = 0.03$$
$$\theta = +4^0 6' 58''63$$

und es folgen hieraus:

$$\alpha' = +1^0 26' 38''19, \quad \theta' = -3^0 54' 17''10$$
$$\alpha'' = +1 \;\; 3 \;\; 14.93, \quad \theta'' = +0 \;\; 3 \;\; 46.55$$
$$\alpha''' = +1 \;\; 42 \;\; 31.94$$
$$a' = 0.004301, \quad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.475943, \quad \log k'' = 8.474717$$

und die Gleichung des ausfahrenden Lichtstrahls wird

$$y = (0.008884 - x) \operatorname{tg} \alpha''' + 0.0298344$$

wo

$$\log \operatorname{tg} \alpha''' = 8.474681$$

37.

Wenn wir zu den gegen die Achse geneigten Randstrahlen übergehen, so bieten sich vier extreme Fälle dar, die einzeln zu untersuchen sind. Man kann sich den aus parallelen Lichtstrahlen bestehenden, schief einfallenden Strahlenbündel als einen Cylinder von elliptischer Grundfläche denken, dessen Durchschnitt mit dem Objectiv einen Kreis bildet, welcher die Oeffnung des Objectivs zum Durchmesser hat. Es ist leicht einzusehen, dass die vier Lichtstrahlen, welche den

Endpunkten der beiden Hauptachsen der genannten cylindrischen Grundfläche entsprechen, auch den Maximis und Minimis der dioptrischen Abweichungen in den Ordinaten y und z der überhaupt schief einfallenden Lichtstrahlen entsprechen müssen. Setzt man, was immer bewirkt werden kann, in dem Verfahren des Art. 24 der früheren Abhandlung $\beta = 0$, dann sind es die Werthe

$$\psi = 0,\ \psi = 90^0,\ \psi = 180^0,\ \psi = 270^0$$

welche diese vier Lichtstrahlen kennzeichnen.

Geht man die a. a. O. gegebene Auflösung der allgemeinen Aufgabe durch, so findet man leicht, dass die beiden Fälle $\psi = 90^0$ und $\psi = 270^0$ auf dasselbe Resultat hinführen müssen, mit dem alleinigen Unterschiede, dass in dem einen Falle z positiv und in dem anderen negativ wird. Von diesen beiden Fällen braucht daher nur der eine der Rechnung unterzogen zu werden.

Ferner erkennt man, dass in den beiden Fällen $\psi = 0$ und $\psi = 180^0$ der einfallende Lichtstrahl mit der optischen Achse in einer und derselben Ebene liegt, und daher das Verfahren des Art. 31 angewandt werden kann; sie unterscheiden sich von einander nur dadurch, dass in dem einen Falle θ positiv und in dem anderen θ negativ anzunehmen ist, während in beiden α positiv gesetzt wird. Es muss jeder dieser beiden Fälle der Rechnung unterzogen werden, da sie im Allgemeinen verschiedene Resultate geben.

38.

7. Die unter einem Winkel von 16′ mit der optischen Achse einfallenden rothen Lichtstrahlen.

a) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 0$, θ positiv.

Es wird wieder

$$\theta = +\ 4^0 6' 58'' 63$$

und hieraus folgen:

$$\begin{aligned} \alpha' &= +\ 1^0 34' 57'' 18, & \theta' &= -\ 3^0 54' 13'' 46 \\ \alpha'' &= +\ 1\ 14\ 41.63, & \theta'' &= +\ 0\ \ 3\ 46.40 \\ \alpha''' &= +\ 1\ 58\ 32.16 & & \\ a' &= 0.004302, & a'' &= 0.008884 \\ \log k' &= 8.475831, & \log k'' &= 8.474383 \end{aligned}$$

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' + 0.0298114$$
$$z = 0$$

nebst

$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.537749$$

b) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 180^0$, θ negativ

$$\theta = -\ 4^0 6' 58'' 63$$
$$\alpha' = -\ 1^0 13' 54'' 80, \quad \theta' = +\ 3^0 54' 22'' 72$$
$$\alpha'' = -\ 0\ 54\ 56.48, \quad \theta'' = -\ 0\ \ 3\ 46.76$$
$$\alpha''' = -\ 1\ 26\ 33.86$$
$$a' = 0.004302, \quad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.476117\,n, \quad \log k'' = 8.475054\,n$$
$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' - 0.0298575$$
$$z = 0$$
$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.401157\,n$$

c) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 90^0$, $\beta = 0$

Durch das Verfahren des Art. 24 der angez. Abh. ergaben sich hier die folgenden Werthe:

$$\theta = +\ 4^0 6' 58'' 63$$

1ste Brechung.

$$\log \mathrm{tg}\,\chi = 1.189285, \quad \lambda = +\ 4^0 7' 29'' 63, \quad \mu = +\ 2^0 42' 53'' 07$$

2te Brechung.

$$q = +\ 0^0\ 1'\ 1''96, \quad \log \mathrm{tg}\,\omega' = 9.281060\,n, \quad \lambda' = -\ 5^0 18' 54'' 20$$
$$r = \ 86\ 17\ 58.9, \quad \log \mathrm{tg}\,\alpha' = 8.393679, \quad \mu' = -\ 4\ 59\ 16.79$$
$$\beta' + r = 169\ 11\ 11.5, \quad \log \mathrm{tg}\,\chi' = 8.962078\,n, \quad \beta' = \ 82\ 53\ 12.6$$

3te Brechung.

$$q' = -\ 1^0 24' 43'' 94, \quad \log \mathrm{tg}\,\omega'' = 9.076469\,n, \quad \lambda'' = +\ 1^0\ 1' 50'' 39$$
$$r' = -\ 5\ 14\ \ 3.4, \quad \log \mathrm{tg}\,\alpha'' = 8.280484, \quad \mu'' = +\ 1\ 40\ \ 3.96$$
$$\beta'' - \beta' + r' = -\ 6\ 47\ 57.7, \quad \log \mathrm{tg}\,\chi'' = 7.966598\,n, \quad \beta'' = \ 81\ 19\ 18.3$$

Schlussrechnung.

$$H = +\ 1^0 5' 34'' 37, \quad \log \eta = 9.999981$$
$$\beta''' = \ 81\ 7\ 34.8, \quad \log \sin \alpha''' = 8.479837$$

ferner durch die Formeln des obigen Art. 33

$$\Phi = +\,4^0\,57'\,11''12, \qquad \log\sin\varphi = 8.012658\,n$$
$$\log\mathrm{tg}\,(\psi'-\beta'') = 9.184516, \qquad \log\sin\theta' = 8.833163\,n$$
$$\log k' = 8.475972, \qquad a' = 0.004301$$
$$\theta'' = 0^0\,3'\,44'', \qquad a'' = 0.008884$$
$$\psi'' = 90^0\,2'\,32''9, \qquad \log k'' = 8.474715$$

Hiemit werden die Gleichungen des ausfahrenden Strahls:

$$y = (0.008884-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha'''\cos\beta''' - 0.0000221$$
$$z = (0.008884-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha'''\sin\beta''' + 0.0298343$$

wo

$$\log\mathrm{tg}\,\alpha'''\cos\beta''' = 7.668276$$
$$\log\mathrm{tg}\,\alpha'''\sin\beta''' = 8.474804$$

39.

8. Die unter einem Winkel von 16′ mit der optischen Achse einfallenden violetten Lichtsrahlen.

a) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 0$, θ positiv

$$\theta = +\,4^0\;6'\,58''63$$
$$\alpha' = +\,1^0\,37'\;0''86, \qquad \theta' = -\,3\;54\;12.53$$
$$\alpha'' = +\,1\;12\;52.34, \qquad \theta'' = +\,0\;\;3\;46.41$$
$$\alpha''' = +\,1\;58\;30.44$$
$$a' = 0.004302, \qquad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.475802, \qquad \log k'' = 8.474390$$
$$y = (0.008884-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' + 0.0298119$$
$$\log\mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.537644$$

b) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 180^0$, θ negativ

$$\theta = -\,4^0\;6'\,58''63$$
$$\alpha' = -\,1^0\,16'\,15''63, \qquad \theta' = +\,3\;54\;21.70$$
$$\alpha'' = -\,0\;53\;37.62, \qquad \theta'' = -\,0\;\;3\;46.76$$
$$\alpha''' = -\,1\;26\;32.61$$
$$a' = 0.004302, \qquad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.476085, \qquad \log k'' = 8.475046$$
$$y = (0.008884-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' - 0.0298570$$
$$\log\mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.401053\,n$$

c) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 90^0$, $\beta = 0$

1ste Brechung.

θ, χ, λ wie unter 7. c), $\mu = + 2^0 40' 40'' 53$

2te Brechung.

q und r wie unter 7. c), $\beta' + r = 169^0 27' 31'' 5$

$$\log \operatorname{tg} \omega' = 9.269727\, n, \qquad \lambda' = - 5^0 21' \, 5'' 29$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha' = 8.404629, \qquad \mu' = - 4 \; 57 \; 41.29$$
$$\log \operatorname{tg} \chi' = 8.942093\, n \qquad \beta' = \; 83 \;\; 9 \; 32.6$$

3te Brechung.

$$q' = - 1^0 26' 55'' 60, \quad \log \operatorname{tg} \omega'' = 9.078178\, n, \quad \lambda'' = + 1^0 \; 0' 15'' 02$$
$$r' = - 5 \;\; 0 \;\; 0.04, \quad \log \operatorname{tg} \alpha'' = 8.269822, \quad \mu'' = + 1 \; 40 \;\; 2.36$$
$$\beta'' - \beta' + r' = - 6 \; 49 \; 33.5, \quad \log \operatorname{tg} \chi'' = 7.977282, \quad \beta'' = \; 81 \; 19 \; 59.1$$

Schlussrechnung.

$$H = + 1^0 \; 3' 59'' 01, \qquad \log \eta = 9.999980$$
$$\beta''' = \; 81^0 \; 7' 28'' 1, \qquad \log \sin \alpha''' = 8.479746$$
$$\Phi = + 4^0 55' 35'' 28, \qquad \log \sin \varphi = 8.012033\, n$$
$$\log \operatorname{tg} (\psi' - \beta'') = 9.183906, \qquad \log \sin \theta' = 8.833134\, n$$
$$\log k' = 8.475943, \qquad a' = 0.004301$$
$$\theta'' = \; 0^0 \; 3' 43'', \qquad a'' = 0.008884$$
$$\psi'' = 90^0 \; 2' 28'' 9, \qquad \log k'' = 8.474717$$

Die Gleichungen des ausfahrenden Lichtstrahls werden:

$$y = (0.008884 - x) \operatorname{tg} \alpha''' \cos \beta''' - 0.0000215$$
$$z = (0.008884 - x) \operatorname{tg} \alpha''' \sin \beta''' + 0.0298344$$

wo

$$\log \operatorname{tg} \alpha''' \cos \beta''' = 7.668257$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha''' \sin \beta''' = 8.474692$$

sind.

40.

Gehen wir zur Berechnung der Abweichungen über, die aus den vorhergehenden strengen Berechnungen folgen, und wenden wir uns zuerst zu den Lichtstrahlen, die mit der optischen Achse parallel einfallen. Der Art. 36 zeigt, dass in Bezug auf die Centralstrahlen die Vereinigungsweite der rothen und der violetten Lichtstrahlen genau die nemliche ist, indem bei beiden Gattungen von Lichtstrahlen, für die Entfernung des Durchschnittspunkts derselben mit der optischen Achse von der letzten brechenden Oberfläche, der Werth

$$\xi''' - q'' = 0.999970$$

gefunden wurde. Genau genommen müsste diese Zahl = 1 gefunden werden, da bei der Berechnung des Objectivs π''' der Einheit gleich gesetzt worden ist. Die kleine Abweichung, die sich davon gezeigt hat, rührt von der besonderen Beschaffenheit der quadratischen Gleichung

$$0 = ag^2 + 2bg + c$$

im gegenwärtigen Falle her, in welchem die Function

$$\frac{b}{a} - \sqrt{\frac{c}{a}}$$

eine kleine Grösse ist, und daher die Wurzeln derselben, wenn man nicht zur Berechnung der Coefficienten Logarithmen mit einer grösseren Anzahl von Decimalen anwendet, mit etwas geringerer Genauigkeit erhalten werden, als die übrigen Zahlenwerthe. Es können daher sehr wohl die erhaltenen Zahlenwerthe von R, R', R'' in der letzten Stelle einige Ungenauigkeit besitzen; doch ist diese bei allen dreien von der nemlichen Grösse, da die Unterschiede derselben bis auf die letzte Stelle genau sich ergeben. Nun zeigt sich aber durch Entwickelung der Differentialquotienten, dass eine kleine gleiche Vergrösserung aller R, R', R'' zwar die Brennweite ein wenig ändert, aber die Grösse der Abweichungen, die die verschiedenen Lichtstrahlen in Bezug auf den genauen Brennpunkt zeigen, durchaus unmerklich beeinflusst, wenn dieselben, wie hier der Fall, überhaupt sehr klein sind. Ich durfte daher die obige Abweichung von 0.000030 stehen lassen, obgleich es ein Leichtes gewesen wäre, sie fortzuschaffen.

41.

Für die mit der optischen Achse parallel einfallenden Randstrahlen giebt der Art. 36 die Gleichungen nach der letzten Brechung:

rothe Strahlen:

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' + 0.0298344$$
$$\log\mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.474802$$

violette Strahlen:

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' + 0.0298344$$
$$\log\mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.474681$$

Suchen wir zuerst die Durchschnittspunkte mit der optischen Achse, so finden wir bez.

$$\xi''' - q'' = 0.999821$$
$$= 1.000100$$

und die Unterschiede dieser Werthe von der im vor. Art. erhaltenen Vereinigungsweite der Centralstrahlen sind bez.

$$-\,0.000149$$
$$+\,0.000130$$

Es verdient angemerkt zu werden, dass die rothen Lichtstrahlen, die einem kleineren Brechungsverhältniss entsprechen, und folglich an sich eine grössere Brennweite haben, hier eine kleinere, sowie die violetten Lichtstrahlen, die ihrer grösseren Brechung wegen, an sich einer kleineren Brennweite entsprechen, hier eine grössere Brennweite bekommen haben.

Da die eben erhaltenen Abweichungen Maxima sind, so folgt aus denselben, dass die grosse Achse des körperlichen Raumes, in welchem sich alle Bilder eines in der optischen Achse liegenden, unendlich weit entfernten Gegenstandes befinden,

$$0.000279$$

lang ist. Für ein Objectiv von 1000 Par. Linien Brennweite, welche nahe der des Objectivs des Königsberger Heliometers gleichkommt, wird also in unserem Falle die Länge dieser grossen Achse

0.279 Par. Linien

betragen; eine für das Auge unmerkliche Grösse, weil sie in der Gesichtslinie liegt, und überdem von den Bildern, welche die Centralstrahlen verursachen, sehr nahe in zwei gleiche Hälften getheilt wird.

Grösseren Eindruck auf das Auge verursachen die Abweichungen, die in der auf die optische Achse senkrecht stehenden und durch den Brennpunkt gehenden Ebene liegen, und als Seitenabweichungen zu bezeichnen sind. Sie bilden im gegenwärtigen Falle eine Kreisfläche, deren Durchmesser bis auf Unmerkliches ein Maximum ist, und durch das Produkt der obigen grossen Achse mit $\operatorname{tg}\alpha'''$ erhalten wird. Es ergiebt sich für unser Objectiv dieser Durchmesser

$$= 0.0000083$$

oder für ein Objectiv von 1000 Par. Linien Brennweite,

$$= 0.0083 \text{ Par. Linien}$$

welche Grösse für ganz unerkennbar zu erachten ist.

42.

Die Resultate, welche wir für die unter einem Winkel von 16′ mit der optischen Achse einfallenden Lichtstrahlen erhalten haben, bestehen in Folgendem:

Centralstrahlen beider Farben.

Coordinaten des Bildes.

$$\xi''' - q'' = 0.999970, \qquad \eta''' = -0.0046850$$

Rothe Randstrahlen.

