6:

Positionum MATHEMATICARUM SYLLOGE

QUAM

D. O. M. A.

IN ILLUSTRI ACADEMIA HASSO-SCHAUENBURGICA

SUB PRÆSIDIO

ARNOLDI ECKHARDI

S.S. Theol. Doct. ejusdemque & Mathematum Professoris,

Publicè tuebitur

PHILIPPUS HENRICUS EULALIUS

Cassellanus Hassus. AUCTOR & RESPONDENS

Ad diem VI. Martii

horis locoque solitis.

RINTHELII,

Ex Officina G.C. Wächters Academiæ Typ. AN. CIↃ IↃC LXXXVI.

SERENISSIMÆ
PRINCIPI
AC DOMINÆ,

DOMINÆ
HEDWIGI
SOPHIÆ
EX POTENTISSIMA
ELECTORALI MARCHIONUM
BRANDENBURGICORUM FAMILIA
NATÆ, PRUSSIÆ, MAGDEBURGI
JULIACI, CLIVIÆ, MONTIUM,
STETINI, POMERANIÆ DUCI, HASSIÆ
LANDGRAVIÆ, HALBERSTADII,
MINDÆ ET HERSFELDIÆ PRINCIPI,
CATTIMELIBOCI, DECIARUM, ZIGENHAINÆ, NIDDÆ, SCHAUENBURGI, MARCÆ ET RAVENSBERGÆ COMITI, DOMINÆ IN RAVENSTEIN,
VIDUÆ ET TUTRICI REGENTI,

Principi ac Dominæ suæ
Clementissimæ

NEC NON

SERENISSIMO

PRINCIPI

AC DOMINO,

DOMINO

CAROLO

HASSIÆ LANDGRAVIO,

PRINCIPI HERSFELDIÆ, COMITI CATTIMELIBOCI, DECIARUM, ZIGENHAINÆ, NIDDÆ ET SCHAUENBURGI,

Principi ac Domino suo Clementissimo

EX-

EXERCITIUM
hoc Academicum

In grati devotique animi monumentum,

Suique & Studiorum suorum ulteriorem commendationem ea, qua decet, humillima demissione

Dat, dicat, dedicat

SERENISSIMIS EORUNDEM CELSITUDINIBUS

Subjectissimus Cliens, Servus ac Alumnus

PHILIPPUS HENRICUS EULALIUS.

I. N. D. N. J. C.

Ex Algebra Speciosa.

Mathematicæ disciplinæ licet variæ sint & circa diversa objecta versentur, in hoc tamen omnes conveniunt, quòd nihil aliud, quàm relationes seu proportiones quasdam, quæ in objectis illis reperiuntur, examinent. Quæ relationes & proportiones quum ubique sint eædem, ad universæ Matheseos vim & naturam animo complectendam nulla alia re opus est, quàm ut ipsarum doctrinam exactè cognitam habeamus. Quicquid vel à Veteribus vel à Recentioribus circa has relationes seu proportiones inventum est, id in duas disciplinas tributum esse reperimus. Quarum altera Arithmetica numerorum, altera Geometria quantitatis continuæ proportiones explicat. Has duas puræ Matheseos partes constituerunt, à quibus reliquæ omnes Mathematicæ disciplinæ penderent. Methodum, quâ in evolvendis numerorum mysteriis utuntur Recentiores, Algebram vocant: sicut eam, quâ proportiones Geometricas investigabant Veteres, Analysin Geometricam appellabant. Sed nostro hoc seculo exorta est nova illa methodus, quæ Algebræ speciosæ nomine venit, Veteribus non minus, quod facile probari potest, quàm Recentioribus incognita, quæ nullis problematum finibus circumscripta, quicquid in universa Mathesi ab humano ingenio cognosci potest, felicissimè evolvit. Hujus inventi planè divini primus Auctor extitit Franciscus Vieta præstantissimus Galliæ Mathematicus. Nec multo post Renatus Des-Cartes, quum Vietæ methodum non vidisset, in easdem cogitationes incidit, hancque disciplinam tam egregiè excoluit, ut omnes, qui in orbe fuerunt, Mathematicos longissimo intervallo post se reliquerit, præreptâque illis inventiorum palmâ universam Mathesin ad summum fastigium perduxerit. Non solùm enim ille quam plurimas quæstiones longè difficillimas resolvit, sed circa illas etiam, quas ipse aggressus non est, ausus est determinare, quibus viis & quousque ab humano ingenio solvi possent. Animadverterat scilicet Cartesius Veterum Analysin atque Recentiorum Algebram tantum ad speculationes quasdam, quæ nullius usus esse videbantur, se extendere, ac præterea Analysin circa figurarum considerationem tam assiduè versari, ut dum ingenium acuit & exercet, imaginandi facultatem defatiget & lædat. Algebram verò, ut solet doceri, certis regulis & numerandi formulis ita esse contentam, ut videatur potius ars quædam confusa, cujus usu ingenium quodammodo turbetur & obscuretur, quàm scientia, quâ excolatur & perspicacius reddatur. Quapropter existimavit quærendam sibi esse aliam methodum, in quâ, quicquid boni est in modo nominatis disciplinis, ita reperiretur, ut omnibus earum incommodis careret. Quod quidem tam admirabili via modoque perfecit, ut in Mathesi nihil simile, aut quod cum invento isto comparandum sit, in lucem unquam prodierit. Vide si lubet, hac de materiá differentem ipsum Cartesium in dissertatione de Methodo. Sed ne quid præter verum hîc loqui videamur, provocamus ad testimonia nobilissimorum hujus ævi Mathematicorum. Franciscus à Schooten in Academia Lugduno Batava celeberrimus quondam Matheseos Profess. Section. Miscell. IX. ita scribit: *In medium adducturus sum Regulam* (pro inveniendis numeris, quos vocant, amicabilibus) *quã olim ab illustri Viro Renato Des-Cartes didici, qui Algebræ peritiâ doctissimorum consensu non modo summas in hisce disciplinis difficul-*

tates

tates superare novit, ipsiusque beneficio Regulas & Theoremata, earundem resolutioni inservientia invenire; sed etiam quicquid demum circa illas ab humano ingenio cognosci potuit determinare. Quam excolendo, tandem illam sibi efformavit Methodum, quâ obvia quælibet, ipsis etiam Perspicacissimis (id quod pluries expertus loquor) Ingeniis remoram injicientia, uno quasi obtutu penetrare potis fuit; ac quodcunque certi in reliquis Scientiis lumine naturali sciri potuit, ex indubitatis Principiis deducere valuit. Cui adjungemus præclarum illud testimonium, quod insignis Mathematicus Johannes Huddenius Epistola de Æquationum reductione ad Schootenium scripta de Cartesii methodo perhibet. Ita autem ille: *Ubi notandum, hanc Regulam, quâ omnes reducibiles æquationes Quadrato-quadratæ reduci possunt, esse planè eandem cum illa, quam D. des-Cartes pag. 79, 80, & 81. suæ Geometriæ descripsit. Nec dubitare possum, quin ipsam eodem modo, vel certè non multum absimili invenerit: præsertim si ea, quæ pag. 84. in genere de æquationum Reductione docuit, conferantur cum ipsius methodo secantium & quæ deinceps pag. 49. exposuit. Adeò ut judicio meo, ne quidem verisimile videatur, inprimis si concinnam præcedentium cum sequentibus cohærentiam spectemus, ipsum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, eam desumpsisse. Quippe pro excellenti, quâ pollebat, animi generositate, (ut novisti & tu & quotquot ejus familiaritate usi sunt,) non modò nunquam tantopere animo indulgebat, sed parvus etiam hic ejus tractatus tam varia profundæ & admirandæ eruditionis specimina summique ingenii inventa exhibet, & quæ præ Antiquorum monumentis adeò sunt generalia, utilia ac à vulgo remota, ut nemo, qui illum intellexerit atque ipsorum scripta eum hujus scriptis comparaverit, in hasce cogitationes incidere unquam possit; Quemadmodum nemo tam præpostero est ingenio, ut fulgentem solis lucem à micantibus stellis derivandam arbitretur. Non tamen hic quicquam Veteribus detractum volo, dum eos micantibus stellis assimilo; credo enim stellas dari, quæ in se sint ipso etiam sole majores ac fulgidiores, quanquam non quidem nostrum respectu, qui terram inhabitamus. Namque inter illos, Archimedes inprimis ac Diophan-*

tus multique alii, qui superiori & hoc sæculo vixerunt, viri celebres, magni certè apud me nominis & æstimationis sunt, ac suis etiam monumentis immortalem in omnes Posteros nominis gloriam promeritos lubentissimè fateor. Ast majorem post illos lucem mundo exortam esse, ipsi etiam, si reviviscerent, in nostro Cartesio non tantum agnoscerent, sed etiam sibi ex ejus lumine majus lumen accendere satagerent, aliosque ut illo potiùs, quàm suo uterentur, monerent: quia non modò jucundiùs sed tutiùs etiam in solis lumine vivitur, & per compendiosiores vias ad multò plura objecta pervenitur, eaque multò luculentiùs & distinctiùs quàm in stellarum lumine oculis patent. Sed quid nudam veritatem tot verbis palliare conor, idque apud te, qui incomparabilem illum Virum, non tantùm ex ipsius scriptis, sed præsertim ex intimâ familiaritate, qua tibi cum eo à multis retrò annis intercessit, penitus pernovisti, quemque interea non semel maximo cum stupore admiratus es, cum videres eum quæstiones in Mathesi difficillimas è vestigio tantâ promptitudine resolvere, ac si non difficiliores, quàm omnium facillimæ, ipsi fuissent, quæ nihilominus à præstantissimis etiam Mathematicis in ea usque tempora, aut non, aut non nisi cum maximâ perplexitate inveniri potuerant. Et cum te pœniteat, (uti aliquando coram ipse fassus es) quod non omnia, quæ ullo unquam tempore ex ejus ore emanârunt, fideliter chartis mandata custodieris, id mihi satis amplum testimonium est, unde certus sim, tibi, ut mihi, ne quidem verisimile fieri posse, illum hanc Reductionis Regulam ex aliorum scriptis ad se potiùs transtulisse, quàm ex propriis fundamentis, fœcundissimis illis omnium scientiarum seminariis, eruisse atque invenisse. Sed ut quivis divinæ hujus methodi præstantiam videat, lubet illam hîc explicare. Omnia Geometriæ problemata ad hujusmodi terminos reducit, ut deinde ad illorum constructionem opus tantum sit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoscere. Cæterum ut quis facile linearum nominum recordetur, oportet semper illa in catalogum referre, prout supponuntur vel mutantur, scribendo exempli causâ AB ∝ 1, hoc est AB æqualis est 1, seu unitati, GH ∝ *a*, BD ∝ *b* &c. Ubi notandum, ad designandum lineas co-

gni-

gnitas primis literis alphabeti uti Cartesium, sicut ad notandum incognitas ultimas adhibet. *Resoluturus igitur, aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte, ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessariæ videbuntur, tam iis, quæ incognitæ sunt, quàm quæ cognitæ. Deinde nullo inter hasce lineas cognitas & incognitas facto discrimine, evolvenda est problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturalissimè pateat, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependeant, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur; æquales enim sunt termini modi unius terminis modi alterius. Jam verò tot hujusmodi AEquationes invenire oportebit, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ. Vel si totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæstione desiderantur, omittatur, argumentum est illam non penitus esse determinatam. Tunc enim ad arbitrium assumi possunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non respondet aliqua AEquatio. Postea verò si plures adhuc supersint ordine quoque utendum erit unaquaque AEquationum reliquarum, sive illam considerando separatim, sive ipsam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis: atque ita, reducendo illas, efficere oportet, ut tantum una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, sive cubus, sive quadrato quadratum, sive surdesolidum, sive quadrato cubus, &c. æqualis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum, pluriumve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, reliquæ autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, sive cubum, sive quadrato quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto designo.*

$z \propto b$ *aut*

$z^2 \propto -az + b^2$, *aut*

$z^3 \propto +az^2 + b^2 z - c^3$, *aut*

$z^4 \propto +az^3 + b^2 z^2 - c^3 z + d^4$ *&c.*

Hoc est, z, *quam pro quantitate incognita sumo, est æqualis ipsi* b, *aut quadratum à* z *æquale est quadrato ex* b, *minus producto a in* *z; aut cubus à z æqualis eſt producto ex a in quadratum ipſius z, plus quadrato ex* b *ducto in z, minus cubo ex* c. *& ſic de cæteris.*

Poſſunt autem ſemper quantitates incognitæ ita ad unam ſolam reduci, atque tum problema conſtrui per rectas lineas & circulos, aut per ſectiones Conicas, aut denique per aliam quandam lineam, quæ non niſi uno duobusve gradibus magis ſit compoſita. Vid. Carteſ. Geom. lib. I. p.3.

Cæterum ſi Problema aliquod conſtrui poteſt utendo tantum rectis lineis & circulorum circumferentiis, vocatur illud planum, ſi opus eſt adhibere ſectiones Conicas, ſolidum appellatur, ſi lineis curvis opus eſt magis compoſitis, quàm ſunt Conicæ ſectiones, lineare dicitur. Quorum infinita ſunt genera, Si enim adhibenda eſt linea unogradu magis compoſita, quàm ſunt ſectiones Conicæ, erit id lineare primi generis: Sin opus eſt linea duobus vel tribus, vel quatuor gradibus magis compoſitis, & ſic deinceps, erit problema lineare vel ſecundi, vel tertii, vel quarti generis, & ſic infinitum. Sed exemplis omnia illuſtriora fient.

PROBLEMA I.

AReam quadrilateram ABCD, cujus longitudo AB vel DC eſt 34, & latitudo AD vel BC 32, pedum dividere; ita ut, dempto communi angiportu GBFH latitudinis GB 4 pedum, parallelogramma AGHE & EFCD ſint inter ſe æqualia. Eſt hæc propoſitionum Geometricarum Clariſſimi Schootenii prima, cujus analyſis, qnam ipſe reticuit hæc eſt. Vid. fig. I.

AB vel DC $\propto a$

GB vel HF $\propto b$

Ergo AG vel EH $\propto a-b$

AD vel BC $\propto c$

AE vel GH $\propto x$

Ergo DE vel FC $\propto c-x$

Mult. AE $\propto x$ Mult. DE $\propto c-x$

Per AG $\propto a-b$ Per DC $\propto a$

Erit

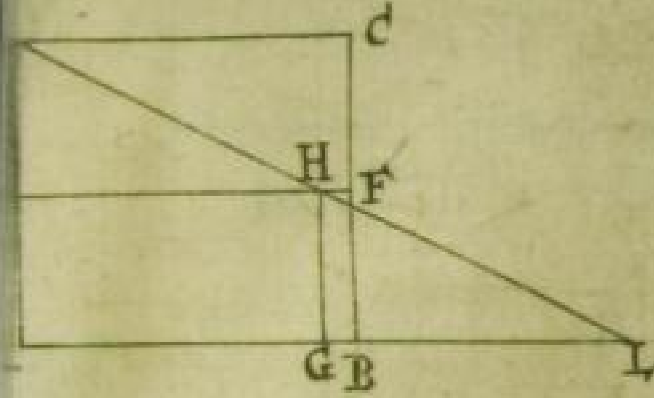


Fig: I

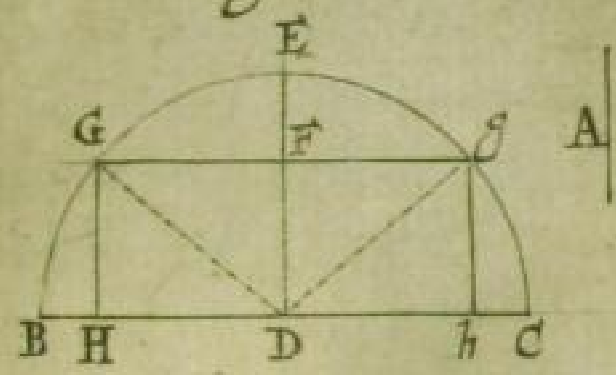


Fig: II

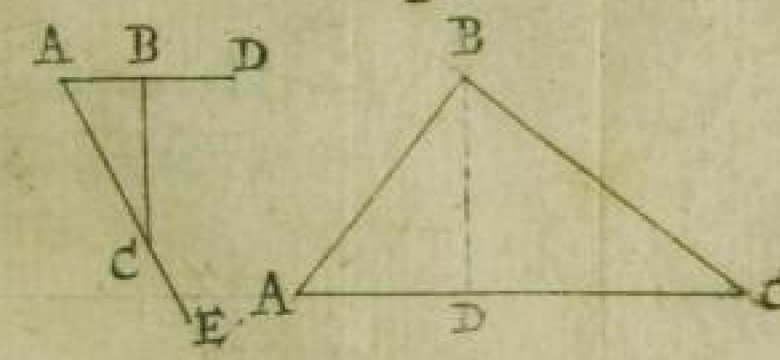


Fig III

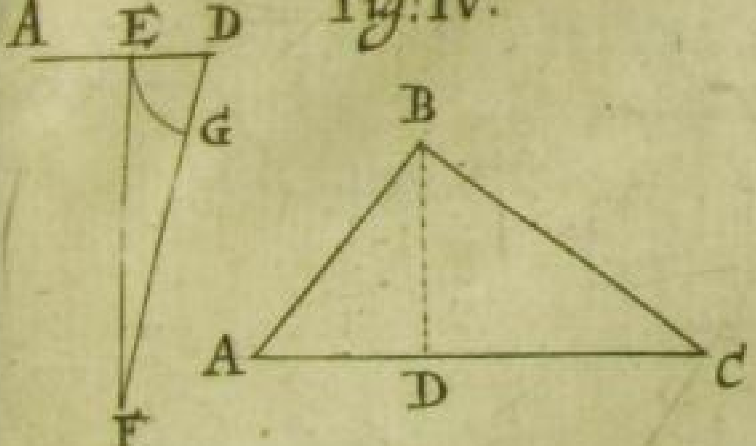


Fig: IV.

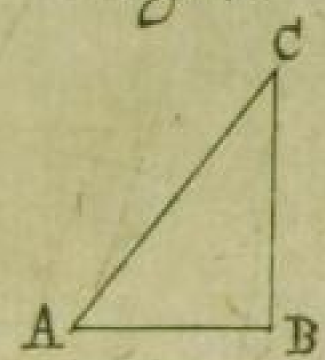


Fig: V.

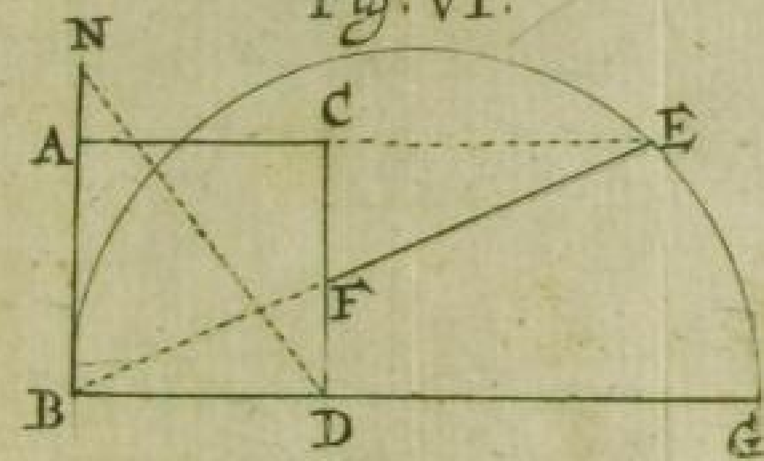


Fig: VI.

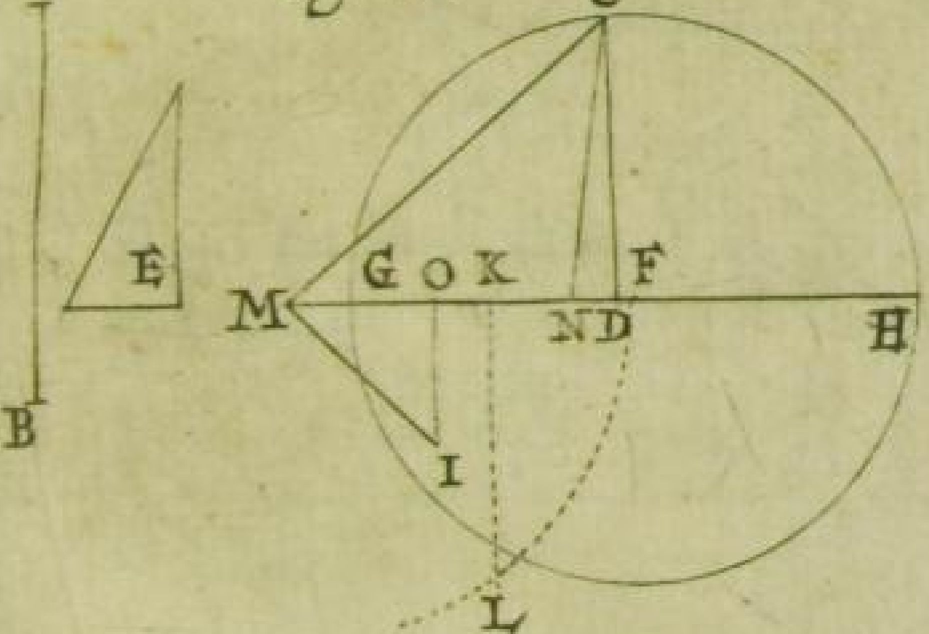


Fig: VII

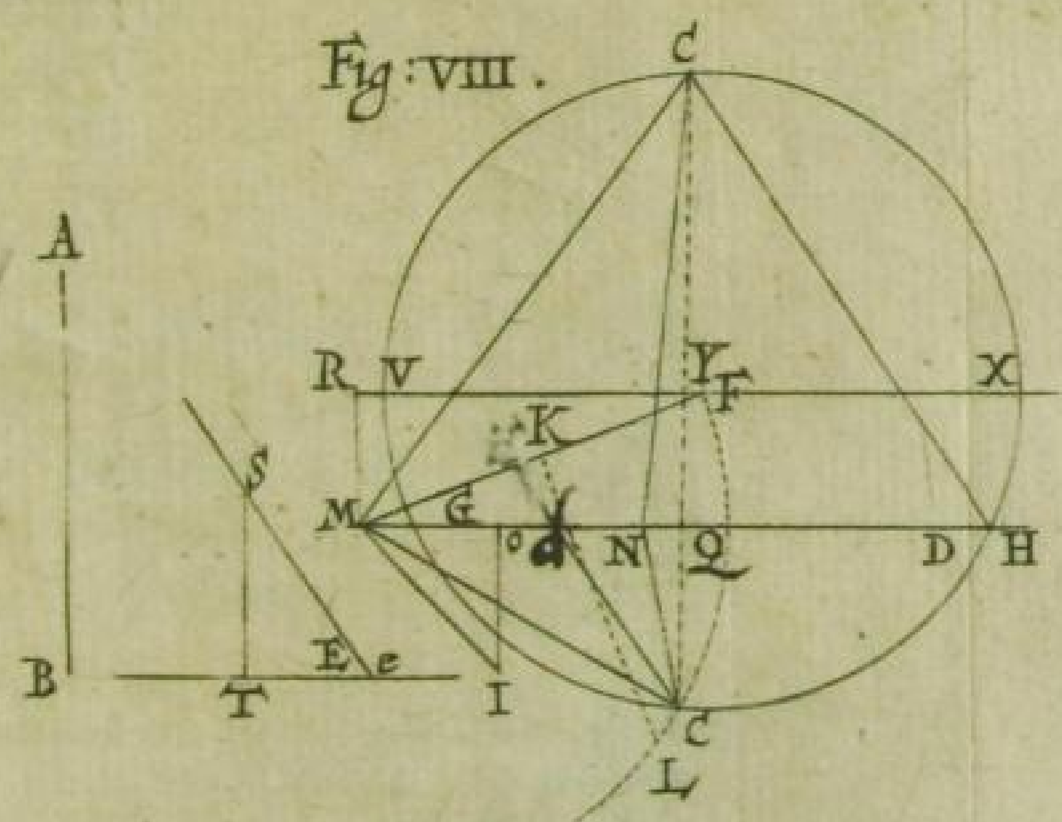


Fig: VIII.

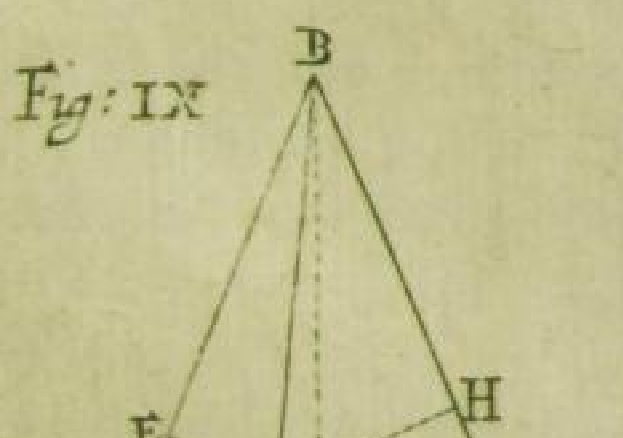


Fig: IX

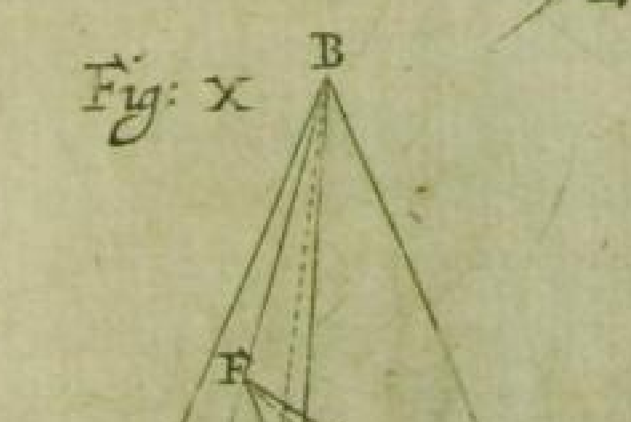


Fig: X

Erit □lum AGHE $ax - bx \propto ac - ax$ □lo EFCD

$$2ax - bx \propto ac$$

$$x \propto \frac{ac}{2a-b}$$

Unde talis emergit constructio. Productâ AB ad L, ita ut GL sit æqualis AB, junctâque LD, erit GH linea quæsita, ita ut si BF vel AE sumantur æquales ipsi GH, ducaturque EF, □lum EFCD æquale sit □lo AGHE.

Est enim uti

LA ad AD sic LG, ad GH

$2a-b$ —— c —— a $\frac{ac}{2a-b}$

Quod idem pernumeros expedire licet. Si enim, ut supra dictum est, DC sit 34, BG 4 & AD 32, erit iterum

$2a-b$ —— c —— a $\frac{ac}{2a-b}$

$\left.\frac{64}{2}\right\}$ —— $\left\{\frac{32}{1}\right.$ —— 34/17

Ergo sumendi sunt ab A versus E, vel à B versus F 17 (1) & relinquetur linea DE vel CF 15 (1)

Multipl. DC 34 (1)	Multipl. AG 30 (1)
Per DE 15 (1)	Per AE 17 (1)
170	210
34	30
Fit □lum DEFC 510 (2)	Fit □lum AGHE 510 (2)

Ubi notandum illa problemata quæ beneficio solarum linearum rectarum construi possunt, simplicia dici: plana autem, ad quorum solutionem insuper necesse est circulorum circumferentias describere. Conscripsit de Simplicium Problematum constructione insignem libellum Clarissimus Schootenius, quo adhibitis solummodo baculis rectis ad plumbum in terram defixis multa in campo expedire docet, quæ alioqui sine Arithmeticæ & Astrolabii ope construi non solent.

PRO-

PROBL. II.

E serie trium proportionalium datâ mediâ A, & aggregato extremarum B C; invenire extremas. Vel *Datam rectam B C ita secare in H, ut rectangulum sub segmentis BH, HC sit æquale quadrato rectæ datæ A, quæ semisse rectæ secandæ BC non sit major.* Est hæc 25 prop. Schootenii. Vid. fig. II.

Analysis

Sit media $\propto a$ Fiat uti x —— a —— $a \mid b-x$

$BC \propto b$ $\qquad bx - xx \propto aa$

Una extrema $\propto x$ $\qquad o \propto xx - bx + aa$

Et erit altera $\propto b - x$

$$\text{Statuatur } x - \tfrac{1}{2}b \propto z$$
$$x \propto z + \tfrac{1}{2}b$$
$$xx \propto zz + bz + \tfrac{1}{4}bb$$
$$-bx \propto -bz - \tfrac{1}{2}bb$$
$$+aa \propto +aa$$

$$xx - bx + aa \propto zz * - \tfrac{1}{4}bb + aa \propto o$$
$$zz \propto \tfrac{1}{4}bb - aa$$
$$z \propto \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}bb - aa}$$
$$x \propto \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}bb - aa}$$

Constructio. Descripto super B C semicirculo B E C, erigatur ex puncto medio D eidem perpendicularis D E, in quâ sumpta DF æquali A, ducatur per F ipsi B C parallela G F g, secans hinc inde circumferentiam in punctis G, g. Ex quibus si demittantur G H, g h, perpendiculares in B C, hoc est, parallelæ ipsi D E, Dico B H & H C extremas esse, vel etiam ▭lum sub BH, HC contentum æquale esse □to ex HG vel A.

Demonstratio patet ex calculo. Est enim D B vel D G $\propto \frac{1}{2}b$, □tum ex D G $\propto \frac{1}{4}bb$, ex quo si auferatur □tum G H $\propto aa$, relinquitur □tum D H $\propto \frac{1}{4}bb - aa$. Unde D H $\propto \sqrt{\frac{4}{1}bb - aa}$ & C H $\propto \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - aa}$, & BH $\propto \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - aa}$.

Probl.

PROBL. III.

IN triangulo ABC, cujus angulus ABC rectus est, ducta perpendiculari BD, datur segmentum baseos AD, & linea DC aqualis ponitur linea AB: inveniendaque sint hujus trianguli latera.

Vid. fig. III. Est hæc propositionum Geometricarum & Algebraicarum Gerhardi Melderi 26, cujus & sequentis 27 constructionem dicit esse ex insignioribus, quas Cossica scientia habet. Nos utriusq; analysin, quā Melderus non addidit, hîc apponemus.

Analysis Fiat ut AD ad BD ita BD ad DC

Esto AD $\propto a$ $\qquad a \text{ --- } y \text{ --- } y \,|\, \frac{yy}{a} \propto x$

AB vel DC $\propto x$ $\qquad$ Porro ad $\square$tum AD $\propto aa$

BD $\propto y$ $\qquad$ Addatur $\square$tum BD $\propto yy$

Aggreg: $\square$tum AB $\propto aa+yy$

Et AB $\propto \sqrt{aa+yy} \propto x$

Habetur ergo æquatio inter x bis inventam

$$\frac{yy}{a} \propto \sqrt{aa+yy}$$
$$\frac{y^4}{aa} \propto aa+yy$$
$$y^4 \propto a^4 + aayy$$
$$y^4 - aayy - a^4 \propto 0$$

$$yy - \tfrac{1}{2}aa \propto zz$$
$$yy \propto zz + \tfrac{1}{2}aa$$
$$y^4 \propto z^4 + aazz + \tfrac{1}{4}a^4$$
$$-aayy \propto -aazz - \tfrac{1}{2}a^4$$
$$-a^4 \propto -a^4$$
$$y^4 - aayy - a^4 \propto z^4 * - \tfrac{5}{4}a^4 \propto 0$$
$$z^4 \propto \tfrac{5}{4}a^4$$
$$zz \propto \sqrt{\tfrac{5}{4}a^4}$$
$$yy \propto \tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{5}{4}a^4}$$
$$y \propto \sqrt{\tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{5}{4}a^4}}$$

Quoniam autem hîc radix quadrata extrahenda est ex $\frac{5}{4}a^4$, & deinde ex $\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, & vero $\frac{5}{4}a^4$ ad quadrato quadratum ascendit, assumenda est quantitas aliqua nempe ipsa a pro unitate, & facilis deinde est operatio. Quoniam enim a ponitur æqualis 1, poterit pro æquatione

$yy \propto \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{5}{4}a4}$ scribi

$yy \propto \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$; Et pro æquatione

$y \propto \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{5}{4}a4}}$ poni potest ista

$y \propto \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Porrò quoniam x inventa fuit $\propto \frac{yy}{a}$, a vero pro unitate assumpta fuit, erit $x \propto yy$. Unde talis innotescit problematis constructio. Divisâ AD bifariam in B, excitetur perpendicularis BC æqualis ipsi AD; junctæ AC in directum apponatur CE æqualis ipsi AB, eritque quæsita AB vel DC æqualis ipsi AE.

Quoniam enim AD seu $a \propto 1$, erit AB $\propto \frac{1}{2}$, & □tum AB $\propto \frac{1}{4}$, cui si addatur quadratum BC $\propto 1$, erit □tum AC $\propto \frac{5}{4}$, & linea AC $\propto \sqrt{\frac{5}{4}}$, cui si addatur CE $\propto \frac{1}{2}$, erit AE $\propto \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \propto yy \propto x$. Cæterum perpendicularis BD seu y erit media proportionalis inter AD seu 1 & DC seu $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$

PROBL. IV.

IN triangulo rectangulo ABC datur latus BC, & segmentum basis AD inter A & perpendicularem ex recto angulo ABC ductam interceptum: inveniendaque sint reliqua latera AB & AC. Est hæc 27, Melderi. Vid. fig. IV.

Analysis. Fiat ob similitudinem △lorum ABD & BDC,

Esto BC $\propto a$
AD $\propto b$
DC $\propto x$
BD $\propto y$

Ut AD ad BD, ita BD ad DC
b — y — y | $\frac{yy}{b} \propto x$

Porrò à □to BC $\propto aa$
Subtr: □tum BD $\propto yy$

Rel: □tum DC $\propto aa - yy$
Ergo DC $\propto \sqrt{aa - yy} \propto x$

$\frac{yy}{b} \propto \sqrt{aa - yy}$

$\frac{y4}{bb} \propto aa - yy$

$y4 \propto aabb - bbyy$

$y4 + bbyy - aabb \propto 0$

$yy + \frac{1}{2}bb \propto zz$

$yy \propto zz - \frac{1}{2}bb$

$$\begin{array}{llll}
y^4 & & \propto z^4 - bbzz + \frac{1}{4}b^4 & \\
\quad +bbyy & & \propto \quad +bbzz - \frac{1}{2}b^4 & \\
\qquad -aabb & & \propto \qquad\qquad -aabb & \\
\hline
y^4 + bbyy - aabb & & \propto z^4 {}^* - \frac{1}{4}b^4 - aabb \propto 0 & \\
 & z^4 & & \propto aabb + \frac{1}{4}b^4 \\
 & zz & & \propto \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4} \\
 & yy & & \propto -\frac{1}{2}bb + \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4} \\
 & y & & \propto \sqrt{-\frac{1}{2}bb + \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4}}
\end{array}$$

Quod si jam b assumatur pro unitate, pro hâc æquatione $yy \propto -\frac{1}{2}bb + \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4}$, scribi poterit ista $yy \propto -\frac{1}{2} + \sqrt{aa + \frac{1}{4}}$, Et pro alterâ $y \propto \sqrt{-\frac{1}{2}bb + \sqrt{aabb + \frac{1}{4}b^4}}$ substituere licet $y \propto \sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{aa + \frac{1}{4}}}$. Et quoniam x inventa fuit $\propto \frac{yy}{b}$ seu yy, b enim $\propto 1$ tolli omnino potest: erit $x \propto yy \propto -\frac{1}{2} + \sqrt{aa + \frac{1}{4}}$: Unde talis elicitur constructio.

Divisâ AD bifariam in E, statuatur perpendicularis EF æqualis ipsi BC, jungaturque DF, ex quâ si auferatur DG æqualis ipsi DE, relinquitur GF æqualis ipsi DC. Quoniam enim DE $\propto \frac{1}{2}$, erit □tum DE $\propto \frac{1}{4}$ cui si addatur □tum EF $\propto aa$, erit □tum DF $\propto aa + \frac{1}{4}$, & linea DF $\propto \sqrt{aa + \frac{1}{4}}$, è qua si auferatur DG $\propto \frac{1}{2}$, relinquitur GF $\propto -\frac{1}{2} + \sqrt{aa + \frac{1}{4}} \propto yy \propto x$. Inventâ autem GF seu DC facile est ipsum triangulum ABC construere.

Possumus in calculo Algebraico etiam numeris uti, cujus rei sequens erit exemplum.

PROBL. V.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno laterũ AB, BC circa rectum angulum B, & aggregato hypothenusæ AC & areæ ABC: invenire hypothenusam & aream. Est hæc: 40 Schoot. Vid. fig. V.

Analysis. Esto AB 3. & aggregatum ipsius AC & areæ ABC 11. Unde si AC statuatur $\propto x$, erit area ABC $11 - x$

Ex □to AC $\propto xx$	Mult: BC $\propto \sqrt{xx - 9}$
Subtr. □tum AB $\propto 9$	per $\frac{1}{2}$ AB $\propto \frac{3}{2}$

Rel: □tum BC $\propto$ $xx-9$ Fit area ABC $\propto \frac{3}{2}\sqrt{xx-9}$

Ergo BC $\propto \sqrt{xx-9}$

Habetur itaqe æquatio inter aream ABC bis inventam

$$\begin{array}{lll}
11-x & \propto & \frac{3}{2}\sqrt{xx-9} \\
121-22x+xx & \propto & \frac{9xx-81}{4} \\
484-88x+4xx & \propto & 9xx-81 \\
565-88x & \propto & 5xx \\
113-\frac{88}{5}x & \propto & xx \\
0 & \propto & xx+\frac{88}{5}x-113 \\
x+\frac{44}{5} & \propto & z \\
x & \propto & z-\frac{44}{5} \\
xx & \propto & zz-\frac{88}{5}z+\frac{1936}{25} \\
+\frac{88}{5}x & \propto & +\frac{88}{5}z-\frac{3872}{25} \\
-113 & \propto & -113 \\
\hline
xx+\frac{88}{5}x-113 & \propto & zz^{*}-\frac{4761}{25} \propto 0 \\
zz & & \propto \frac{4761}{25} \\
z & & \propto \sqrt{\frac{4761}{25}} \\
x & & \propto -\frac{44}{5}+\sqrt{\frac{4761}{25}} \propto \frac{25}{5} \propto 5
\end{array}$$

Nunc idem problema beneficio literarum solvemus. Esto

$$\begin{array}{rl}
\text{AB} & \propto a \\
\text{Aggregatum areæ \& hypothenusæ} & \propto b \\
\text{AC} & \propto x \\
\text{Ergo area ABC} & \propto b-x \\
\text{Ex □to AC} & \propto xx \\
\text{Subtr: □tum AB} & \propto aa \\
\hline
\text{Relinquitur □tum BC} & \propto xx-aa \\
\text{Ergo BC} & \propto \sqrt{xx-aa} \\
\text{Multipl: BC} & \propto \sqrt{xx-aa} \\
\text{per } \frac{1}{2} \text{ AB} & \propto \frac{1}{2}a \\
\hline
\text{Area ABC,} \quad b-x & \propto \frac{1}{2}a\sqrt{xx-aa} \\
bb-2bx+xx & \propto \frac{1}{4}aaxx-\frac{1}{4}a^4
\end{array}$$

4bb

$$4bb-8bx+4xx \propto aaxx-a4$$
$$-8bx+a4+4bb \propto aaxx-4xx$$
$$\frac{-8bx+a4+4bb}{aa-4} \propto xx$$
$$0 \propto xx \pm \frac{8bx-a4-4bb}{aa-4}$$

$$x+\frac{4b}{aa-4} \propto z$$
$$x \propto z-\frac{4b}{aa-4}$$
$$xx \propto zz-\frac{8bz}{aa-4}+\frac{16bb}{a4-8aa+16}$$
$$+\frac{8bx}{aa-4} \propto +\frac{8bz}{aa-4}-\frac{32bb}{a4-8aa+16}$$
$$\frac{-a4-4bb}{aa-4} \propto \frac{-a4-4bb}{aa-4}$$
$$xx+\frac{8bx-a4-4bb}{aa-4} \propto zz * -\frac{16bb}{a4-8aa+16}-\frac{a4-4bb}{aa-4} \propto 0$$
$$zz \propto \frac{16bb}{a4-8aa+16}+\frac{a4+4bb}{aa-4}$$
$$z \propto \sqrt{\frac{16bb}{a4-8aa+16}+\frac{a4\pm 4bb}{aa-4}}$$
$$x \propto -\frac{4b}{aa-4}+\sqrt{\frac{16bb}{a4-8aa+16}+\frac{a4+4bb}{aa-4}}$$

Unde si ex: gr: pro a sumantur 3 & pro b 11, erit $x \propto 5$, adeoque $b-x$ seu area ABC $\propto 6$. Nam $\frac{16bb}{a4-8aa+16} \propto \frac{1936}{25}$, cui termino si addatur $\frac{a4+4bb}{aa-4} \propto \frac{565}{5}$ erit summa $\frac{4761}{25}$, cujus radix est $\frac{69}{5}$, è quâ si auferatur $\frac{4b}{aa-4} \propto \frac{44}{5}$, relinquitur

$$-\frac{4b}{aa-4}+\sqrt{\frac{16bb}{a4-8aa+16}+\frac{a4+4bb}{aa-4}} \propto \frac{25}{5} \propto 5$$

Ex duplici hujus problematis ſolutione illud innoteſcit, ſi problema ad ſingularem quendam caſum determinatum ſit, integrum nobis eſſe ejus ſolutionem vel per numeros vel per literas tentare, prout hic vel ille modus commodior viſus fuerit. Sed ſi generalis quædam regula pro conſtructione omnium ſimilium caſuum invenienda fuerit, adhibendas eſſe literas. Patet enim ex utriusque calculi inſpectione, priori modo problemati ſatisfactum eſſe, ſi AB ſit 3 & aggregatum areæ & hypothenuſæ 11. Sin alia fuerint data, ex. gr. ſi AB ſtatuatur $\propto$ 6, & aggregatum hypothenuſæ & areæ $\propto$ 34, integer calculus ab initio repetendus, hocque infinitis vicibus faciendum eſſet, quoniam infinitis modis data variari poſſunt. Sed poſteriori modo inventa eſt regula generalis pro omnibus datis in infinitum. Nam quodcunque fuerit latus AB & quodcunque aggregatum hypothenuſæ & areæ, ſemper erit $x \propto \frac{-4b}{aa-4} + \sqrt{\frac{16bb}{a4-8aa+16} + \frac{a4+4bb}{aa-4}}$ Unde ſi AB ſit 6, & aggregatum hypothenuſæ & areæ 34, invenietur pro hypothenuſa 10, quibus à 34 detractis, relinquitur area 24. Deinde & hoc obſervatu non erit inutile, etiamſi in quatuor ultimis his problematibus oſtenderimus modum, quo ſecundus terminus æquationis tolli debeat, illa prolixitate tamen opus non eſſe, ſed ſufficere ſi tres illi caſus à Carteſio Geometr. lib. I. p. 6 & 7. appoſiti ſumantur pro generali regula, ſecundum quam omnes reliqui caſus ſolvantur. Ita quum noſtra æquatio $xx \propto \frac{-8bx+a4+4bb}{aa-4}$ vel etiam $xx + \frac{8bx - a4 - 4bb}{aa-4} \propto 0$ ſimilis ſit ſecundæ Carteſianæ $yy \propto -ay + bb$ vel $yy + ay - bb \propto 0$ conferatur ſecundus terminus illius $\frac{8bx}{aa-4}$ cum ſecundo hujus ay, uti & tertius illius $-\frac{a4-4bb}{aa-4}$ cum tertio hujus $-bb$. Et quum pro Carteſianâ radice ſcribendum ſit

$y \propto$

$y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, facile patet nostram radicem esse $x \propto -\frac{4b}{aa-4} + \sqrt{\frac{16bb}{a4-8aa+16} + \frac{a4+4bb}{aa-4}}$. Est enim $\frac{1}{2}a$ dimidium quantitatis cognitæ, per quam quantitas incognita secundi termini nempe y multiplicata est, & eadem $\frac{4b}{aa-4}$ est dimidium quantitatis, per quam quantitas incognita x multiplicata est. Ita etiam $\frac{1}{4}aa$ est dimidium □ti ex quantitate cognita, per quam multiplicata est incognita y, cui respondet $\frac{16bb}{a4-8aa+16}$. Denique bb integer scilicet tertius terminus retinetur in exprimenda radice Cartesiana, retinendum itaque etiam est $\frac{a4+4bb}{aa-4}$ in nostra æquatione.

Ut autem natura problematum tam planorum quam solidorum eo melius innotescat, & quando problema planum, quando solidum sit intelligatur, explicabimus hîc regulam in principio libri tertii Geometriæ à Cartesio traditam. Cujus quidẽ regulæ quantus sit usus mox apparebit. Etenim sunt æquationes quædam, in quibus quantitas altius, quàm ad quadratum ascendit, ita tamen ut problemata illa non sint solida, sed plana, hoc est beneficio regulæ & circini construi possint. Quod qua ratione investigari possit, operæ pretium est scire. Ostendemus autem illud in resolvendo problemate Pappi, quale id habetur in Geometria Cartesii libr. cit. pag. 82. Vid. fig. VI.

PROBL. VI.

Datis quadrato AD, & rectâ lineâ BN, oporteat producere latus AC usque ad E, ita ut EF, ducta ab E versus B sit æqualis ipsi NB. Docet Pappus, quod, postquam primum latus BD productum est usque in G, ita ut DG æquetur DN, circulusque descriptus est cujus diameter BG, producendum deinde tantum sit latus AC, donec circumferentiæ hujus circuli occurrat in puncto E, quod requirebatur. Qua sanè constructio investigatu iis, quos lateret, difficilis satis foret: Etenim

qua-

quærendo illam per methodum hîc propositam, nunquam certè cogitarent assumendam esse DG pro quantitate incognita, sed potius CF vel FD vel CE: cum hæ tales sint, quæ facillimè omnium nos ad Æquationem perducant: sed ad Æquationem quæ non ita facile absque regula, quam jam exposui, explicari posset. Quippe ponendo a *pro BD vel CD,* c *pro EF, &* x *pro DF, fit CF* $\propto$ a—x; *Et ut CF seu* a—x *est ad FE seu* c, *sic FD seu* x *est ad BF, quæ proinde erit* $\frac{cx}{a-x}$ *Deinde propter triangulum BDF, cujus unum latus est* x, *& alterum* a, *quadrata ipsorum, utpote* $xx + aa$, *æqualia sunt quadrato hypothenusæ, quod est* $\frac{cc\,xx}{xx-2ax+aa}$ *Unde multiplicando totum per* $xx-2ax+aa$, *invenietur Æquatio* $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto ccxx$ *vel* $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0$. *Ubi per præcedentes regulas cognoscitur radicem ejus quæ est longitudo lineæ DF esse*

$$\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$

Quæ quidem radix ita invenitur. Primo tollatur in æquatione proposita $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0$ secundus terminus hoc modo:

$$\begin{array}{lll}
x - \frac{1}{2}a & \propto z & \\
x & \propto z + \frac{1}{2}a & \\
xx & \propto zz + az + \frac{1}{4}aa & \\
x^3 & \propto z^3 + \frac{3}{2}azz + \frac{3}{4}aaz + \frac{1}{8}a^3 & \\
\hline
x^4 & \propto z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2}aazz + \frac{1}{2}a^3z + \frac{1}{16}a^4 & \\
-2ax^3 & \propto -2az^3 - 3aazz - \frac{3}{2}a^3z - \frac{1}{4}a^4 & \\
+2aaxx & \propto +2aazz + 2a^3z + \frac{1}{2}a^4 & \\
-ccxx & \propto -cczz - accz - \frac{1}{4}aacc & \\
-2a^3x & \propto -2a^3z & -a^4 \\
+a^4 & \propto & +a^4 \\
\hline
\end{array}$$

$$0 \propto z^4 * \begin{smallmatrix}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{smallmatrix} zz \begin{smallmatrix}-a^3\\-acc\end{smallmatrix} z \begin{smallmatrix}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{smallmatrix}$$

Hæc

Hæc ultima æquatio, in qua quantitas incognita z est quatuor dimensionum, reducenda est ad aliam, quæ tres duntaxat dimensiones contineat. Quod hoc modo fieri potest. Reducenda sit æquatio $x4 * pxx \cdot qx \cdot r. \propto o$ ad aliam, in qua quantitas incognita tres duntaxat dimensiones habeat. Posuimus autem ad operationem faciliorem reddendam pro quantitate cognita tertii termini p, pro cognita quarti q, & pro ultimo termino, qui totus cognitus est, r. Et quod ad signa + & — attinet, possunt illa omnibus modis variari, atque ita pro singulis casibus regulæ inveniri. Ex. gr. Sit proposita æquatio $x4 * - pxx - qx + r \propto o$. Ut ergo inveniatur æquatio ejusdem formæ cum proposita, ponamus $xx + yx + z \propto o$ & $xx - yx + u \propto o$.

$$\begin{array}{l} + z \end{array}$$

Ex mutua harũ multiplicatione producitur $x4 * \begin{array}{l} -yy \\ +u \end{array} xx \begin{array}{l} -zy \\ +uy \end{array} x$ $+ uz \propto o$, æquatio ejusdem formæ cum illa $x4 * - pxx - qx + r \propto o$. Quarum æquationum termini si inter se conferantur, erit $z - yy + u \propto - p$ — $zy + uy \propto - q$, & $uz \propto r$. Unde facile inveniri potest valor ipsius z & u, hoc modo:

$$\begin{array}{ll} z - yy + u \propto - p & -zy + uy \propto - q \\ u \propto - p - z + yy & uy \propto - q + zy \\ -\frac{q}{y} + z \propto - p - z + yy & u \propto -\frac{q}{y} + z \\ 2z \propto yy - p + \frac{q}{y} & \\ z \propto \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} & \end{array}$$

Pro inveniendâ quantitate u in æquatione $z - yy + u \propto - p$ pro z substituatur valor inventus, eritque $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} - yy + u \propto - p$ seu $-\frac{1}{2}yy + \frac{q}{2y} + u \propto - \frac{1}{2}p$, eritq; $u \propto \frac{1}{2}yy - \frac{q}{2y} - \frac{1}{2}p$. Itaque pro æquatione $xx + yx + z \propto o$ scribatur $xx + yx$

$$ + \frac{1}{2}$$

$+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \propto 0$, & pro ista $xx - yx + u \propto 0$ ponatur $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$. Ut autem in his duabus æquationibus valor quantitatis incognitæ y cognoscatur,

$$\text{Multipl.} \quad u \propto \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$$

$$\text{per} \quad z \propto \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$$

$$\text{Et fit} \quad uz \propto \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - \frac{qq}{4yy} \propto r$$

$$y^6 - 2py^4 + ppyy - qq \propto 4ryy$$

$$y^6 - 2py^4 \begin{smallmatrix}+pp\\ -4r\end{smallmatrix} yy - qq \propto 0$$

Quod si eodem modo ut paulò antè operatio instituatur in reliquis omnibus casibus, patebit, si loco æquationis $x^4 * pxx . qx . r \propto 0$ scribantur hæ duæ aliæ $xx - yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \propto 0$ & $xx + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \propto 0$, quantum ad signa $+$ & $-$ quæ omissa sunt, si in æquatione præcedente habeatur $+p$, ponendum esse in utraque harum duarum $+\frac{1}{2}p$; & $-\frac{1}{2}p$, si in priori $-p$ habeatur: ponendum verò esse $+\frac{q}{2y}$ in una, ubi habetur $-yx$; & $-\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$. Et quod ad hanc æquationem attinet $y^6 . 2py^4 . \begin{smallmatrix}+pp\\ -4r\end{smallmatrix} yy - qq \propto 0$, si habeatur $+p$ in æquatione præcedente ($x^4 * pxx . qx . r . \propto 0$) in hâc ponendum esse $+2p$; aut si habeatur $-p$, ponendum esse $-2p$, & contra, si habeatur ibi $+r$, ponendum hîc esse $-4r$, aut si habeatur ibi $-r$, ponendum hîc esse $+4r$. Et sive illic fuerit $+q$, sive $-q$, semper tamen hîc ponendum esse $-qq$ &

$+pp$, saltem si x^4 & y^6 signis $+$ notatæ supponantur; quippe contrarium fieri deberet, si supponeretur ibi signum $-$. Prout hæc omnia docentur à Cartesio Geometr. lib. 3. Nunc quæ de æquatione $x^4 * p\,xx . q\,x . r \propto 0$, dicta sunt, ea applicabimus ad nostrã æquationem supra inventam $z^4 * \substack{+\frac{1}{2}aa \\ -cc} zz \substack{-a^3 \\ -acc} z \substack{+\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc} \propto 0.$

Quod in priori est p, illud in altera est $+\frac{1}{2}aa - cc$, quod in priori est q, hoc in altera est $-a^3 - acc$; denique quod in priori est r, illud in altera est $+\frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}aacc$. Primo itaque pro ista æquatione

$$xx - yx + \tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . q \propto 0$$

Scribenda est illa, $zz - yz + \frac{1}{2}yy \substack{+\frac{1}{4}aa \\ -\frac{1}{2}cc} \frac{\substack{-a^3 \\ -acc}}{2y} z \propto 0$

Pro hâc verò $xx + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \propto 0$

Scribenda est illa, $zz + yz + \frac{1}{2}yy \substack{+\frac{1}{4}aa \\ -\frac{1}{2}cc} \frac{\substack{+a^3 \\ +acc}}{2y} z \propto 0$

Eodem modo pro illa æquatione $y^6 . 2p\,y^4 \substack{+pp \\ -4r} yy - qq \propto 0$

ponenda est ista: $y^6 \substack{+aa \\ -2cc} y^4 \substack{-a^4 \\ +c^4} yy \substack{-a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4} \propto 0.$ Cujus æquationis ultimus terminus quum dividi possit absque fractione per a, aa, $aa + cc$, $a^3 + acc$, dispiciendum est, num aliqua ex his quantitatibus juncta cum quantitate incognita per signum $+$ vel $-$ componere possit binomium, quod dividat totam summam, factoque periculo videmus divisionem fieri posse per $yy - aa - cc \propto 0$ Ex quo patet $yy \propto aa + cc$, & $y \propto \sqrt{aa + cc}$. itaque in binis istis æquationibus $zz - yz + \frac{1}{2}yy \substack{+\frac{1}{4}aa \\ -\frac{1}{2}cc} \frac{\substack{-a^3 \\ -acc}}{2y} z \propto 0$, $zz + yz + \frac{1}{2}yy \substack{+\frac{1}{4}aa \\ -\frac{1}{2}cc} \frac{\substack{+a^3 \\ -acc}}{2y} z \propto 0$

pro y ponatur valor inventus $\sqrt{aa+cc}$, & pro yy substituatur $aa+cc$, eritque

$$zz - z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0 \quad \&$$
$$zz + z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0$$

Tollatur secundus terminus harum duarum æquationum hoc modo

$$\begin{array}{rl}
z - \tfrac{1}{2}\sqrt{aa+cc} & \propto u \\
z & \propto u + \tfrac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \\
zz & \propto uu + u\sqrt{aa+cc} + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc \\
-z\sqrt{aa+cc} & \propto -u\sqrt{aa+cc} - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}cc \\
+\tfrac{3}{4}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} & \propto +\tfrac{3}{4}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \\
\hline
0 & \propto uu * + \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}
\end{array}$$

$$-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto uu$$
$$\propto \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}} \propto u$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}} \propto z$$

Et quum $z + \frac{1}{2}a \propto x$, Erit $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Quod si cum posteriori æquatione $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$ eodem modo procedatur, eruetur tandem $x \propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Quæ de constructione hujus problematis deque his inventis radicibus monenda supersunt, videre est in Comment. Schoot. pag. 310. & seqq. Quod si nullum inveniri potuisset binomium, per quod summa istius æquationis $y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \propto 0$ divideretur, problema solidum fuisset, non planum, neque constructio per lineas rectas & circulos fieri posset, sed adhibenda esset sectio Conica. Cæterum qua ratione omnia problemata solida unicâ regulâ ope Parabolæ facile ac expeditè construi possint, prolixè docet Cartesius. *In quo sanè*, inquit Schootenius, *eximium atque sum-*

summi ejus ingenii artificium eluçet, à nullo (quod sciam) ante vel excogitatum vel ostensum.