Gleichungen der ausfahrenden Strahlen.

Für $\psi = 0$

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha''' + 0.0298114$$
$$z = 0$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha''' = 8.537749$$

Für $\psi = 180^0$

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha''' - 0.0298575$$
$$z = 0$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha''' = 8,401157n$$

Für $\psi = 90^0$

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha'''\cos\beta''' - 0.0000221$$
$$z = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha'''\sin\beta''' + 0.0298343$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha'''\cos\beta''' = 7.668276$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha'''\sin\beta''' = 8.474804$$

Violette Randstrahlen.

Für $\psi = 0$

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha''' + 0.0298119$$
$$z = 0$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha''' = 8.537644$$

Für $\psi = 180^0$

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' - 0.0298570$$
$$z = 0$$
$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.401053\,n$$

Für $\psi = 90^0$

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' \cos\beta''' - 0.0000215$$
$$z = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' \sin\beta''' + 0.0298344$$
$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' \cos\beta''' = 7.668257$$
$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' \sin\beta''' = 8.474692$$

Für $\psi = 270^0$ bekommt man dieselben Gleichungen, wie für $\psi = 90^0$, mit der einzigen Ausnahme, dass $-z$ statt z geschrieben werden muss.

Suchen wir nun den Durchschnittspunkt der

violetten Strahlen für $\psi = 0$ und $\psi = 180^0$,

so finden wir die Coordinaten des in demselben entstehenden Bildes:

$$\xi''' - q'' = 1{,}000065, \qquad \eta''' = -0.0046759$$

und die Unterschiede mit denen der Centralstrahlen

$$+0.000095 \quad \text{und} \quad +0.0000091$$

Desgleichen für die rothen Strahlen, nebst $\psi = 0$ und $\psi = 180^0$,

$$\xi''' - q'' = 0.999830, \qquad \eta''' = -0.0046766$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$-0.000140 \quad \text{und} \quad +0.0000084$$

Desgleichen für die Verbindung

der violetten Strahlen und $\psi = 0$

mit den rothen - - $\psi = 180^0$

$$\xi''' - q'' = 0.999974, \qquad \eta''' = -0.0046728$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$+0.000004 \quad \text{und} \quad +0.0000122$$

Desgleichen für die rothen Strahlen und $\psi = 0$

mit den violetten - - $\psi = 180^0$

$$\xi''' - q'' = 0.999832, \qquad \eta''' = -0.0046767$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$-0.000138 \quad \text{und} \quad +0.0000083$$

Alle diese Bilder sind extreme und liegen, gleich allen übrigen derselben Gattung, in der xy-Ebene. Wie man sieht, beträgt die grösste Seitenabweichung

$$0.0000122$$

Verbinden wir ausserdem die rothen Lichtstrahlen für $\psi = 90^0$ und $\psi = 270^0$ miteinander, so muss selbstverständlich das Bild auch in der xy-Ebene liegen; es ergeben sich die Coordinaten desselben

$$\xi''' - q'' = 0.999811, \qquad \eta''' = -0.0046800, \qquad \zeta''' = 0$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$-0.000159 \quad \text{und} \quad +0.0000050$$

Desgleichen geben die violetten Strahlen

$$\xi''' - q'' = 1.000074, \qquad \eta''' = -0.0046804, \qquad \zeta''' = 0$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$+0.000104 \quad \text{und} \quad +0.0000046$$

Die Seitenabweichungen liegen hier innerhalb der vorher gefundenen.

Verbindet man endlich die rothen Strahlen für $\psi = 90^0$ mit den violetten für $\psi = 270^0$, sowie jene für $\psi = 270^0$ mit diesen für $\psi = 90^0$, so wird man finden, dass diese Linien einander zwar nicht schneiden, aber in so geringer Entfernung an einander vorüber gehen, dass im Minimum der Entfernung derselben von einander ein Bildpunkt angenommen werden darf. Man erkennt ohne Weiteres, dass die zwei Bilder, welche beide Minima geben, in gleichen Abständen, aber auf entgegesetzten Seiten der xy-Ebene liegen müssen. Sucht man diese Minima, so ergiebt sich, dass denselben bis auf Unmerkliches dieselbe Abscisse zukommt, und zwar wird

$$y - q'' = 0{,}999942$$

sie liegen also sehr nahe in der Ebene des Brennpunkts. Ihre Ordinaten fand ich

$$y = -0.0046806, \qquad z = \mp 0.0000038$$
$$y = -0.0046799, \qquad z = \mp 0.0000039$$

wo sowohl die oberen wie die unteren Zeichen zu einander gehören. Das Minimum der Entfernung folgt hieraus

$$= 0.0000007$$

welches für Nichts zu achten ist. Auch diese Seitenabweichungen in der Richtung der y liegen innerhalb der oben erhaltenen, und kommen daher hier nicht in Betracht; die Seitenabweichungen in der Richtung der z sind Maxima, und alle von den übrigen Lichtstrahlen verursachten ähnlichen sind kleiner.

Projicirt man nun die grössten aller erhaltenen Seitenabweichungen auf die Ebene der yz, so wird man eine Fläche erhalten, die von der Ebene der xy in zwei gleiche und ähnliche Hälften getheilt wird, deren grosse, in der Richtung der y liegende Achse

$$= 0.0000122$$

und deren kleine, in der Richtung der z liegende Achse

$$= 0.0000077$$

ist. Beide Achsen schneiden einander, jedoch theilt der Durchschnittspunkt die grosse Achse nicht in zwei gleiche Theile; die krumme Linie, welche die Fläche begrenzt, wird daher eine eiförmige sein. Diese Fläche wird sich dem Auge als die Bildfläche aller von dem betrachteten Punkte auf das Objectiv einfallenden Lichtstrahlen darstellen.

Uebertragen wir die eben erhaltenen Achsen der Bildfläche auf das Objectiv von 1000 Linien Brennweite, so ergeben sich die Werthe derselben

$$= 0.012 \text{ und } 0.008 \text{ Linie}$$

Diess sind die grössten Abweichungen, die das hier berechnete Objectiv zeigt, und so klein, dass wenigstens mir kein Objectiv vorgekommen ist, welches nicht grössere Abweichungen besässe. So sind z. B. die Abweichungen, welche das von mir in der früheren Abhandlung untersuchte Objectiv des Königsberger Heliometers zeigt, bedeutend grösser.

Es ist hiebei noch zu bemerken, dass hier die Berechnung des Objectivs durch genäherte, sehr einfache Formeln ausgeführt worden ist, und eine sehr kurze Zeit in Anspruch genommen hat. Demungeachtet ist das Resultat so genau ausgefallen, dass die Anwendung der strengen Formeln zur Ausgleichung der Unterschiede, welche die früheren genäherten Formeln geben, gänzlich überflüssig wird. Mag man auch durch Anwendung der strengen Formeln die sich auf ein Objectiv von 1000 Linien Brennweite beziehende grösste Abweichung von 0.012 Linie ein Weniges verkleinern können, so kann diess doch nur auf Kosten des in der optischen Achse liegenden Bildes geschehen, dessen Abweichungen durch eine solche Ausgleichung sich vergrössern würden.

43.

Nicht blos zu Fernrohrobjectiven, sondern auch zu Objectiven für Mikroskope, und mit gewissen Zusätzen für Oculare, sind die hier entwickelten Ausdrücke brauchbar, da in denselben sowohl die erste, wie die letzte Vereinigungsweite der Lichtstrahlen unbestimmt gelassen worden ist. Um zu zeigen, dass die Halbmesser der Oberflächen der Linsen unter verschiedenen Umständen sehr verschiedene Werthe annehmen können, soll hier noch ein Mikroskopobjectiv berechnet, jedoch zur Abkürzung nur die erste Annäherung, und zwar blos mit Logarithmen von vier Decimalen, durchgeführt werden.

Je nach dem Zwecke, zu welchem das Mikroskop dienen soll, wird das Verhältniss der Entfernung des Gegenstandes zu der des Bildes verschieden angenommen; um aber eine bestimmte Grundlage zu erhalten, muss dieses Verhältniss im Voraus festgesetzt werden. Hier werden wir annehmen, dass sich die Entfernung des Gegenstandes von der ersten Oberfläche des Objectivs zu der des Bildes von der letzten Oberfläche desselben verhalten soll wie 2 : 5, welche Annahme als ein Mittel aus den verschiedenen in der Praxis vorkommenden betrachtet werden kann.

44.

In Folge des eben bestimmten Verhältnisses können wir setzen

$$\pi = -1, \qquad \pi''' = +0.4$$

Die Glasarten, aus denen die beiden Linsen dieses Objectivs bestehen, sollen dieselben sein, welche dem obigen Beispiel zu Grunde gelegt wurden, und deren Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse im Art. 27 angeführt sind. Die Berechnung soll in zwei verschiedenen Annahmen über die Lage der Linsen ausgeführt werden: nemlich zuerst wird angenommen, dass die Kronglaslinse, und darauf, dass die Flintglaslinse die erste sei. Ein ziemlicher Theil der oben ausgeführten numerischen Rechnungen kann hier wieder angewandt werden.

Wenn die Kronglaslinse vorangestellt wird, so findet man

$$\Delta = +3.279, \qquad \Delta' = -1.619$$

Die Endgleichung wird

$$0 = g^2 + 2\,(0.9201)\,g + (1.8322)$$

deren Wurzeln

$$g = -\ 9.442, \qquad = -\ 7.197$$

sind, woraus die bei beiden folgenden Objective hervorgehen:

$$R = -\ 0.416, \qquad = +\ 1.829$$
$$R' = -\ 6.974, \qquad = -\ 4.728$$
$$R'' = -\ 3.735, \qquad = -\ 1.490$$

Wie man sieht, sind diese Halbmesser bedeutend von den oben erhaltenen des Fernrohrobjectivs verschieden. Im ersten Objectiv sind beide Linsen Menisken, die ihre concave Seite dem Gegenstand zukehren, während im zweiten Objectiv die Kronglaslinse convex-convex und die Flintglaslinse ein Meniskus ist, beide äussere Oberflächen sind hier convex.

45.

Wenn die Flintglaslinse vorangestellt wird, so ergeben sich

$$\Delta = -\ 1.619, \quad \Delta' = +\ 3.279$$

Die Endgleichung wird

$$0 = g^2 - 2\,(0.9070)\,g + (1.8046)$$

deren Wurzeln

$$g = +\ 9.256, \qquad = +\ 6.890$$

sind, woraus die beiden Objective

$$R = +\ 2.951, \qquad = +\ 0.583$$
$$R' = +\ 6.188, \qquad = +\ 3.821$$
$$R'' = -\ 0.570, \qquad = -\ 2.736$$

folgen, die wieder von allen vorhergehenden wesentlich verschieden sind. In beiden ist die Flintglaslinse ein Meniskus, und die Kronglaslinse convex-convex, alle äusseren Oberflächen sind convex. Man kann in beiden Fällen mit den vorstehenden Grundlagen die zweite, und wo nöthig die dritte Annäherung ausführen, worauf wir jedoch, wie schon oben erwähnt, hier nicht eingehen werden.

§ 3. Von den Linsensystemen mit vier Brechungen.

46.

Dem im vorigen Abschnitte untersuchten Linsensysteme schliesst sich zunächst dasjenige von vier Brechungen an. Ein solches Linsensystem lässt sich in der Anwendung auf zwei wesentlich verschiedene Arten ausführen. Man kann es erstens aus zwei von einander abgesonderten Linsen zusammensetzen, deren vier Oberflächen Halbmesser von verschiedener Grösse und Lage haben; man kann es aber zweitens auch durch Zuziehung von drei Linsen bilden, bei denen der zweite Halbmesser der ersten und der erste der zweiten Linse, sowie der zweite Halbmesser der letzteren und der erste der dritten Linse, einander gleich und von gleicher Lage sind. Man bringt diese Linsen so nahe an einander, dass die beiden Zwischenräume für Null erachtet werden können.

Zur ersten Gattung dieser beiden Linsensysteme gehören die seit lange im Gebrauch befindlichen achromatischen Fernrohrobjective, die von verschiedenen Künstlern verschieden construirt worden sind. Gauss hat schon vor vielen Jahren gezeigt, dass man in einem solchen Objectiv zwei Lichtstrahlen von verschiedenen Brechungsverhältnissen, sowohl in Bezug auf die Centralstrahlen, wie in Bezug auf die Randstrahlen, vollständig mit einander vereinigen kann, eine Aufgabe, deren Lösung vorher für unmöglich gehalten worden war. Seine Construction ist indessen nicht zur allgemeinen Anwendung gelangt, was vielleicht dem Umstande zuzuschreiben ist, dass sie auf Linsenoberflächen von sehr grossen Krümmungen führt. Auch ist es in der That nicht unumgänglich nothwendig, die Randstrahlen zweier verschiedenen Farben strenge mit einander zu vereinigen, da, wie man im vor. Abschnitte gesehen hat, sich ohnehin Objective, die sehr kleine Abweichungen zeigen, herstellen lassen: Objective, deren Linsen weit geringere Krümmungen haben, als jene.

Es soll hier diese Gattung von Linsensystemen nicht weiter untersucht, dagegen die oben genannte zweite Gattung von Linsensystemen von vier Brechungen vorgenommen werden. Zunächst werden wir untersuchen, ob in diesen sich auch zwei Lichtstrahlen von verschiedenen Brechungsverhältnissen, sowohl für die Centralstrahlen wie für die Randstrahlen, mit einander vereinigen lassen. Die Möglichkeit dazu kann im Voraus nicht in Abrede gestellt werden, da die Aufgabe auf vier Gleichungen führt, und die vier Halbmesser der Linsenoberflächen eben so viele Unbekannte darbieten. Es handelt sich blos darum, ob die Gleichung des vierten Grades, auf die man schliesslich hingeführt wird, bei den Brechungs- und Zerstreuungsverhältnissen, welche die bekannten Glasarten besitzen, reelle Wurzeln hat oder nicht.

47.

Nehmen wir an, dass die erste und die dritte Linse aus derselben, die zweite hingegen aus einer anderen Glasart bestehe, und wenden, wo nicht ausdrücklich eine Abweichung angegeben wird, dieselben Bezeichnungen an, wie im Vorhergehenden, so erhalten wir für den einen Lichtstrahl die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
n &= 1 \\
n' &= N, \text{ oder } = M, \text{ oder } = m \\
n'' &= N', \text{ oder } = M', \text{ oder } = m' \\
n''' &= N, \text{ oder } = M, \text{ oder } = m \\
n^{\mathrm{IV}} &= 1 \\
N\pi' &= \pi + (N-1)R \\
N'\pi'' &= N\pi_, + (N'-N)R' \\
N\pi''' &= N'\pi_{,,} - (N'-N)R'' \\
\pi^{\mathrm{IV}} &= N\pi_{,,,} - (N-1)R''' \\
\pi_, &= \pi' + \pi'^2 d \\
\pi_{,,} &= \pi'' + \pi''^2 d' \\
\pi_{,,,} &= \pi''' + \pi'''^2 d''
\end{aligned}$$

Für den zweiten Lichtstrahl ergeben sich ähnliche Gleichungen, in denen M statt N, und M' statt N' zu setzen sind.

48.

Die eben aufgestellten Gleichungen geben leicht, nachdem man

$$R - R''' = 2\Delta$$
$$R' - R'' = 2\Delta'$$

gesetzt hat,

$$\pi^{\mathrm{IV}} - \pi = 2(N-1)(\Delta - \Delta') + 2(N'-1)\Delta' + A'$$

und wenn die angedeutete Veränderung vorgenommen wird,

$$\pi^{\mathrm{IV}} - \pi = 2(M-1)(\Delta - \Delta') + 2(M'-1)\Delta' + B'$$

wo

$$A' = N\pi'^2 d + N'\pi''^2 d' + N\pi'''^2 d''$$
$$B' = M\pi'^2 d + M'\pi''^2 d' + M\pi'''^2 d''$$

sind. Vergleicht man diese Gleichungen mit den (a) und (a*) des Art. 21, so findet man, dass sie mit den letzteren bis auf die kleinen Unterschiede, dass hier $\Delta - \Delta'$ statt Δ vorkommt, und A' und B' jede Ein Glied mehr haben als A und B, identisch sind. Die dort gegebene Auflösung kann also auch hier, mit Berücksichtigung dieser kleinen Unterschiede, angewandt werden.