Hactenus de natura Problematum tam planorum quam solidorum egimus: nunc de insigni illa & sublimi in Mathesi scientia, quam *Locorum inventionem* seu *compositionem* vocant, cui enixissimè incubuisse Veteres (quanquam successu nō adeo felici) ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarũ fragmentis manifestũ est, pauca addemus. Proponemus autem eam verbis & Mathematicorum & Philosophorum, quotquot unquã extiterunt, Principis Cartesii, qui postquam quæstionem illam Veterum, quam docente Pappo initio sui septimi libri, nec Euclides, nec Apollonius, nec quisquam alius penitus resolvere potuit, penitus explicuerat, & quicquid ad Locorum Planorum & Solidorum, quæ vocant, compositionem pertinet, felicissimè perfecerat, Geometr. libr. II. pag. 34. hæc addit verba: *Cæterum, quia æquationes, quæ ultra Quadratum non ascendunt, omnes in eo sunt comprehensæ, quod jam explicavi; non solùm Veterum Problema in 3 & 4 lineis hic penitus ad finem perductum est; sed etiam illud, quod ad id, quod Solidorum Locorum compositionem vocabant, pertinet; adeoque etiam locorum Planorum, cum illa in solidis contineantur. Quippe hæc loca nihil aliud sunt, quàm cùm in quæstione aliqua est inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipsa prorsus sit determinata. Quemadmodum in hoc exemplo, ubi omnia ejusdem lineæ puncta pro eo accipi possunt, quod est quæsitum. Etenim lineâ illâ existente rectâ aut circulari, locus vocatur Planus. At si illa est Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis, tum locus ille nominatur Solidus. Quotiescunque autem id evenit, potest perveniri ad æquationem, quæ duas quantitates incognitas continet, quæque alicui ex illis, quas jam resolvi, similis existit. Quod si verò linea, quæ sic quæsitum punctum determinat, uno gradu magis quàm sectiones Conicæ sit composita, ipsam eodem modo locum sursolidum appellare licebit, atque ita de cæteris. At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut sphærica, aut magis* *composita esse potest. Verùm summus scopus, quem sibi in hac materia Veteres præfixêre, fuit, ut ad Solidorum Locorum compositionem pervenirent; Et verisimile est, omne illud, quod Apollonius de Conicis sectionibus scripsit, eò tantùm, ut illam indagaret, respexisse.* Ut hæc omnia melius intelligantur placet problema aliquod resolvere;

PROBL. VII.

A Datis duobus punctis M & N, in positione datâ rectâ linea MD duas rectas lineas inflectere MC, NC, ita ut si à puncto inflexionis C ducatur recta CD in dato angulo E ad positione datam MD, quadrata ab inflexis MC, NC æqualia sint rectangulo sub datâ 2 AB & alia M'D, quæ ad alterutrum datorum punctorum M, vel aliud quodpiam in positione data MD ab ultimò ducta CD abscinditur. Vid. fig. VII.

Proponit hoc Schootenius in restitutis Locis Planis Apollonii.

Analysis: Sit primo datus angulus E rectus. Et quoniam ad inveniendum punctum C investigare oportet longitudinem linearum MD & DC, statuatur

MN $\propto a$ □to ND $\propto xx-2ax+aa$
AB $\propto b$ Add: □tum DC $\propto yy$
MD $\propto x$ Aggr: □tum NC $\propto xx-2ax+aa+yy$
Eritq; ND $\propto x-a$
DC $\propto y$

□to MD $\propto xx$
Addatur □tum DC $\propto yy$

Aggr: □tum MC $\propto xx+yy$
Addatur □tum NC $\propto xx-2ax+aa+yy$

Summa □tum MC + □to NC $\propto 2xx+2yy-2ax+aa \propto 2bx$ ▭lo sub 2 AB & MD.

Quoniam itaque omnia sunt peracta, quæ in quæstione desiderantur, neque tamen materia superest, ad aliam æquationem inveniendam, cujus ope quantitates incognitæ x & y penitus de-

ter

terminentur, ideo pro arbitrio assumi potest linea aliqua cognita pro x vel y, & pro diversis valoribus unius, semper invenientur diversi valores alterius. Et quidem quum uni incognitarum x vel y tribui possint infiniti valores, invenienda est linea aliqua vel recta vel curva, quæ determinet infinitos valores alterius. Harum linearum inventio & determinatio vocatur inventio & compositio Locorum. Et quidem si determinatio illa fiat per lineam rectam vel circularem, vocatur ille Locus Planus, si per parabolam, vel hyperbolam, vel ellipsin, Locus Solidus, si per lineam curvam uno gradu magis compositam, dici ille potest Locus sursolidus, & sic in infinitum. Ex. gr. in æquatione inventa $2xx + 2yy - 2ax + aa \propto 2bx$, assumatur incognita & indeterminata x pro cognita, pro cujus diversis valoribus invenientur totidem diversi valores ipsius y hoc modo:

$$\begin{array}{rl} 2xx + 2yy - 2ax + aa & \propto 2bx \\ 2yy & \propto -aa + 2ax + 2bx - 2xx \\ yy & \propto -\tfrac{1}{2}aa + ax + bx - xx \\ y & \propto \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + ax + bx - xx} \end{array}$$

Vel si $a + b$ statuatur $\propto e$, $y \propto \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + ex - xx}$

Ut autem promptè intelligatur, quali lineâ curvâ ad uniuscujusq; problematis constructionem opus sit, notandũ est, si in æquatione habeatur $-xx$ locum quæsitum esse vel circuli peripheriam, vel ellipsin. Circulũ quidẽ, si x vel alia quæcunq; linea, quæ denominationem suam ab ipsa x habet, quæq; pro diametro sumenda est, & vel tota y vel pars ejus in ipsam cadens angulos rectos faciat. Sin anguli fuerint obliqui, utendum erit Ellipsi. Si in æquatione habetur $+xx$, locus quæsitus est Hyperbola. Denique si xx planè esset omissum, ut si æquatio esset $y \propto \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + ex}$, locus quæsitus Parabola foret. Itaque quum in proposita æquatione habeatur $-xx$, angulusque quem x & y faciunt rectus sit, locus quæsitus erit circulus. Ad cujus centrum F, ut & semidiametrum FG, vel FH inveniendum statuatur FG vel FH

$\propto$

$\propto c$, MF $\propto d$, eritque DG $\propto c - d + x$ & DH $\propto c + d - x$

$$\text{Mult: GD} \propto c - d + x$$
$$\text{per DH} \propto c + d - x$$

Fit ▭lum GDH $\propto cc - dd + 2dx - xx \propto yy$ □to DC, Est autem & $-\frac{1}{2}aa + ex - xx \propto yy$. Itaque quum habeamus duas æquationes ejusdem formæ, erit primus terminus unius æqualis primo termino alterius, & secundus unius secundo alterius, tertius verò in utraque æquatione est plane idem. Unde sic operatio instituetur.

$2dx \propto ex$ $\quad cc - dd \propto -\frac{1}{2}aa$, pro dd substituatur $\frac{1}{4}ee$ ipsi æqualis

$2d \propto e$

$d \propto \frac{1}{2}e$

$$cc - \tfrac{1}{4}ee \propto -\tfrac{1}{2}aa$$
$$cc \propto -\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}ee$$
$$c \propto \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}ee}$$

Constructio. *Divisâ MN bifariam in O, sumatur OF* $+\propto \frac{1}{2}AB$, *excitatâque perpendiculari OI æquali ipsi MO, jungatur MI. Sumptâ deinde MK æquali ipsi MI, centro M, intervallo vero MF ducatur arcus FL, intersecans perpendicularem KL in L. Denique centro F, intervallo FG vel FH æquali ipsi KL, ducatur circulus GCH. Erit iste circulus locus quæsitus.* Hoc est, si ex M & N ad punctum quodcunque C in peripheria circuli GCH inflectantur duæ lineæ MC, NC, erunt □ta MC & NC simul sumpta æqualia ▭lo, quod sub linea MD (intercepta inter punctum M & perpendicularem CD) & 2AB describitur. Est enim ex constructione MF $\propto \frac{1}{2}e$ MI vel MK $\propto \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, KL vel FG $\propto \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}ee} \propto c$, radio quæsito.

Sit secundo datus angulus E vel CDM acutus, sitq; iterum

	MN	$\propto a$
	AB	$\propto b$
	MQ	$\propto x$
Ergo	NQ	$\propto x = a$
	QC	$\propto y$

Deinde quoniam datus est angulus E, data est ratio ST ad TE, quæ sit uti c ad d. Erit itaque ob similitudinem △lorum STE & CMD.

Uti

Uti ST *ad* TE, *ita* CQ *ad* QD.

$c \text{------} d \text{------} y \;|\; \frac{dy}{c}$

Addatur MQ $\propto x$

Aggr. MD $\propto x + \frac{dy}{c}$

$\square$to NQ $\propto xx - 2ax + aa$

Addatur $\square$tum QC $\propto yy$

Aggr. $\square$tum NC $\propto xx - 2ax + aa + yy$

$\square$to MQ $\propto xx$

Addetur $\square$tum QC $\propto yy$

Summæ $\square$to MC $\propto xx + yy$

Addatur $\square$tum NC $\propto xx - 2ax + aa + yy$

Mult. MD. $\propto x + \frac{dy}{c}$

per 2 AB $\propto 2b$

Summa $\propto 2xx + 2yy - 2ax + aa \propto 2bx + \frac{2bdy}{c}$

$2yy \;| \propto \frac{2bdy}{c} - aa + 2ax + 2bx - 2x$

$yy - \frac{bdy}{c} \propto -\frac{1}{2}aa + ax + bx - xx$

Ponatur $\frac{bd}{c} \propto e$ $\quad yy - ey \propto -\frac{1}{2}aa + fx - xx$

Item $a + b \propto f$

Eritque sublato secundo termino $y \propto \frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}ee - \frac{1}{2}aa + fx - xx}$

Itaque ut problematis constructio inveniatur sumenda est primo MR $\propto \frac{1}{2}e$, ducendaque RF parallela ipsi MN, eruntque omnes lineæ quæ ab MN ad RF ipsi MR parallelæ ducuntur uti est QY $\propto \frac{1}{2}e$. Ut autem longitudo lineæ YC, quæ æqualis esse debet $\sqrt{\frac{1}{4}ee - \frac{1}{2}aa + fx - xx}$, investigetur, statuatur VF vel FX semidiameter circuli quæsiti VCX $\propto c$, & RF $\propto d$, eritque VY $\propto c - d + x$ & YX $\propto c + d - x$

Mult. VY $\propto c-d+x$
Per YX $\propto c+d-x$

Fit ▭lum VYX $\propto cc-dd+2dx-xx \propto \frac{1}{4}ee-\frac{1}{2}aa+fx-xx$ □to YC

$2dx \propto fx \qquad cc-dd \propto \frac{1}{4}ee-\frac{1}{2}aa$ Deleatur dd

$2d \propto f \qquad cc-\frac{1}{4}ff \propto \frac{1}{4}ee-\frac{1}{2}aa$

$d \propto \frac{1}{2}f \qquad cc \propto \frac{1}{4}ee+\frac{1}{4}ff-\frac{1}{2}aa$

$c \propto \pm\sqrt{\frac{1}{4}ee+\frac{1}{4}ff-\frac{1}{2}aa}$

Unde hæc innotescit problematis Constructio. *Ad ST, TE & AB inveniatur quarta proportionalis, ejusque dimidio MR perpendiculariter ex M erecto, ducatur RX ipsi MN parallela, Deinde sumpta RF æquali $\frac{1}{2}$ MN + $\frac{1}{2}$ AB, junctâque MF, ex MO æquali $\frac{1}{2}$ MN ducatur perpendicularis OI itidem æqualis $\frac{1}{2}$ MN, & jungatur MI, sumtâque MK æquali ipsi MI, centro M, intervallo verò MF, ducatur arcus FL intersecans perpendicularem KL in L. Denique centro F intervallo autem FV vel FX æquali ipsi KL describatur circulus VCXHG, eritque circulus iste locus quæsitus:* hoc est si à punctis M, N, ad aliquod in circumferentia punctum C ducantur rectæ MC, NC, & statuatur CD in angulo CDQ æquali ipsi E, erunt □ta ipsarum MC, NC simul sumpta æqualia ▭lo contento sub data 2 AB & abscissa MD. Est enim ex constructione MR vel QY $\propto \frac{1}{2}e$, MF $\propto \sqrt{\frac{1}{4}ee+\frac{1}{4}ff}$, MI *vel* MK $\propto \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, unde KL vel FV, seu FX $\propto \sqrt{\frac{1}{4}ee+\frac{1}{4}ff-\frac{1}{2}aa} \propto c$ radio quæsito.

Si denique datus angulus E vel CDQ fuerit obtusus erit MD $\propto x-\frac{dy}{e}$, invenienturque æquatio $2xx+2yy-2ax+aa \propto 2bx-\frac{2bdy}{e}$. Unde omnibus eodem modo ut ante præparatis, fit $y \propto -\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}ee-\frac{1}{2}aa+fx-xx}$. Unde patet locum quæsitum esse arcum GCH. Quia enim ex superioribus YC, $\propto \sqrt{\frac{1}{4}ee-\frac{1}{2}aa+fx-xx}$,

& YQ

& YQ $\propto \frac{1}{2} e$, erit QC $\propto - \frac{1}{2} e \pm \sqrt{\frac{1}{4} ee - \frac{1}{2} aa} + fx - xx$.

Ex his omnibus judicare licet, quanta laus jure merito conferenda sit *Illustri Viro Renato Des Cartes*, qui hæc omnia sine perplexitate resolvere docuit, quæ à Veteribus aut planè non aut saltem sinè maxima difficultate solvi non potuerunt. Nam ea methodo doctrina ista à Veteribus inchoata videtur, *ut vix integrum & ingens volumen eidem sufficeret, si vel tantum Locorum, quæ Plana ac Solida (quamvis meo judicio minus rectè) vocarunt, id est, quæ vel recta linea, vel Parabola vel Hyperbola, vel Ellipsis sive circuli circumferentia existunt, (quorumque Locorum Compositioni eos solummodo intentos fuisse invenimus) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immensum excresceret, si ad Loca, quæ sunt lineæ curvæ secundi generis, extenderetur:* Quemadmodum ex re & vero judicat Nobilissimus atque Amplissimus Vir *Johannes de VVitt*, quondam Consiliarius & Pensionarius, sive Primarius Hollandiæ Westfrisiæque Minister, ob eximiam rerum Mathematicarum notitiam meliori fato dignus, insigni illo tractatu, quo Solidorum Locorum per artem Analyticam inventionem aliter, quàm Cartesius exponit. Sed ut magis adhuc innotescat, quàm longè lateque se se divinæ hujus methodi utilitas diffundat, placet unum atque alterum problema Arithmeticum & Geodæticum adjungere,

Ex Arithmeticis.

PROBLEMA.

DIvidere 14830 in quatuor partes; *ità ut $\frac{2}{3}$ primæ partis sint æquales $\frac{3}{4}$ secundæ, & $\frac{5}{6}$ secundæ æquales $\frac{7}{8}$ tertiæ, & $\frac{9}{10}$ tertiæ æquales $\frac{11}{12}$ quartæ.* Eſt hocinter problemata Arithmetica Clariſſimi Schootenii 39, arteque Analyticâ facilè ita reſolvitur.

Eſto prima pars $\propto u$
Secunda $\propto x$
Tertia $\propto y$
Quarta $\propto z$

$\frac{3}{4}x$ —— $\frac{2}{3}u$ —— $x / \frac{8}{9}u$
Multpl. per $\frac{5}{6}$

Fit $\frac{20}{27}u \propto \frac{5}{6}x$

$\frac{7}{8}y$ —— $\frac{20}{27}u$ —— $y / \frac{160}{189}u$
Mult. per $\frac{9}{10}$

Fit $\frac{16}{21}u \propto \frac{9}{10}y$

$\frac{11}{12}z$ $\frac{16}{21}u$ — $z / \frac{64}{77}u$

Quoniam $u + x + y + z \propto 14830$; Subſtituantur pro x, y, & z valores inventi

$u + \frac{8}{9}u + \frac{160}{189}u + \frac{64}{77}u \propto 14830$. Reducantur ad eandem denominationem

$\frac{7415}{2079}u \propto 14830.$

$\frac{1}{2079}u \propto 2.$

$u \propto 4158.$

Undę

Unde $x \propto \frac{8}{9}u \propto 3696$

$y \propto \frac{160}{189}u \propto 3520$

$z \propto \frac{48}{77}u \propto 3456.$

Aliud.

Septem mercatores debent cuidam creditori pecuniam hoc modo; Sex, excluso septimo, debent simul 994 aur: Deinde sex, secluso primo, debent 882. aur: Sex, secluso secundo debent aur: 952. Sex, demto tertio, debent aur: 896. Sex, excluso quarto, debent aur: 910. Sex, secluso quinto, debent aur: 840. Sex denique, excepto sexto, debent aur: 1036. Quaritur jam, quanta sit summa totius debiti, & quantum quisque debeat. Est hoc ænigma 57. Cap. 31. Algebræ Clavii.

Sint septem Mercatores A, B, C, D, E, F, G.

	aur.
$A+B+C+D+E+F$	$\propto 994$
$B+C+D+E+F+G$	$\propto 882$
$A+C+D+E+F+G$	$\propto 952$
$A+B+D+E+F+G$	$\propto 896$
$A+B+C+E+F+G$	$\propto 910$
$A+B+C+D+F+G$	$\propto 840$
$A+B+C+D+E+G$	$\propto 1036$

	$6A+6B+6C+6D+6E+6F+6G$	$\propto 6510$
Ex	$A+B+C+D+E+F+G$	$\propto 1085$
Subtr.	$B+C+D+E+F+G$	$\propto 882$
Relinquitur debitum ipsius	A	$\propto 203$
Subtr.	$A+C+D+E+F+G$	$\propto 952$

Relinquitur debitum ipsius B	℔	133
Subtr. A + B + D + E + F + G	℔	896
Relinquitur debitum ipsius C	℔	189
Subtr. A + B + C + E + F + G	℔	910
Relinquitur debitum ipsius D	℔	175
Subtr. A + B + C + D + F + G	℔	840
Relinquitur debitum ipsius E	℔	245
Subtr. A + B + C + D + E + G	℔	1036
Relinquitur debitum ipsius F	℔	49
Subtr. A + B + C + D + E + F	℔	994
Relinquitur debitum ipsius G	℔	91

Ex Geodæsia.

PROBLEMA.

TRiangulum ABC dividere trifariam, rectis prodeuntibus ex O puncto intra figuram, inchoatâ divisione à linea BO. Vid. fig. IX. Est hoc inter problemata Geometrica Schootenii 3. Sit ex gr. ager ABC, in quo sit fons O, dividendus in tres hortos, ita ut singulis hortis patis pateat aditus ad fontem O. Optima praxis Geodætica hæc est; Primo invenienda est perpendicularis BD, quam si à B ad D perticâ metiri non possumus, facile investigari potest ex cognitis tribus lateribus AB, BC, & AC △li ABC, ut si AB sit 26, BC item 26, & AC 20, erit BD 24, unde area △li ABC invenitur 240 (o) multiplicatâ nempe perpendiculari 24 (o) cum dimidiâ baseos quæ est 10 (o), seu quod idem est dimidia perpendiculari 12 (o) cum totâ basi 20 (o), ex utraque enim operatione semper provenient 240 (o): Ergo cum △lum ABC dividendum sit trifariam, obveniunt unicuique parti 80 (o). Ut autem tres istæ partes rectè discriminentur, junctis BO & OA quæratur perpendicularis OE, sitque illa 46 (1), ejus dimidium 23 (1) multiplicetur per AB 26 (o) proveniunt 598 (1) pro areâ △li ABO. Subtractis 598 (1), ab 80 (o) relinquuntur 202 (1) pro △lo AOG addendo △lo ABO. Pro inveniendo △lo AOG quæratur denuo perpendicularis OF 84 (1) per cujus dimidium 42 (1) si dividatur area 202 (1) △li inveniendi AOG, erit quotiens 481 (2) longitudo baseos AG. Estque ita trapezium ABOG una 3tia pars △li ABC. Ut autem & altera tertia pars GOIC inveniatur, subducatur AG 481 (2), ab AC 20 (o), relinquitur GC 1519 (2), quæ multiplicata per dimidiam perpendicularem OF 42 (1) facit 63798 (3) aream △li GOC, quæ subtracta ex 80 (o) relinquit 16202 (3) aream COI addendi △li GOC. Porro pro invenienda basi CI △li COI dividatur area 16202 (3) per dimidiam perpendicularem OH 37 (1) eritque quotiens 437 (2), longitudo quæsita baseos CI. Est itaque & trapezium GOIC tertia pars △li ABC, quod propterea divisum erit in tres æquales partes ABOG, & GOIC, & BOI. Q. E. F.

Cæterum vel ex hac ipsa praxi Geodætica, quæ bona quidem, at valde operosa est, satis superque innotescit, quanta sit Artis Analyticæ præstantia. Qua quidem qui rectè imbutus est, hujus & similium problematum expeditam constructionem facile inveniet, eamque sine ullo prolixo difficilique

processu

processu ad praxin transferet. Potest enim $\triangle$lum ABC modo præscripto trifariam dividi, si ex O ducatur ad D $\frac{1}{3}$ partem ipsius AC recta OD, & eidem ex B parallela BE, tum OE resecans partem ABOE, tertiam totius ABC. Deinde ad distinguendas reliquas partes ductâ OC ex F medio ipsius EB agatur ei parallela FG, & denique OG, quæ reliquas duas partes distinguit. Cujus demonstratio ex 37. Prop. l. 1. Elem. Euclidis est manifesta. Sed quum & demonstrationem & analysin hujus problematis omiserit Schootenius, è re fortasse erit illam hîc adjecisse. Vid. fig. X. Supponamus problema ut jam factum, & primo quidem ponamus trapezium ABOE esse tertiam partem $\triangle$li ABC, abscindaturque AD (a) $\frac{1}{3}$ pars ipsius AC, & ducatur BE, BD & OD. Quoniam $\triangle$lo ABD $\frac{1}{3}$ parti ABC (b) æquale est trapezio ABOE (c). $\triangle$lum BOE æquale est $\triangle$lo BDE. Ergo quoniam $\triangle$la BOE & BDE sunt constituta super eâdem basi BE, parallelæ erunt lineæ BE, DO (d) quod erat primum. Deinde quoniam trapezium BCEO etiam bifariam dividendum est, ponamus id fieri per OG, & $\triangle$lum BOG æquari trapezio CEOG, dividatur BE bifariam (e) in puncto F & ducantur CO, OF, CF & FG. Et quoniam (b) $\triangle$lum CEF æquatur $\triangle$lo BCF adeoque bifariam divisum est per $\triangle$lum BCE (f), quoniam item $\triangle$lum BOE bifariam divisum est per $\triangle$la OEF & OBF, tali modo devenire est ad æquationem. Trapezium EOGC $\propto$ $\triangle$lo BOG (c) Trapezium EOGC $\propto$ $\triangle$lo EFC $-$ $\triangle$lo EOF $-$ $\triangle$lo OFI $-$ $\triangle$lo OHI $+$ $\triangle$lo CHG. $\triangle$lum BOG $\propto$ $\triangle$lo BFC (vel EFC) $-$ $\triangle$lo BFO (vel EOF) $+$ $\triangle$lo OFI $+$ $\triangle$lo OHI $-$ $\triangle$lo CHG. Ergo $\triangle$lum. EFC $-$ $\triangle$lo EOF $-$ $\triangle$lo OFI $-$ $\triangle$lo OHI $+$ $\triangle$lo CHG $\propto$ $\triangle$lo EFC $-$ $\triangle$lo EOF $+$ $\triangle$lo OFI $+$ $\triangle$lo OHI $-$ $\triangle$lo CHG. Ergo $\triangle$lum CHG $-$ $\triangle$lo OFI $-$ $\triangle$lo OHI $\propto$ $\triangle$lo OFI $+$ $\triangle$lo OHI $-$ $\triangle$lo CHG. Ergo 2 $\triangle$la CHG $\propto$ 2 $\triangle$lis OFI $+$ 2 $\triangle$lis OHI. Ergo $\triangle$lum CHG $\propto$ $\triangle$lo OHI

(a) Schol. 10mæ, 6ti Eucl.
(b) 1ma 6ti.
(c) ex hypoth.
(d) 39 1mi
(e) 10ma 1mi.
(f) 9na 1mi.

Fig XI

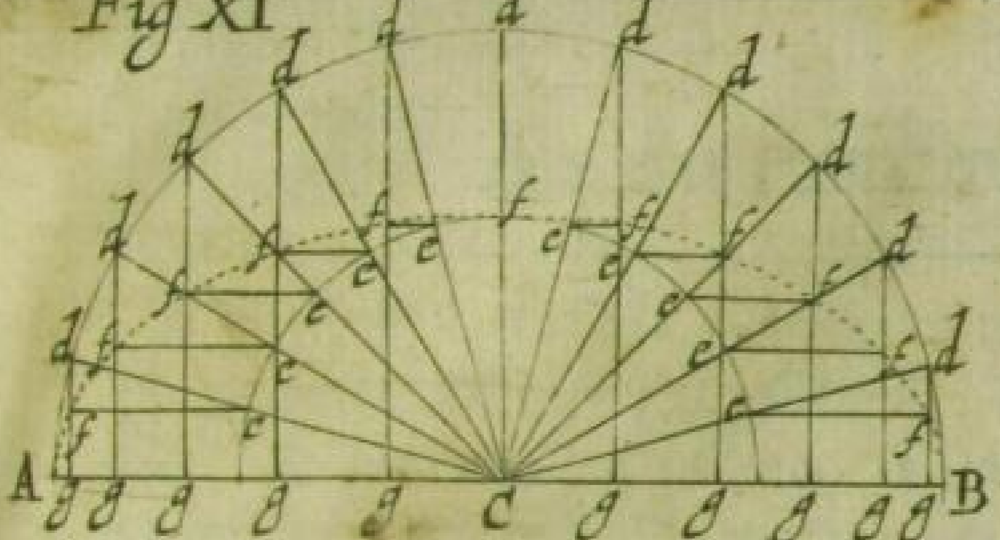


Fig:XII

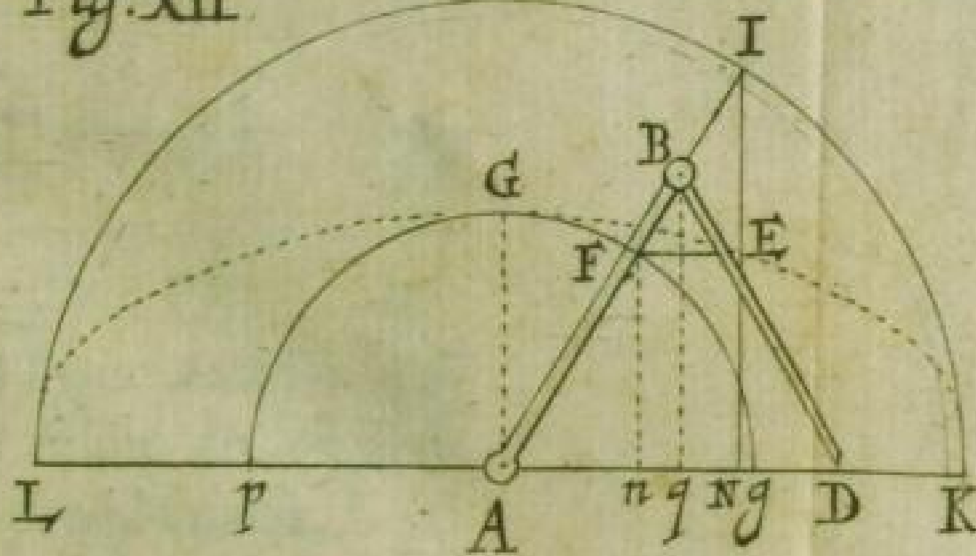


Fig XIII

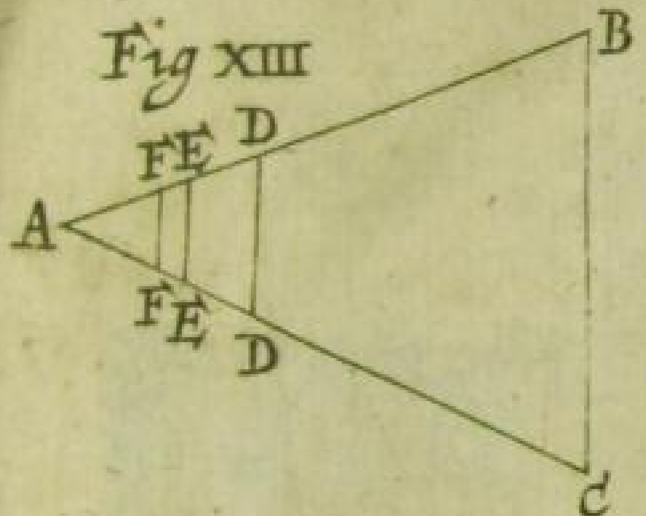


Fig:XIIII

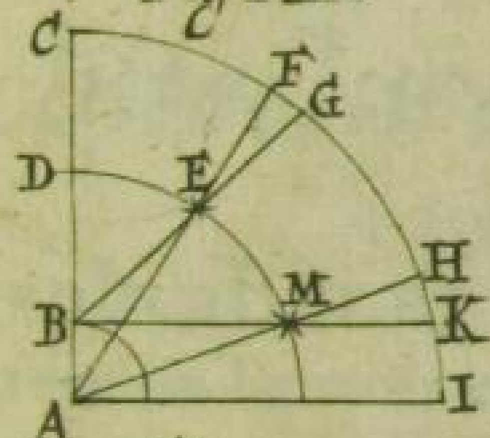


Fig:XV.

Fig:XVI

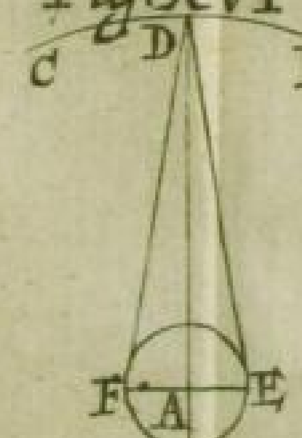


Fig:XVIII

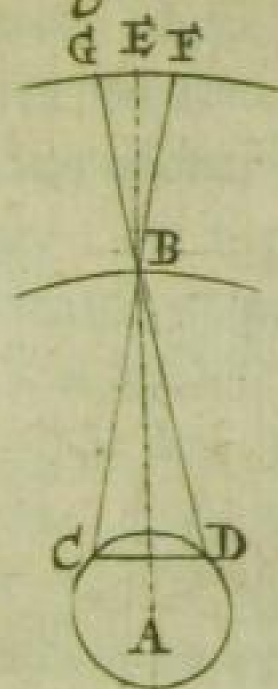


Fig:XIX

Fig:XVII

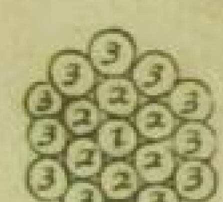


Fig:XX

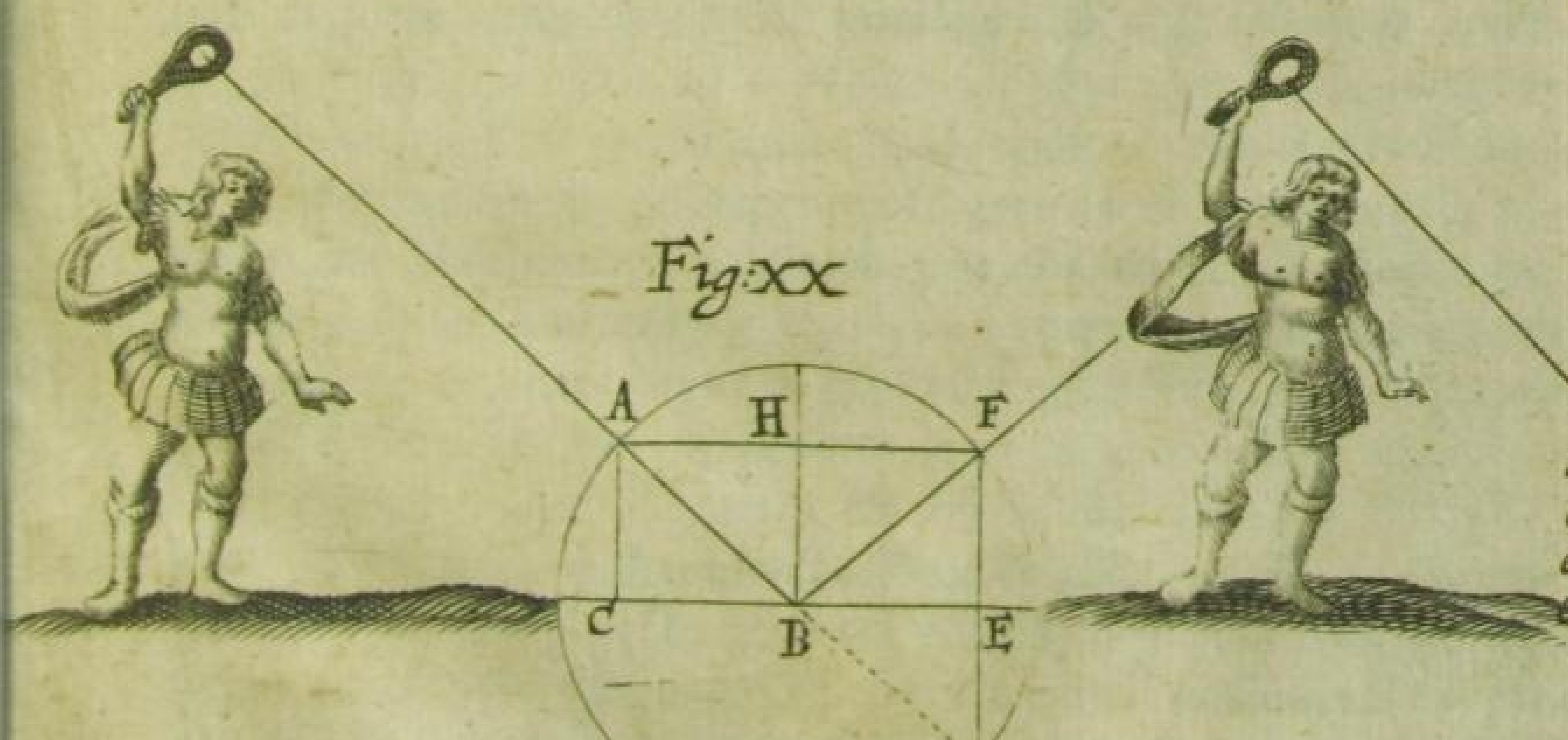


Fig:XXI

OHI ∽ △lo OFH. Addatur utrinque △lum OHC, Ergo △lum COF ∽ △lo COG. Sunt verò ſuper eadem baſi OC & ad easdem partes. Erunt itaque etiam in eisdem parallelis OC, FG, Patet itaque conſtructio problematis.

Ex Architectura Civili.

HIc explicabimus utilisſimam illam regulam lignariis cæmentariisque in extruendis concameratis lunatisqe teſtudinibus familiarem. Quæ quidem cum ſemicirculo humiliores fabricandæ ſint, à compluribus ſtructoribus diuturno uſu tantummodo fretis filo dirigente, deſignantur. At ſi prudens doctusque Architectus rationem Geometricam, ut par eſt, præeuntem ſequi velit, hac via tutus incedet. Vid. fig. XI.

Arcus ædificandi A*fff*B latitudine AB prius deſignata medioque ipſius C invento ducatur ſemicirculus A *ddd* B. Deinde alter ſemicirculus *g,e,e,e,e,g,* ambitu minori & arcui propoſito altitudine æqualis inter priorem collocetur: circulique majoris æquales deinde portiones *d, d, d,* aſſumtæ rectis *d*C ab earum punctis ad centrum C uſque deductis jungantur: poſtmodum punctis illis *e,e,e,* quibus rectæ à circuli majoris circumferentia ad centrum C extenſæ circuli minoris peripheriam abſcindunt, notatis, ab ipſis aliæ rectæ *ef*, *ef*, ad ſuperiores perpendiculares *fg*, *fg*, ipſæ quoque ad perpendiculum erigantur, & inter ſignata contactus puncta *f, f,* linea curva A*ffff*B perpetuaque extendatur, quæ doctæ potius expertæque manus uſum, quam circini ipſius operam efflagitabit. Vid. Serlius Architect. lib. 1. & Clavius lib. 1. Geom. prop. 26tâ. Quo pacto verò res omnis ad praxin transferri, operaque arcuata curvæ A*fff*B ſimilia extrui poſſint, vel ex ipſa, ſchematis inſpectione patet. Atque hinc ſine dubio orta eſt inventio instrumenti illius, cujus ope Ellipsin in plano delineare docuit Schootenius in egregio illo, & Geometris, Opticis, præsertim Gnomonicis & Mechanicis utilissimo tractatu, quem de Organica Conicarum Sectionum in Plano delineatione edidit Cap. II. Non ab re erit ea, quæ hac super re Comment. in lib. II. Geometr. Cartes: pag. 172. scripsit Vir doctissimus aliquanto uberius hîc explicare, præsertim quum ex his modus pateat, quo relationes linearum curvarum ad lineas rectas inveniri debeant, quæ unq est ex præcipuis fructibus quæ ex methodo Analytica ad nos redundant; Tale autem est *Problema. In plano quocunque concipiatur moveri AB regula, mobilis circa punctum fixum A, atque huic regulæ affixa alia æqualis regula B D, in puncto B, ut similiter circa punctum B in eodem plano moveri possit. Assumpto autem in BD inter B & D quovis puncto E, & commoto puncto D per rectam lineam AD: quæritur cujus generis sit curva linea, quam punctum E motu illo describit?* Vid. fig. XII.

Quoniam igitur ad hanc quæstionem oportet cognoscere relationem quam hujus curvæ puncta habent ad puncta lineæ rectæ AD, in qua punctum A est datum. Suppono ex puncto E, ad quod instrumentum huic curvæ describendæ inserviens est adplicatum, demissam esse super AD perpendicularem EN. Et quidem cum EN, NA, duæ sint quantitates indeterminatæ ac incognitæ, voco unam x *& alteram* y. *Deinde ut relationem unius ad alteram investigem, considero etiam quantitates cognitas AB, vel BD & DE, quæ hujus curvæ descriptionem determinant; illamque appello* a; *hanc* b. *Tum quia* △*lum NED est rectangulum, à quadrato ex DE, hoc est* bb, *aufero* □*tum ex NE hoc est* xx, *& relinquitur* □*tum ND, seu* $bb - xx$, *cujus radix* $\sqrt{bb - xx}$ *est ipsa linea ND. Porrò demissâ ex B super AD perpendiculari B* q, *secabitur recta AD ab ipsa bifariam in* q, *propter æqualitatem regularum AB & BD, fientque triangula B* q *D & END similia. Unde erit ut DE ad DN, hoc est* b

ad

ad $\sqrt{bb-xx}$, *ita DB, hoc est*, a, *ad* Dq, *seu* $\frac{a}{b}\sqrt{bb-xx}$ *&*

fit AD $\propto \frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$. *Caeterum cum AN sit* $\propto y$ *& ND* $\propto \sqrt{bb-xx}$ *erit tota AD* $\propto y + \sqrt{bb-xx}$. *Adeò ut habeatur aequatio inter AD bis inventam, hoc est, inter* $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx} - \sqrt{bb-xx}$, *vel inter* $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx} - \sqrt{bb-xx}$ *seu* $\frac{2a-b}{c}\sqrt{bb-xx}$ *& y. Et multiplicatâ utrâque aequalitatis parte in se, ut signa radicalia evanescant & aequatio ab asymmetria liberetur, fit* $4aa - 4ab + bb - \frac{4aaxx}{bb} + \frac{4axx}{b} - xx \propto yy$. *Quae aequatio si per transpositionem ac divisionem ordinetur, ita ut* xx *unam teneat aequationis partem (si sit* x *quam invenire volumus, relinquendo y indeterminatam) invenietur* $xx \propto \frac{4aabb - 4ab^3 + b^4 - bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, *vel* $xx \propto bb - \frac{bbyy}{4aa-4ab+bb}$ *Unde cum aequatio non ascendat ultra* □*tum unius ex quantitatibus indeterminatis, constat, lineam curvam descriptam esse primi generis, quippe quae alia non est quam Ellipsis, juxta ea quae secundo capite tractatus nostri de organica Conicarum sectionum descriptione demonstravimus.* Quam quidem demonstrationem ipsa analysis statim suppeditat. Est enim $4aa - 4ab + bb$ □tum, cujus radix est $2a - b$, nempe ipsa AI, cui aequatur AL vel AK. Et quoniam AN $\propto y$, erit LN $\propto 2a - b + y$, ipsa autem NK $2a - b - y$: Unde ▭lum LNK $\propto 2aa - 2ab + bb - yy$. Est itaque ut □tum AL seu $4aa - 4ab + bb$ ad □tum AG seu bb (vel ut □tum axis transversi LK ad □tum axis secundi dupli scil. AG, id est ut latus transversum ad latus rectum) ita ▭lum LNK nempe $4aa - 4ab + bb - yy$ ad □tum ordinatim applicatae seu xx. Patet itaque descriptam

illam

illam lineam curvam esse ellipsin *per Prop. 21. lib. 1. Conicorum Apollonii.*

Ex Architectura Militari.

Lineæ fortalitii irregularis sine ullo calculo Arithmetico compendiosè hoc modo inveniri possunt. Descriptâ ichnographiâ loci muniendi, inveniantur viâ vulgatâ lineæ fortalitii regularis, ad cujus instar extruendum est propositum irregulare: excitatoque △lo isosceli ABC cujus latera AB, AC æqualia sint lateri fortalitii regularis, basis autem BC lateri fortalitii irregularis, ex A in lineis AB, AC, sumatur longitudo linearum fortalitii regularis. Sit ex. gr. A D facies (la face, Germanicè Gesicht Linie) AE Collum (la Gorge oder die Kehl Linie) AF ala (le Flancq, l'Espaule, oder die Streiche) fortalitii regularis, eritque DD facies, EE collum, FF ala fortalitii irregularis. Demonstratio patet ex secunda, 6ti Elem. Euclid.

Ex Astronomicis.

Particula totius Astronomiæ longè ingeniosissima est parallaxium doctrina, eaque non minus necessaria quàm jucunda, & Physicæ veritati stabiliendæ quàm maximè accommodata. Hujus enim ope distantias Phœnomenon à terra, eorumque magnitudines colligimus & judicamus, quæ non modo ad eclipsiclipsium lunarium supputationem, sed etiam ad cometarum & aliorum novorum phænomenon generationem & situm adversus Aristotelis & Peripateticorum opinionem explicandum unicè faciunt. Est autem parallaxis duplex, vel altitudinis, vel diversorum horizontum. Utramque explicabimus. Vid. fig. XIV. Esto A terra, B statio observatoris in ejus superficie, CI quadrans Sphæræ stellarum fixarum, DM orbita phænomeni parallaxin habentis; horizon rationalis AI; horizon sensibilis BMK. Manifestum itaque est, si phænomeni in M vel E constituti ea à tellure sit distantia, ut sensibilis sit proportio inter semidiametrum terræ AB & lineam AM vel BM, item AE vel BE, atque duo, quorum alter in centro terræ A, alter in ejus superficie B constitutus esset, phænomenon in M vel E positum intuerentur, in diversis illud locis appariturum. Nam linea AMH designat punctum H in cœlo, sub quo phænomenon è centro conspectum appareret, qui locus verus dicitur, linea BMK verò punctum K, sub quo idem phænomenon ex puncto B videretur, qui locus visus dicitur, differentia inter locum verum H & visum K, seu arcus HK parallaxis dicitur, angulus verò HMK vel AMB parallacticus. Eodem modo phænomeni in E constituti locus verus F designatur lineâ AEF, visus verò lineâ BEG. Patet etiam phænomeni M in horizonte sensibili BM constituti maximam parallaxin esse HK, eamque gradatim imminui, prout idem phænomenon magis magisque supra horizontem attollitur: ita parallaxis FG phænomeni in E constituti, minor est parallaxi HK, in vertice verò D nulla est, quia linea BDC, & ABDC coincidunt. Nec minus palàm est phænomeni à terra remotioris minorem esse parallaxin, quàm alterius telluri vicinoris, adeoque si tam vasta sit phænomeni à tellure distantia ut nulla amplius sensibilis sit proportio inter semidiametrum terræ AB & lineam AM vel BM, item AE vel BE, lineam AB habendam tantum esse pro puncto physico, omnemque parallaxin perire, quoniam A punctum cum B puncto physicè coincidit. Quare in stellis fixis ob immensam illarum à terra distantiam nulla est parallaxis, in Saturno & Jove ferè insensibilis, major in Marte, Sole, Venere & Mercurio; in Luna quæ terræ maximè vicina est, maxima.

Modus quo ex parallaxi invenitur distantia phanomeni à tellure, hic est. Observetur ex. gr. per instrumenta accurata lunæ in meridiano existentis, locus visus G, & cognoscitur arcus CG, qui metitur angulum CBG, qui subtractus à 180° relinquit angulum ABE. Dico autem arcum CG metiri angulum CBG, quia quantum ad distantiam fixarum, A & B pro uno eodem puncto habentur. Deinde exploretur ejusdem lunæ E locus verus F, quod per accuratas tabulas facile consequemur. Supputato enim ex lunaribus motibus per tabulas loco lunæ ejusque latitudine, nec non longitudine in Eccliptica, cognoscitur ex motu latitudinis & angulo maximæ latitudinis, quanta debeat esse in tali horizonte & tali tempore vera ejus altitudo. Atque hoc modo etiam cognoscitur arcus CF, qui metitur angulum ACF vel BAE. Subtractis itaque angulis EBA & BAE à 180° relinquitur lunæ angulus parallacticus AEB. Sit itaque parallaxis Lunæ seu angulus AEB vel AMB $53'$, unde angulus MAB est $89^{\circ}, 7'$. Unde distantia lunæ à terra ope trigonometriæ facilimè investigatur. Nam

Partes radii   Semid. terræ AB, Sec. ang. $89^{\circ}, 7'$
ut, 10000000 —— 1 ———— 64, 8657162. AM

Tang. ang. $89^{\circ}, 7'$
Et 10000000 —— 1 ———— 64, 8580075, BM

Si scire porro velimus, quot milliaria Germanica Semediameter terræ AB contineat, multiplicentur 360 per 15, tot enim milliaria Germanica unum gradum in circulo majore terræ absolvere

vere constat, & proveniunt 5400 mill. pro ambitu terræ. Si jam fiat ut 22 ad 7 ita 5400 ad alium numerum, proveniunt 1718 $\frac{2}{11}$ mill. pro integra diametro terræ, vel quoniam ratio peripheriæ ad diametrum circuli est aliquantulo minor quàm 22 ad 7, assumantur 1720 mill. Germ. pro integra terræ diametro, unde semediameter AB continebit 860 mill. quibus per 64 multiplicatis fit distantia lunæ à terra 55040 mill. Germ. Quibus ità cognitis magnitudo lunæ haut difficulter investigatur hoc modo. Vid. fig. XV. Sit A locus spectatoris, B luna cujus diameter apparens CD inveniatur $30'$, unde semidiameter BC vel BD est $15'$: Fiat jam ut

Part: Radii	A B mill. Germ.	Tang. ang $15'$, BC
10000000 ————————	55040 ————————	43633,240 / 1560320

Inventa semidiametro lunæ facile invenietur ejus magnitudo. Quum enim Sphæræ sint in triplicata ratione suarum diametrorum vel quod idem est suarum semidiametrorum & cubus ex 860 mill. semidiametro scil. terræ sit 636056000, cubus autem ex 240 mil. semidiametro lunæ sit 13824000 erit divisis 636056000 per 13824000 quotiens 46 $\frac{19}{1728}$. Ergo terra major est luna 46 vicibus.

Inventio anguli parallactici AMB in Sole res est miri artificii, unde etiam in eo determinando mirum in modum variant, Astronomi. Esto ille ex sententia Alfragani $2'$, $50''$ eritque distantia solis à terra 1210 semidiam. Terræ, vel 1040600 mill. Germ. Esto porro ang. ABC $15'$. eritque semediameter solis BC 4540 mill. Germ. Unde Sol major est terra 147 vicibus. Quod si ex recentiori hypothesi Nobilissimi Viri Ottonis de Guericke angulus parallacticus Solis AMB statuatur $1'$, $18''$ invenietur distantia solis à terra 2644,4(1) ſemid. terræ, quæ conſtituunt 2274184 milliaria Germanica. Eritque ſol major terrâ 1521 vicibus. Non alienum hîc fore putamus, ſi elegantiſſimum quoddam dubium, quod à Copernicææ hypotheſeos impugnatoribus moveri ſolet, hîc excutiamus. Proponemus illud verbis Eruditiſſimi Viri *Chriſtiani Severini Longomontani*, qui Theoricorum lib. 1. cap. 1. diffiteri non poteſt, magni iſtius Copernici hypotheſin mundanam ac triplicis in ea motus telluris aſſertionem ingenioſiſſimè ad ſalvanda phænomena cœleſtia excogitatam eſſe, ac Phyſicis quoque rationibus ita munitam, ut difficulter convelli queat. Duo tamen inter alia inveniri putat, quæ fidem ipſi derogare in quibusdam, præcipuè annuum terræ motum concernentibus videantur. Eſt autem unum argumentum deſumptum ex ſacris, ad quod aliâs reſponderi poteſt. Alterum argumentum ductum ab immenſa intercapedine Sphæræ ſtellarum fixarum à terra vel ſole, incredibilique magnitudine ipſarum fixarum, quæ ſuppoſito annuo terræ motu ſequetur, hîc examinabimus. Vid. fig. XVI. *Deſcribatur ſuper A centro ſolis juxta Copernicum EAF annuus orbis terræ, & ex eodem centro arcus octavæ ſphæræ, ſeu orbis ſtellarum fixarum BC, ductâque à centro ad dictum arcum lineâ AD, erit hæc ſemidiameter ſphæræ octavæ à Sole, quam ſecundùm Copernicum tantæ longitudinis eſſe neceſſum erit, ut EF, id eſt diameter orbis annui terræ cum eadem nullam planè comparationem obtineat, ſed propter immenſam diſtantiam D ab A totus angulus EDF, quum terra utrinque in E & F, fuerit, evaneſcat. Nullam enim ſenſibilem variationem in locis ſtellarum fixarum, quum terra contrariis anni temporibus in his locis, juxta hypotheſin Copernicaam fuerit, perſentiſcere licebit, etiã obſervatione in juſto ac competente inſtrumento attentiſſimè & diligentiſſimè habita, velut in Huena aliquoties ad ſtellam polarem experimentati ſumus. Sit autem non ab obſervatione ullâ, ſed tantum hypotheſi angulus datus EDF unius minuti primi, quod ſatis in inſtrumento, ſi eſſet, diſcerni poſſet, erit EDA* $\frac{1}{2}$ *min. & quoniam in* △*lo rectangulo*

gulo EAD pro AD dantur omnes anguli & latus EA 1150 *Semid. terræ, solis & terræ ab invicem distantia media* (ex Tychonis hypothesi) *erit ut*

EDA 30″	EA	DEA 89°, 59′. 30″	AD
S. R. 1454441	——1150, semid:	—S.R. 9999979894,	7906818, semid. terræ

Atque in tantum qualibet fixa stella à Sole, aut media quasi distantia terra distaret: quod quidem spatium immensum est ab eo, quod Veteres & Tycho in fixis posuerunt, nempe 14000 *semid. terræ. Et quum ultimus Planetarum Saturnus consensu ferè omnium Astronomorum removeatur à terrâ circiter* 12000 *semid. terræ, quorsum igitur inanis intercapedo inter hunc & fixa sidera, quæ ex præmissis elicitur* 7894818. *semid. terræ?* At ex eo, quod nos capere non possumus, quorsum immensa illa intercapedo inter Saturnum & stellas fixas spectet, non sequitur eam non esse. *Nunc magnitudinem stellæ fixæ similiter ex hypothesi Copernicana Geometricè expendemus. Vid. fig. XV. Sit A terra vel Sol: stella aliqua fixa primæ magnitudinis B, erit itaque AB linea distantia stellæ à sole, vel media quasi terræ elongatione: quæ juxta suppositionem Coperniceæ ratiocinationi ante adhibitam reperta est semidiametrorum terræ* 7906818. *Porrò centro stellæ B scribatur ejus orbicularis magnitudo circello DC, ac ductâ diametro DC & præterea lineâ AC & AD quæremus primo in triangulo orthogonio ABC semidiametrum stellæ veram BC, in semidiametris terræ. διδόμενα autem hæc sunt. BA* 7906818 *semid. terræ, BCA* 1 *min. prim. ex observatione apparentis semidiametri stellæ primæ magnitudinis. angulus denique ABC rectus: quare erit, ut*

B	*BA*	*Tang. BAC*	*BC*
S. T. 10000000	——7906818	——2909,	2300 *semid. terræ*

Quoniam verò DC dupla est BC, erit illa totidem integrarum diametrorum terræ, ut puta 2300. *Ex hisce autem cognoscere*

 licet,

licet, quod diameter corpulentiæ ſtellæ primæ magnitudinis duplo major in hac ſuppoſitione fieret diametro annui orbis terræ; data nunc diametro ſtellæ fixæ primi honoris, quantitatem ejusdem in collatione primo cum toto globo telluris, ſeu ex terra, & aqua circumjacente congeſto acquirimus, dum utriusque & terræ & ſtellæ diametros propoſitas in cubicos numeros ſeorſim reſolvamus, minoremque ex majore ſubducamus. Sphæræ enim in triplicata ratione ſunt ſuorum dimetientium. Sequitur praxis. Numeri DC 23000 cubus eſt 12167000000: at datæ diametri terræ 1. part. erit quoque cubus 1. part. quare diviſo cubo ſuperiore per unitatem, idem numerus redit, nempe 12167000000, qui toties ſtellam primæ magnit. telluris globum ſuperare arguit, ſi vera Copernicæa erit ſuppoſitio. Idem verò numerus modo per 140 dividatur, in quantum ſcil: Sol ipſe magnitudine ſua terram hactenus ſuperare creditur; ſuperabit ſtella fixa primi honoris & ipſum ſolem vicibus 86907143. Denique quoniam in hac proportione diameter ſtellæ fixæ prius inventa fuit duplo major diametro orbis annui terræ, è parallaxeos cujuscunque hypotheſi prius ſuppoſita: proinde poſitâ hâc unius partis, erit illa 2. part. & dum ſingulæ cubicè excipiantur, manet cubus orbis annui 1. part. ſtellæ verò 8. part. Unde oſtenditur ſtellam primæ magnit: in ſuâ totali quantitate ſeu corpulentia octies totum diaſtema à ſole ad tellurem usque vincere debere, quod magnitudine annui orbis terræ circumſcribitur, modo ſuppoſitioni Copernicæa ullo modo locus dabitur. Hactenus Longomontanus. Huic tamen objectioni ex Opticis principiis ſatisfieri poteſt. Stellæ enim quamvis pro vera magnitudine valde exiguæ, pro vaſto tamen illo intervallo, quo à nobis diſtant, longè majores, quàm debebant, apparent. Primo enim corpora alba & lucida, & in univerſum omnia illa, quibus ineſt multum roboris ad movendum viſionis ſenſum, ſemper propiora apparent, quàm ſi minus virium haberent. Cauſa hæc eſt, quod dum ea intuemur, pupilla arcendi vehementioris luminis gratiâ conſtringitur, & quoniam in pervidendis objectis remotis eadem dilatari, in pro-

propinquis autem constringi solet, eo fit, ut dum pupilla ob quamcumque causam coarctatur, rem visam propinquiorem esse judicemus. Sed & eadem objecta luminosa majora quàm sunt apparent. Nam judicium, quod de magnitudine rei visæ ferimus, ex distantiæ æstimatione pendet, adeo ut res visa eo major appareat, quo propiorem eam esse judicamus, eo minor verò, qno illam remotiorem esse existimamus. Deinde etiam extremitates capillamentorum nervi optici (quorum motui lucis & colorum impressiones debemus) quamvis minimæ sint, tamen crassitiem aliquam habent, adeo ut singulæ ex illis in una sui parte ab uno objecto, in alia ab alio attingi possint. Quum autem unico tantum modo singulis vicibus moveri queant, eo fit, ut quoties illarum aliqua à corpore valde lucido impellitur, dum interim aliæ non nisi à minus illustribus tangantur, totum capillamentum ejus objecti, quod lucidissimum est, motum sequatur, & solam ejus imaginem ad cerebrum transferat. Vid. fig. XVII. Uti si sint extremitates capillamentorum, 1, 2, 3, & radii in fundo oculi stellæ imaginem pingentes diffundantur in 1, paululumque tantum sex vicinarum illarum 2, quas extremitates in 1 existentes in circuitu habent, oras contingant, siquidem in illas nulli alii radii à partibus cœli huic stellæ vicinis, nisi admodum debiles, effunduntur, effigies hujus stellæ per totum spatium extendetur, in quo sunt sex capillamentorum extremitates 2, & forte etiam per illud totum, quod aliæ duodecim 3 occupant, nempe si lucis actio sit tam fortis, ut illas etiam valeat commovere. Vid. Cart. Diopt. cap. VII. §. 22. Ex quo manifestè colligitur, etiamsi diameter apparens cujusdam ex stellis fixis primæ magnit: sit unius min. primi. illam tamen pro immenso isto intervallo, quo fixæ à nobis distant, multo minorem esse debere. Unde etiam magnitudo fixarum longè minor erit eâ, quæ calculo Longomontani elicitur. Veruntamen neque hoc obscurnm esse putamus, esse stellas fixas ipso sole majores, quamvis hoc forte incredibile videatur iis, qui ex Matheseos imperitiâ de vastissihoc mundi ædificio admirandâque corporum in eo contentorum mole, judicare non possunt. Restat ut vel verbo explicemus parallaxin diversorum horizontum. Vid. fig. XVIII. Sit centrum terræ A, Phænomenon parallaxin habens B, unus spectator constitutus in C, alter in D, erit E locus phænomeni B verus seu ex centro terræ videndus, F locus visus in horizonte C, G locus visus in horizonte D, arcus FG parallaxis diversorum horizontum C & D. Beneficio hujus parallaxeos ex observationibus à se Hafniæ & à Keplero Pragæ institutis eruditè demonstrat Longomontanus Cometam illum, qui visus est anno 1607 infra lunam in supremo aëris confinio, ut vult Peripatus non extitisse, sed intra cœlestem regionem longê supra lunam fuisse. Vid. append. Astron. Danicæ cap. IX.