Setzt man nemlich

$$l = \tfrac{1}{2}(B' + A'), \quad l' = \tfrac{1}{2}(B' - A')$$
$$z = \frac{M-N}{m-1}, \quad z' = \frac{M'-N'}{m'-1}$$

so werden

$$\Delta = \Delta' + \tfrac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}} - \pi)\frac{z'}{(z'-z)(m-1)} - \tfrac{1}{2}l\frac{z'}{(z'-z)(m-1)} + \frac{l'}{(z'-z)(m-1)}$$

$$\Delta' = -\tfrac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}} - \pi)\frac{z}{(z'-z)(m'-1)} + \tfrac{1}{2}l\frac{z}{(z'-z)(m'-1)} - \frac{l'}{(z'-z)(m'-1)}$$

49.

Die zwei anderen, hier zu erfüllenden Gleichungen haben beide ursprünglich die Form

$$0 = L + L' + L'' + L''' + 2\pi' dL + 2\pi'' d'(L + L') - 2\pi''' d'' L'''$$

und unterscheiden sich von einander nur dadurch, dass in der einen N und N', in der anderen M und M' zu substituiren sind; wir brauchen aus diesem Grunde nur die Eine derselben zu entwickeln, und werden dazu die von N und N' abhängende wählen.

50.

Die Ausdrücke der verschiedenen L, welche wir bei der folgenden Entwickelung benutzen werden, finden sich unter (5) und (6) des Art. 8, und zwar soll für L und L'' der Ausdruck (5), sowie für L' und L''' der Ausdruck (6) den Entwickelungen zu Grunde gelegt werden. Wir bekommen demzufolge

$$L = \frac{N-1}{N^2}\{(R-\pi)^3 - N\pi(R-\pi)^2\}$$
$$L' = \frac{N'(N'-N)}{N^2}\{N'(R'-\pi'')^3 - N\pi''(R'-\pi'')^2\}$$
$$L'' = -\frac{N'(N'-N)}{N^2}\{N'(R''-\pi_{,,})^3 - N\pi_{,,}(R''-\pi_{,,})^2\}$$
$$L''' = -\frac{N-1}{N^2}\{(R'''-\pi^{\mathrm{IV}})^3 - N\pi^{\mathrm{IV}}(R'''-\pi^{\mathrm{IV}})^2\}$$

Die Reduction der Summe $L + L'''$ ist leicht zu bewirken. Setzt man

$$2s = (R-\pi) + (R'''-\pi^{\mathrm{IV}})$$
$$2D = (R-\pi) - (R'''-\pi^{\mathrm{IV}})$$
$$= 2\varDelta + (\pi^{\mathrm{IV}}-\pi)$$

woraus

$$R - \pi = s + D$$
$$R''' - \pi^{\mathrm{IV}} = s - D$$

folgen, so bekommt man ohne Mühe aus den vorstehenden Ausdrücken:

$$L + L''' = \frac{N-1}{N^2}\{(6D + N(\pi^{\mathrm{IV}}-\pi))s^2 - 2N(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)Ds + 2D^3 + N(\pi^{\mathrm{IV}}-\pi)D^2\}$$

wo s die einzige Unbekannte ist.

Die Summe $L' + L''$ lässt sich auf gleiche Weise behandeln. Setzt man hier

$$2g' = (R'-\pi'') + (R''-\pi_{,,})$$
$$2D' = (R'-\pi_{,,}) - (R''-\pi_{,,})$$
$$= 2\varDelta' + (\pi_{,,}-\pi'')$$
$$= 2\varDelta' + \pi''^2 d'$$

woraus

$$R' - \pi'' = g' + D'$$
$$R'' - \pi_{,,} = g' - D'$$

folgen, so erhält man eben so wie oben:

$$L' + L'' = \frac{N'(N'-N)}{N^2}\{(6N'D' + N(\pi_{,,}-\pi''))g'^2 - 2N(\pi_{,,}+\pi'')D'g' + {} + 2N'D'^3 + N(\pi_{,,}-\pi'')D'^2\}$$

in welchem Ausdruck aber ausser g' noch die Unbekannte $(\pi_{,,}+\pi'')$ vorkommt, und daher eine weitere Reduction erforderlich ist.

54.

Die Gleichungen des Art. 47 geben

$$N'\pi'' = \pi + (N-1)R + (N'-N)R' + N\pi'^2 d$$
$$N'\pi_{,,} = \pi^{\mathrm{v}} + (N-1)R''' + (N'-N)R'' - N\pi'''^2 d''$$

folglich wird

$$N'(\pi_{,,}+\pi'') = \pi^{\mathrm{IV}}+\pi + (N-1)(R+R''') + (N'-N)(R'+R'') + N\pi'^2 d - N\pi'''^2 d''$$

Führen wir jetzt die Substitution

$$2s' = (R'-\pi''') + (R''-\pi^{\mathrm{IV}})$$

ein, und benutzen ausserdem die schon oben angewandte Substitution

$$2s = (R-\pi) + (R'''-\pi^{\mathrm{IV}})$$

so verwandelt man die vorstehende Gleichung leicht in

$$\pi_{,,}+\pi'' = (\pi^{\mathrm{IV}}+\pi) + 2\frac{N-1}{N'}s + 2\frac{N'-N}{N'}s' + \frac{N}{N'}(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

Die Gleichung des vor. Art., durch welche g' eingeführt wurde, giebt aber

$$2g' = 2s' + (\pi^{\mathrm{IV}}+\pi) - (\pi_{,,}+\pi'')$$

und in Verbindung mit der vorhergehenden:

$$g' = -\frac{N-1}{N'}s + \frac{N}{N'}s' - \frac{N}{2N'}(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$g'^2 = \frac{N^2}{N'^2}s'^2 - 2\frac{N(N-1)}{N'^2}s's + \frac{(N-1)^2}{N'^2}s^2 - \frac{N}{N'^2}(Ns'-(N-1)s)(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')$$

$$\begin{aligned}(\pi_{,,}+\pi'')g' = {} & 2\frac{N(N'-N)}{N'^2}s'^2 - 2\frac{(N-1)(N'-2N)}{N'^2}s's - 2\frac{(N-1)^2}{N'^2}s^2 \\ & + \frac{N}{N'}(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)s' - \frac{N-1}{N'}(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)s \\ & - \frac{N}{N'^2}\left((N'-2N)s' + 2(N-1)s + \tfrac{1}{2}N'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)\right)(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')\end{aligned}$$

womit der zu Ende des vor. Art. erhaltene Ausdruck von $L+L'$ übergeht in:

$$\begin{aligned}L+L' = 2\frac{N'-N}{N^2N'}\Big\{ & \left\{N^2(N'+2N)D' + \frac{N^3}{2}\pi''^2 d'\right\}s'^2 \\ & - \left\{4N(N-1)(N'+N)D' + N^2(N-1)\pi''^2 d'\right\}s's \\ & + \left\{(N-1)^2(3N'+2N)D' + \frac{N}{2}(N-1)^2\pi''^2 d'\right\}s^2 \\ & - \left\{N^2N'D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi) + 2N^2(N'+N)D'(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')\right\}s' \\ & + \left\{NN'(N-1)D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi) + N(N-1)(3N'+2N)D'(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')\right\}s \\ & + \left\{N'^3D'^3 + \frac{1}{2}NN'^2D'^2\pi''^2 d' + \frac{1}{2}N^2N'D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')\right\}\Big\}\end{aligned}$$

52.

Hiemit ist die Gleichung des Art. 49 so weit entwickelt, als erforderlich ist; führt man die Substitutionen aus, und setzt

$$a = \frac{N^2}{N'}(N'+2N)(N'-N)D' + \frac{N^3}{2N'}(N'-N)\pi''^2 d'$$
$$b = 4\frac{N}{N'}(N-1)(N'+N)(N'-N)D' + \frac{N^2}{N'}(N-1)(N'-N)\pi''^2 d'$$
$$c = \frac{(N-1)^2}{N'}(3N'+2N)(N'-N)D' + 3(N-1)D$$
$$+ \frac{N}{2}(N-1)(\pi^{\mathrm{IV}}-\pi) + \frac{N}{2N'}(N-1)^2(N'-N)\pi''^2 d'$$
$$e = N^2(N'-N)D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi) + 2\frac{N^2}{N'}(N'+N)(N'-N)D'(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$
$$f = N(N-1)(N'-N)D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi) - N(N-1)D(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)$$
$$+ \frac{N}{N'}(N-1)(3N'+2N)(N'-N)D'(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$
$$g = N'^2(N'-N)D'^3 + (N-1)D^3 + \frac{N}{2}(N-1)D^2(\pi^{\mathrm{IV}}-\pi) + C$$

wo zur Abkürzung

$$C = \frac{NN'}{2}(N'-N)D'^2\pi''^2 d' + \frac{N^2}{2}(N'-N)D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$
$$+ N^2\pi' L d + N^2\pi''(L+L)d' - N^2\pi''' L'' d''$$

geschrieben worden ist, dann wird die eine Endgleichung

$$0 = as'^2 - bs's + cs^2 - es' + fs + g$$

Hier dürfen s und s' als die einzigen Unbekannten betrachtet werden, da die Glieder, welche mit d, d', d'' multiplicirt sind, auf die nemliche Art berücksichtigt werden können, wie im vor. Abschnitte gezeigt worden ist. Die zweite Endgleichung bekommt man dadurch, dass man in den vorstehenden Ausdrücken allenthalben M statt N, und M' statt N' schreibt. Bezeichnet man die durch diese Verwandlung entstehenden Coefficienten mit den gleichen, aber mit einem Striche versehenen Buchstaben, so dass

$$a' = \frac{M^2}{M'}(M'+2M)(M'-M)D' + \frac{M^3}{2M'}(M'-M)\pi''^2 d'$$

etc. etc.

werden, so entsteht die folgende zweite Endgleichung

$$0 = a's'^2 - b's's + c's^2 - e's' + f's + g'$$

Hat man aus diesen beiden Endgleichungen s und s' bestimmt, welche Bestimmung auf die Auflösung einer Gleichung des vierten Grades führt, so ergeben sich

$$R = s + D + \pi$$
$$R''' = s - D + \pi^{\mathrm{IV}}$$
$$R' = s' + \varDelta' + \tfrac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)$$
$$R'' = s' - \varDelta' + \tfrac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

53.

Die Frage, ob das im Vorhergehenden entwickelte Linsensystem einer Anwendung fähig ist oder nicht, wird am einfachsten durch die Berechnung eines Beispiels entschieden, und es soll daher mit Anwendung der im vor. Abschnitt angewandten Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse ein Fernrohrobjectiv nach den eben entwickelten Formeln berechnet werden. Zuerst soll angenommen werden, dass die beiden äusseren Linsen von Flintglas und die mittlere von Kronglas sei. Zufolge des Art. 27 sind daher unsere Daten

$$N = 1.61800$$
$$N' = 1.51870$$
$$M = 1.66024$$
$$M' = 1.53956$$

und ausserdem sind $\pi = 0$, $\pi^{\text{IV}} = 1$. Die Werthe von $\varDelta$ und $\varDelta'$ brauchen hier nicht von Neuem berechnet zu werden, da man leicht einsehen wird, dass sie unmittelbar aus dem Art. 27 entnommen werden können. Für die erste Annäherung werden hier

$$\varDelta - \varDelta' = -1.1564, \qquad \varDelta' = +2.3417$$

und folglich

$$\varDelta = +1.1853$$
$$D = +1.6853, \qquad D' = +2.3417$$

Die obigen Daten liefern ferner

$$\begin{aligned} N' - N &= -0.09930, & M' - M &= -0.12068 \\ N' + N &= +3.1367, & M' + M &= +3.1998 \\ N' + 2N &= 4.7547, & M' + 2M &= 4.8600 \\ 3N' + 2N &= 7.7921, & 3M' + 2M &= 7.9391 \end{aligned}$$

und hieraus ergeben sich durch eine kurze Rechnung die beiden Endgleichungen, die, nachdem mit den Coefficienten von s'^2 dividirt worden ist, die folgenden sind:

$$0 = s'^2 - 1.0076\,s's - 1.6616\,s^2 - 0.3193\,s' + 1.0059\,s - 0.7554$$
$$0 = s'^2 - 1.0474\,s's - 1.3223\,s^2 - 0.3168\,s' + 0.8775\,s - 0.4257$$

Aus dem Unterschiede dieser beiden Gleichungen erhält man

$$s' = \frac{8.524\,s^2 - 3.225\,s + 8.282}{s - 0.0628}$$

womit s' vollständig aus einer derselben eliminirt werden muss. Man gelangt dadurch zu einer Gleichung des vierten Grades in s, welche zur Bestimmung dieser Unbekannten dient. Hat man hiemit die Werthe von s erhalten, so giebt die vorstehende Gleichung des ersten Grades in s' zu jedem Werthe von s den entsprechenden Werth von s'. Es ist aber im gegenwärtigen Falle überflüssig die genannte Elimination auszuführen, da der Ueberblick schon lehrt, dass alle vier Wurzeln der genannten biquadratischen Gleichung imaginär werden. Es lässt sich also, wenigstens mit den der obigen Rechnung zu Grunde gelegten Daten, kein Objectiv von der angenommenen Form construiren, welches sowohl die Rand- wie die Centralstrahlen zweier verschiedenen Farben mit einander vereinigt. Man darf auch nicht hoffen, diese Vereinigungen durch Anwendung anderer Glasarten zu Wege bringen zu können, da die dem Beispiel zu Grunde gelegten zu denjenigen gehören, welche in ihren Brechungs- und Zerstreuungsverhältnissen die grössten Verschiedenheiten von einander darbieten, die man kennt, und die Anwendung von Glasarten mit geringeren Verschiedenheiten auf Endgleichungen hinführen muss, deren Coefficienten noch geringere Verschiedenheiten von einander darbieten, als die obigen.

54.

Obgleich sich voraussehen lässt, dass die Verwechselung der beiden Glasarten mit einander ein ähnliches Resultat herbeiführen wird, als das eben erhaltene, so will ich doch nicht unterlassen, die betreffenden Zahlenwerthe hier anzusetzen. Es wird also jetzt angenommen, dass die beiden äusseren Linsen aus Kronglas und die mittlere aus Flintglas bestehen, wodurch mit Beibehaltung derselben Glasarten wie oben sich die folgenden Daten ergeben:

$$N = 1.51870$$
$$N' = 1.61800$$
$$M = 1.53956$$
$$M' = 1.66024$$

Da wir nun

$$\varDelta - \varDelta' = +\,2.3417, \quad \varDelta' = -\,1.1564$$

bekommen müssen, so werden

$$D = +\,1.6853, \quad D' = -\,1.1564$$

und da aus den jetzigen Daten

$$N' - N = +\ 0.09930, \qquad M' - M = +\ 0.12068$$
$$N' + N = 3.1367, \qquad M' + M = 3.1998$$
$$N' + 2N = 4.6554, \qquad M' + 2M = 4.7394$$
$$3N' + 2N = 7.8914, \qquad 3M' + 2M = 8.0599$$

folgen, so erhalten wir die beiden Endgleichungen:

$$0 = s'^2 - 0.92050 s's - 3.76059 s^2 - 0.34755 s' + 1.86087 s - 4.19871$$
$$0 = s'^2 - 0.94639 s's - 3.11985 s^2 - 0.35030 s' + 1.60533 s - 3.43965$$

nebst

$$s' = \frac{24.75 s^2 - 9.87 s + 29.32}{s + 0.1062}$$

) Der Ueberblick zeigt auch hier sogleich, dass man auf lauter imaginäre Werthe der Unbekannten s und s' kommen muss, folglich das Objectiv wieder unmöglich wird.

55.

Obgleich, wie man im Vorhergehenden gesehen hat, ein Objectiv von der in Rede stehenden Form, in welchem die Central- und die Randstrahlen von zwei verschiedenen Farben mit einander vereinigt werden, nicht hergestellt werden kann, so lässt sich doch ein solches Objectiv, in welchem die Randstrahlen **mittlerer** Brechung mit den Centralstrahlen vereinigt werden, ausführen. Diess soll jetzt gezeigt werden. Da wir unter der letztgenannten Bedingung nur drei Gleichungen zu erfüllen haben, während die Form unseres Objectivs uns vier Unbekannte darbietet, und folglich eine beliebige vierte Gleichung den drei übrigen hinzugefügt werden kann, so lässt die gegenwärtige Aufgabe eine grosse Anzahl von Auflösungen zu; strenge genommen eine unendlich grosse Anzahl, wenn nicht angenommen werden dürfte, dass eine Anzahl der Auflösungen wieder auf imaginäre Werthe der Unbekannten hinführen würde.

56.

Es soll die Auflösung der im vor. Art. ausgesprochenen Aufgabe hier nur auf eine einzige Art, und zwar mit Hinzufügung der Bedingung, dass die Halbmesser der beiden äusseren Linsenober-

*) Hr. v. Glasenapp hat die Güte gehabt, die obigen numerischen Rechnungen auszuführen.

flächen einander gleich sein, aber entgegengesetzte Lage haben sollen, durchgeführt werden. Zufolge dieser Bedingung erhalten wir die Gleichung

$$R + R''' = 0$$

aus welcher in Verbindung mit der überhaupt geltenden Gleichung

$$R - R''' = 2\varDelta$$

hervorgeht, dass

$$R = \varDelta, \quad R''' = -\varDelta$$

folglich bekannte Grössen sind. Aus derselben Gleichung geht ferner hervor, dass die im Art. 50 eingeführte Grösse s den Ausdruck

$$s = -\tfrac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi)$$

annimmt. Es zeigt sich hiemit, dass auch die Summe $L + L'''$ eine bekannte Grösse wird, welche, wenn man wieder die mittleren Brechungsverhältnisse der beiden anzuwendenden Glasarten mit m und m' bezeichnet, folgenden Werth annimmt:

$$L + L''' = \frac{m-1}{m^2}\Big\{2D^3 + mD^2(\pi^{\mathrm{IV}} - \pi) + (m + \tfrac{3}{2})D(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi)^2 + \\ + \tfrac{m}{4}(\pi^{\mathrm{IV}} - \pi)(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi)^2\Big\}$$

wie aus dem im Art. 50 erhaltenen Ausdruck dieses Aggregats unmittelbar hervorgeht.

57.

Um den Werth von $L' + L''$ zu erhalten, wenden wir uns an den dafür im Art. 50 gefundenen Ausdruck, in welchen wir nicht nur die mittleren Brechungsverhältnisse, sondern auch

$$k = m'g'$$

einführen. Es wird hiemit zunächst

$$L' + L'' = \frac{m'-m}{m^2}\Big\{(6D' + \tfrac{m}{m'}(\pi_{\prime\prime} - \pi''))k^2 - 2mD'(\pi_{\prime\prime} + \pi'')k + \\ + 2m'^2D'^3 + mm'D'^2(\pi_{\prime\prime} - \pi'')\Big\}$$

Sei nun

$$R' + R'' = 2\sigma$$

dann erhält man aus der Gleichung des Art. 50 für g'

$$2m'\sigma = 2k + m'(\pi_{\prime\prime} + \pi'')$$

und aus dem Art. 51

$$m'(\pi_{\prime\prime} + \pi'') = \pi^{\mathrm{IV}} + \pi + 2(m' - m)\sigma + m(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'') \quad . \; . \; . \; (a)$$

Die Elimination von σ zwischen diesen beiden Gleichungen giebt

$$m(\pi_{\prime\prime} + \pi'') = 2\,\frac{m'-m}{m'}k + (\pi^{\mathrm{IV}} + \pi) + m(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'') \quad . \; . \; . \; (b)$$

wodurch der obige Ausdruck für $L' + L''$ in den folgenden verwandelt wird, in welchem k als die einzige Unbekannte betrachtet werden kann:

$$L' + L'' = \frac{m'-m}{m^2}\Big\{\Big(2\,\frac{m'+2m}{m'}\,D' + \frac{m}{m'}(\pi_{\prime\prime} - \pi'')\Big)k^2 -$$

$$-2(D'(\pi^{\text{IV}}+\pi) + mD'(\pi'^2 d - \pi'''^2 d''))\,k + 2m'^2 D'^3 + mm'D'^2(\pi_{\prime\prime} - \pi'')\Big\}$$

Die Gleichungen (a) und (b) geben ausserdem durch die Elimination von $\pi_{\prime\prime} + \pi''$

$$\sigma = \frac{k + \frac{1}{2}(\pi^{\text{IV}} + \pi)}{m} + \frac{1}{2}(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

womit die Aufgabe schon gelöst ist, da man vermöge der Bedeutung von σ und $\varDelta'$ sogleich

$$R' = \sigma + \varDelta', \quad R'' = \sigma - \varDelta'$$

erhält.

58.

Setzt man zur Abkürzung:

$$a = 2\,\frac{m'-m}{m'}(m' + 2m)\,D' + m\,\frac{m'-m}{m'}\,\pi''^2 d'$$

$$b = (m'-m)\,D'(\pi^{\text{IV}} + \pi) + m(m'-m)\,D'(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

$$c = 2m'^2(m'-m)\,D'^3 + 2(m-1)\,D^3 + m(m-1)\,D^2(\pi^{\text{IV}} - \pi)$$

$$+ (m-1)\left(m + \frac{3}{2}\right)D(\pi^{\text{IV}} + \pi)^2 + \frac{m}{4}(m-1)(\pi^{\text{IV}} - \pi)(\pi^{\text{IV}} + \pi)^2 + C$$

wo

$$C = mm'(m'-m)\,D'^2\pi''^2 d' + 2m^2\pi' L d + 2m^2\pi''(L + L')\,d' - 2m^2\pi''' L'' d''$$

und wie in der nächst vorhergehenden Aufgabe

$$D = \varDelta + \frac{1}{2}(\pi^{\text{IV}} - \pi)$$

$$D' = \varDelta' + \frac{1}{2}\pi'' d'$$

sind, so wird die Endgleichung

$$0 = ak^2 - 2bk + c$$

Nachdem man hieraus die beiden Werthe von k gefunden hat, berechnet man für jeden derselben

$$\sigma = \frac{k + \frac{1}{2}(\pi^{\text{IV}} + \pi)}{m} + \frac{1}{2}(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

$$R' = \sigma + \varDelta', \quad R'' = \sigma - \varDelta'$$

während stets

$$R = \varDelta, \qquad R''' = -\varDelta$$

sind. In der ersten Annäherung werden wieder hier wie oben die Glieder, welche von den Linsendicken abhängen, weggelassen.

59.

Um zu zeigen, dass hieraus reelle Objective entstehen, wollen wir wieder den einfachsten Weg einschlagen, und ein Beispiel berechnen. Der Kürze wegen soll von diesem Beispiel jedoch nur die erste Annäherung angegeben werden, da jeder, der die genaueren Werthe der Halbmesser kennen lernen will, leicht selbst die zweite, und wo nöthig die dritte Annäherung hinzufügen kann. Es sollen wieder dieselben Daten angewandt werden, welche oben benutzt wurden, und das Beispiel auch für die beiden Annahmen über die Lage der zwei Glasarten ausgeführt werden.

Legt man zuerst die Kronglaslinse in die Mitte, so bekommt man, gleichwie im Art. 53,

$$\varDelta = +1.1853, \quad \varDelta' = +2.3417$$
$$D = +1.6853, \quad D' = +2.3417$$

und für die Berechnung der Endgleichung sind

$$m = 1.6391$$
$$m' = 1.5291$$

zu setzen. Nachdem mit dem Coefficienten von k^2 dividirt worden ist, erhält man

$$0 = k^2 - 2(9.2016)\,k - (0.5778)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$k = +2.111 \quad \text{und} \quad k = -1.793$$

woraus

$$\sigma = +1.593 \quad \text{und} \quad \sigma = -0.789$$
$$R' = +3.935 \qquad\qquad R' = +1.553$$
$$R'' = -0.749 \qquad\qquad R'' = -3.131$$

folgen. Wir haben hier also wieder zwei verschiedene Objective erhalten, in welchen beiden

$$R = +1.185$$
$$R''' = -1.185$$

sind. Die Kronglaslinse ist in beiden biconvex, und sämmtliche Flintglaslinsen sind Menisken; die inneren Halbmesser sind bedeutend von einander verschieden.

60.

Legen wir jetzt die Flintglaslinse in die Mitte, so erhalten wir zunächst, gleichwie im Art. 54,

$$\Delta = +\,1.1853, \quad \Delta' = -\,1.1564$$
$$D = +\,1.6853, \quad D' = -\,1.1564$$

und die Daten zur Berechnung der Endgleichung sind jetzt

$$m = 1.5291$$
$$m' = 1.6391$$

aus welchen

$$0 = k^2 - 2(9.2417)k - (1.1078)$$

hervorgeht. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$k = +\,3.758 \quad \text{und} \quad k = -\,3.410$$

woraus

$$\sigma = +\,2.785 \quad \text{und} \quad \sigma = -\,1.903$$
$$R' = +\,1.629 \qquad R' = -\,3.059$$
$$R'' = +\,3.941 \qquad R'' = -\,0.747$$

folgen, zu welchen Werthen wieder

$$R = +\,1.185$$
$$R''' = -\,1.185$$

gehören. Im ersten dieser beiden Objective sind die zwei ersten Linsen Menisken, die dritte biconvex, im zweiten Objectiv hingegen ist die erste Linse biconvex und die zweite und dritte Menisken; die inneren Halbmesser sind wieder sehr von einander verschieden.

61.

Als Einleitung zur folgenden Aufgabe soll noch untersucht werden, ob dasselbe Linsensystem, welches uns im Vorhergehenden beschäftigt hat, mit Beibehaltung der zuletzt eingeführten Bedingung reell wird, wenn man statt der beiden äusseren Halbmesser die beiden inneren einander gleich und entgegengesetzt liegend annimmt. Um ganz kurz verfahren zu können, sollen hiebei die Linsendicken, die wieder als sehr klein angenommen werden, ganz ausser Berücksichtigung bleiben.

Da unter der gegenwärtigen Annahme

$$R' + R'' = \sigma = 0$$

ist, so wird

$$k = -\tfrac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi)$$

und der im Art. 57 für $L' + L''$ erhaltene Ausdruck geht über in

$$L' + L'' = \frac{m'-m}{m^2}\left\{2m'^2D'^3 + \frac{\frac{3}{2}m'+m}{m'}D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)^2\right\}$$

und ist völlig bekannt. Der Ausdruck des Art. 50 für $L + L''$ kann mit der blossen Veränderung von N in m angewandt werden. Setzt man daher hier

$$a = (m-1)(6D + m(\pi^{\mathrm{IV}} - \pi))$$
$$b = m(m-1)D(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi)$$
$$c = 2(m-1)D^3 + m(m-1)D^2(\pi^{\mathrm{IV}} - \pi) + 2m'^2(m'-m)D'^3$$
$$+ (m'-m)\frac{\frac{3}{2}m'+m}{m'}D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)^2$$

so wird die Endgleichung

$$0 = as^2 - 2bs + c$$

Wendet man diese Auflösung auf die vorhergehenden Daten an, so erhält man, wenn die Kronglaslinse in die Mitte gelegt wird,

$$0 = s^2 - 2(9.3707)s + (9.4071)$$

und wenn die Flintglaslinse in die Mitte gelegt wird

$$0 = s^2 - 2(9.3450)s + (9.9983)$$

Die Wurzeln dieser beiden Gleichungen sind imaginär, und folglich ist es unmöglich, ein solches Objectiv herzustellen.

62.

Aus dem Vorhergehenden giebt sich zu erkennen, dass, obschon sich ein Objectiv von vier Brechungen und der hier in Rede stehenden Form, welches zwei Randstrahlen von verschiedener Brechung mit den Centralstrahlen vereinigt, nicht herstellen lässt, man doch ein Objectiv dieser Form herrichten kann, in dem die Randstrahlen mittlerer Brechung mit den Centralstrahlen vereinigt werden, mit anderen Worten, ein Objectiv, welches denselben Bedingungen genügt, wie das im vor. Abschnitte berechnete. Im gegenwärtigen Falle kann ein solches Objectiv auf verschiedene Arten construirt werden, da eine Bedingung willkührlich bleibt. Es ist gezeigt worden, dass das Objectiv möglich wird, wenn man annimmt, dass die äusseren Halbmesser einander gleich sind, und entgegengesetzte Lage haben, und man würde auch unter dieser oder jener anderen Bedingung ein solches herstellen können, aber unter jeder Bedingung ist es nicht möglich. Diess zeigt der zuletzt betrachtete Fall. Unter der Annahme, dass die beiden inneren Halbmesser einander gleich seien und entgegengesetzt liegen, ist das Objectiv unmöglich, und noch andere solche Fälle würden sich herbeiführen lassen.

Alle diese Untersuchungen sind unter der Voraussetzung angestellt, dass die Linsendicken so kleine Grössen seien, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenzen derselben ausreicht; es lässt sich daher die Frage aufwerfen, welche Resultate durch ein Linsensystem von der hier in Rede stehenden Form erreicht werden können, wenn man annimmt, dass wenigstens Eine der Linsendicken so gross ist, dass man sie strenge berücksichtigen muss. Zur Erörterung dieser Frage soll das Folgende einen Beitrag liefern.

63.

Nehmen wir jetzt an, dass die Dicke der mittleren Linse so gross sei, dass sie strenge berücksichtigt werden muss, und übergehen wir hiebei, der Kürze wegen, die Dicken der beiden äusseren Linsen, die als sehr klein angenommen werden sollen. Diese Uebergehung ist zwar durchaus nicht nothwendig, da die genannten Linsendicken hier eben so berücksichtigt werden könnten, wie bei den im Vorhergehenden gelösten Aufgaben; ich werde sie blos der kürzeren Darstellung wegen einführen, und dem Leser die leichte Ergänzung überlassen.

Wenden wir uns zur Gleichung des Art. 17, die für sechs Brechungen ausgeschrieben ist, und entfernen vor Allem daraus die zwei Brechungen, die der dort angenommenen grossen Entfernung zwischen der dritten und vierten brechenden Oberfläche zunächst liegen; wir eignen dadurch diese Gleichung dem jetzt in Rede stehenden Falle zu. Betrachten wir hierauf zunächst nur den von k''' unabhängigen Theil dieser Gleichung, welcher, gleichwie in den anderen oben behandelten Fällen, für sich gleich Null werden muss. Substituiren wir hier die im Art. 47 angegebenen, unserer Aufgabe zukommenden Brechungsverhältnisse, und wenden die mittleren derselben an, berücksichtigen auch die Gleichungen

$$R - R''' = 2\varDelta, \quad R' - R'' = 2\varDelta'$$

so bekommen wir

$$\pi^{\mathrm{IV}} - \pi = 2(m-1)(\varDelta - \varDelta') + 2(m'-1)\varDelta' + m'\pi_{\prime\prime}\pi''d' \quad \ldots \quad (a)$$

wo d' die grosse Dicke der mittleren Linse bezeichnet.

Betrachten wir unter denselben Voraussetzungen den mit k''' multiplicirten Theil der angezogenen Gleichung, so wird dieser, wenn wir zur Abkürzung

$$\lambda = 1 + \pi_{\prime\prime} d'$$

setzen:

$$0 = (L + L)\lambda^2 + L'' + L''' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Diese Gleichungen (a) und (b) sind der weiteren Entwickelung zu unterwerfen.

64.