Ex Geographicis.

PRoblema nobilissimum totiusq; Geographiæ utilissimum est: *Longitudinem loci, in quo versamur, incogniti quocumque tempore invenire.* Cujus quidem solutionem tantopere nautæ exoptant, ut Angli, Galli & Belgæ ad quinquaginta millia floren. singuli ferè mercedem ejusdem inventori constituerint. Exercuit illud torsitque duobus hisce seculis summorum Mathematicorum ingenia, qui tam luculento præmio inducti irrito quamvis conatu in ejusdem enodatione strenuè desudârunt. Illud certum est, desiderio nautarum omnino satisfactum iri, si horologium automaton parari posset nulli vitio obnoxium, ita scil. ut viginti quatuor horas indicaret eodem tempore, quo sol circumvolvitur, & diem sive 24 horas efficit, neque vel anticiparet vel postponeret indicium. Quum enim sol, omnes stellæ & in universum omnia in cœlo concepta puncta singu-

lis holis horis à cujusvis loci meridiano recedant gradibus quindecim, manifestum est, quæ loca sita sunt in meridianis 15° à se invicem remotis, eorum illum, qui orientalior est, numerare omnes horas prius, quam alter locus, unâ horâ, ex. gr. ut illi sit octava hora, quando huic septima est, illi nona, dum huic est octava, & sic deinceps. Fac itaque ad manus esse horologium automaton usquequaque perfectissimum, longitudines quorumvis locorum facilimè inveniuntur hoc modo. Observatâ accuratè quacunque horâ loci illius unde navis solvit, componatur ad eam horam horologium: quod postea horas istius loci accuratè indicabit. Quum itaque perventum erit ad locum alium, cujus longitudinem, sive cujus meridiani distantiam à meridiano illius loci, unde discessum est, scire cupis, nihil agendum restat, nisi ut cognoscatur de cœlo hora istius loci, cujus longitudo quæritur, & simul inspecto automato videatur quoque hora alterius loci, unde navis solvit. Differentia illarum horarum monstrabit distantiam meridiani, ubi observator existit, à meridiano ejus loci, unde discessit. Verumenimveror, quantamcunque hactenus in ejusmodi automato fabricando diligentiam adhibuerint artifices, nemini tamen tam felici esse licuit, ut voto potiretur. Etenim & conditio materiæ, ex quâ fiunt automata, & diversa aëris temperies tollit perpetuam motus æqualitatem. Tardius enim moventur automata aëre frigido quam calido, adeo quidem, ut automatum, quod Belgæ in Nova Zembla hyemem agentes in ædibus suis collocaverant, omnem motum perdiderit, etiamsi multo majus pondus, quàm antea, additum ipsi fuisset. Prodiit tamen non ita pridem in scenam Vir Nobilissimus & de universa Mathesi bonisque literis præclarè meritus Dn. Christianus Hugenius à Zulichem, qui reperti à se horologii, quod vocat oscillatorii seu penduli ope longitudinum inventionem ad ultimam tandem perfectionem perduci posse sperat. Adhibita illa horologia aliquoties magno cum successu fuerunt, ita ut ipse privilegium eo nomine ab Illustrissimis Ordinibus fœderati Belgii, præmiumque inventioni, si bene res succederet, constitutum seorsum ponendum petierit. Cui etiam petitioni Præpotentes Ordines assurrexerunt, & unum ex novis horologiis in Conventum suum afferre jusserunt, ut ipsis inventionem cum applicatione ad Longitudines explicaret. Id quod ipse non sine magno applausu præstitit. Quemadmodum hæc omnia Vir ille Clarissimus de se memorat Epistolâ quadam hac de re amico Lutetiam scriptâ, quam actis Philosophicis Societatis Regiæ in Anglia anni 1665. Num. I. inseruit ejusdem Soaietatis Secretarius Henricus Oldenburgius. Promittit eâdem epistolâ Eruditissimus Hugenius se editurum esse figuram novi sui horologii cum omnibus demonstrationibus suis & tractatu quodam de globis pendulis subtilissimâ speculatione constantem. Prodiit ille liber anno 1673. Parisiis plenus reconditæ doctrinæ, inquinque partes divisus. Quarum prima descriptionem horologii oscillatorii continet: Secunda agit de descensu gravium & motu eorum in Cycloide: Tertia de evolutione & dimensione linearum curvarum: Quarta de centro oscillationis seu agitationis: Quinta alterius horologii constructionem, in quo circularis est penduli motus, exhibet, & theoremata de vi centrifuga. Prima parte, quum quæ ad structuram horologii istius pertinent, explicuisset Nobilissimus Auctor, quid & quâ fortunâ hîc tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum restet, exponit. Ita autem ille: *Prima duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuêre anno* 1664, *quæ Vir Nobilis è Scotia, nobisque amicus ad nostrorum exemplum fabricari curaverat. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa est, Præfectus classis hæc retulit. Se nempe cum à Guineæ littore solveret, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, pervenisset, quæ æquinoctiali circulo subjacet, compositis hîc ad solem horologiis, occidentem versus cursum instituisse atque ad septingenta circiter limliaria continuo tramite progressum, tum rursus vento favente*

Li-

Libanoto ad Africæ littora declinavisse. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eò cursum tenuisset, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigissent, aquâ adpotum deficerentur, suasisse ut ad insulas Americanas Barbatorum dictas, aquandi gratiâ deflecteret. Tum sese concilio nauclerorum habito, jussisque ut Ephemerides ac supputationes singuli suas proferrent, reperisse cæterorum calculos à suis diversos abire, unius quidem 80 milliaribus, alterius centenis, tertii amplius &c. Ipsum verò cum ex horologiorum indicio collegisset non amplius quàm triginta circiter milliaribus abesse insulam del Fuego *dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die teneri posse, confisum pendulis suis eo cursum dirigi imperâsse, ac die insequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum venisse insulam, paucis post horis navibus stationem præbuisse. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu. Ab eo verò tempore aliquoties tum Batavorum tum Gallorum operâ, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sæpius negligentia eorum, quibus horologia commissa erant, quam ipsa automata culpari possent. Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam Insulam, quo Illustrissimus Dux Belfortius, Candiæ à Turcis obsessæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis missus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in eâ, quâ vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratiâ habebat, virumque Astronomiæ peritum iis præfecerat; è cujus observationibus, in singulos dies habitis, longitudines locorum, ad quæ in ea profectione aut appulerunt naves, aut quæ prætervecti dignoscere oculis potuerant, horologiorum operâ exacte dimensas fuisse comperimus, atque ita ut Geographicis descriptionibus, quæ melioris notæ habentur, eædemmet longitudinum differentiæ designatæ experiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum hor. 1. Scrup. 22. reperta*

perta fuit, hoc est graduum longitudinis, 20°, scrup. 30′ ac rursus à Candia Tolonum revertentibus differentia proximè eadem, qui consensus certissimum veritatis est indicium. Inter eundem Toloni portum & insulam quandam cui Maretimo *nomen est, prope promontorium Siciliæ, quod Occidentem spectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria observata est scrup. prim. 25, sec. 20. quibus respondent gradus longitudinis 6°, scrup. 20′. Item à Tolono ad insulam* Sapienza *dictam, quæ juxta Peloponnesum est Occidentem versus hora 1, scrup. 5′, sec. 45″, quibus respondent longitudinis gradus 16°, scrup. 26′.*

Ex Opticis.

Opticæ disciplinæ ut præstantiâ & jucunditate, ita etiam insigni difficultate reliquas omnes superant, Versantur enim in tali re, quæ sensibus clarissima quidem (de luce enim agunt) at intellectui obscurissima existit. Quod facile probari potest. Etenim tametsi ab omnibus retro seculis clarissimi quique Mathematici & Physici nobilissimam hanc Philosophiæ partem tractare aggressi fuerunt, adeo tamen voto potiti non fuerunt, ut in explicanda luminis natura nihil in medium afferre potuerint, quod non dicam pro certo, sed pro verisimili tantum haberi debeat. *De lumine non nisi obscura loqui possumus*, inquit Grimaldus Proëm. in Physico Math. de lumine, *quia tametsi ejus præsentiam nemo non cæcus ignorare possit, ejusdem tamen naturam & quiditatem penitus introspicere difficilimum est. Hinc illæ ambages*

Fig XXVIII

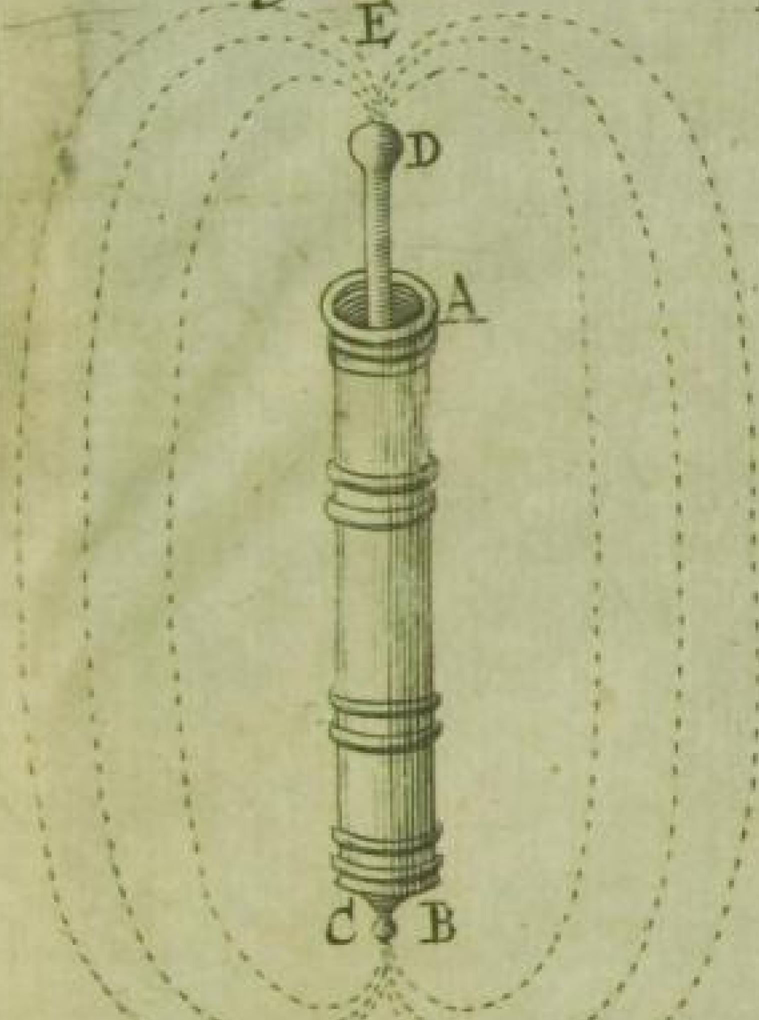


Fig:XXIX

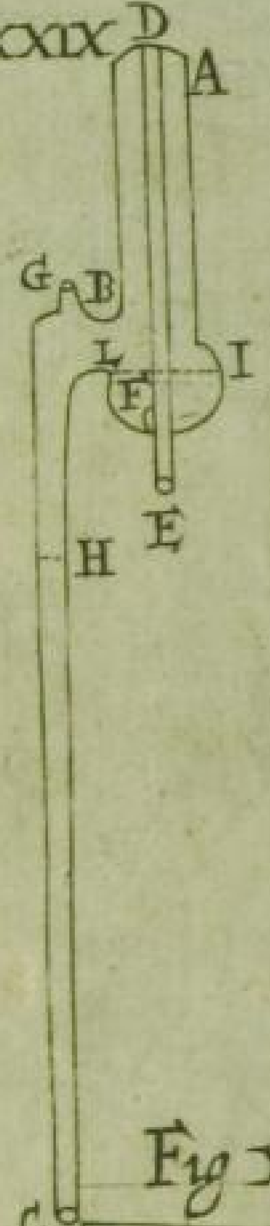


Fig:XXX.

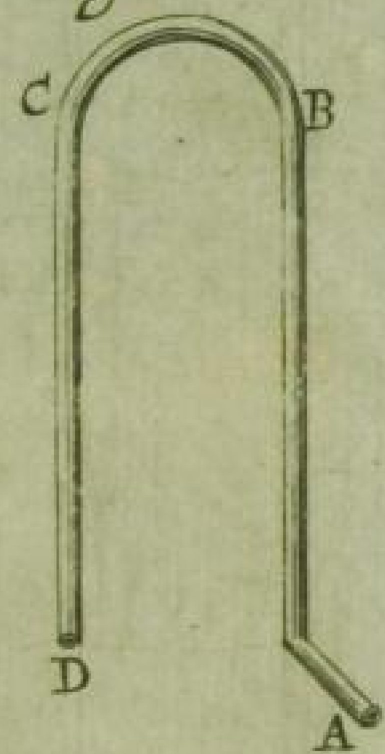


Fig:XXXIII

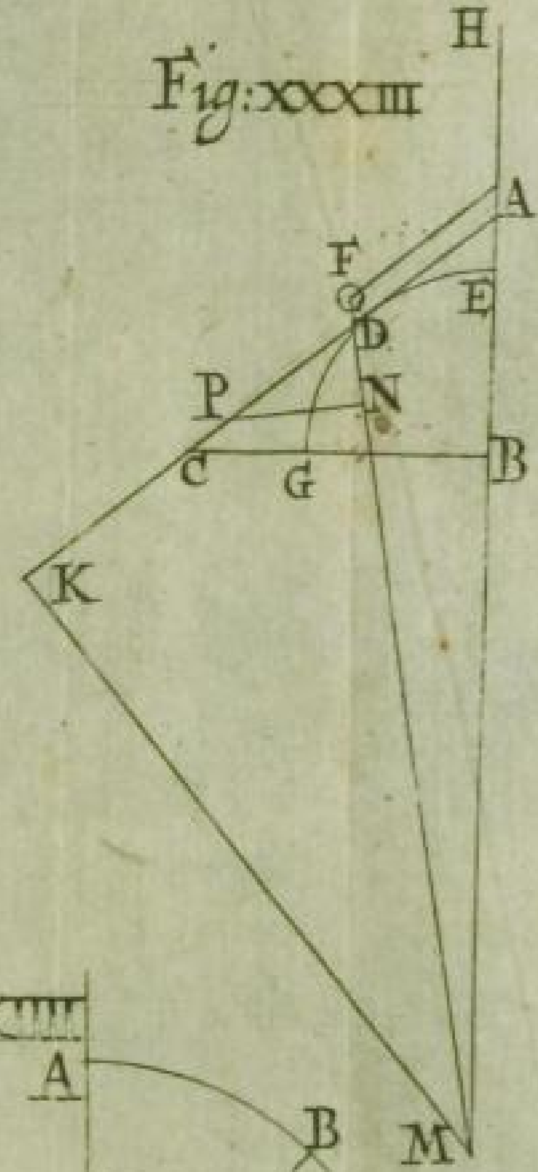


Fig:XXXIIII

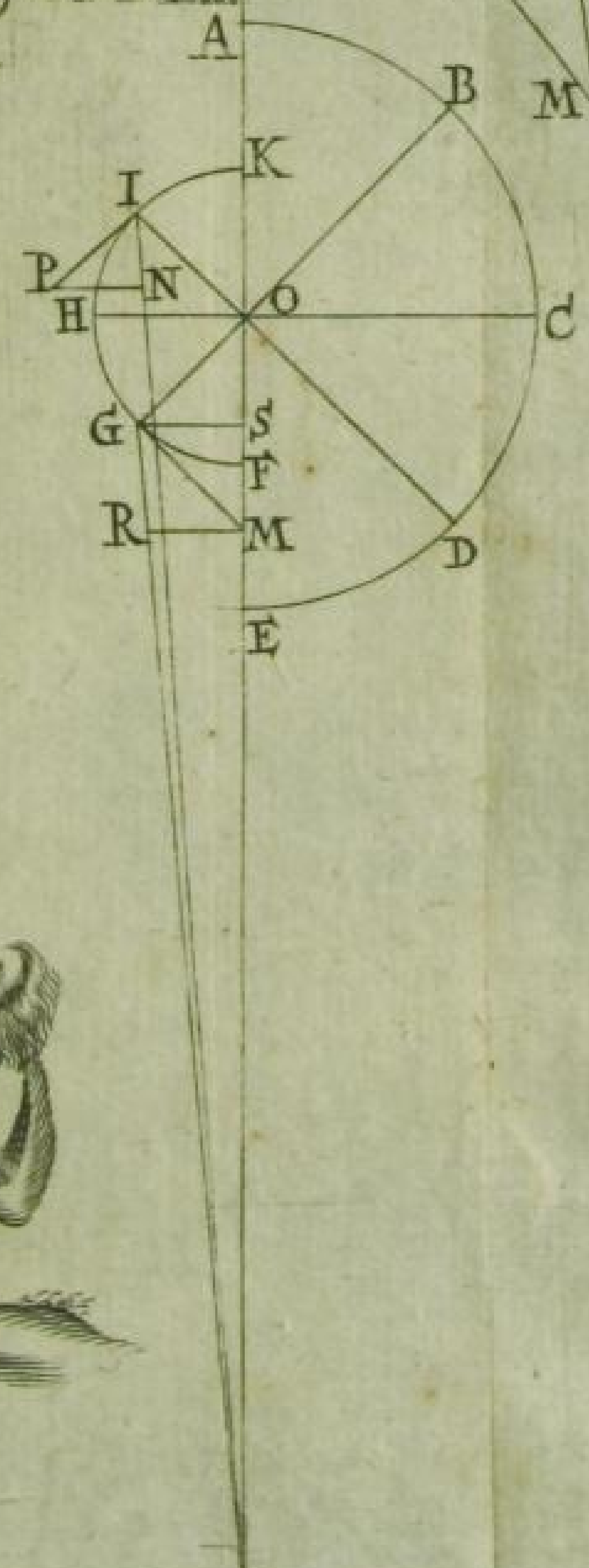


Fig:XXXI

Fig XXXII

bages, & ænigmatica verborum mysteria, quibus tum definitio luminis, tum quæ illam consequuntur proprietates, involvuntur, atque obtenebrantur à plerisque Philosophorum, dum eas tamen profitentur explicare se velle ac declarare. Hinc rursus frequentes illæ laudum exaggerationes & encomiasticæ hyperbolæ, quibus lumen inter spiritualia entia vix non collocatur, aut saltem singulari quadam, sed indebita prærogativa præ cæteris sensibilibus passim donatur, dum licet corporeum, ac de se immediatè sensibile, dicitur tamen adeo immateriatum, ut etiam videatur posse peculiarem aliquam sibi sedem vendicare inter utrumque ordinem rerum, spiritualium scilicet ac materialium. Nimirum ubi rei natura difficile investigari potest, proclive est adejusmodi admirationem confugere eamque plus nimis attollere. Quo majorem admirationem meretur divinum Cartesii ingenium, qui primus omnium lucis naturam accuratè explicavit, modumque ostendit, quo ea, quæ Opticæ disciplinæ mirabilia habent, ex certis principiis deduci & demonstrari possint. Quod fusius aliquanto hic ostendere lubet. Fig. XIX. exhibet oculum, qui plano per mediam pupillam transeunte sectus intelligatur, ABCD est membrana satis crassa & dura, omnes partes interiores oculi arcens & complectens. ZH nervus opticus, ingenti numero parvorum capillamentorum compositus, quorum extremitates per totum spatium GHI diffunduntur, ubi innumeris exiguis venis atque arteriis mixtæ speciem quandam carnis tenerrimæ componunt, quæ tertiæ membranulæ instar totum interius secundæ fundum tegit. KLM tres sunt liquores valde pellucidi totas has tuniculas distendentes. EN, EN sunt plurima filamenta nigra undiquaque amplexa humorem L, & orta ex membrana secundæ, quorum ope oculus modo in majorem gibbum curvatur, modo in planum magis porrigitur. Denique O, O sunt sex aut septem musculi extrinsecus oculo affixi, à quibus quoquoversum moveri potest: Intelligamus itaque omnia cœlorum spatia repleta esse materia quadam valde ſubtili & fluida, ita ut levi quodam impulſu versùs omnes partes facile premi poſſit: quæ quidem materia, quàm luminoſam dicemus, reliquorum corporum poros & meatus permeet ac repleat, non ſecus ac aqua arenæ cinerum atque aliis corporum terreſtrium poris illabitur. Intelligamus deinde materiæ, quam deſcripſimus, innatare corpora lucida, ut ſunt ſol, ſtellæ, flamma, eaque diviſa eſſe in innumeras partes ſubtiliſſimas motu rapidiſſimo quoquoverſum agitatas atque ita materiam illam luminoſam ex omni parte validiſſimè à ſe propellentes. Intelligamus porro aëris, aquæ, vitri aliorumque corporum pellucidorum poros ita eſſe ordinatos, ut actionem illam corporum lucidorum in materia luminoſa excitatam ſine interruptione transmittant, non ſecus ac cribra & ſepes aquam profluentem tranſire patiuntur: corpora autem opaca illa eſſe quæ ob inordinatam pororum diſpoſitionem preſſionem iſtam corporum luminoſorum interrumpunt. Intelligamus denique aërem conſtare ex particulis terreſtribus valde ſubtilibus, mollibus & flexibilibus, aquam autem ex particulis multo craſſioribus adeoque & inflexibilioribus, vitrum denique aut cryſtallum ex particulis planè rigidis & difficulter mobilibus. Ex quo efficitur, materiam illam luminoſam, quæ poros aëris perlabitur, ejusque flocculos non aliter, quàm ventus plumulas agitare ſolet, multum actionis ſuæ in illa amittere, minus autem in aqua, cujus partes difficilius agitantur, minimum denique in vitro & cryſtallo, cujus partes ferè ſunt inflexibiles. Non ſecus ac pila vel globus facilius & celerius fertur ſuper menſa nuda, quam tapeto inſtrata, celeriusque adhuc ſuper tapeto duriore, quam molliore. Nam partes tapeti molles agitationem pilæ facile in ſe recipiunt, & quantum pila motui illarum impendit, tantum ipſa de ſuo perdit: partes verò menſæ nudæ duriores ſunt, quàm ut à pila concuti poſſint, adeoque pila motum ſuum integrum retinendo tanto celerius ſuper eadem fertur. Quibus ita explicatis intelligagamus

gamus lucem ſolis, ſtellarum aliorumque corporum lucidorum ſentiri, quando preſſio illa ſeu agitatio à corporibus lucidis in materia luminoſa excitata ordine non perturbato ad oculos noſtros tranſit. Quod fit quando aëre puro, nec ullis vaporibus craſſioribus pleno, vel ſolem aliaque corpora lucida directè intuemur, vel ſi actio illa in ſuperficiem corporis æquam & levem (qualia corpora ſunt ſpecula) incidens ab eadem imperturbatè ad nos reflectitur quemadmodum multæ pilæ in ſuperficiem lævem corporis duri incidentes ordine non perturbato ab eadem reflecti ſolent. Quod ſi nulla eſt actio in materia luminoſa à corporibus lucidis excitata tenebræ ſunt, aut ſi materia luminoſa incidit in corpus cujus exiguæ & ſenſibiles particulæ aut tam molles ſunt ut agitationem luminis ſuffocent, non ſecus ac lana pilæ motum, aut ita ſitæ ut eandem introrſum non autem extrorſum reflectant, corpora nigra apparent. Si corpus aliquod conſtet ex particulis lævibus quidem & æquis, ſed nimis tamen exiguis, quàm ut integram corporis lucidi imaginem ſingulæ reflectere poſſint, album illud erit. Quod ſi denique materia luminoſa aut corpus aliquod pellucidum perlabendo, aut reflexum à corpore opaco planè confunditur, & cum circumvolutione aliqua ad oculum venit, oriuntur reliqui colores, & rutilus quidem, ſi gyratio illa ſit celerrima, ſi aliquanto tardior, flavus, ſi minima cæruleus. In viridi antem gyratio celerior eſt, quam in cæruleo, & tardior quàm in flavo. Facile enim intelligimus ex his diverſis actionibus diverſos motus excitari in retina oculi, ſeu in exiguis nervi optici capillamentis, qui per nervum opticum ad interiores cerebri partes delati ibidemque diverſos motus excitant, atque ita varias lucis & colorum impreſſiones producunt. Quemadmodum iſta & ejusmodi plura alias prolixius explicari poſſunt.

Ex Catoptricis.