Wendet man die Gleichung (a) auf zwei verschiedene Lichtstrahlen des Sonnenspectrums an, mit anderen Worten, schreibt man erst N und N', und darauf M und M' statt m und m' darin, so entstehen zwei Gleichungen, welche gleichwie vorher die Bedingung des Achromatismus der Centralstrahlen bilden. Die Gleichung (b) dient hierauf mit Anwendung von m und m', um die Randstrahlen mittlerer Brechung mit den Centralstrahlen zu vereinigen. Diese Umstände sind die nemlichen wie in den vorhergehenden Aufgaben, nur müssen hier, der grossen Linsendicke d' wegen, die erhaltenen Gleichungen anders behandelt werden, als in den vorhergehenden Aufgaben. Da die vier Halbmesser der Linsenflächen, nebst d', fünf verfügbare Grössen ausmachen, während nur drei Gleichungen zu erfüllen sind, so kann man zwei willkührliche Bedingungen einführen, und diese sollen darin bestehen, dass wir sowohl die beiden äusseren, wie die beiden inneren Halbmesser, jedes Paar für sich, einander gleich aber entgegengesetzt liegend annehmen. Diese beiden Bedingungen werden durch die Gleichungen

$$R + R''' = 0, \quad R' + R'' = 0$$

ausgedrückt, welche in Verbindung mit

$$R - R''' = 2\varDelta, \quad R' - R'' = 2\varDelta'$$

die Werthe

$$R = \varDelta, \quad R' = \varDelta'$$
$$R''' = -\varDelta, \quad R'' = -\varDelta'$$

geben.

65.

Die Gleichung (a) bleibt nach der Einführung der beiden eben genannten Bedingungen dieselbe, aber sie lässt sich in zwei Gleichungen zerlegen, die dazu angewandt werden können, um derselben eine andere äussere Form zu geben. Aus den im Art. 47 aufgestellten Relationen zwischen den Reciproken der Vereinigungsweiten erhalten wir jetzt, wenn wir die mittleren Brechungsverhältnisse anwenden, und wie oben die Linsendicken d und d'' übergehen, die Ausdrücke

$$m'\pi'' = (m-1)(\varDelta-\varDelta') + (m'-1)\varDelta' + \pi$$
$$m'\pi_{,,} = -(m-1)(\varDelta-\varDelta') - (m'-1)\varDelta' + \pi^{\text{IV}}$$

deren Unterschied, wie man leicht findet, mit (a) identisch ist. Wendet man diese beiden Gleichungen nach einander an, um m' in dem Gliede $m'\pi_{,,}\pi''d'$ der Gleichung (a) zu eliminiren, so bekommt man

$$(m-1)(\varDelta-\varDelta') + (m'-1)\varDelta' = \frac{\pi^{\text{IV}} - \pi(1+\pi_{,,}d')}{2+\pi_{,,}d'}$$

$$(m-1)(\varDelta-\varDelta') + (m'-1)\varDelta' = \frac{\pi^{\text{IV}}(1-\pi''d') - \pi}{2-\pi''d'}$$

Nun giebt die Gleichung

$$\pi_{,,} - \pi'' = \pi_{,,}\pi''d'$$

des Art. 12 leicht

$$(1-\pi''d')(1+\pi_{,,}d') = 1$$

und die Verbindung dieser mit der im Art. 63 eingeführten Grösse λ führt auf

$$(k) \quad \ldots\ldots \quad 1-\pi''d' = \frac{1}{\lambda}, \quad 1+\pi_{,,}d' = \lambda$$

womit beide obigen Gleichungen in

$$(c) \quad \ldots\ldots \quad (m-1)(\varDelta-\varDelta') + (m'-1)\varDelta' = \frac{\pi^{\text{IV}} - \pi\lambda}{1+\lambda}$$

übergehen. Diese Gleichung ist mit der (a) gleichbedeutend, obgleich sie eine andere äussere Form besitzt.

66.

Um die zwischen d' und λ stattfindende Relation zu erhalten, bemerke ich, dass die Substitution von (c) in die vorstehenden Gleichungen für $m'\pi''$ und $m'\pi_{,,}$

$$m'\pi'' = (\pi^{\text{IV}} + \pi)\frac{1}{1+\lambda}$$
$$m'\pi_{,,} = (\pi^{\text{IV}} + \pi)\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

giebt; eliminirt man hiemit π'' und $\pi_{,,}$ aus den (k), so führen beide auf dieselbe Gleichung, nemlich

$$\lambda^2 - (\pi^{\text{IV}} + \pi)\frac{d'}{m'}\lambda - 1 = 0$$

Sieht man nun d' als bekannt an, so erhält man:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{\frac{d'}{m'}(\pi^{\text{IV}} + \pi) \pm \sqrt{\frac{d'^2}{m'^2}(\pi^{\text{IV}} + \pi)^2 + 4}\right\}$$

es entsprechen folglich immer jedem Werthe von d' zwei reelle Werthe von λ. Sieht man hingegen λ als bekannt an, so wird

$$d' = \frac{m'}{\pi^{\text{V}} + \pi}\,\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}$$

woraus folgt, dass nicht jedem Werthe von λ ein statthafter Werth von d' entspricht. Denn, vorausgesetzt dass $\pi^{\text{IV}} + \pi$ positiv ist, so wird d' negativ und folglich unmöglich, wenn entweder λ zwischen 0 und 1 liegt, oder wenn λ negativ und $-\lambda > 1$ ist. Wenn hingegen $(\pi^{\text{IV}} + \pi)$ negativ ist, so sind die eben ausgeschlossenen Werthe von λ die einzigen, welche ein mögliches d' geben.

67.

Wenden wir uns zur Gleichung (c) des vorvor. Art. und beziehen sie auf die beiden Lichtstrahlen des Sonnenspectrums, deren Brechungsverhältnisse N und N', so wie bez. M und M' sind, dann erhalten wir

$$(N-1)(\varDelta - \varDelta') + (N'-1)\varDelta' = \frac{\pi^{\text{IV}} - \pi\lambda}{1+\lambda}$$
$$(M-1)(\varDelta - \varDelta') + (M'-1)\varDelta' = \frac{\pi^{\text{IV}} - \pi\lambda}{1+\lambda}$$

Hier ist vorausgesetzt, dass λ wie oben vom mittleren Brechungsverhältniss abhängig gemacht werde, welche Annahme eine kleine Uebergehung in sich schliesst, die aber nur sehr geringe Wirkung auf das Resultat äussern, und schliesslich, wenn man will, auch ausgeglichen werden kann. Lösen wir statt der obigen Gleichungen die folgenden auf:

$$(N-1)(l-l') + (N'-1)l' = 1$$
$$(M-1)(l-l') + (M'-1)l' = 1$$

(welches durch die Ausdrücke der Artt. 21 oder 48 geschehen kann,) so dass l und l' bekannte Grössen werden, dann ergeben sich

$$\varDelta = \frac{l\pi^{\text{IV}} - l\pi\lambda}{1+\lambda}, \quad \varDelta' = \frac{l'\pi^{\text{IV}} - l'\pi\lambda}{1+\lambda}$$

womit $\varDelta$ und $\varDelta'$ in Function von λ dargestellt sind.

Um überflüssige Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir von nun an annehmen, dass parallele Lichtstrahlen auf das in Betracht stehende Linsensystem einfallen, wodurch $\pi = 0$ wird, und da wir jedenfalls $\pi^{\text{IV}} = 1$ setzen dürfen, so verwandeln sich die vorstehenden Ausdrücke in die folgenden:

$$\varDelta = \frac{l}{1+\lambda}, \quad \varDelta' = \frac{l'}{1+\lambda}$$

welche von nun an angewandt werden sollen.

68.

Gehen wir zur Gleichung (b) des Art. 63 über, und entnehmen für diese die Ausdrücke der verschiedenen L aus den Gleichungen (5) und (6) des Art. 8, so erhält man die Formeln

$$L = \frac{m-1}{m^2}\{(\varDelta-\pi)^3 - m\pi(\varDelta-\pi)^2\}$$
$$L' = \frac{m'(m'-m)}{m^2}\{m'(\varDelta'-\pi'')^3 - m\pi''(\varDelta'-\pi'')^2\}$$
$$L'' = \frac{m'(m'-m)}{m^2}\{m'(\varDelta'+\pi_{\prime\prime})^3 + m\pi_{\prime\prime}(\varDelta'+\pi_{\prime\prime})^2\}$$
$$L''' = \frac{m-1}{m^2}\{(\varDelta+\pi^{\text{IV}})^3 + m\pi^{\text{IV}}(\varDelta+\pi^{\text{IV}})^2\}$$

deren Entwickelung wir auf die folgende Weise ausführen werden.

Durch Hülfe der Gleichungen

$$\pi = 0, \qquad \varDelta = \frac{l}{1+\lambda}$$

erhalten wir sogleich

$$(a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad m^2(1+\lambda)^3 L = (m-1)l^3$$

und ziehen wir die Gleichungen

$$m'\pi'' = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \varDelta' = \frac{l'}{1+\lambda}$$

hinzu, so ergiebt sich ohne Mühe

$$(b) \quad \ldots \quad m^2(1+\lambda)^3 L' = \frac{m'-m}{m'^2}\{m'(m'l'-1)^3 - m(m'l'-1)^2\}$$

Da ferner wegen $\pi^{\text{IV}} + \pi = 1$

$$m'\pi_{\prime\prime} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

wird, so entsteht der Ausdruck

$$m^2(1+\lambda)^3 L'' = \frac{m'-m}{m'^2}\{m'(m'l'+\lambda)^3 + m\lambda(m'l'+\lambda)^2\}$$

welcher durch die Entwickelung der Potenzen

$$m^2(1+\lambda)^3 L'' = \frac{m'-m}{m'^2}\{(m'+m)\lambda^3 + m'(3m'+2m)l'\lambda^2 + \\ + m'^2(3m'+m)l'^2\lambda + m'^4 l'^3\} \quad (c)$$

giebt. Man kann bemerken, dass dieser Ausdruck in den von L' übergeht, wenn man in der rechten Seite $\lambda = -1$ setzt.

Endlich wird, wenn man $\pi^{IV} = 1$ macht, durch Hülfe der vorstehenden Gleichungen

$$m^2(1+\lambda)^3 L''' = (m-1)\{(l+1+\lambda)^3 + m(1+\lambda)(l+1+\lambda)^2\}$$

und nach der Entwickelung der Potenzen:

$$m^2(1+\lambda)^3 L''' = (m-1)\{(m+1)\lambda^3 + ((2m+3)(l+1)+m)\lambda^2 + \\ + ((m+3)(l+1)^2 + 2m(l+1))\lambda + (l+1+m)(l+1)^2\} \quad (d)$$

wozu bemerkt werden kann, dass der obige Ausdruck von L daraus entsteht, wenn in der rechten Seite $\lambda = -1$ gesetzt wird.

69.

Stellen wir nun die im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke (a), (b), (c), (d) der Gleichung (b) des Art. 63 gemäss zusammen, und setzen zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
b &= (m-1)l^3 \\
b' &= \frac{m'-m}{m'}(m'l'-1)^3 - \frac{m}{m'^2}(m'-m)(m'l'-1)^2 \\
a'' &= \frac{(m'-m)(m'+m)}{m'^2} \\
b'' &= \frac{m'-m}{m'}(3m'+2m)l' \\
c'' &= (m'-m)(3m'+m)l'^2 \\
e'' &= m'^2(m'-m)l'^3 \\
a''' &= (m-1)(m+1) \\
b''' &= (m-1)(2m+3)(l+1) + (m-1)m \\
c''' &= (m-1)(m+3)(l+1)^2 + 2m(m-1)(l+1) \\
e''' &= (m-1)(l+1+m)(l+1)^2
\end{aligned}$$

so wird die Endgleichung

$$0 = (a''+a''')\lambda^3 + (b+b'+b''+b''')\lambda^2 + (c''+c''')\lambda + (e''+e''')$$

Hat man hieraus λ bestimmt, so findet man

$$d' = m'\frac{\lambda^2-1}{\lambda}$$

Da die vorstehende cubische Gleichung immer wenigstens Eine reelle Wurzel hat, so wird man immer wenigstens Einen möglichen Werth für d' erhalten, vorausgesetzt, dass nicht immer die oben erörterten beiden Ausnahmefälle eintreten, welche d' negativ, folglich unmöglich machen.

70.

Zur näheren Beurtheilung der Möglichkeit des in Betrachtung stehenden Linsensystems sollen jetzt einige numerische Beispiele berechnet werden. Zuerst nehme ich wieder dieselben beiden Glasarten an, welche zu den vorhergehenden Beispielen gedient haben, und setze voraus, dass die mittlere Linse von Kronglas sei. Man erkennt leicht, dass unter diesen Voraussetzungen die Werthe der mit l und l' bezeichneten Grössen das Doppelte der im Art. 53 für $\varDelta$ und $\varDelta'$ erhaltenen Werthe betragen. Wir bekommen daher sogleich

$$l = +\ 2.3706, \quad l' = +\ 4.6834$$

und es sind hier ferner

$$m = 1.6391, \quad m' = 1.5291$$

Durch Anwendung von Logarithmen von blos vier Decimalen ergeben sich die Werthe

$$b = +\ 8.51$$
$$b' = -\ 13.89$$

$$a'' = -\ 0.149, \quad b'' = -\ 2.65, \quad c'' = -\ 15.02, \quad e'' = -\ 26.41$$
$$a''' = +\ 1.686, \quad b''' = +\ 14.58, \quad c''' = +\ 40.74, \quad e''' = +\ 36.38$$

Die hieraus folgende Endgleichung

$$1.537\lambda^3 + 6.55\lambda^2 + 25.72\lambda + 9.97 = 0$$

hat nur die einzige reelle Wurzel

$$\lambda = -\ 0.4300$$

welcher Werth zu erkennen giebt, dass das in Betracht stehende Linsensystem bei den hier gewählten Daten nicht unmöglich ist. Berechnen wir aber die Reciproken der Halbmesser, nebst der Dicke der mittleren Linse, so finden wir

$$R = -\ R''' = +\ 4.658$$
$$R' = -\ R'' = +\ 8.215$$
$$d' = \ 2.898$$

wodurch sich zeigt, dass das Linsensystem, obgleich theoretisch möglich, dennoch praktisch unausführbar ist, wenigstens wenn dessen Brennweite nicht äusserst klein sein soll. Denn da die Dicke der mittleren Linse nahe das Dreifache der Brennweite beträgt, so würde dieses Linsensystem schon bei mässig kleinen Brennweiten eine unausführbar grosse Dicke bekommen müssen; um so mehr ist diess bei grossen Brennweiten der Fall. Auch werden, wie man sieht, die Krümmungen der Linsenoberflächen hier schon sehr gross, welcher Umstand die Oeffnung der Linsen, schon bei den kleinsten Brennweiten, sehr beeinträchtigen würde.

Als besondere Merkwürdigkeit dieses Linsensystems kann angeführt werden, dass es das Bild des unendlich weit entfernten Gegenstandes aufrecht zeigt, wie leicht erkannt wird.

71.

Als zweites Beispiel sollen dieselben Glasarten angewandt, aber die Flintglaslinse in die Mitte gelegt werden. Die Werthe von l und l' entsprechen jetzt auf dieselbe Weise wie im vorigen Beispiel denen von $\varDelta$ und $\varDelta'$ des Art. 54; es sind nemlich jetzt

$$l = +\ 2.3706, \quad l' = -\ 2.3128$$

nebst

$$m = 1.5291, \quad m' = 1.6391$$

Die hieraus folgende Endgleichung wird

$$1.468\lambda^3 + 8.60\lambda^2 + 36.47\lambda + 25.80 = 0$$

deren einzige reelle Wurzel

$$\lambda = -\ 0.8547$$

ist. Es ergeben sich hiemit

$$R = -R''' = +\ 16.31$$
$$R' = -R'' = -\ 15.93$$
$$d' = 0.517$$

Obgleich hier die Dicke der mittleren Linse bedeutend kleiner ausgefallen ist als im vorigen Beispiel, und nur ohngefähr die Hälfte der Brennweite des Linsensystems beträgt, so ist sie doch immer noch zu gross, als dass dieses Linsensystem praktisch ausführbar wäre, wenn nicht die Brennweite sehr klein angenommen wird. Es tritt hier noch der störende Umstand hinzu, dass die Krümmungen der Oberflächen der Linsen über die Maassen gross werden.