LUmen ad ſpeculum delapſum ab eo reflectitur, ita ut angulus reflexionis exactè æqualis ſit angulo incidentiæ. Vid. fig. XX. Ita ſi CBE ſit ſpeculum imago objecti in H exiſtentis ſecundùm lineam perpendicularem HB in ſpeculum incidens, ſecundùm eandem perpendicularem BH à B ad H reflectitur, Sin imago obliquè ab A ſcilicet ad B incidat, eadem versùs oppoſitam partem à B ad F reflectitur, ita ut angulus incidentiæ ABC æqualis ſit angulo reflexionis EBF. Axioma illud hactenus Opticis fuit, ſolâ experientiâ nixum, quum cauſam tam admirandi Phænomeni ignoraverint. Primus eam invenit Carteſius, eſtque valde ingenioſa. Lumen jam tum diximus eſſe motum vel potius preſſionem excitatam in materia luminoſa à corporibus lucidis. Quæ quidem preſſio iisdem legibus, quibus motus, obnoxia eſt. *Cogitemus itaque, pilam, ab A, B verſus actam, contingere in puncto B ſuperficiem terræ CBE, quæ ejus progreſſui reſiſtens illam retrocedere cogit, Sed videamus in quam partem. Ne autem novis difficultatibus implicemur, fingamus terram exactè planam duramque eſſe: pilam etiam, ſive deſcendat ſive aſcendat, eadem velocitate ferri, parum curantes qua vi agatur, ceſſante reticuli impetu, neglecto quoque omni effectu magnitudinis, ponderis & figuræ. Iſthæc enim attendere ſupervacuum fuerit, cum nihil eorum locum habeat in luminis actione, ad quam omnia hîc referri debent. Tantummodo notandum, vim illam quæcunque demum ſit, quæ motum noſtræ pilæ producit planè diverſam ab ea eſſe, qua determinatur, ut potius huc quàm illuc tendat. Vt perſpicuè palam eſt, reticuli impetum eſſe qui pilam movet;*

movet; sed eundem potuisse ipsam versus alias partes movere, eadem facilitate qua versus B. Quum contra reticuli situs sit, qui illam ita disponit, ut feratur ad B, & qui potuisset eodem modo disponere, licet per aliam vim fuisset expulsa. Unde jam liquet, fieri posse, ut hæc pila per terræ occursum detorqueatur, mutatâ scilicet dispositione qua inclinabat ad B: permanente interea vi sui motus, quum nihil commune habeant. Hinc etiam planum minimè credendum esse, necessariò pilam aliquo momento hærere in puncto B, priusquam digrediatur ad F, juxta quorundam Philosophorum opinionem. Nam interrupto hoc motu exigua tantummodo mora, nulla exstaret causa qua incitante vires resumere posset. Observandum præterea, quemadmodum motus, & in universum omnia genera quantitatum, ita etiam hanc pilæ determinationem posse dividi in omnes partes, quibus illam constare imaginamur. Et manifestum est attendenti, hanc qua pila descenditab A ad B, mixtam ex duabus aliis concipi posse, quarum altera illam premit ab AF ad CE, altera eodem tempore à sinistra AC dextrorsum propellit ad FE, ita ut hæ duæ junctæ, illam deducant ad punctum B, secundùm rectam AB. Inde obvium quoque est, obstantem terræ molem unam tantum harum dispositionum impedire posse, alteram nullo modo. Sic potest quidem auferre eam, quâ ruebat pila ab AF ad CE, quum spatium subjectum totum occupet; sed quâ ratione resisteret alteri, qua dextrorsum ferebatur, cui hoc respectu nullatenus opposita est? Ut accuratè igitur inquiramus, ad quam partem pila illisa debeat resilire, describamus circulum ex centro B, qui transeat per punctum A, & dicamus, spatio temporis eodem, quo progressa est ab A ad B, necessariò illam à B ad aliquod punctum hujus circuli circumferentiæ reverti debere. Nam omnia puncta, quæ eodem intervallo distant à B, quo distat A, in hac circumferentia occurrunt, & pilæ motum jam supra æquè velocem finximus. Tandem ad designandum ipsum punctum, quod ex omnibus hujus circumferentiæ tangere debet, erigamus ad normam tres rectas, AC, HB, & FE supra CE, hac ratione ut nec majus nec mi-

nus spatium interjaceat AC & HB, quàm HB & FE: deinde dicamus, idem tempus quod pilam dextrorsum porrexit ab A, uno punctorum lineæ AC, usque ad B unum ex punctis lineæ HB, illam resilientem ab HB sistere debere, in aliquo puncto lineæ FE. Nam singula puncta hujus lineæ FE eadem distantiâ hoc respectu ab HB remota sunt, & eadem qua singula lineæ AC, & ex priori dispositione tantundem eo inclinat quantum antea. Jam eodem momento aliquod punctum lineæ FE, & simul aliquod circumferentiæ AFD, contingere nequit nisi in puncto D vel F: Nam extra hæc duo nullibi mutuo secantur, terra autem obstante ad D progredi non potest, sequitur itaque illam necessariò tendere debere ad F. Et sic manifestum est, quâ ratione reflexio fiat, scilicet semper ad angulum æqualem illi, quem vulgo incidentiæ nominant. Ut si radius ex puncto A emanet in B superficiem speculi plani CBE, resilit ad F, ita ut reflexionis angulus FBE, neque cedat, neque exsuperet magnitudine alterum illum incidentiæ ABC. Hæc Cartesius Dioptr. Cap. II. §. 1, 2, 3. Sed ut ista ita se habeant, sufficienterque demonstratum sit, pilam in terram CBE obliquè incidentem secundùm lineam AB reflecti debere ad F secundùm lineam EF, causa tamen, quæ pilam à B ad F ferat, data non est. Quam ut explicemus tria distinguenda sunt. Primo aliud esse motum, aliud determinationem motus ad hanc vel illam partem, hancque mutari posse salvo manente ipso motu. Secundo determinationem illam, quæ pilam disponit ad incedendum ab A versus B duas habere partes, quarum una illam disponit ad incedendum ab AF versus CE secundùm lineam AC aliasque ipsi AC parallelas, altera verò eandem determinet ad progrediendum à sinistra AC dextrorsum ad FE secundùm lineam AF aliasque ipsi AF parellelas. Quin etiam tertio ipsum motum pilæ, quo fertur ab A ad B duabus constare partibus, quarum una descendit ab AF versus CE, altera à sinistra AC dextrorsum propellitur versus FE. Quod ultimum miror non fuisse à Cartesio in demonstratione adhibitum

tum

tum, quum eo ipso causam reflexionis à priori reddere, refractionumque leges multo rectius (quemadmodum postea videbimus) explicare potuisset. Vid. fig. XXI. Ita fingamus pilam in H existentem perpendiculariter secundùm lineam HB incidere in corpus durum & planum CBE, pila ista à B necessario reflectetur ad H. Resistit enim corpus durum CBE determinationi motus, quo pila disposita est ad pergendum à B ad G, nisi corpus interjectum CBE obstaret. Quo ipso tamen quum non tollatur ipse motus pilæ, reflectetur pila in contrariam partem. Non autem reflecti poterit à B vel sinistrorsum versus A, vel dextrorsum versus F. Hoc enim dependeret à situ partium corporis CBE, quod quum exactè durum esse posuerimus, non potest ab una parte magis prominere quàm ab alia. Ergo pila retrocedet à B ad H. Fingamus denique eandem pilam obliquè incidere in corpus CBE, à quo impeditur, ne pergere possit à B ad D. Ut itaque intelligatur ad quam partem pila in B illapsa ferri debeat, distinguamus primo inter ipsum motum pilæ, & inter determinationem ejus, quâ disposita est ad incedendum ab A ad B, & ulterius à B ad D, nisi corpus durum CBE, obstaculo esset. Deinde advertamus motus istius, quo pila fertur ab A ad B duas esse partes, unam quâ pila determinata est ad incedendum ab AF ad CE secundùm lineã AC aliasque th, uk, wm, ipsi AC parallelas, quales innumeræ in singulis punctis lineæ AB fingi possunt: alteram quâ disposita est ad pergendum ab AC versùs FE, secundùm lineam rectam AF, aliasque innumeras, tb, ud, wf, ipsi AF parallelas. Denique intelligamus ex duabus his determinationibus, quarum una pilam premit ab A ad C secundùm lineam th, uk, wm, altera ab A ad F secundùm lineam tb, ud, wf, BE componi unam, quâ pila reapse incedit ab A ad B. Quod ipso sensu experiri licet. Si enim indice dextræ manus globulum quendam deorsum premas ab

A ad

A ad G & eodem momento indice ſiniſtræ eandem pilam à ſiniſtrá dextrorſum urgeas ab A ad F, pila incedet ab A ad t, & ita rurſus á t ad u, ab u ad W, à W ad B. Itaque ut ad rem ipſam accedamus, ſit pila ab A expulſa ad B. corpus durum CBE impedimento erit, quo minus pila poſſit pergere a B ad D. Sed quum aliud ſit motus, aliud determinatio motus ad certam partẽ, pila retento motu alioverſum feretur. Deinde conſideremus illam motus partem, quâ pila determinata eſt ad deſcendendum ab AF ad CE, & quâ ulterius deſcenderet à CE ad HD, niſi corpus durum CE obſtaculo foret. Conſideremus etiam illam partem motus, quæ diſpoſita eſt ad pergendum à ſiniſtrâ AC ad dextram FE. Hinc quum ſitus corporis duri CBE directè oppoſitus ſit illi determinationi, quæ pilam premit ab AE ad HD, iſta motus pars, quâ pila ab AF ad HD deſcendit, in B puncto corporis CBE amiſſa priori determinatione aliam prorſus contrariam acquiret, quâ ipsâ reprimetur à B ad H ſecundùm lineam perpendicularem BH. Eſt enim corpus durum CBE ex hypotheſi perfectè æquum. Sed quoniam idem corpus CBE nullo modo directè oppoſitum eſt illi determinationi, quâ altera motus pars urgetur ab AC ad FE, pila in B exiſtens ulterius perget ab HB ad FE, quemadmodum ipſa progreſſa fuit ab AC ad HB. Ex quibus profectò intelligimus, quemadmodum antea diſtinximus duas motus partes, quarum una diſpoſita eſt ad deſcendendum ab ~~AF ad~~ CE, altera verò ad ingrediendum ab AC ad FE, ex quibus duabus determinationibus mixta eſt determinatio iſta, quâ pila incedit ab A ad B; ita & in pila à B reflexa diſtinguendas eaſdem motus partes, quarum prior diſpoſita eſt ad aſcendendum à CE ad AF, altera verò determinationem ſuam retinet, nempe quâ diſpoſita erat ad ingrediendum ab AC ad HB, & quâ ulterius diſponitur ad pergendum ab HB ad FE. Unde manifeſtè ſequitur, ex his duabus determinationibus componi unam determinationem, quâ pila reapſe fertur, à B ad F, ita ut angu-

angulus reflexionis EBF exactè sit æqualis angulo incidentiæ ABC. Nam ex hypothesi illa motus pars, qua pila descendit ab AF ad CE, in corpore perfectè duro CBE nihil de sua velocitate amisit. Ergo quo temporis intervallo pila ab AF descendit ad CE, eodem etiam à CE iterum ascendet ad AF. Deinde neque illa motus pars, quâ pila pergit ab AC ad FE quicquam de velocitate sua perdere potuit, quia illa non disposita est ad incidendum in corpus CBE, neque etiam determinationem suam, utpote cui situs corporis CBE oppositus non est, amisit. Ergo quo temporis intervallo pila ab AC perrexit ad HB, eodem etiam pergere ulterius debet ab HB ad FE; ponimus enim FE æquali intervallo distare ab HB, quo HB distat ab AC. Fieri itaque non potest, quin, quo temporis momento illa motus pars, quâ pila disposita est ad ascendendum secundùm lineas BH, xn, yp, zr, aliasque, quæ ipsis parallelæ concipiuntur, efficit, ut pila attingat aliquod punctum in linea AF, eodem quoque momento altera motus pars, qua pila tendit ab HB ad FE, secundùm lineas BE, xf, yd, zb, aliasque ipsis parallelas, efficiat, ut pila punctum aliquod attingat in linea EF. Ergo pila necessario feretur à B ad F. Q.E.D.

Ex Dioptricis.

Lumen ex uno pellucido in aliud transeundo in superficie utrique pellucido communi refringitur, hoc est à viâ rectâ divertit, & vel magis ad perpendicularem accedit, quàm prius, vel magis ab ea recedit. Causas hujus rei expedivit Cartesius, in quibus id unum merito desideres, quòd ut ante in reflexione, ita etiam hîc in refractione duas illas motus partes, de quibus supra loquuti fuimus, & quas alibi satis accuratè inculcaverat, non distinxerit. Vid. fig. XXII. *Fingamus*, inquit, *pilam ab A ad B expulsam, offendere non terram, sed linteum CBE, tam tenue ut illud facillimè forare, & impetu suo perrumpere possit, amissa tantum velocitatis suæ parte, ex. gr. dimidia. Quo posito ut cognoscamus, quam viam insistere debeat, consideremus denuo, motum illius non eundem esse cum dispositione, quâ potius huc quàm illuc fertur; Unde sequitur, singulorum quantitates separatim eximinandas; Consideremus itidem, ex duabus partibus, quibus hanc dispositionem constare scimus, alteram tantum per lintei occursum mutari posse; hanc scilicet quæ deorsum pilam agebat. Illa verò quæ dextrorsum ferebatur, constans & inviolata manebit; nam linteum expansum hoc respectu nullo modo illi oppositum est. Deinde ducto circulo AFD ex centro B, & impositis CBE ad perpendiculum, tribus lineis rectis, AC, HB, FE, hac ratione, ut spatium interjacens FE, & HB duplum illius sit, quod est inter HB & AC; videbimus hanc pilam ituram ad punctum I. Quum enim perrumpendo linteum CBE, dimidiam suæ velocitatis partem amittat, duplum temporis ei impendendum est, ut infra ex B ad aliquod punctum circumferentiæ AFD pertingat,* Fig: XXII

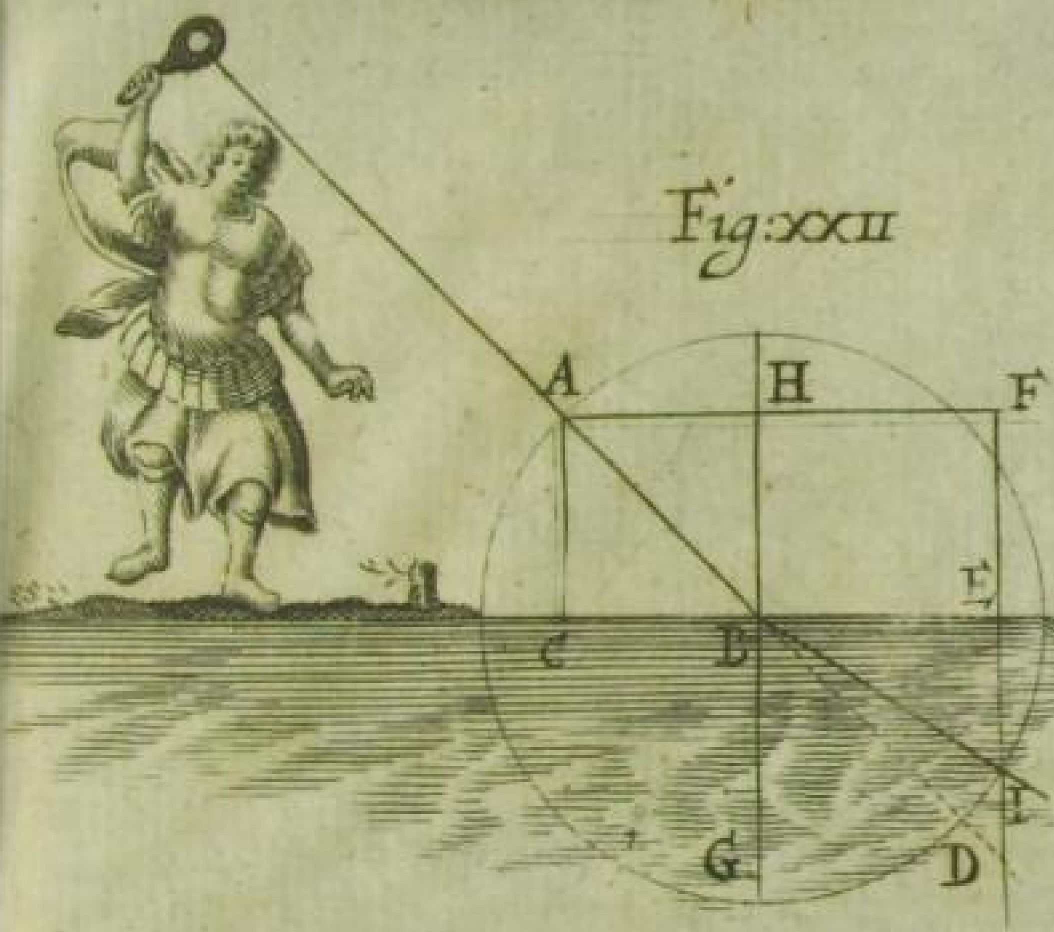


Fig: XXIII

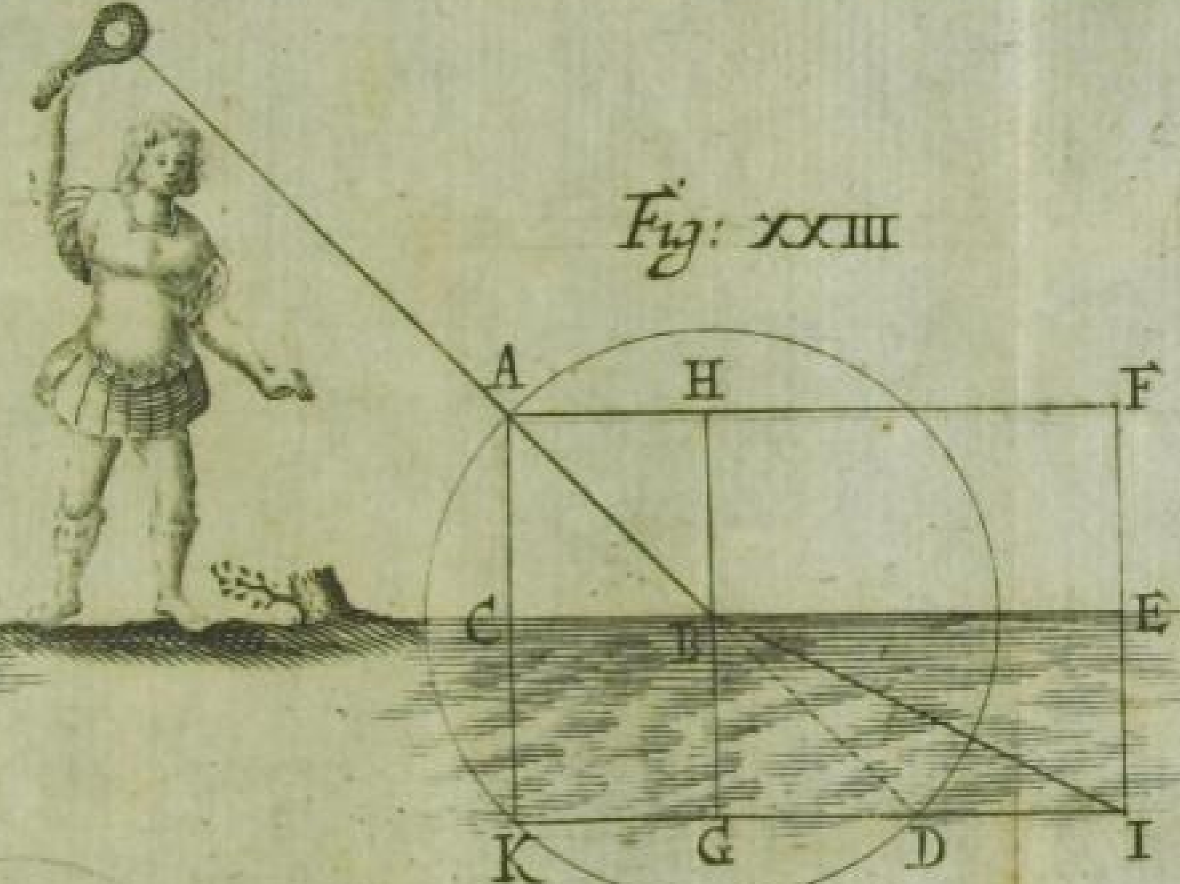


Fig: XXIV

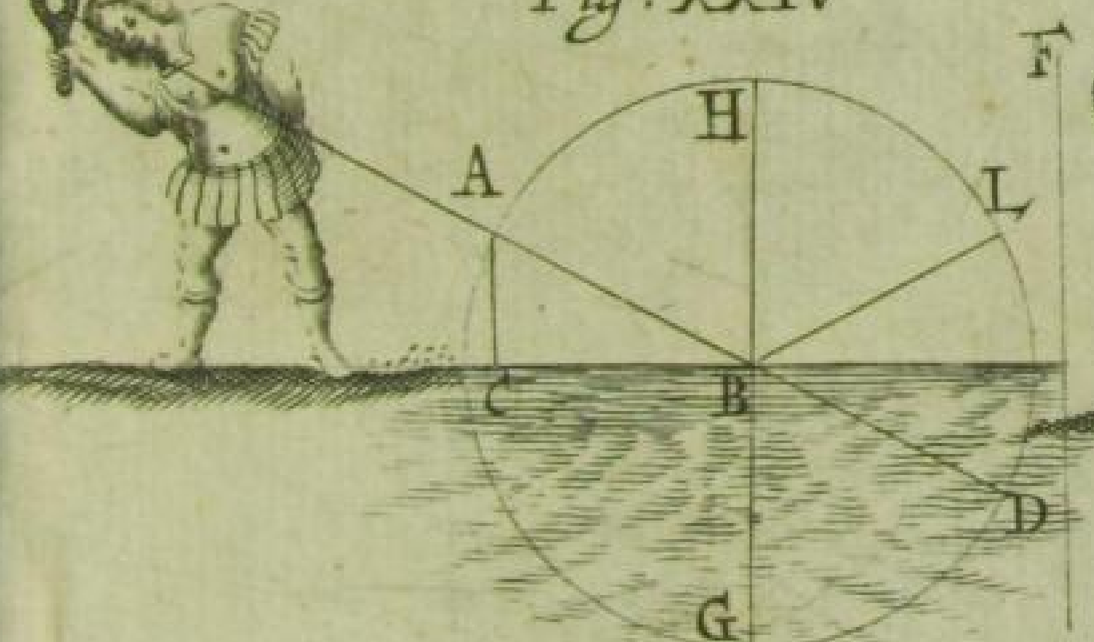


Fig: XXV.

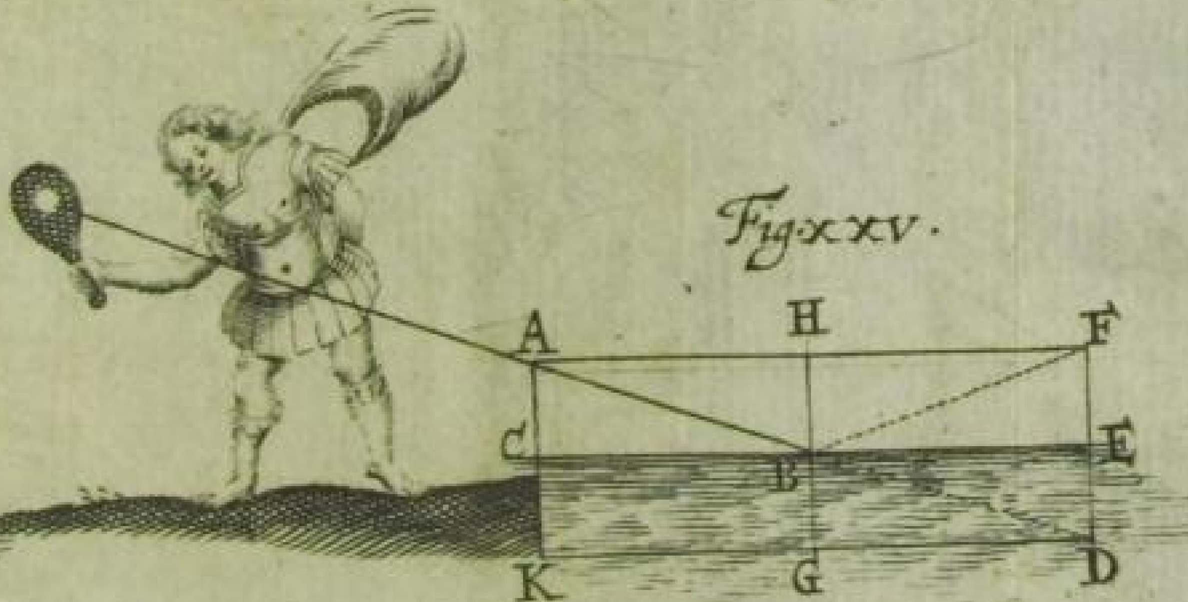


Fig: XXVI

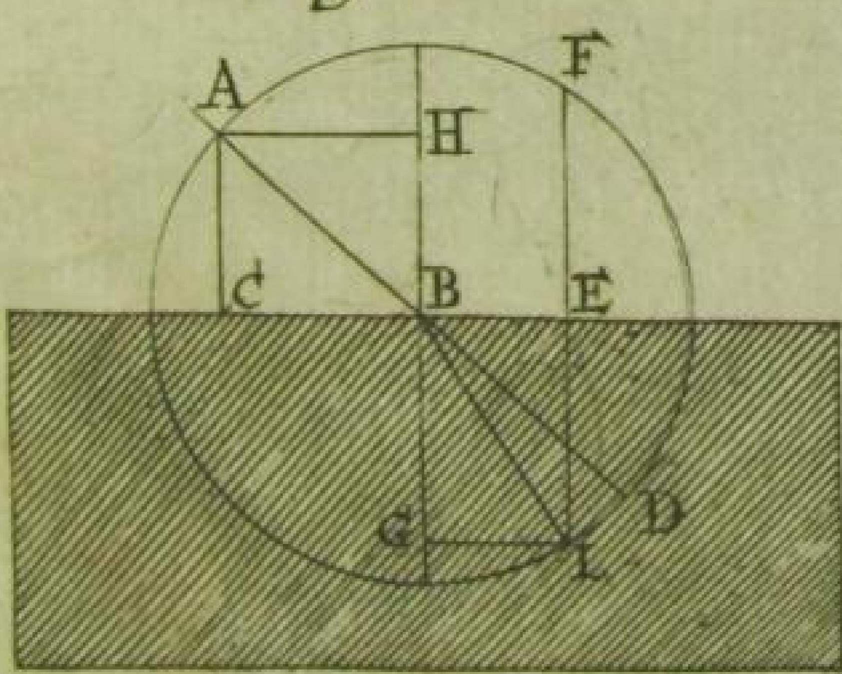
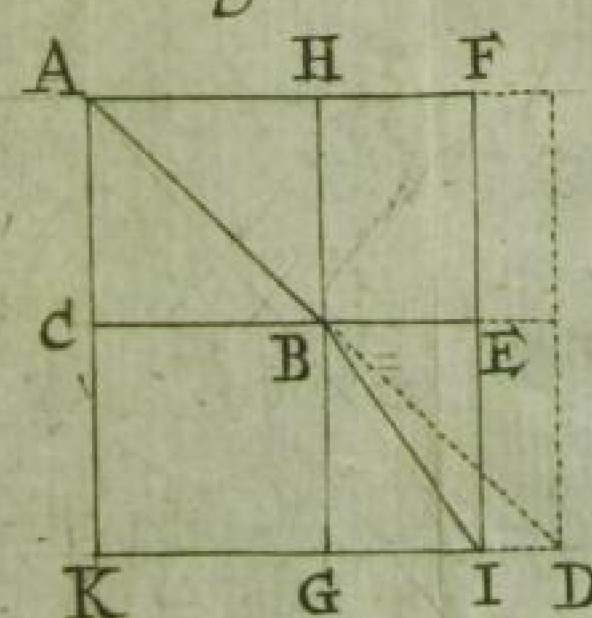


Fig: XXVII



gat, ejus quod insumsit superne, ut accederet ab A ad B. Et quum nihil ex dispositione, quâ dextrorsum ferebatur, intereat, in duplo istius temporis quo à linea AC devenit ad HB, duplum ejusdem itineris in eandem partem conficere debet, & consequenter accedere ad aliquod punctum rectæ FE, eodem momento quo accedit ad aliquod circumferentiæ circuli AFD. Quod factu impossibile foret, nisi progrederetur ad I. Nam in unico illo puncto recta FE, & circulus AFD, sub linteo sese invicem secant. Fingamus jam, pilam, D versus ab A expulsam, offendere in puncto B non illud linteum, sed aquam: cujus superficies CBE, exquisitè dimidiam velocitatis partem retundat, ut linteum paulo antea. Reliquis omnibus quemadmodum supra positis, videmus, pilam à B rectà tendere debere non ad D, sed ad I. Primò etenim certum est, superficiem aquæ eo versus illam detorquere eodem modo quo linteum, quum eodem modo illi opposita sit, & tantumdem illius roboris infringat. Corpus autem aquæ quod attinet, quo totum spatium à B ad I repletum est, licèt magis aut minus resistat, quam aër supra ibidem locatus, non tamen sequitur, illud pilam magis aut minus detorquere, nam eadem facilitate ubivis dehiscens, non majori opera hac quàm illac transitum permittit; saltem si (quod ubivis fecimus) fingamus, nec levitatem, nec pondus, nec figuram nec magnitudinem pilæ, nec aliam similem externam causam, cursum quem tenet immutare. Et quidem distinguendum hîc esse non solùm inter duas motûs pilæ determinationes, sed etiam inter duas motûs ejusdem partes, manifestum est ex eo, quod omnis determinatio est alicujus motus determinatio, & non potest intelligi determinatio pilæ versus hanc vel illam partem, quin simul intelligatur motus, vel pars aliqua motus, quâ pila eo feratur. Jam ipse dicit Cartesius: *Consideremus ex duabus partibus, quibus hanc dispositionem constare scimus, alteram tantum per lintei occursum mutari posse; hanc scilicet, quæ deorsum pilam agebat. Illa vero quâ dextrorsum ferebatur, constans & inviolata manebit; nam linteum expansum hoc respectu nullo modo illi oppositum est.* Quod si verum est, est autem verissimum, etiam illa motus pars, quâ pila dextrorsum fertur, integra & inviolata manebit, quum fieri non possit, ut dispositio illa inviolata maneat, inviolato non manente motu, quem disponit ad ingrediendum versus certam partem. Ex quo utique efficitur, pilam perrumpendo linteum non amittere dimidiam partem totius suæ velocitatis, vel totius sui motus, sed tantum unius partis motus, nempe istius, quâ descendit ab AF ad CE, cujus determinationi linteum expansum directè est oppositum. Verum itaque non est, quod pila in duplo istius temporis quo ab A devenit ad B, deinde à B progrediendo devenire debeat ad punctum aliquod circumferentiæ AFD & simul ad punctum aliquod lineæ FE. Manifestissimum enim est, quum pila à Cartesio ponatur amisisse dimidiam velocitatis suæ partem, eandem spatio temporis duplo majori eo, quo descenderat ab AF ad CE, descendere etiam debere ad punctum aliquod lineæ DK ipsis AF & CE parellelæ, & æquali intervallo distantis à CE, quo ab eadem distat AF. Sed quum secundùm eundem Cartesium pila pertingere debeat ad aliquod punctum lineæ FE, quæ intervallo duplo majori distet ab HB quàm ab eadem HB distat AC, constat punctum I, quo lineæ KI & FI concurrunt, non posse esse in circumferentia circuli. Res itaque omnis non ope circuli sed hoc modo sexpedienda est. Vid. fig. XXIII. Fingamus pilam ab A ad B incedentem, & à B ad D pergere conantem, nisi corpus interjectum CBE obstaret, incidere in tabulam æquam & levem CBE, & ponamus in pila tantum esse motus, ut tabulam istam CBE dejicere valeat. Jam per leges naturæ ipsâ experientiâ confirmatas omne corpus motum in corpus aliquod quiescens impingendo, si eo, quod quiescit, fortius est, ipsum secum abripere, adeoque aliquid de suo motu in alterum transferre, & cum residuo tardius moveri solet. Quo constituto perspicuum est, non omnem pilæ motum in tabulam CBE agere posse, sed unam tantùm ejus partem, quâ pilâ descendit ab AF ad KI, Hujus enim determinationi tabula

bula CBE directè est opposita, alterius verò, quâ pila pergit ab AC ad FE non item. Si itaque ponamus pilam dimidium istius motus, quo ab AF ad KI descendit, impendere ad dejiciendam tabulam CBE, cum residuo dimidio duplo tardius descendet à CE ad KI, adeoque ut attingat aliquod punctum in linea KI tempore opus erit duplo majori, quàm dum descendendo ab AF ad CE attingebat punctum B in linea CE. Sed quum altera motus pars, quâ pila fertur ab AC ad FE inviolata maneat, ideoque integram suam celeritatem retineat, pila spatio temporis duplo majori eo, quo ab AC progrediebatur ad HB, ab HB progredietur usque ad FE. Ergo uno & eodem temporis momento, quo pila descendendo à CE ad KI, attinget aliquod punctum in linea KI, eadem progrediendo ab HB ad FE attinget punctum aliquod in linea FE. Incedet itaque à B ad I, quoniam lineæ KI & FI se in solo puncto I intersecant. Quod si jam fingamus pilam A in puncto B non incurrere tabulam istam CBE, sed in aquam, ad quam dividendam præcisè dimidiam motus sui partem, quo ab AF descendit ad KI impendat, pila eodem modo deflectetur ad BI. Licet enim illa etiam motus pars, qua pila, ab AK fertur ad FI, simul ac pila subiit aquam, dimidiam velocitatem suam ex hypothesi ista amittat, quoniam tamen prior illa pars quâ pila ab AF ad CE descendit, quaque sola superficiem CBE aquæ CEIK dividit, in ipsa superficie CBE dimidium suæ velocitatis amittit, ubi altera pars, quâ pila ab AC fertur ad FE, omnem suam velocitatem integram retinet, pila in ipso puncto B superficei CBE detorquetur in lineam BI, & quum postea aqua, quam pila intravit, ubique æqualiter dehiscens non majori difficultate pilæ à BG ad EI, quàm à CE ad KI transitum præbeat, eadem pila à linea BI iterum non declinabit; posito nimirum, pilam nec à levitate, nec â pondere, nec à figurâ, nec à magnitudine quicquam in suo motu mutari. Atque hinc genuina ratio reddi potest, quamobrem aliquando bombardarum pilæ versus aquam displosæ in eam non possint ingredi, sed versus aërem reflectantur. Illa enim quam Cartesius reddit, nulla est. Vid. fig. XXIV. *Et hic notari potest,* inquit, *tantò magis illam* (pilam) *detorqueri per superficiem aquæ aut lintei, quò magis obliquè in illam impingit, adeo ut si ad angulos rectos dirigatur velut impulsa ab H ad B, ulterius in linea recta sine ulla declinatione progrediatur ad G. Sed si agatur secundùm lineam qualis est AB, quæ vel superficiei aquæ vel lintei CBE tam oblique incumbat, ut linea FE ducta quemadmodum supra, circulum AD secare non possit, illam minimè penetrabit, sed à superficie B, resiliet in aërem L, eodem planè modo, ac si in terram incurrisset. Quod nonnulli cum dolore experti sunt, quoniam animi gratia explosis in alveum rivi ex murali machina globis, obambulantes in adversa fluminis ripa vulnerarunt.* At quis non videt causam, quamobrem bombardarum pilæ quandoque à superficie aquæ reflectantur, arcessendam esse à duabus illis sæpius jam memoratis motus obliquè in corpus aliquod incidentis partibus, quarum illa, quæ in corpus illud directè incurrit, tanto fit debilior, quanto incidentia est obliquior. Vid. fig. XXI. & XXV. Fingamus enim pilam in H existentem secundùm lineam HB directè propelli versus corpus CBE, & facile videmus omnem pilæ motum determinatum esse versus superficiem CBE: adeoque pilam omnem suam vim conferre ad dejiciendum corpus CEDK, si durum sit, vel ad idem penetrandum, si sit fluidum. Fingamus deinde pilam obliquè secundùm lineam AB incidere in eandem superficiem CBE nec difficile est intelligere, pilam non omnem suam vim, sed ejus tantùm partem impendere ad dejiciendum vel penetrandum corpus oppositum CEDK, quæ quidem vis dijudicanda est ex proportione quæ est inter lineam AH vel CB & AC vel HB. Ita si AH & AC sint æquales, pila dimidia motus sui parte aget in corpus CEDK, adeoque pila ex H ad B, propulsa duplo majori vi tivi aget in corpus CEDK, quàm si eadem ex A ad B expellatur, si scilicet ponamus æqualem semper esse pilæ motum, seu, quod idem est, pilam eâdem velocitate ferri ab H ad B & ab A ad B. Quod si AC sit quarta pars ipsius AH, dividenda erit vis pilæ in quinque partes, quarum una descendendo ab AF ad CE agit in corpus CEDK, reliquæ vero quatuor ab AC dextrorsum feruntur versus FE, neque quicquam agunt in corpus CEDK, si proportio inter lineas AC & AH adhuc sit minor, minor etiam erit vis pilæ, quâ ab AF versus CE descendendo dejicere vel dividere debet corpus CEDK. Itaque si CEDK sit murus, bombardarum pilæ ab H ad B explosæ duplo majori vi eum dejicere nitentur, quàm eædem ab A venientes, si linea AH sit æqualis ipsi AC. Quod si linea AC sit minor ipsâ AH, adhuc minori vi eædem pilæ agent in murum oppositum. Unde patet si incidentia sit valde obliqua, vel nullam vel exiguam esse pilarum istarum vim ad murum CEDK dejiciendum. Idem quoque in aqua usu venire nemo non videt. Resistit enim aqua pilæ versus ipsam motæ. Adeoque si tam obliqua fuerit incidentia pilæ, ut major in aqua sit resistentia, quàm vis in pila ad ipsam dividendam, pila aquam non penetrabit, sed integro manente motu suo (non enim hîc attendimus ad gravitatem pilæ vel aliam quampiam causam externam, quæ motum pilæ mutare possit) in alteram partem reflectetur, juxta ea quæ in Catoptricis dicta sunt. Atque hoc est, quod pueri experiri solent, à quibus lapilli in aquam valde obliquè missi aliquoties subsiliunt, antequam mergantur. Transimus ad reliqua. Vid. fig. XXVI. *Fingamus*, inquit Cartesius, *pilam actam ab A ad B, denuo inde impelli reticulo CBE, quod vim ejus motus augeat, ex. gr. una tertia parte, ut ita ex in duobus momentis tantumdem spatii conficere queat, quantum antea confecit tribus. Hoc idem erit ac si offenderet in B puncto ejuscemodi corpus, cujus superficiem unâ tertiâ faciliùs quàm aërem permearet. Et ex iis quæ demonstravimus sequitur manifeste, si describatur ut supra circulus AD, & recta AC, AB, FE,*

hâc

hâc ratione, ut distantia inter FE & HB unâ tertiâ minor sit quàm illa, quæ inter HB & AC, punctum I, in quo recta FE, & circularis AD, sese mutuo secant, designaturum illum locum quem pila petet, digressa â puncto B, Quæ conclusio etiam inverti potest, dicique, pilam venientem secundùm lineam rectam ab A ad B, in hoc autem puncto à recto itinere divertentem, tendentemq; inde ad I, indicio esse, vim qua intrat corpus CBI, talem esse ad illam qua erumpit ex corpore ACBE, qualis distantia quæ inter AC & HB ad illam quæ inter HB & FI, hoc est, qualis linea CB ad BE. Quemadmodum antea, ita hîc etiam difficultas omnis solvenda est non beneficio circuli, sed ope talis figuræ, qualem adhibuimus. Vid. fig. XXVII. Pila ab A expulsa ad B, in puncto B denuo impellatur reticulo superficiei CBE parallelo, quo ipso illa pars motus, quâ pila ab AF descendit ad CE, augebitur, ita ut simul non augeatur altera motus pars, quâ eadem pila ab AC fertur ad FE. Fingamus priorem partem in puncto B auctam esse unâ tertiâ parte. Necessario itaque pila spatio temporis una tertia parte minori eo, quo ab AF descendit ad CE, deinde à CE descendendo ad KI attinget punctum aliquod in linea KD. Ponimus enim lineas KI & AF æquali intervallo distare ab ipsa CE. Sed quum altera motus pars, quâ pila ab AC tendit ad FE, aucta non fuerit, pila spatio temporis una tertia parte minori eo, quo ab AC pervenit ad HB, deinde ab HB progredietur ad FE. Ponimus enim FE intervallo unâ tertiâ parte minori distare ab HB, quàm ab eadem HB distat AC. Pila itaque à B progredietur ad I secundùm lineam BI, quoniam KI & FE in puncto I se intersecant. Perinde autem est, sive pila ab A ad B incedens in puncto B reticulo superficei CBE parellelo denuo impellatur, sive in spatio CEIK facilius moveatur, quâm in altero ACEF. Etenim simul atque pila pervenit ad B, illa motus pars, quâ pila ab AF defertur ad CE majorem velocitatem acquirit, ita ut altera, quâ pila ab AC pergit ad FE, eo momento temporis non augeatur. Atque hoc ipso pila in ipso puncto B superficiei CBE detorquebitur ad I. Et licet postea tota pila transeat in spatium CEIK, in quo ex hypothesi facilius movetur, quàm in spatio ACEF, nihilominus tamen, quoniam non facilius fertur à BG ad EI, quàm à CE ad KI, à linea BI iterum non recedet. Ut autem ea, quæ jam diximus, ad lucis actionem applicemus, facile intelligimus, quoties radii illius obliquo motu ex uno pellucido corpore in aliud transferuntur, quod magis vel minus facile illos admittit, eam in superficie his corporibus communi ita detorqueri, ut magis declinet à perpendiculari, quoties difficilius, magis verò inclinet ad perpendicularem, quoties facilius recipitur, idq; exactè ea proportione, quâ unum altero facilius vel difficilius eam recipit. Vid. fig. XXVII. Itaq; quum, quemadmodum antea diximus, luminis actio facilius recipiatur in aqua vel vitro, quàm in aëre, lumen obliquè secundùm lineam AB transeundo ex aëre AFCE in aquam vel vitrum CEIK detorquebitur ad perpendicularem HBG. Cujus quidem refractionis quantitas dimetienda est ex proportione, quæ est inter lineam GI, sinum scil. anguli refracti GBI, & lineam AH, sinum anguli inclinationis ABH. Et quidem quum luminis actio facilius adhuc perlabatur vitrum, quàm aquam, refractio illa ad perpendicularem major adhuc erit in vitro, quàm in aqua. Contra si luminis actio ex aqua vel vitro ACEF transeat in aërem CEIK, radius BI magis declinabit à perpendiculari HBG, quàm radius AB. Vid. Fig. XXIII. Cujus refractionis quantitas itidem dimetienda est ex proportione, quæ est inter sinum GI anguli refracti GBI, & sinum AH anguli inclinationis ABH. Major item erit refractio radii BI, si lumen ex vitro ACEF transeat in aërem CEIK, quàm si ACEF sit aqua, quoniam luminis actio facilius vitrum transit, quàm aquam. Quæ hactenus de natura reflexionis & refractionis disseruimus, mirificè confirmari possunt testimonio eximii Philosophi Jacobi Rohaldi, qui tractatu Physico ante quadriennium Amstelodami Gallicè edito, quum rationes Cartesii hac super re proposuisset & dignis laudibus prosequutus esset, parte I. cap. XV. §. 13. ita judicat: *Fatendum est,* *intervenire hîc errorem aliquem, undecunque ille sit: Omne enim ratiocinium, quod ad absurdum ducit, defectu laborat vel à parte formæ vel à parte materiæ. Non autem existimemus defectum hìc ullum esse in forma hujus ratiocinii, quæ hanc absurditatem importare videtur: quin potius dicamus, postquam illa* (absurditas) *illata est, indubitato id indicare, esse aliquam falsitatem in aliqua illarum rerum, quas supposuimus: Quemadmodum illa etiam revera est in eo, quod finximus pilam, quantumvis dimidiam velocitatis suæ partem amiserit in superficie aquæ, nihilominus illam penetrare, licet incidentia valde sit obliqua. Experientia enim testatur in prælio navali pilas bombardarum valde obliquè decidentes reflecti à superficie maris, militesque in opposito navis foro constitutos abripere. Idem observare licet in lapillis, quos pueri in aquam projiciendo subsilire faciunt.* Verissimè judicat Vir doctissimus, errorem commissum esse vel in forma vel in materia hujus ratiocinii, licet ipse eum deprehendere non potuerit. Est enim error ille in eo commissus, quòd duæ motus partes pilæ obliquè in superficiem CBE corporis oppositi incidentis observatæ non fuerunt.

Ex Hydraulicis.

Nulla ferè ars est, in qua magis sese jactet humana curiositas, quæq; mirabiliores producat effectus, & in quam plus sumtuum à Magnatibus aliisque lautioris conditionis hominibus conferatur, quàm hydraulica. Cujus tamen principia ab omnibus retro seculis adeo ignota, densisque ignorantiæ tenebris immersa jacuerunt, ut nulla alia re facilius demonstrari possit, quantam lucem & his & aliis præstantissimis artibus ac disciplinis intulerit

lerit divinum & ad omnia promptum Cartesii ingenium. Quod ut palam fiat, en tibi, benevole Lector, quæ olim fuerit, quæque nunc hâc de re sit Philosophia. Vid. fig. XXVIII. Consideremus siphonem AB, in cujus extremitate B est angustum foramen C, cujusque embolum D tam arctè replet cavitatem AB, ut aër superne per A in eam penetrare non possit. Hujus siphonis parte B mersâ aquis, si attrahatur embolum D, aqua per foramen C ascendendo cavitatem siphonis BA replet. Operæ pretium nunc est audire, quâ ratione Veteres hac super re philosophati fuerint. Principio illi animadverterunt, & rectè quidem, nullum esse in natura vacuum, seu nullum esse locum, qui corpore aliquo non sit repletus. Deinde neque hoc difficile fuit intellectu, cavitatem siphonis AB tam exactè repletam ab embolo D, ut aër desuper in eam penetrare non possit, omni corpore vacuam fieri, si attracto embolo aqua non sequeretur. Hac itaque de causa aquam ascendere dixerunt, ne vacuum in natura fieret. Atque hinc orti sunt diversi modi loquendi, quibus tamen ipsa re idem significare voluerunt: ut quum aquam ascendere dixerunt ob fugam vacui, vel etiam, naturam adeo abhorrere à vacuo, ut aqua contra suam naturam ascendat. Perinde quasi natura eo sensu, quo vox ista hîc intelligi solet, accepta capax esset ullius fugæ aut horroris, qui propriè tantùm rebus cognitione præditis competit. Sed quicquid ejus sit, & utcunque vox fugæ aut horroris accipiatur, ad quæstionem nihilo rectius respondent, *quàm si quis interrogatus, quo modo ligna ex remotis Provinciis Parisios venirent, ob fugam frigoris id fieri diceret. Hoc enim non est respondere ad quæstionem, quum loco causæ efficientis, de qua quæritur, causa finalis profertur.* Quemadmodum rectè observat doctissimus Rohaldus part. I. Tract. Phys. Cap. XII. Et ut evidenter appareat, quàm planè rem acu non tetigerint Veteres, illud certum est, si vera esset causa ista, aquam in siphonem ascendere ob horrorem, quem natura habet à vacuo, ut ratio ista nihil explicet, eam tamen ubique locum habere debere, hoc eſt, aquam ob fugam vacui ſemper aſcendere debere, ad quamcunque altitudinem attrahatur embolum D, antliasque longiſſimo ſiphone inſtructas, aquam ad imperatam quamvis altitudinem evehere poſſe. Quod manifeſtæ experientiæ reclamat, quâ edocti novimus aquam antliarum ope ad altitudinem triginta unius pedis cum ſemiſſe majorem attolli non poſſe. Itaque ut vera hujus effectus cauſa appareat, pro certis ponimus illa veterum Philoſophorum pronunciata, naturam nullum admittere vacuum, ſeu, quod idem eſt, nullum eſſe in rerum natura locum, qui non ſit repletus aliquo corpore: Item nullam dari penetrationem corporum, ſeu nullum corpus penetrare poſſe in locum alio corpore repletum, niſi hoc prius ex iſto loco fuerit expulſum. Ita ſit ſpatium unum pedem longum, latum & profundum, idque repletum corpore unius pedis cubici. Fieri non poteſt ut aliud corpus itidem unius pedis cubici ſpatium illud occupet, niſi alterum illud corpus ex eodem ſpatio expellatur. Monſtro autem ſimile eſt, à nemine hactenus obſervatum fuiſſe, in omni motu integrum circulum corporum moveri, hoc eſt, nullum corpus vel tantillum moveri poſſe, quin id à ſe propellat corpus ſibi vicinum, cujus ſpatium occupat, atque hoc ipſum corpus reliqua corpora circumcirca impellendo in locum à priori corpore deſertum protrudat. Quod quidem ex duobus iſtis Veterum pronunciatis tam apertè ſequitur, quàm diem eſſe, quum ſol lucet. Ita fingamus ſiphonis A B in aëre conſtituti embolum D attrahi ad E. Maniſeſtè intelligimus aërem ex ſpatio A D per embolum D expulſum neceſſario ferri ad latera, reliquumque aërem circa ſiphonem AB conſtitutum, ſecundùm lineas EC aut his ſimiles propellere per foramen C ad occupandum ſpatium intra ſiphonem AB ab embolo D derelictum. Fac enim foramen C eſſe accuratè clauſum, & tam ſiphonem C quàm embolum D nullos omnino habere poros, per quos ullum corpus penetrare poſſit; eo caſu embolum D nulla ratione attrahi poſſet à D ad E, quia aër ab A ad B ad B propulsus nullum haberet locum, in quem concedere posset. Posuimus enim cum Veteribus omnia spatia corporibus esse repleta, nullamque dari corporum penetrationem. Atque ita palam est, aërem per veram impulsionem ingredi per foramen apertum C in siphonem B A. Fingamus jam parte B siphonis B A mersâ aquis attrahi embolum D, ecquid manifestius est, quàm aërem eodem modo, quo antea, ab E ad C propulsum aquam ad B constitutam premendo impellere ad ingrediendum per foramen C in spatium ab embolo D derelictum, atque ita aquam in siphonem A B impelli eodem modo, quo antea aër in ipsum trudebatur. Dicendum nunc est, quamobrem aqua, quum ad altitudinem triginta unius pedum cum semisse pervenit, altius attolli non possit, atque eâdem operâ causæ omnium, quæ hydràulica habet, miraculorum expediendæ. Qua in re ut rite & ordine versemur, non nulla præsupponenda hìc sunt. Primo, aërem (id quod supra etiam monuimus) quem vulgo ita apellare solemus, non constare ex particulis unius generis, sed quantum ad præsens duo genera corporum probè in illo distinguenda esse: unum quod constet ex materia valde subtili, fluida & mobili, omnia cœlorum aliorumque corporum porosorum intervalla replente: alterum, quod componatur ex materia crassiori, quæ instar floccorum vel funiculorum priori isti innatet, abeaque variè agitetur. Quod ut rectè intelligatur, fingamus, ut ante, magnam plumularum congeriem a levi quodam vento agitatam: putemusque priorem illam materiam similem esse auræ illi seu vento, qui plumulas istas perlabitur, easque variè contorquet & agitat: ipsas autem plumulas auræ isti innatantes, posterioris materiæ speciem referre arbitremur. Deinde aërem illum, quem diximus crassiorem, qui se ad certam à terra distantiam, (quod spatium atmosphæræ nomine venit) extendit, esse gravem, seu pondere suo ad centrum terræ premi (unde autem gravitas illa sit, ad institutum nostrum jam non facit.) Denique omnia vel pleraque saltem circa nos corpora etiam illa, quæ solidissima nobis videntur esse porosa, ita quidem, ut si aëri illi crassiori transitum præcludant, illam saltem materiam, quam diximus, subtiliorem intra se admittant. Quibus positis, ut intelligamus, quamobrem attracto embolo D aqua per foramen C in siphonem BA ad certam altitudinem attollatur, fingamus situlam quandam aquâ repletam, cujus superficies exactè tegatur tabulâ, in cujus medio sit foramen, per quod tubus in utraque extremitate apertus protendatur, atque in hoc ipso tubo aliam tabellam cavitatem ejus accuratè claudentem imaginemur, ita tamen, ut ipsa ascendat vel descendat, prout aqua per tubum vel attollitur, vel deprimitur. Fingamus deinde tabulæ, per cujus medium tubus protenditur, imponi pondus aliquod, quo & ipsa tabula & aqua in situla contenta prematur: quo ipso aqua ex situla in tubum ascendere conabitur. Fingamus præterea tabellæ in ipso tubo contentæ incumbere aliud pondus, aquam, quæ in tubum tendit ascendere, eadem vi repellens, quâ illa versus tubum propellitur, & facile intelligimus, quum aqua æquali vi à duobus istis ponderibus prematur, ipsam neque ascendere neque descendere posse, eodem prorsus modo, quo bilanx æqualibus ponderibus utrinque impositis in æquilibrio retinetur. Denique fingamus auferri pondus istud, quod tabellam in tubo contentam deprimit: & quid clarius esse potest, quam pondus tabulæ, superficiem aquæ, quâ situla repleta est, tegentis, aquam in situla deprimere, atque ita eam urgere ad ascendendum per tubum, quem diximus, idque præcisè ad eam altitudinem, ut aqua in tubo contenta, quam gravitate sua deorsum premi nemo ignorat, eadem vi nitatur descendere, quâ pondus tabulæ impositum eam ad ascendendum urget. Quibus rite perceptis non difficile est intelligere, aquam attracto embolo D non absimili modo ascendere in cavitatem siphonis BA. Ponamus enim primo siphonis AB cavitatem embolo D nondum repletam aëri liberum transitum præbere; eo casu licet pars B mersa sit aquis, aqua tamen in siphonem apertum non ascenſcendet. Quamvis enim craſſior aër ſuperficiei aquæ ſiphonem A B circumſtantis incumbens eam gravitate ſua premat, quia tamen alter ille aër in cavitate A B contentus æquali vi illam reprimit, aqua in cavitate A B altior non erit, quàm extra eam. Non ſecus ac aqua in ſitula duobus ponderibus extra & intra tubum æqualiter preſſa neque aſcendere neque deſcendere poteſt. Ponamus ſecundo cavitatem ſiphonis A B exactè repleri embolo D: an cuiquam obſcurum eſſe poteſt attracto embolo D vim illam aëris, qui antea per cavitatem A B tranſierat, jam autem per A ingredi amplius non poteſt, omnino tolli, adeoque aquam circa ſiphonem A B pondere aëris ſibi incumbentis preſſam propelli ad replendam cavitatem ſiphonis B A ab embolo D derelictam. Eodem prorſus modo, quo ablato pondere, quod tabellam in tubo deprimebat, aqua in ſitula contenta à pondere ſibi incumbente preſſa in tubum propellitur. Ponamus tertio ſiphonem A B ejus eſſe longitudinis, ut aqua tam altè in illum aſcendere poſſit, donec pondus aquæ in cavitate A B contentæ æquale ſit ponderi aëris aquæ exteriori incumbentis. Quum enim aqua multo gravior ſit aëre, fieri non poteſt, quin ejus cylindrus in cavitate A B ad certam quandam altitudinem evectus pondere ſit æqualis aëris cylindro ejusdem craſſitiei inde à terra ad extremum atmoſphæræ terminum protenſo. Quo caſu fieri non poteſt, ut aqua altius attollatur in cavitate AB. Non aliter, quàm aqua à tabula ſitulæ incumbenti preſſa altius per tubum non aſcendit, quum aqua in tubo contenta ad eam pervenit altitudinem, ut eadem vi deorſum prematur, quâ à pondere ſitulæ impoſito ſurſum propellitur. Si jam quæratur, quid fieri debeat, poſtquam aqua in ſiphonem A B eo usque aſcendit, ut altius aſcendere nequeat, & nihilominus embolum D ulterius quis attrahere conetur? in promptu eſt reſponſio. Nempe ſi neque flocculos, quos diximus, aëris ulla perlaberetur materia multo ſubtilior, neque vel ſiphonis A B, vel ipſius aquæ, cui ſiphon iſte immerſus eſt, ulli eſſent pori, quos materia illa ſubtilis penetraret, fieri nulla ratione poſne posset, ut embolum D vel tantillum ulterius ascenderet. Qvum enim omnia spatia corporibus sint repleta, aër, cujus locum embolum D occupare deberet, locum, in quem ipse concederet, nusquam inveniret. Unde & ipse embolo D locum façere non posset, nisi in spatium ab aliis corporibus jam repletum penetraret. Id quod fieri nequit. Itaque si embolum D ulterius attrahi potest, (posse autem id fieri jam probabimus) inter floculos aëris crassioris intervalla materia quadam subtiliori repleta esse necesse est, quæ per poros aut siphonis AB, aut aquæ, cui immersus est, penetrando spatium ab embolo D derelictum occupet. Qua re crassioris aëris particulæ seu flocculi coarctabuntur, & quum se expandere conentur, embolum D, si vi illa, qua attractum antea fuerat, iterum destituatur, cum impetu repellent in cavitatem AB. Quod, qua ratione fiat, facile intelligi potest, si consideremus multas plumulas linteo inclusas, quæ in augustum spatium compressæ, recedente deinde vi externa, quæ ipsas comprimebat, resiliunt seque dilatant. Ex dictis multa curiosa consectaria antea ne cogitata quidem, nedum à quoquam explicata deduci possunt. Quis enim per Deum immortalem, unquam putâsset, aërem, quem levem esse finxerunt Veteres, non solum ponderosum esse, sed gravitatem etiam ejus, quanta sit, explorari posse. Quis unquam cogitâsset, altitudinem atmosphæræ, seu distantiam aëris crassioris à terra infallibilibus argumentis doceri posse? Scil: in curiosis quibuscunque artibus & disciplinis omnia jam fiunt, fieri quæ posse, negâssent Veteres. Sed ut omnia perspicuè ante oculos proponantur, consideremus tubum quendam vitreum in una extremitate apertum, in altera verò hermeticè, quod vocant, seu eâdem illâ materiâ vitreâ, quâ tubus constat, clausum. Hujus tubi aquâ repleti & ad perpendiculum erecti aperta extremitas si digito obturata vasi aquæ pleno immergatur, manifestè liquet, eum, si quidem triginta & uno pedibus cum semisse longior non sit, remoto iterum digito depleri non posse. Facile enim intelligimus, si a-