Das hier erhaltene Linsensystem giebt übrigens, wie gewöhnlich, umgekehrte Bilder.

72.

Man kann die Vermuthung aufstellen, ob nicht das in Untersuchung stehende Linsensystem möglich werden könnte, wenn man es aus anderen Glasarten, als die bisher zu Grunde gelegten, zusammensetzt. Um hierüber Auskunft zu erhalten, soll statt des oben angewandten Flintglases ein solches der Rechnung zu Grunde gelegt werden, dessen hier in Betracht kommende Brechungsverhältnisse

$$N = 1.58$$
$$M = 1.614$$

sind. Ich darf annehmen, dass es Flintglasarten giebt, deren Brechungsverhältnisse ohngefähr die vorstehenden sind. Während ich annehme, dass die beiden äusseren Linsen aus diesem Glase bestehen, soll für die mittlere Linse wie bisher dasjenige Kronglas angewandt werden, dessen correspondirende Brechungsverhältnisse

$$N' = 1.5187$$
$$M' = 1.53956$$

sind. Die mittleren Brechungsverhältnisse werden nun

$$m = 1.5970$$
$$m' = 1.5291$$

und aus diesen Daten bekommt man zuerst

$$l = + 2.3736$$
$$l' = + 6.1410$$

so wie die Endgleichung

$$1.460\,\lambda^3 - 3.66\,\lambda^2 + 21.81\,\lambda - 3.00 = 0$$

deren einzige reelle Wurzel sehr nahe

$$\lambda = + 0.14$$

ist. Dieser Werth von λ wird aber auf einen negativen, folglich unmöglichen Werth von d' führen, und das hier betrachtete Linsensystem ist demnach in jedem Betracht unmöglich.

Vergleichen wir nun dieses Resultat mit dem des Art. 70, welches $\lambda = -0.43$ gab, so folgt, dass für Flintglasarten, deren Brechungsverhältnisse zwischen den dort und den hier angewandten liegen, die Werthe von λ zwischen -0.43 und $+0.14$ liegen müssen. Diesen Werthen entsprechen aber wachsende Werthe von d', die bis ins Unendliche sich steigern, und dann unmöglich werden. Da nun die im Art. 70 angewandten Brechungsverhältnisse des Flintglases zu den grössten gehören, die vorhanden sind, so zeigt sich die Unmöglichkeit, ein Linsensystem von der angenommenen Form herzustellen, welches den hier geforderten Bedingungen entspricht.

73.

Wendet man wieder die Brechungsverhältnisse des vor. Art. an, verlegt aber die Flintglaslinse in die Mitte, so bekommt man

$$l = +2.373$$
$$l' = -3.768$$

und die Endgleichung

$$1.421\lambda^3 + 0.77\lambda^2 + 38.80\lambda + 20.25 = 0$$

deren einzige reelle Wurzel sehr nahe

$$\lambda = -0.52$$

ist. Hier ist wieder das Linsensystem theoretisch möglich, aber man erhält

$$R = -R''' = +4.94$$
$$R' = -R'' = -7.85$$
$$d' = 2.24$$

und aus den oben angeführten Gründen ist also auch dieses Linsensystem praktisch unausführbar.

74.

Da ein achromatisches Linsensystem von der in Rede stehenden Form nicht hergestellt werden kann, so wollen wir untersuchen, ob sich nicht ein solches herstellen lässt, in welchem man von der Bedingung des Achromatismus absieht, und blos die Randstrahlen mittlerer Brechung mit den Centralstrahlen derselben Brechung vereinigt. Ein solches Linsensystem kann man auch so definiren, dass die

Abweichung wegen der Kugelgestalt in demselben gehoben ist; es wird mithin zur Klasse der sogenannten Aplanaten oder aplanatischen Loupen gehören, welche vielfache Anwendung finden.

Die Auflösung dieser Aufgabe beruht wieder auf der Erfüllung der Gleichungen (a) und (b) des Art. 63, während in (a) die mittleren Brechungsverhältnisse zu belassen, und dieselben wiederum in (b) einzuführen sind. Wir könnten demgemäss die schon gegebene Entwickelung von (b) anwenden, aber da diese jetzt anders geordnet werden muss, so wollen wir etwas weiter zurückgehen.

Setzen wir wieder $\pi = 0$, $\pi^{\text{IV}} = 1$, dann erhalten wir aus den Gleichungen des Art. 68:

$$m^2(1+\lambda)^3 L = (m-1)l^3$$

$$m^2(1+\lambda)^3 L' = \frac{m'-m}{m'^2}\{m'^4 l'^3 - m'^2(3m'+m)l'^2 + m'(3m'+2m)l' - (m'+m)\}$$

$$m^2(1+\lambda)^3 L'' = \frac{m'-m}{m'^2}\{m'^4 l'^3 + m'^2(3m'+m)\lambda l'^2 + m'(3m'+2m)\lambda^2 l' + (m'+m)\lambda^3\}$$

$$m^2(1+\lambda)^3 L''' = (m-1)\{l^3 + (m+3)(1+\lambda)l^2 + (2m+3)(1+\lambda)^2 l + (m+1)(1+\lambda)^3\}$$

deren Substitution in die oben angezogene Gleichung (b)

$$\begin{aligned}(m-1)\{(1+\lambda^2)l^3 &+ (m+3)(1+\lambda)l^2 + (2m+3)(1+\lambda)^2 l + (m+1)(1+\lambda)^3\}\\ &+ \frac{m'-m}{m'^2}\{m'^4(1+\lambda^2)l'^3 + m'^2(3m'+m)(1-\lambda)\lambda l'^2 +\\ &+ 2m'(3m'+2m)\lambda^2 l' + (m'+m)(\lambda-1)\lambda^2\} = 0\end{aligned}$$

ergiebt. Seien

$$l = \frac{k}{m-1}, \quad l' = \frac{k'}{m'-m}$$

und zur Abkürzung:

$$a = \frac{1+\lambda^2}{(m-1)^2}, \qquad b = \frac{m+3}{m-1}(1+\lambda)$$

$$c = (2m+3)(1+\lambda)^2, \quad e = (m-1)(m+1)(1+\lambda)^3$$

$$a' = \frac{m'^2}{(m'-m)^2}(1+\lambda^2), \quad b' = \frac{3m'+m}{m'-m}(1-\lambda)\lambda$$

$$c' = 2\,\frac{3m'+2m}{m'}\lambda^2, \qquad e' = \frac{(m'-m)(m'+m)}{m'^2}(\lambda-1)\lambda^2$$

so wird die vorstehende Gleichung

$$0 = ak^3 + bk^2 + ck + e + a'k'^3 + b'k'^2 + c'k' + e'$$

in welcher k oder k' eliminirt werden muss.

75.

Durch die vorhergehenden Substitutionen haben wir schon die Gleichung (a) des Art. 63 in die folgende verwandelt,

$$(m-1)l + (m'-m)l' = 1$$

Führt man hierin die Grössen k und k' des vor. Art. ein, so geht sie über in

$$k + k' = 1$$

womit aus der letzten Gleichung des vor. Art. leicht k oder k' eliminirt werden kann. Eliminirt man k, so bekommt man die Endgleichung

$$0 = (a'-a)k'^3 + (b'+3a+b)k'^2 + (c'-3a-2b-c)k' + (e'+a+b+c+e)$$

Hat man hieraus k' berechnet, so werden

$$R = -R''' = \frac{1-k'}{(m-1)(1+\lambda)}$$

$$R' = -R'' = \frac{k'}{(m'-m)(1+\lambda)}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

76.

Da die Endgleichung, welche wir eben erhalten haben, von zwei Unbekannten, nemlich von k' und λ, oder was dasselbe ist, von k' und d' abhängt, so lassen sich viele verschiedene aplanatische Loupen von der hier verlangten Form herstellen, von denen manche indess nicht annehmbar sein dürften. Zur Berechnung muss man ursprünglich einen passenden Werth von d' annehmen, und damit durch die Gleichung

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{d'}{m'} \pm \sqrt{4 + \frac{d'^2}{m'^2}}\right)$$

den entsprechenden Werth von λ aufsuchen, worauf die übrige Rechnung bestimmt ist. Da jedem Werthe von d' zwei Werthe von λ entsprechen, von welchen der eine positiv, und der andere negativ ist, so bekommt man für jeden angenommenen Werth von d' zwei verschiedene aplanatische Loupen, von denen jedoch diejenige, welche dem negativen Werthe von λ entspricht, gemeiniglich ausgeschlossen werden muss, da sie auf sehr grosse Krümmungen der Linsenoberflächen führt.

Zur scharfen und definitiven Berechnung einer solchen aplanatischen Loupe gehört übrigens noch die Zuziehung der Dicken der beiden äusseren Linsen, die im Vorstehenden übergangen worden sind. Man kann diese beiden Dicken immer einander gleich, und als sehr klein ansehen, sie folglich durch die oben entwickelten allgemeinen Ausdrücke leicht mit in Rechnung ziehen. Sie sollen übrigens weiter unten angegeben werden.

77.

Zur Berechnung eines Beispiels werden wir hier zuerst dieselben Brechungsverhältnisse annehmen, die uns bei den meisten Beispielen gedient haben, nemlich

$$m = 1.6391$$
$$m' = 1.5291$$

und die Dicke der mittleren Linse

$$d' = 0.2$$

setzen. Es folgt hieraus

$$\lambda = +\ 1.06752, \text{ und } = -\ 0.93673$$

wovon nur der positive Werth angewandt werden soll. Man bekommt nun durch die Ausdrücke des Art. 74:

$$a = +\ 5.238,\quad b = +\ 15.007,\quad c = +\ 26.85,\quad e = +\ 14.91$$
$$a' = +\ 413.3,\quad b' = +\ 4.079,\quad c' = +\ 11.72,\quad e' = -\ 0.011$$

und hieraus die Endgleichung

$$408.1\,k'^3 + 34.80\,k'^2 - 60.85\,k' + 61.99 = 0$$

deren einzige reelle Wurzel

$$k' = -\ 0.6600$$

ist. Schliesslich werden hiemit

$$R = -\ R''' = +\ 1.256$$
$$R' = -\ R'' = +\ 2.901$$

gefunden. Diess ist ein ausführbares Resultat.

78.

Wir wollen noch ein Beispiel mit Zugrundelegung der mittleren Brechungsverhältnisse, die zu dem Beispiel des Art. 72 gedient haben, durchführen, nemlich

$$m = 1.5970$$
$$m' = 1.5291$$

und dabei wieder $\lambda = +1.06752$ setzen. Es werden nun

$$a = 6.001,\quad b = 15.78,\quad c = 26.49,\quad e = 13.71$$
$$a' = 1084.7,\quad b' = 6.564,\quad c' = 11.60,\quad e' = -0.007$$
$$1078.7k'^3 + 40.35k'^2 - 64.45k' + 61.97 = 0$$
$$k' = -0.4516$$
$$R = -R''' = +1.176$$
$$R' = -R'' = +3.216$$

welches Resultat vom vorhergehenden nur wenig verschieden ist. Dass aplanatische Loupen der in Rede stehenden Form mit Erfolg ausgeführt werden können, ist praktisch nachgewiesen, da die Herren STEINHEIL solche anfertigen, die im ganzen nicht unbeträchtlichen Gesichtsfelde sehr reine Bilder geben. Dass der Mangel an Achromatismus hier keine merkliche Undeutlichkeit hervorbringt, kann vielleicht als eine besondere Eigenthümlichkeit des Auges angesehen, und damit erklärt werden, dass das Auge bei der Betrachtung eines Gegenstandes durch eine Loupe für die Abweichung wegen Kugelgestalt weit empfindlicher ist, als für den Chromatismus.

---

§. 4. Anhang und Nachtrag.

79.

Mit der Bezifferung dieses Artikels bricht das Manuscript des Autors plötzlich ab, ohne die am Schlusse des Art. 76 in Aussicht gestellten Angaben über die Dicke der beiden äusseren Linsen zu enthalten. Die dem Manuscripte beiliegenden Brouillonblätter geben über den Inhalt der beabsichtigten Fortsetzung keine bestimmte Auskunft: es scheint, dass der Verfasser noch die Differentialformeln zu entwickeln gedachte, durch welche der Einfluss einer Aenderung in den Linsenkrümmungen auf die Vereinigungsweite der Strahlen bestimmt wird*).

Den bezüglichen Aufzeichnungen des Verfassers entlehnen wir die folgenden Artikel.

*) Vergl. die Anmerkung am Schlusse des Art. 40.

80.

»Es ist in Bezug auf achromatische Objective überhaupt ein wesentlicher Umstand zu erörtern, nämlich zu untersuchen, wie viel an der guten Wirkung des Objectivs eingebüsst wird, wenn die berechneten Werthe der Halbmesser der brechenden Oberflächen in der Ausführung nicht genau hergestellt worden sind. Es ist diese Untersuchung um so mehr erforderlich, da auch der geschickteste Künstler die genaue Ausführung dieser Maasse nicht verbürgen kann, und sie ihm Anleitung giebt, die Halbmesser zu erkennen, deren Aenderung am zweckmässigsten vorgenommen wird, wenn ein angefertigtes Objectiv bei der Prüfung desselben Verbesserungen wünschenswerth oder nothwendig erscheinen lässt.

Die Lösung dieser Aufgabe besteht in der Ermittelung der Differentialquotienten der Brennweite in Bezug auf die genannten Halbmesser, wobei aber genügend ist, diese Differentialquotienten auf die mit der Abscissenaxe parallel einfallenden Strahlen zu beschränken.«

81.

Da die vom Verfasser angestellten analytischen Entwickelungen der Differentialformeln eine Bezeichnungsweise voraussetzen, die von der in der vorhergehenden Abhandlung gewählten wesentlich abweicht, so mag hier die Mittheilung der numerischen Anwendungen genügen. Dieselben beziehen sich auf zwei Objective, welche mit den im obigen §. 2 berechneten nahe übereinkommen, wenn man die Längenmaasse entsprechend reducirt.

»Setzt man die Brennweite $f = 1127^L7$
die halbe Oeffnung $k = 35.0$

so sollen die vier Halbmesser resp. die folgenden Werthe erhalten:

I. Objectiv	II. Objectiv
$r = +1793^L.247$	$r = +470^L.333$
$r' = -277.974$	$r' = -496.525$
$r'' = -277.974$	$r'' = -496.525$
$r''' = -647.532$	$r''' = +26965.6$

Mit diesen Daten findet sich:

für das erste Objectiv

	$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r''}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r'''}\right)$
rothe Centralstrahlen	+ 0.2055	− 8.5340	+ 10.1678	− 1.8744
rothe Randstrahlen	+ 0.2061	− 8.9169	+ 10.5628	− 1.8946
violette Centralstrahlen	+ 0.2138	− 8.8745	+ 10.8592	− 2.0025
violette Randstrahlen	+ 0.2144	− 9.2574	+ 11.2542	− 2.0227

für das zweite Objectiv

	$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r''}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r'''}\right)$
rothe Centralstrahlen	+ 3.0212	— 2.6875	+ 3.2020	— 0.0010808
rothe Randstrahlen	+ 3.0304	— 2.7442	+ 3.2674	— 0.0010829
violette Centralstrahlen	+ 3.1430	— 2.7955	+ 3.4207	— 0.0011547
violette Randstrahlen	+ 3.1522	— 2.8522	+ 3.4861	— 0.0011568

82.