quæ

aqua in tubo contenta descenderet, alteram illam in vase, ipsumque aërem superficiei ejus incumbentem ascendere debere. Quod ob gravitatem aëris superficiem aquæ prementis fieri nequit. Non secus ac in situla ista, quam prius diximus, aqua in tubo contenta descendere non potest, dum gravitas ejus gravitatem ponderis aquam in situla contentam prementis non superat. Quod si vero tubus iste, quem vasi aquâ repleto immersum fingimus, longitudinem triginta unius pedum cum semisse excedat, aqua eo usque descendere debet, ut triginta & uno pedibus cum semisse altior non sit. Pondus enim aëris superficiei aquæ in vase contentæ incumbentis ponderi aquæ ejus, quam diximus, altitudinis æqualis existit. Eodem planè modo, quo in situla nostra aqua in tubo contenta, si gravior sit pondere tabulam situlæ impositam premente, eousque descendere debet, donec gravitas & aquæ in tubo contentæ & ponderis tabulæ incumbentis sit æqualis. Cæterum hæc experimenta multo commodius capere licet in argento vivo, quod, quum aquâ quatuordecies ferè ponderosius sit, tubo quatuordecies circiter minori uti possumus, si in aquæ locum argentum vivum substituamus. Sumatur itaque tubus vitreus viginti septem digitis cum semisse longior aliquanto, & in una extremitate hermeticè clausus, isque argento vivo repleatur. Hujus altera extremitas si digito obturata vasi argento vivo repleto immergatur, videbimus argentum vivum postquam descendit ad altitudinem circiter $27\frac{1}{2}$ digit: immotum consistere, neque deorsum amplius tendere. Unde patet, cylindrum argenti vivi. $27\frac{1}{2}$ digit: altum pondere æqualem esse aëris cylindro ejusdem crassitiei inde à superficie terræ ad finem atmosphæræ protenso. Itaque dum argentum vivum in tubo contentum excedit altitudinem $27\frac{1}{2}$ digit: pondere superat aërem superficiei argenti vivi, quo vas repletum est, incumbentem, adeoque argentum vivum, quo tubus repletus est, descendendo alterum illum vase contentum unâ cum aëre ipsi incumbente tantisper ascendere cogit, dum & pondus argenti vivi in tubo, & aëris superficiem alterius argenti vivi, quo vas repletum est, prementis fuerit in æquilibrio. Manifestissimum autem est, qvum neque per tubi vitrei, neque per argenti vivi poros aër ille crassior penetrare possit, in locum ab argento vivo ita descendente in summitate tubi derelictum succedere materiam tam subtilem, ut vel per vitrum, vel per argentum vivum, vel per utrumque transire queat. Et si quis tam absurdus sit, ut potius in summitate tubi istius spatium omni corpore vacuum statuere, quam materiam illam, quam diximus subtilem admittere velit, argumenta tamen omni exceptione majora non desunt, quibus contrarium probari potest. Primo enim si spatium à Mercurio derelictum omni corpore vacuum esset, luminosum illud amplius esse non posset. Quod experientiæ reclamat. Objecta quippe visibilia in eo constituta, visu percipi possunt. Accedit, quod vacuum sit purum nihil, adeoque nullius proprietatis capax. At si summitati tubi ignis applicetur, rarefactionem ibi animadvertimus similem illi, quæ fit in thermometro, à qua Mercurius deprimitur. Ideoque veram ibi esse materiam necesse est. Quam tamen materiam à communi illo aëre diversam esse facile est intelligere. Nam si totus ille tubus, argento vivo non repleatur, sed spatium unius aut duorum digitorum ab aëre occupatum relinquatur, obturatoque digito foramine tubus invertatur, Mercurium lentissime descendere, aëremque in modum guttarum ascendere non sine voluptate videmus. Contra verò si tubus, postquam Mercurio repletus aliique Mercurio immersus ad solitam altitudinem se deplevit, obturato iterum foramine invertatur, integer Mercurius ille non lentè descendit, sed uno impetu, non secus ac si corpus durum esset, decidere, neque ullum aërem ascendere videmus. Sed ut ad institutum nostrum redeamus, eaque, quæ ex dictis facili negotio deduci possunt, porrò explicemus, fingamus tubum Mercurio repletum aliique Mercurio immersum, modoque solito ad altitudinem $27 \frac{1}{2}$ dig: depletum ex altero Mercurio iterum extrahi; & facile est intelliligere, si vel una gutta ex tubo illo ulterius defluat, quod reliquum est, argenti vivi, quia externo aëri pondere amplius æquale non est, cum impetu ad summitatem tubi resilire, postea autem ob gravitatem tam suam, quàm aëris exterioris per vices ascendere & descendere debere. Quod si facto experimento modo sæpius jam explicato tubum ex vase Mercurio repleto extrahamus, ejusque foramen digito leniter admoto obturemus, gravitas argenti vivi nullo modo sentiri potest. Argentum enim vivum in tubo contentum digitum majori vi deprimere nequit, quàm idem ab aëre circumstante reprimitur. Eodem planè modo, quo in bilance manus nostra uni lanci subdita, pondus ejus non sentit, si alteri lanci æquale pondus sit impositum. At si tubi ita obturati altera extremitas aperiatur, digitus oppositum foramen obturans quodam quasi ictu percutietur. Aër enim superne in tubum descendens, suamque gravitatem gravitati argenti vivi conjungens, aëri circumstanti præponderat. Non aliter ac â bilance manus uni lanci subdita cum impetu deprimetur, simulac lanci isti plus ponderis impositum fuerit, quam alteri. Atque ut eo curiosius sit experimentum, fieri illud potest in tubo ab utraque parte aperto, ita ut superius foramen vesicâ suillâ prius, ut se extendere possit, madefactâ occlusum sit. Videbimus enim simulac Mercurius descendit, vesicam illam extendi & in tubum istum deprimi. Cujus causa hæc est, quod dum gravitas aëris tubum circumstantis pugnando cum gravitate argenti vivi tubo inclusi illud argentum vivum sustinet, columna illa aëris vesicæ incumbentis à nullo circumstante aëre repressa vim suam in vesicam exerere, eamque deprimere debet. Et quod visu perjucundum est, eaque quæ de materia subtili crassioris aëris flocculos perlabente eosque agitante sæpius diximus, mirificè confirmat, sumptâ cyprini vesicâ, recisâque ejus minori ampullâ, altera comprimatur, ita ut aër tantum ad unius lentis magnitudinem in ea remaneat, & deinde ligetur, ut, quod reliquum est aëris, exire non possit. Hæc ampulla, summitati tubi inclusa, dum Mercurius descendit, in momento inflabitur, æquè ac prius, quum aër nondum expressus esset. Cujus rei causam ut intelligamus, animadvertendum est, flocculos crassioris aëris per omnia spatia circa nos diffusos impedimento esse, ne materia subtilis reliquo aëri, qui post expressionem in ampulla illa vesicæ remanebat, mixta eum magis agitare & in majus spatium extendere possit, quàm circumstans crassior aër à materia sibi immixta agitatur & extenditur. At dum eadem ampulla tubo argento vivo repleto includitur, atque in locum descendentis Mercurii non crassioris aëris flocci, sed materia subtilis in spatium vacuefactum penetrat, eadem meatus vesicæ permeando paulum illud aëris crassioris, quod in illa offendit magna vi agitat, idque extendit & dilatat: non secus ac ventus plumulas disjicere & in amplissimum spatium extendere solet. Quod fieri non posset, si spatium, in quo plumulæ continentur, esset valde angustum. Et quidem esse hunc aërem crassiorem, à quo ampulla illa dilatatur, vel inde patet, quod ampulla, si omnis aër crassior, antequam tubo includatur, expressus fuerit, planè non inflетur. Ratio in promptu est. Materia enim subtilis, cui liber transitus per poros ampullæ patet, illâ, ne effluat, concludi, adeoque eam dilatare non potest: aër autem crassior est, quàm ut meatus ampullæ penetrare possit, atque ideo à materia subtili agitatus inflatur, ampullamque, à qua constricta tenetur, extendit: ita quidem ut, si paulo plus aëris in ampulla relictum fuerit, illa planè crepet. Et ne dubitationi locus relinquatur, si vesica, quá occlusa est superior tubi pars, acu perforetur, ut aliquantum aëris crassioris ingrediatur, & postea foramen illud obturetur, videbimus aërem illum crassiorem, qui per foramen acus intravit, vesicam cyprini premere, ita ut vel magis vel minus rugosa appareat, prout vel plus, vel minus aëris ingressum fuerit. Progrediemur nunc ad alia, & qua ratione altitudo atmosphæræ explorari possit, docebimus. Ex iis, quæ hactenus explicata fuerunt, in proclivi est intel-

intelligere, quum altitudo argenti vivi tubo inclusi dependeat à gravitate circumstantis aëris gravitati argenti vivi æquali, Mercurium in tubo contentum ad altitudinem vel majorem vel minorem ascendere debere, prout aër circumstans vel altior vel minus altus est, ita quidem, ut si supra atmosphæram quis experimentum hoc faceret, argentum vivum, quum à nullo circumstante aëre amplius sustineretur, planè descensurum esset. Ideoque pro indaganda atmosphæræ altitudine capiendum est hoc experimentum in duobus locis, quorum alter altero multo sit altior. Differentia altitudinis, quæ deprehenditur in argento vivo tubo incluso comparata cum differentia altitudinis duorum illorum locorum, in quibus experimentum fit, dabit altitudinem atmosphæræ. Memorat Rohaldus repletum à se esse tubum $3\frac{1}{2}$ ped: longum, eumque vasi satis cavo & angusto immersum. Ubi quum experimentum modo solito successisset, inclusisse se & tubum & vas, cui immersus esset, ligno ad id præparato, ut commodè & sine effusione in diversa loca portari posset: captoque experimento in superficie fluvii Sequanæ tunc congelatæ, postea in unam turrium *de Nostre Dame de Paris* dictarum loco illo, ubi prius fiebat experimentum, 36 perticas altiorem, observasseque Mercurium $\frac{1}{4}$ digit. præter propter magis descendisse, quàm antea. Idem tentatum fuisse dicit in Arvernis, ubi facto experimento in humillimo loco oppidi Clermontii, eodemque postea capto in vertice montis vicini, cui nomen *Puy de Dome* 500. pert. circiter priori loco altiore, deprehensam esse differentiam 3. digitis paulo majorem. Quod si jam aer totius atmosphæræ ubique æquè crassus esset, ex posteriori hoc experimento, quod priori magis sensibile est, altitudo atmosphæræ ita colligeretur. 3. digiti argenti vivi pondere sunt æquales 500 perticis aëris, quot perticas pendent $27\frac{1}{2}$ digiti argenti vivi? Et proveniunt facta operatione $4583\frac{1}{3}$ pert. pro altitudine totius atmosphæræ. Cæterum ne quid intentatum relinquat humani ingenii curiositas, quum neque mons tam altus sit, ut nobis ad extremum atmosphæræ terminum aditus pateat, neque si vel maximè eo pervenire possemus, aër, quem per respirationem attraheremus, satis crassus esset, ut in eo durare possemus, excogitatum est à sæpius jam laudato Rohaldo machina vitrea, qualem Figura XXIX. exhibet, cujus ope sine duabus illis difficultatibus res omnis ad oculum demonstrari potest. Quomodo totum negotium administrari debeat, edisserat ipse Auctor. *B C tubus est, longitudinem viginti septem ped. cum semisse excedens, apertus in C. AB magna quædam cavitas est, ex qua transitus per BL patet ad BC, quaque à parte A occlusa est; DF tubulus vitreus est in extremitate D occlusus, qui quum extra cavitatem AB parte sua FE protendatur, apertus est in extremitate E; & præterea tubulus iste parvum foramen habet ad F, ubi extrinsecus adhæret vitro AB, ita ut ex cavitate tubuli per hoc parvum foramen F transitus pateat in magnam cavitatem AB. Denique superest extremitas tubi BG, per quam aër exterior transire, seque conjungere potest illi, qui in tubo ABC continetur. Clauso primum vesicâ suillâ foramine G, tuboque deinde inverso, ita ut extremitas C locum superiorem occupet, infundo argentum vivum per foramen E, quod in initio decidit tantum in tubulum DFE; quo usque ad F repleto, quod postea infunditur, per foramen, quod in hac regione est, decidendo cavitatem AB tubulum hunc ambientem replet, quo usque ad altitudinem B repleto residuum magnæ hujus cavitatis Mercurium per foramen C infundendo repleo, donec ille ad foramen E ascendat, quod vesicâ suillâ tunc occludo. Postea vivum argentum per foramen C ulterius infundendo totum tubum BC repleo. Quod ubi factum est, foramen C digito obturo, inversamque totam machinam solo argento vivo repletam vasi argento vivo repleto immergo. Tunc cavitas AF depletur usque ad IL, eodemque tempore parvus tubus ad eandem altitudinem usque evacuatur, & tubus C evacuatur usq; ad H punctum, quod argento vivo vasis viginti septem digit. cum semisse altius non est. Ita conformitatem experimenti cum ratiocinio videre est:*

Quem-

Quemadmodum enim nullus aër crassior pondere suo incumbit superficiei IL vivi illius argenti, quod in cavitate IFL remansit, ita illud à nulla re ad ascendendum in tubum DFE urgetur. Quod si deinceps vesicâ suillâ foramen G occludens acu perforetur, manifestum est aërem crassiorem per cavitatem ABG intrantem duos effectus planè diversos adeoque notatu dignissimos producere debere. Prior est, quod pondere suo incumbendo argento vivo directè sub G constituto illud ad descendendum urgebit: alter autem, quod gravitate sua incumbendo quoque superficiei IL vivi argenti, quod in cavitate IFL remansit, partem illius coget ascendere in tubulum DFE; quinimo illum totum implebit, siquidem altitudo ejus 27. digit: cum semisse non excedet. Et ut plus delectationis ex isto experimento capiatur, postquam vesica suilla foramen G occludens acu perforata est, acus perpaululum subinde retrahenda est, ut singulis vicibus paululum aëris per foramen intromittatur, acusque è vestigio iterum deprimenda. Et non sine voluptate videbitis argentum vivum sensim & per intervalla in tubulum DFE ascendere, quum interim pedetentim quoque in tubo BC descendat. Postea uno impetu acus extrahenda est, & tunc eodem tempore illud videbitis ab una parte ascendere, & ab altera descendere. Reliquum nunc est ut explicemus, qua ratione incurvo siphone liquor ex doliis hauriri soleat. Vid. Fig. XXX. Fingamus siphonem, qualis est A B C D, breviori suo crure D C immersum esse vasi aquâ pleno: & aër pondere suo, quemadmodum sæpius jam diximus, aquæ in vase contento incumbens efficere nequit, ut aqua in siphonem ascendat, quia alius aër in siphone contentus æquali vi ab aëre crus BA circumstante ab A versus B, C & D repellitur. At simulac tubus ABCD vel suctione vel alio quovis modo aquâ repletus fuerit, remoto deinde ore à foramine A aqua tamdiu fluet, quamdiu brevior ramus CD aquæ immersus erit. Causa est, quod quum siphon aqua nondum repletus est, vis illius aëris, quæ pondere suo superficiei aquæ incumbendo illam

illam urget ad ascendendum à D ad C, æqualis est vi alterius aëris, qui per A ingrediendo aquam à C ad D repellit. Repleto autem tubo ABCD pondus aëris superficiem aquæ prementis debilitatur per gravitatem aquæ in uno crure CD contentæ, pondus item aëris ex parte opposita prementis debilitatur per gravitatem aquæ in altero crure AB contentæ. Itaque quum crus AB longius sit altero CD, magis debilitatur pondus aeris aquam ab A ad B reprimentis, quàm aëris aquam à D ad C prementis. Ideoque vis major minorem vincendo efficiet, ut aqua à D ad C ascendendo ab altera parte effluat. Quod si in siphone ABCD crus AB longitudine non superaret alterum crus CD, aut si crura ista superarent altitudinem illam, ad quam aqua per pressionem aëris attolli potest, aqua ex dolio non efflueret. Nam in priori casu per gravitatem aquæ in crure AB contentæ non magis debilitaretur pondus aëris aquam ab A ad B reprimentis, quam per gravitatem aquæ in crure CD contentæ debilitaretur pondus aeris aquam à D ad C prementis. Unde quod reliquum est virium ab una parte cum résiduo ab altera parte in æquilibrio esset. In posteriori casu quum crus CD longius ponatur, quam ut pondus aëris superficiei aquæ in vase contentæ incumbentis aquam eo perducere possit, aqua eousque non ascendet, & si vel maximè siphon aquâ repletus esset, illa tamen superne sese dividere & per utrumque crus descendere deberet. Plura de hâc materia scribere supervacaneum esse ducimus. Neque enim in hydraulicis facile quicquam occurret, cujus ratio ex dictis reddi non possit.

Ex

Ex Statica.

INter Mechanicas disciplinas non postremum locum obtinet Statica, cujus beneficio maxima pondera exigua vi attolli possunt. De omni Statices vi & natura eruditè disserit Cartesius duabus Epistolis ea super re ad Mersennum scriptis, aque ex hoc uno generali Principio omnia deducit: *Neque maior, neque minor vis requiritur ad aliquod corpus grave certam ad altitudinem elevandum, quam ad elevandum alterum minus grave ad altitudinem tanto majorem, quanto ipsum minus grave est; vel ad elevandum aliud gravius ad altitudinem tanto minorem.* Ex. gr. Eadem vis, quæ valet pondus aliquod centum librarum attollere ad duorum pedum altitudinem, potest etiam ducentarum librarum pondus attollere ad altitudinem unius pedis, aut aliud quinquaginta librarum ad quatuor pedum altitudinem, siquidem illis legitimè applicetur. Quod exemplis melius illustrabitur. Vid. fig. XXXI. Fingamus pondus E ducentarum librarum alligatum ad trochleam D, circa quam ductus est funis ABC, ab utraque parte æqualiter attolli à duobus hominibus, & liquet quemlibet horum semissem tantum ferre, seu neque majorem neque minorem vim ad illud vel sustinendum vel attollendum adhibere, quam quanta requiritur ad centum libras vel attollendas vel sustinendas. Fingamus deinde funis hujus uno extremo A clavo cuidam firmiter alligato alterum extremum C itidem ab homine sustineri; & cum clavus A idem præstet, quod antea homo ille, quem ibi esse fingebamus, illi qui in C constitutus est, non majore vi, quam antea ad pondus E sustinendum opus est, ea scilicet, quæ ad centum

tum libras sustinendas requiritur. Fingamus denique hominem ad C constitutum attrahere funem ad attollendum pondus C, & patet eum, si vim tantam adhibeat, quanta centum libris ad duorum pedum altitudinem attollendis sufficit, pondus hoc, quod ducentas grave est, ad pedis unius altitudinem levaturum. Funis enim ABC, quum sit duplicatus, ad duos pedes trahi debet in extremo C, ut pondus E ad unius pedis altitudinem attollatur Quod si alia adhuc trochlea alligetur ad A, circa quam funis ABCH trahatur, ut in fig. XXXII, non minor vis requiretur ad H versus K attrahendum: quàm antea requirebatur ad C versus G trahendum: quia nempe funem ad duos pedes trahendo pondus hoc ad unius pedis altitudinem levabitur. Verum si duabus hisce trochleis adjiciatur adhuc alia versus D, cui pondus alligetur, & per quam funis eodem modo ac per primam ducatur, non major vis requiretur ad pondus hoc ducentarum librarum attollendum, quàm ad aliud quinquaginta librarum absque trochlea levandum. Etenim funem hunc ad duos pedes trahendo pondus E semisse tantum pedis levabitur. Atque ita multiplicatis trochleis vel maxima pondera *minima* vi attolli possunt, neque quicquam ex hoc calculo subducendum est, præter trochleæ gravitatem & difficultatem portandi funem & efficiendi ut allabatur: & præterea semper rejicitur vis aliquanto major ad attollendum quàm ad sustinendum pondus aliquod. Sed hæc in calculum non veniunt, ubi propositum est omnia rationibus Mathematicis examinare.

Secundum exemplum exhibet Cartesius in plano *inclinato*. Vid. Fig. XXXIII. Volvatur pondus F super plano inclinato AC: & manifestum est ex dictis si AC sit dupla ipsius AB, quam perpendiculariter versus centrum terræ tendere ponimus, & pondus F liberum in aëre ducentas libras grave, illud fore centum tantum libras grave respectu potentiæ H, quæ illud in plano AC aut trahit aut sustinet. Hæc enim potentia eandem vim adhibet ad pondus F attollendum ad altitudinem BA, quam in aëre libero impenderet ad idem attollendum ad altitudinem æqua-

qua-

qualem lineæ CA. Ubi optimè obſervat Carteſius, mechanicè hoc quidem verum eſſe, ubi omnia gravia corpora finguntur deorſum tendere ſecundum lineas parallelas: ſiquidem differentia illa, quam harum linearum ad centrum terræ tendentium inclinatio efficere poteſt, non eſt ſenſibilis. *Verum ut calculus iſte*, inquit, *omnino exactè ſubducatur, oporteret lineam CB partem eſſe circuli alicujus, CA vero lineæ ſpiralis; quæ pro centro haberent centrum terræ. Quando enim ſupponitur ſuperficies AC eſſe omnino plana, tum gravitas relativa ponderis F non habet eandem proportionem ad abſolutam*, (intelligit autem per gravitatem abſolutam eam, quam corpus habet citra reſpectum ad potentiam, quæ illud attollere conatur: relativam autem, quam habet cum reſpectu ad nos, quum illud attollere nitimur. Poteſt enim corpus aliquod relativam gravitatem vel majorem vel minorem habere, quum tamen eadem ſit gravitas ejus abſoluta: quemadmodum haſta longè nobis gravior eſt, ſi ab extremorum uno, quam ſi per F medium prehendatur) *atque linea AB ad lineam AC, niſi quando pondus illud eſt in vertice A, cum enim aliquanto depreſſius eſt, ut verſus D aut verſus C, proportio iſta aliquanto minor eſt. Quemadmodum clarè liquebit, ſi concipiatur planum hoc produci usque ad punctum illud in quo incidere poteſt ad angulos rectos cum linea recta è terræ centro ducta. Ut ſi M ſit centrum terræ, ſitque MK perpendicularis ad AC. Liquet enim pondus F poſitum in puncto K, nullam plane gravitatem ibi habiturum reſpectu potentiæ H. Ut vero innoteſcat quanta ſit ejus gravitas reſpectu hujus potentiæ in ſingulis aliis plani hujus punctis, ducenda eſt recta quædam linea, ex. gr. DN, verſus centrum terræ, atque in puncto N, ſumpto pro libitu in iſta linea, ducenda eſt NC perpendicularis ad DN, & incidens in lineam AC in puncto P. Nam ut DN eſt ad DP, ſic gravitas relativa ponderis F in D ſe habet ad gravitatem ſuam abſolutam. Cujus rei ratio liquet, quia pondus iſtud quamdiu eſt in puncto D, deorſum tendit ſecundum* *lineam DN, & tamen nequit incipere descendere nisi secundum lineam DP. Nota quod dico incipere descendere, non vero simpliciter descendere, quia nimirum ratio tantum habenda est initii descensus hujus; ita ut si ex. gr. pondus F insisteret in puncto D, non planæ superficiei, qualis supponitur A D C, sed sphæricæ aut quocunque alio modo curvæ, ex. gr. EDG, modo superficies illa plana, quæ curvam hanc in puncto D tangere supponeretur, eadem esset cum ADC, pondus hoc neque magis neque minus grave esset respectu potentiæ H, quàm si plano AC insisteret. Nam licet motus, quo pondus istud à puncto D, versus E aut G ascendens aut descendens super superficie curva EDG sit prorsus diversus ab eo, quo super plana superficie ABC moveretur; nihilominus quando est in puncto D super E D G, determinaretur ad se versus eandem partem movendum, ac si superficiei A D C insisteret nempe versus A aut versus C. Et liquet mutationem, quæ fit in isto motu, statim atque desiit tangere punctum D nihil immutare posse in gravitate illa quam habet dum illud tangit. Nota etiam proportionem quæ est inter lineas DP, DN eandem esse, atque inter lineas D M & DK, quia rectangula triangula DKM & DNP sunt similia, ac proinde gravitas relativa ponderis F in D est ad gravitatem suam absolutam, ut linea DK ad lineam DM; hoc est, generatim loquendo, omne corpus quod à plano aliquo inclinato sustentatur, tanto exacte minus gravitat, quam si non sustentaretur; quanto distantia, quæ est inter punctum in quo planum illud tangit, atque illud in quo perpendicularis à terræ centro cadit in idem planum, minor est ea quæ inter pondus & terræ centrum intercedit.*

Tertium exemplum dat Cartesius in vecte. Vid. fig. XXXIV. Sit vectis CH sustentatus in puncto O, ita ut pars ejus C, quæ deprimitur, describat semicirculum ABCDE, altera autem H, quæ attollitur, semicirculum FGHIK. Et videmus pondus illud, quod ad extremum H supponitur, non attolli curvæ hujus FGHIK, sed solum rectæ FK longitudine: adeoque proportionem, quæ inter vim pondus hoc moventem ipsumque hoc pondus intercedit, non dimetiendam esse ex proportione, quæ est inter binas horum circulorum diametros, neque etiam ex illa, quæ est inter binas illorum circumferentias, sed ex ea proportione, quæ est inter prioris circumferentiam & posterioris diametrum. Propterea animadvertimus, pondus in extremitate F vectis AF constitutum, dum vectis ab una parte movetur ab A ad B, & simul ab altera ab F ad G pervenire tantum ad altitudinem FG, at idem pondus in G, constitutum, dum vectis BG à parte B movetur ad C, & simul ab altera parte G ad H, pervenire ad altitudinem SO ipsâ SF multo majorem. Unde multo major vis requiritur ad deprimendum vectem à B ad C, quàm ad ipsum ab A ad B deprimendum requirebatur. Eadem ratione majori vi opus est ad vectem à C ad D, quam ad eundem à D ad E deprimendum. *Porro ad mensurandum accuratè*, inquit Cartesius, *quanta debeat esse hæc vis in singulis curvæ ABCDE punctis, cogitandum est illam eodem planè modo agere, ac si illa traheret pondus hoc super plano circulariter inclinato; singulorum autem plani hujus circulariter sive sphæricè inclinati punctorum inclinatio mensurari debet ex inclinatione lineæ rectæ circulum in hoc puncto tangentis. Sic ex. gr. quando vis est in puncto B, ad inveniendam proportionem, quam illa habere debet cum gravitate ponderis, quod tum est in puncto G, ducenda est tangens GM, atque alia linea à puncto G, ex. gr. GR, quæ versus terræ centrum rectà tendat, deinde à puncto M, sumpto ad libitum in linea GM, ducenda est MR ad angulos rectos ad GR; & cogitandum est ponderis hujus gravitatem in puncto G esse ad vim, quæ illi ibi sustinendo, aut juxta circulum FGH movendo requireretur, sicut linea GM se habet ad GR. ita ut si linea BO supponatur dupla lineæ OG; sufficit ut vis, quæ est in puncto B, sit ad pondus illud, quod est in puncto G, ut semissis lineæ GR ad totam GM, si vero BO & GO sint æquales, debet hæc vis se habere ad hoc pondus, ut tota GR ad totam GM &c. Non secus quando vis est in puncto D, ut in-*

notescat quantum gravitet pondus, quod tum est in puncto I, ducenda est tangens I P, & recta I N versus centrum terræ atq; à puncto P, sumpto ad libitum in tangente ducenda est P N perpendicularis ad I N, ut habeatur proportio, quæ est inter lineam I P & semissem lineæ I N (si quidem ponatur dupla linea O I) ea nempe quæ est inter ponderis gravitatem & vim requisitam in D, ad pondus illud movendum. Plura hac de re legi possunt apud ipsum Cartesium Part I. Epist. LXXIII & LXXIV.

FINIS.