»Man sieht, dass ein Fehler in den Halbmessern der brechenden Oberflächen in diesen beiden Objectiven sehr ungleiche und verschiedene Wirkung äussert; beim ersten Halbmesser ist die Wirkung im ersten Objectiv kleiner als im zweiten, aber bei den anderen drei Halbmessern findet das Entgegengesetzte statt. Die Wirkung eines Fehlers beim dritten Halbmesser ist bei beiden Objectiven am grössten. Habe man z. B. in der Ausführung dieses Halbmessers um fünf Linien gefehlt, so werden die Aenderungen der Vereinigungsweiten der oben betrachteten Lichtstrahlen der Reihe nach

	im ersten Objectiv	im zweiten Objectiv
	$50^L.84$	$16^L.01$
	52.81	16.34
	54.30	17.10
	56.27	17.43
grösste Längenabweichung	$5^L.43$	$1^L.42$

Nun zeigte aber die in der früheren Abhandlung geführte Untersuchung des Königsberger Heliometerobjectivs, dass in diesem bei derselben Gattung von Strahlen die grösste Abweichung $= 1^L.244$ ist*), und dennoch ist dieses Objectiv eines der besten vorhandenen, und zur Zufriedenheit BESSEL's ausgefallen. Man erkennt hieraus, dass eine Längenabweichung wie die eben angeführte für die Anwendung ohne sonderlichen Nachtheil bleibt, und dass daher das obige zweite Objectiv, dessen eben erhaltene grösste Längenabweichung nur unbedeutend grösser ist, als die des Königsberger Objectivs, in dem Halbmesser, dessen Fehler den grössten Einfluss äussert, einen Fehler von 5 Linien verträgt, während bei dem ersten Objective dieser Fehler wohl eine merkliche Abnahme der Deutlichkeit der Bilder verursachen würde. Das zweite Objectiv ist also sicherer und leichter herzustellen als das erste.

83.

»Wenn man annehmen darf, dass der Fehler des zweiten und des dritten Halbmessers in der Ausführung derselbe bleibt, so wird die Totalwirkung dieses Fehlers gleich der Summe der Einzelwirkungen dieser beiden Halbmesser, folglich in diesem Falle

*) Siehe Art. 77 der ersten dioptrischen Abhandlung, S. 161 dieses Bandes.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial r''}\right)$$

beim ersten Ojectiv	beim zweiten Objectiv
+ 1.6338	+ 0.5145
+ 1.6459	+ 0.5232
+ 1.9847	+ 0.6252
+ 1.9968	+ 0.6339

Die Wirkung eines Fehlers wird also unter dieser Voraussetzung viel kleiner, aber beim zweiten Objectiv mehr wie drei Mal so klein als beim ersten, während die betreffenden Halbmesser des zweiten Objectivs weniger als zwei Mal so gross sind als die des ersten.

84.

»Um diese Betrachtungen zu vervollständigen, muss der Umstand mit hinzugezogen werden, dass der bei der Ausführung eines Objectivs zu befürchtende Fehler in den Halbmessern der brechenden Oberflächen bei verschiedener Grösse dieser Halbmesser verschieden ausfallen muss. Ein gleichförmigeres Maass des zu befürchtenden Fehlers erhält man durch Einführung der »Krümmung« dieser Oberflächen, wenn man darunter die Abscisse der Randstrahlen in ihrem Einfallspunkt versteht, die dem Sinus Versus des betreffenden Centriwinkels gleich ist. Bezeichnet man hier diese, jedesmal von der betreffenden Oberfläche an gerechneten Abscissen mit ϱ, ϱ', etc., so erhält man mit hinreichender Genauigkeit die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = 2\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{r}{k}\right)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial \varrho'} = 2\frac{\partial f}{\partial r'}\left(\frac{r'}{k}\right)^2, \quad \text{etc.}$$

die man sowohl auf die Centralstrahlen wie auf die Randstrahlen anwenden darf.

Nimmt man nun $0^L.01$ zur Einheit an, so findet man für die beiden obigen Objective die folgenden numerischen Werthe:

für das erste Objectiv

	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho'}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho''}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho'''}\right)$
für die rothen Centralstrahlen	+ 10.79	— 10.31	+ 12.28	— 12.82
— — Randstrahlen	+ 10.82	— 10.77	+ 12.76	— 12.97
— — violetten Centralstrahlen	+ 11.22	— 10.56	+ 13.12	— 13.71
— — — Randstrahlen	+ 11.25	— 11.18	+ 13.59	— 13.85

für das zweite Objectiv

	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho'}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho''}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho'''}\right)$
für die rothen Centralstrahlen	+ 10.89	— 10.82	+ 12.89	— 13.31
— — — Randstrahlen	+ 10.92	— 11.05	+ 13.15	— 13.34
— — violetten Centralstrahlen	+ 11.33	— 11.25	+ 13.77	— 14.22
— — — Randstrahlen	+ 11.36	— 11.48	+ 14.03	— 14.25

Also die Wirkung eines und desselben Fehlers in den Krümmungen der Halbmesser der brechenden Oberflächen ist (vorausgesetzt, dass die Kugelgestalt dieser Oberflächen stets erhalten bleibt) in diesen beiden Objectiven bis auf Weniges dieselbe, nur ist beim zweiten Objectiv die aus einem solchen Fehler entstehende Aenderung in den Vereinigungsweiten der verschiedenen Strahlengattungen geringer als beim ersten Objectiv. Jenes verträgt also ohne grössere Beeinträchtigung seiner Wirkungen grössere Fehler in diesen Krümmungen als dieses.«

Nachtrag.

85.

Im Art. 20 ist die Gleichung $\pi''' - \pi = P + Qk^2$ aufgestellt und behufs Beseitigung der sphärischen Abweichung in die beiden Gleichungen

$$\pi''' - \pi = P \quad \text{und} \quad Q = 0$$

zerfällt worden. Es ist aber leicht zu sehen, dass die in die gegenseitigen Abstände d der Linsenoberflächen multiplicirten Glieder in P selbst noch von k abhängen, so dass P eigentlich die Form $P + \frac{\partial P}{\partial k^2} k^2$ annimmt, mithin Q um $\frac{\partial P}{\partial k^2}$ zu vermehren ist. Dadurch erleiden die in der Abhandlung gegebenen Entwickelungen an einigen Orten gewisse Modificationen, welche im Folgenden aufgeführt werden sollen. Es war dem Verfasser keineswegs entgangen, dass die in seinem Manuscript enthaltenen Formeln mit einigen in EULER's Dioptrik abgeleiteten Resultaten nicht völlig im Einklang standen, und er sprach gegen den Schreiber dieser Zeilen das Bedauern aus, dass er bei dem Zustande seiner Augen vorläufig nicht daran denken könne, dem Grunde dieser Abweichung nachzuforschen. Wäre es ihm vergönnt gewesen, die letzte Hand an die Redaction seiner Abhandlung zu legen, so würden die hier in den Nachtrag verwiesenen Ergänzungen vermuthlich schon im Texte der Abhandlung Berücksichtigung gefunden haben. Einer Entschuldigung dafür, dass der Herausgeber nicht diese Umarbeitung unternommen, wird es hoffentlich nicht bedürfen; wohl aber hat derselbe ausdrücklich zu betonen, dass ihm für die Mängel dieses Nachtrags die Verantwortlichkeit allein zur Last fällt.

86.

Gehen wir von den im Art. 14 gegebenen Fundamentalgleichungen aus, welche wir in der Form

$$n^{i+1}\pi^{1+i)} = n^{i+1} - n^{i)} R^{i} + n^{i}\pi_{i} + \frac{1}{2} L^{i} k^{i} k^{i}$$

schreiben können, so werden durch dieselben die reciproken Vereinigungsweiten $\pi' \; \pi'' \; \pi''' \ldots$ als (lineare) Functionen von k^2 bestimmt. Da jedoch die auf der rechten Seite vorkommenden Grössen $\pi, \pi_{\prime\prime}, \pi_{\prime\prime\prime} \ldots$ nach Art. 12 den Relationen

$$d = \frac{1}{\pi'} - \frac{1}{\pi_{\prime}}, \quad d' = \frac{1}{\pi''} - \frac{1}{\pi_{\prime\prime}}, \quad \text{u. s. w.}$$

genügen, so müssen auch die Glieder $n'\pi_{\prime}, n''\pi_{\prime\prime} \ldots$ von k abhängen, und es kann diese Abhängigkeit innerhalb der Grenzen der hier erforderlichen Genauigkeit dadurch berücksichtigt werden, dass man aus ihnen die resp. Glieder

$$2n'\frac{\partial \pi_{\prime}}{\partial k'^2}\frac{k'^2}{2}, \quad 2n''\frac{\partial \pi_{\prime\prime}}{\partial k''^2}\frac{k''^2}{2} \quad \text{u. s. w.}$$

aussondert und mit den bereits explicite von k abhängigen Gliedern vereinigt.

Dadurch nehmen die erwähnten Fundamentalgleichungen die Gestalt an

$$n^{i+1}\pi^{i+1} = (n^{i+1} - n^{i})\, R^{i} + n^{i}\pi_{i} + \frac{1}{2}\left(L^{i} + 2n^{i}\frac{\partial \pi_{i}}{\partial k^{i2}}\right) k^{i}_{\prime}k^{i}$$

wo jetzt $\pi, \pi_{\prime\prime}, \pi_{\prime\prime\prime} \ldots$ die Werthe dieser Grössen für $k = 0$, d. h. die der Richtung der optischen Achse entsprechenden reciproken Vereinigungsweiten bezeichnen. Aus den in den Artt. 12 und 13 bewiesenen Relationen erhält man leicht

$$\left(\frac{k'}{\pi_{\prime}}\right)^2\frac{\partial \pi_{\prime}}{\partial k'^2} = \left(\frac{k}{\pi'}\right)^2\frac{\partial \pi'}{\partial k^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \pi_{\prime}}{\partial k'^2} = \left(\frac{k}{k'}\right)^4\frac{\partial \pi'}{\partial k^2} \quad \text{u. s. w.}$$

mithin nach ausgeführter Substitution:

$$n'\pi' = (n' - n)\, R + n\pi + \frac{1}{2}L k^2$$

$$n''\pi'' = (n'' - n')\, R' + n'\pi_{\prime} + \frac{1}{2}\left\{L' + 2n'\left(\frac{k}{k'}\right)^4\frac{\partial \pi'}{\partial k^2}\right\} k'^2$$

$$n'''\pi''' = (n''' - n'')\, R'' + n''\pi_{\prime\prime} + \frac{1}{2}\left\{L'' + 2n''\left(\frac{k}{k''}\right)^4\frac{\partial \pi''}{\partial k^2}\right\} k''^2$$

u. s. w. Hieraus ergeben sich durch Differentiation

$$2n'\frac{\partial \pi'}{\partial k^2} = L$$

$$2n''\frac{\partial \pi''}{\partial k'^2} = L' + 2n'\left(\frac{k}{k'}\right)^4\frac{\partial \pi'}{\partial k^2} = L' + \left(\frac{k}{k'}\right)^4 L$$

$$2n'''\frac{\partial \pi'''}{\partial k''^2} = L'' + 2n''\left(\frac{k'}{k''}\right)^4\frac{\partial \pi''}{\partial k'^2} = L'' + \left(\frac{k'}{k''}\right)^4 L' + \left(\frac{k}{k''}\right)^4 L$$

u. s. w. Damit gehen die Gleichungen hervor:

$$\left.\begin{aligned} n'\pi' &= (n' - n)\, R + n\pi + \frac{1}{2}Lk^2 \\ n''\pi'' &= (n'' - n')\, R' + n'\pi_{\prime} + \frac{1}{2k'^2}\{L k^4 + L' k'^4\} \\ n'''\pi''' &= (n''' - n'')\, R'' + n''\pi_{\prime\prime} + \frac{1}{2k''^2}\{Lk^4 + L'k'^4 + L''k''^4\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (A)$$

deren Gesetz sofort in die Augen springt.

87.

Will man aus den vorstehenden Gleichungen durch successive Addition die den Formeln des Art. 15 entsprechenden Ausdrücke ableiten, so darf man nur in der jedesmaligen letzten Gleichung die von k abhängigen Glieder beibehalten, und erhält folgende Reihe von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
n'\pi' &= n\pi + (n'-n)R + \tfrac{1}{2}Lk^2 \\
n''\pi'' &= n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + n'\pi'\pi_{,}d + \frac{1}{2k'^2}\{Lk^4 + L'k'^4\} \\
n'''\pi''' &= n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + n'\pi'\pi_{,}d + n''\pi''\pi_{,,}d' \\
&\quad + \frac{1}{2k''^2}\{Lk^4 + L'k'^4 + L''k''^4\}
\end{aligned}\right\}\quad (B)$$

Hier gelten die Werthe der sämmtlichen π auf der rechten Seite für $k=0$, während die von k abhängigen Glieder vermöge der Relationen des Art. 13 auf die Form gebracht werden können

$$n''\pi'' \;\ldots\; \tfrac{1}{2}k^2\{(1+\pi_{,}d)^2L + (1-\pi'd)^2L'\}$$

$$\begin{aligned}
n'''\pi''' \;\ldots\; \tfrac{1}{2}k^2\{&(1+\pi_{,}d)^2(1+\pi_{,,}d')^2L + (1-\pi'd)^2(1+\pi_{,,}d')^2L' + \\
&+ (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2L''\}
\end{aligned}$$

Die Abweichungen dieser Ausdrücke von denen des Art. 15 erklären sich einfach aus dem Umstande, dass dort die in den sogenannten Nebengliedern vorkommenden $\pi'\pi_{,}\ldots$ noch Functionen von k geblieben sind. Für kleine Werthe der Entfernungen $d\ d'\ldots$ erhält man den Gleichungen des Art. 16 entsprechend

$$n''\pi'' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + n'\pi'^2d + \tfrac{1}{2}k^2\{L + L' + 2\pi'd(L-L')\}$$

$$n'''\pi''' = \quad\ldots\quad + \tfrac{1}{2}k^2\{L + L' + L'' + 2\pi'd(L-L'-L'') + 2\pi''d'(L+L'-L'')\}$$

ebenfalls mit leicht erkennbarem Gesetze.

Ebenso nehmen in dem, Art. 17 erörterten Falle von sechs Brechungen die von k abhängigen Glieder unter den jetzigen Voraussetzungen die Form an

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}k'''^2(1 + 2\pi^{\mathrm{IV}}d''' + 2\pi^{\mathrm{V}}d^{\mathrm{IV}})\{&[L + L' + L'' + 4\pi'dL + 4\pi''d'(L+L')](1+\pi_{,,,}d'')^4 + \\
&+ [L''' + L^{\mathrm{IV}} + L^{\mathrm{V}} - 4\pi^{\mathrm{IV}}d'''(L^{\mathrm{IV}} + L^{\mathrm{V}}) - 4\pi^{\mathrm{V}}d^{\mathrm{IV}}L^{\mathrm{V}}]\}
\end{aligned}$$

88.

Wenden wir uns zu den Modificationen, welche in Folge der vorstehenden allgemeinen Entwickelungen in den Anwendungen auf specielle Fälle eintreten, so haben wir zunächst die Gleichung (b) des Art. 22 zu betrachten. Dieselbe wird zu ersetzen sein durch

$$0 = L + L' + L'' + 4\pi'Ld - 4\pi''L''d'$$

so dass, wie leicht zu sehen, keine weitere Aenderung als die Verdoppelung der Art. 25 eingeführten Hülfsgrösse C' vorzunehmen ist. Schreibt man zur Abkürzung

$$u+w=2v\,,\quad u'+w'=2v'\,,\quad \delta D=\frac{v^2 d}{2m}\,,\quad \delta D'=\frac{v'^2 d'}{2m'}$$

so erhält man leicht

$$2C'=4\,(R-\pi)^2\left(\frac{1}{m}-\frac{m\pi}{v}\right)\delta D+4\,(R''-\pi''')^2\left(\frac{1}{m'}-\frac{m'\pi'''}{v'}\right)\delta D'$$

Hiermit gehen bei der zweiten Approximation die Endgleichungen der Artt. 28 und 29 resp. über in

$$(0.085891)\,g^2+2\,(0.837887)\,g+(1.579097)=0$$

und

$$(0.084183)\,g^2+2\,(0.835147)\,g+(1.575457)=0$$

Für das erste Objectiv folgen daraus die Werthe

$$g=-6.53412\,,\quad R=+0.63146\,,\quad R'=-4.05433\,,\quad R''=-1.73904$$

mit einer Differenz von + 67 Einheiten der letzten Stelle, während für das zweite Objectiv

$$g=-4.75857\,,\quad R=+2.38630\,,\quad R'=-2.28254\,,\quad R''=-0.03041$$

gefunden werden. Diese Werthe haben um 579 Einheiten der letzten Stelle abgenommen.

Die Rechnung für die dritte Annäherung in Bezug auf das zweite Objectiv ergibt endlich

$$\begin{aligned} A &= +0.0076429 & \quad \varDelta &= +2.334419 \\ B &= +0.0079523 & \quad \varDelta' &= -1.156448 \\ C &= +0.000895 & \quad D &= +2.336233 \\ 2C' &= +0.024446 & \quad D' &= -1.155762 \end{aligned}$$

nebst der Endgleichung

$$(0.0841906)\,g^2+2\,(0.8351474)\,g+(1.5754422)=0$$

und hieraus

$$g=-4.758163\,,\quad R=+2.386646\,,\quad R'=-2.282192\,,\quad R''=+0.030706$$

89.

Bei den im §. 3 behandelten Linsensystemen mit vier Brechungen geht zunächst die Formel des Art. 49 in die modificirte Gleichung

$$0=L+L'+L''+L'''+4\pi'dL+4\pi''d'(L+L')-4\pi'''d''L'''$$

über, wodurch der Werth der Art. 52 definirten Hülfsgrösse C eine entsprechende Aenderung erleidet. Die Glieder der zweiten Zeile, nämlich

$$+N^2\pi'Ld+N^2\pi''(L+L')d'-N^2\pi'''L'''d''$$

haben einfach den Factor 2 zu erhalten. Diese Aenderung trägt sich auf die in den beiden Endgleichungen durch g und g' bezeichneten Glieder über, von denen das letztere mit der in den Artt. 50 und 51 ebenso bezeichneten Hülfsgrösse g' selbstverständlich nicht verwechselt werden darf. In Art. 58 sind es wiederum die Grössen C resp. c, welche durch die in Rede stehende Aenderung betroffen werden. Da indessen in den numerischen Anwendungen allenthalben die Linsendicken vernachlässigt worden sind, so bleiben die nur für die erste Approximation berechneten Resultate unverändert.

90.

Erst bei Art. 63 u. folgg., wo die Dicke der mittleren Linse als beträchtlich vorausgesetzt wird, treten wesentlichere Modificationen ein. Die Gleichung (b) des Art. 63 verwandelt sich in

$$0 = (L + L')\,\lambda^4 + L'' + L'''$$

und durch Ausführung der in den Artt. 68 und 69 gelehrten Rechnung in die Endgleichung

$$(b + b')\,\lambda^4 + (a'' + a''')\,\lambda^3 + (b'' + b''')\,\lambda^2 + (c'' + c''')\,\lambda + e'' + e''' = 0$$

welche folglich jetzt auf den vierten Grad in Bezug auf λ steigt.

Substituirt man dagegen die Ausdrücke des Art. 74, so nehmen die dort aufgestellten Formeln die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}(m - 1)\,\{(1 + \lambda^4)\,l^3 + (m + 3)\,(1 + \lambda)\,l^2 + (2m + 3)\,(1 + \lambda)^2\,l + (m + 1)\,(1 + \lambda)^3\}\\ + \frac{m' - m}{m'^2}\,\{m'^4\,(1 + \lambda^4)\,l'^3 + m'^2\,(3m' + m)\,(1 - \lambda)^3\,\lambda\,l'^2\\ + m'(3m' + 2m)\,(1 + \lambda^2)\,\lambda^2 l' + (m' + m)\,(1 - \lambda)\,\lambda^3\} = 0\end{aligned}$$

oder

$$0 = ak^3 + bk^2 + ck + e + a'k'^3 + b'k'^2 + c'k' + e'$$

wo

$$\begin{aligned} k &= (m - 1)\,l\,, & k' &= (m' - m)\,l' \\ a &= \frac{1 + \lambda^4}{(m - 1)^2}\,, & b &= \frac{m + 3}{m - 1}\,(1 + \lambda) \\ c &= (2m + 3)\,(1 + \lambda)^2\,, & e &= (m - 1)\,(m + 1)\,(1 + \lambda)^3 \\ a' &= \frac{m'^2}{(m' - m)^2}\,(1 + \lambda^4)\,, & b' &= \frac{3m' + m}{m' - m}\,(1 - \lambda^3)\,\lambda \\ c' &= \frac{3m' + 2m}{m'}\,(1 + \lambda^2)\,\lambda^2\,, & e' &= \frac{(m' - m)\,(m' + m)}{m'^2}\,(1 - \lambda)\,\lambda^3 \end{aligned}$$

91.

Es sollen jetzt die numerischen Beispiele der Artt. 70, 71, 72, 73, 77 und 78 untersucht werden.

In den Fällen der Art. 70 – 73 erhält man für λ die Endgleichungen

$$5.385\,\lambda^4 - 1.538\,\lambda^3 - 11.922\,\lambda^2 - 25.723\,\lambda - 9.955 = 0\,, \quad \lambda = -0.4743$$

$$1.768\,\lambda^4 - 1.468\,\lambda^3 - 10.376\,\lambda^2 - 36.472\,\lambda - 25.797 = 0\,, \quad \lambda = -0.8677$$

$$14.971\,\lambda^4 - 1.460\,\lambda^3 - 11.304\,\lambda^2 - 21.823\,\lambda + 2.992 = 0\,, \quad \lambda = +0.1286$$

$$9.617\,\lambda^4 - 1.421\,\lambda^3 - 10.363\,\lambda^2 - 38.808\,\lambda - 20.245 = 0\,, \quad \lambda = -0.5760$$

welche zu analogen Betrachtungen Anlass geben, wie die in den angeführten Artikeln angestellten, da es sich hier nur um Wurzeln λ handeln kann, welche von ± 1 nicht allzu sehr abweichen. Während indessen in dem Falle des Art. 72 ein entsprechendes Linsensystem überhaupt nicht existirte, führt jetzt die zweite Wurzel der obigen dritten Gleichung

$$\lambda = +1.3606$$

auf ein Linsensystem mit den Dimensionen

$$R = -R''' = +1.0052 \qquad d' = 0.9566$$
$$R' = -R'' = +2.6009$$

Obschon also auch hier die Dicke der mittleren Kronglaslinse der Brennweite nahe gleich und folglich praktisch nicht herstellbar sein wird, bleibt doch die Frage offen, ob durch eine weitere Aenderung der Brechungsverhältnisse nicht ein Werth von λ herbeigeführt werden könnte, der die Einheit weniger überstiege und damit zulässige Dimensionen zur Folge hätte. Die Linsenkrümmungen sind, wie man sieht, sehr mässig.

92.

Was endlich die in den Artt. 77 und 78 berechneten aplanatischen Systeme betrifft, so ergeben sich wiederum nur unbedeutende Verschiedenheiten. Die entsprechenden Werthe stehen wie folgt:

Erstes System.

$$a = +\ 5.628 \qquad b = +15.0076 \qquad c = +26.8369 \qquad e = +14.9069$$
$$a' = +444.290 \qquad b' = +13.0870 \qquad c' = +12.5424 \qquad e' = +\ 0.0107$$
$$438.66\,k'^3 + 44.979\,k'^2 - 61.194\,k' + 62.390 = 0$$
$$k' = -0.65160 \qquad R = -R''' = +1.2499$$
$$R' = -R'' = +2.8653$$

Zweites System.

$$a = +\ 6.450 \qquad b = +15.9204 \qquad c = +26.4771 \qquad e = +13.7019$$
$$a' = +1166.877 \qquad b' = +21.0576 \qquad c' = +12.4086 \qquad e' = +\ 0.0068$$
$$1160.43\,k'^3 + 56.328\,k'^2 - 65.259\,k' + 62.556 = 0$$
$$k' = -0.44586 \qquad R = -R''' = +1.1714$$
$$R' = -R'' = +3.1773$$

93.

Zum Schlusse mögen die Werthe der partiellen Differentialquotienten der Vereinigungsweiten, genommen sowohl nach den Reciproken der Linsenhalbmesser, als nach den Brechungsexponenten und den Abständen der brechenden Flächen, angeführt werden. Die Ausdrücke $\frac{\partial \pi}{\partial R}$ dienen zur Berechnung der im Art. 81 geforderten Grössen $\frac{\partial f}{\partial r}$, und zwar findet man leicht

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \left(\frac{R}{\pi^{\mathrm{IV}}}\right)^2 \frac{\partial \pi^{\mathrm{IV}}}{\partial R}, \quad \frac{\partial f}{\partial r'} = \left(\frac{R'}{\pi^{\mathrm{IV}}}\right)^2 \frac{\partial \pi^{\mathrm{IV}}}{\partial R'}, \quad \frac{\partial f}{\partial r''} = \left(\frac{R''}{\pi^{\mathrm{IV}}}\right)^2 \frac{\partial \pi^{\mathrm{IV}}}{\partial R''}, \quad \frac{\partial f}{\partial r'''} = \left(\frac{R'''}{\pi^{\mathrm{IV}}}\right)^2 \frac{\partial \pi^{\mathrm{IV}}}{\partial R'''}$$

Den Bezeichnungen des Art. 84 gemäss hat man ferner

$$\varrho = r - \sqrt{r^2 - k^2}$$

oder mit Vernachlässigung von k^4

$$\varrho = \frac{1}{2} R k^2, \quad \text{folglich } d\varrho = \frac{1}{2} k^2 dR$$

mithin

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = -\frac{2}{(k\pi^{IV})^2}\frac{\partial \pi^{IV}}{\partial R} \quad \text{u. s. w.}$$

Mit Hülfe der Differentialquotienten nach n und d kann der Einfluss einer Aenderung in den Brechungsverhältnissen und den Linsendicken auf die Vereinigungsweite der Strahlen ermittelt werden.

Die Ableitung der betreffenden Differentialausdrücke bietet keine Schwierigkeit, als etwa die Länge der Rechnung. Benutzt man die abgekürzten Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
S &= 3(R-\pi')^2 - 2\pi(R-\pi'), & S' &= 3(R'-\pi'')^2 - 2\pi_,(R'-\pi'')\\
T &= 4R(\pi-\pi') + 3(\pi'^2-\pi^2), & T' &= 4R'(\pi_,-\pi'') + 3(\pi''^2-\pi_,^2)\\
U &= (R-\pi')(R-3\pi') + \pi(R-\pi), & U' &= (R'-\pi'')(R'-3\pi'') + \pi_,(R'-\pi_,)\\
V &= (R-\pi')(R-2\pi'), & V' &= (R'-\pi'')(R'-2\pi'')
\end{aligned}$$

u. s. w., so erhält man mit leichter Mühe

$$\frac{\partial L}{\partial R} = (n'-n)S, \qquad \frac{\partial L}{\partial n} = -(R-\pi)U \qquad \frac{\partial L}{\partial n'} = (R-\pi')V$$

$$\frac{\partial L'}{\partial R} = (n'-n)\left(\frac{\pi_,}{\pi'}\right)^2 T', \qquad \frac{\partial L'}{\partial R'} = (n''-n')S' \qquad \frac{\partial L'}{\partial d} = n'\pi_,^2 T'$$

$$\frac{\partial L'}{\partial n} = -(R-\pi)\left(\frac{\pi_,}{\pi'}\right)^2 T', \qquad \frac{\partial L'}{\partial n'} = (R-\pi')\left(\frac{\pi_,}{\pi'}\right)^2 T' - (R'-\pi_,)U', \qquad \frac{\partial L'}{\partial n''} = (R'-\pi'')V'$$

$$\frac{\partial L''}{\partial R} = (n'-n)\left(\frac{\pi_,\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2 T'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial R'} = (n''-n')\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2 T'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial R''} = (n'''-n'')S''$$

$$\frac{\partial L''}{\partial d} = n'\left(\frac{\pi_,\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2 T'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial d'} = n''\pi_{,,}^2 T''$$

$$\frac{\partial L''}{\partial n} = -(R-\pi)\left(\frac{\pi_,\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2 T'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial n'} = \left\{(R-\pi')\left(\frac{\pi_,\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2 - (R'-\pi_,)\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\right\} T''$$

$$\frac{\partial L''}{\partial n''} = (R'-\pi'')\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2 T'' - (R''-\pi_{,,})U'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial n'''} = (R''-\pi''')V''$$

u. s. w.

94.

Schreibt man noch der Kürze halber

$$\begin{aligned}
[1,1] &= Lk^4 - L'k'^4\\
[1,2] &= Lk^4 - L'k'^4 - L''k''^4\\
[2,1] &= Lk^4 + L'k'^4 - L''k''^4
\end{aligned}$$

etc., so ergeben sich mittelst der Ausdrücke des vorigen Artikels für eine Brechung:

$$\frac{\partial \pi'}{\partial R} = \frac{n'-n}{n'}\left\{1 + \frac{1}{2} S k^2\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'}{\partial n} = -\frac{R-\pi}{n'}\left\{1 + \frac{1}{2} U k^2\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'}{\partial n'} = \frac{R-\pi'}{n'}\left\{1 + \frac{1}{2} V k^2\right\}$$

für zwei Brechungen:

$$\frac{\partial \pi''}{\partial R} = \frac{n'-n}{n''}\left(\frac{\pi_,}{\pi'}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(S k^2 + T' k'^2) + \frac{[1,1]}{n' k k'} d\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial R'} = \frac{n''-n'}{n''}\left\{1 + \frac{1}{2} S' k'^2\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial d} = \frac{n'}{n''}\pi_,^2\left\{1 + \frac{1}{2} T' k'^2 + \frac{[1,1]}{n'\pi' k k'}\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial n} = -\frac{R-\pi}{n''}\left(\frac{\pi_,}{\pi'}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(U k^2 + T' k'^2) + \frac{[1,1]}{n' k k'} d\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial n'} = -\frac{R'-\pi_,}{n''}\left\{1 + \frac{1}{2} U' k'^2\right\}$$
$$+ \frac{R-\pi'}{n''}\left(\frac{\pi_,}{\pi'}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(V k^2 + T' k'^2) + \frac{[1,1]}{n' k k'} d\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial n''} = \frac{R'-\pi''}{n''}\left\{1 + \frac{1}{2} V' k'^2\right\}$$

für drei Brechungen:

$$\frac{\partial \pi'''}{\partial R} = \frac{n'-n}{n'''}\left(\frac{\pi_,\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(S k^2 + T' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[1,2]}{n' k k'} d + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial R'} = \frac{n''-n'}{n'''}\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(S' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial R''} = \frac{n'''-n''}{n'''}\left\{1 + \frac{1}{2} S'' k''^2\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial d} = \frac{n'}{n'''}\left(\frac{\pi_,\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(T' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[1,2]}{n'\pi' k k'} + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial d'} = \frac{n''}{n'''}\pi_{,,}^2\left\{1 + \frac{1}{2} T'' k''^2 + \frac{[2,1]}{n''\pi'' k' k''}\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial n} = -\frac{R-\pi}{n'''}\left(\frac{\pi_,\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(U k^2 + T' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[1,2]}{n' k k'} d + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial n'} = -\frac{R'-\pi_,}{n'''}\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(U' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$+ \frac{R-\pi'}{n'''}\left(\frac{\pi_,\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(V k^2 + T' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[1,2]}{n' k k'} d + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial n''} = -\frac{R''-\pi_{,,}}{n'''}\left\{1 + \frac{1}{2} U'' k''^2\right\}$$
$$+ \frac{R'-\pi''}{n'''}\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(V' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial n'''} = \frac{R''-\pi'''}{n'''}\left\{1 + \frac{1}{2} V'' k''^2\right\}$$

Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke ist leicht erkennbar, so dass dieselben ohne Schwierigkeit auf eine beliebige Anzahl von Brechungen ausgedehnt werden können.

October 1874.

Scheibner.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.