# DE
# THEORIA PARALLELARVM SCHVLZIANA

AVCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORVM ORDINIS

IN ACADEMIA LIPSIENSI

DISPVTABIT

DIE XXI. OCTOBRIS A. MDCCLXXXVI

M. CASPAR EICHLER

LIPSIENSIS

RESPONDENTE

THEAENETO RÜFFER

LVMNITIO-LVSATO.

---

LIPSIAE
EX OFFICINA BÜSCHELIA.

Poſt illos octo & viginti qui a Cel. Klügelio libello peculiari recenſentur, theoriam parallelarum ad rigorem geometricum compoſitam concinnandi conatus, omnes ſine ſuo caſſos; poſt collocatam a Karſtenio & Hindenburgio ſummis viris in eadem re operam, neque illam Catonibus geometris undique probatam, non temere expectare aliquis poterat, fore, ut ſtudia hominum conquieſcerent circa id praeſtandum, quo pertingere tantorum virorum ſolertiae non licuiſſet. *) Verum non eam eſſe indolem, non eas animi mortalium anguſtias, experimur, ut facile terreantur cogitatione fruſtra inſumtae multorum induſtriae, quin in eodem ſaxo volvendo vires ſuas periclitari velint. Itaque qui ſeriem virorum ingratam illam aedificii geometriae lacunulam ſupplendi deſiderio flagrantium augeret, extitit ante aliquod tempus vir rerum divinarum & humanarum ſcientia clarus orbique literario notiſſimus, Io. Schulzius, Regiomonti in Boruſſia concionator aulicus. Hic tandem fato felici ſibi contigiſſe autumat, ut viam indagaret, qua pergendum ſit ad perfectam & omni numero abſolutam parallelarum



theo-

*) Quod Cel. Hindenburgium attinet, loquor iam de iis, quae de hoc argumento publicavit in Promtuario Math. Lipſienſi 1781: ea enim quae nuperrime ſecundis curis elaborata hanc in rem dedit in eodem promtuario, fateor magnopere mihi arridere, atque ita comparata videri, ut non expectem quenquam aliquid contra eorum veritatem moniturum eſſe.

theoriam adſpirantibus. Quam quidem ipſam theoriam expoſuit libello, cui titulum praefixit:

*Entdeckte Theorie der Parallelen nebſt einer Unterſuchung über den Urſprung ihrer bisherigen Schwürigkeit, Königsberg 1784.*

Noluit multorum noſtrae aetatis ſcriptorum conſuetudinem imitando *conatum (einen Verſuch)* inſcribere libellum ſuum, ut ipſe in praefatione fatetur, ſcilicet ne diffidere firmitati demonſtrationum ſuarum putaretur, aut videretur ineptam aliquam modeſtiam velle ſimulare. Quam eius profeſſionem ut non arrogantiorem dixerimus, certe ea minime caviſſe putamus, quo minus ſi quis forte poſt Klügelium conatuum parallelarum theoriam demonſtrandi hiſtoriam pertexturus ſit, ab hoc in eundem *conantium* cenſum referatur. Quod autem me attinet, negare non poſſum quicquid auctor de certitudine theoriae ſuae polliceatur, quicquid etiam de longo tempore perhibeat, per quod eam examinaverit; tres enim integros annos eam apud ſe continuit, antequam prodire juberet: nihilominus tamen me, utpote toties deceptum, timente, ne et hic anguis in herba lateret, animo ad eius libelli lectionem acceſſiſſe. Neque hic meus timor omnino, ut opinor, me fefellit. Cognita enim hac theoria, multa eius non potui non quam maxime improbare et damnoſa geometriae exiſtimare. Quae qualia ſint, per hanc ſcribendi ſive occaſionem ſive neceſſitatem aperiendi conſilium cepi, idque eo magis, quum aliorum de ſua theoria ſententias magnopere ſe expetere demonſtraverit auctor. Verum an viderim, intelligentium arbitrio, ſiquidem haec mea cognoscere dignentur, judicandum relinquo, eorum auctoritati cedere, honori mihi ducens; etiam ipſius auctoris mihi aeſtimatiſſimi judicium magni apud me ponderis fore profiteor, in quamcunque demum partem de hac mea opella ſtatuerit. Quid? ſi ipſe reprehenſus diſcedam, qui aliena peccata notare in animum induxerim? reſponſionem habeo paratam: conatum oppoſui perfectis, pauci temporis lucubrationem plurium annorum impenſo ſtudio examinatis, denique candidus impertivi, quae monenda mihi videbantur.

In

In hoc autem negotio ita versandum mihi esse censui, ut primo omnem novae theoriae rationem exponerem; deinde quicquid ad eam infringendam aliquam vim habere videretur, studiose conquirerem, quae auctor ad eam commendandam attulerit expenderem, quid in ea novum sit, aut secus, constituerem, aut quacunque ratione aliquid in ea laboret aperirem.

Quod igitur ad primum eorum quae proposui attinet, omnis theoriae Schulzianae repraesentatio haec est. Crura anguli rectilinei plani cuiuscunque absque fine produci possunt; et quum duae rectae non nisi in unico puncto se secare possint: apparet, superficiem intra crura contentam manere illimitatam versus eam partem, versus quam ipsa crura progrediantur. Omni igitur angulo respondet superficies infinita, *superficiei angularis* nomine commode dicenda. Haec superficies in aequalibus angulis est aequalis, in inaequalibus inaequalis, et maiori quidem angulo maior competit superficies infinita, minori minor, ita ut ex maiori aut minori aut aequali angulo ad maiorem aut minorem aut aequalem eius superficiem concludere liceat, et contra ex maiori aut minori aut aequali superficie ad maiorem aut minorem aut aequalem eius angulum. Quae quidem asserta ait in se ita esse clara, ut demonstrationis luce non egeant. Qua tamen si cui egere videantur, huic satisfieri posse talem in modum:

I. Sint (Fig. 1) anguli CAB, *cab* aequales. Ponatur *cab* ita super CAB, ut *a* in A et *ab* in AB incidat; iam crus *ac* nec cadet intra angulum ACB nec extra, quia alias foret angulus *cab* aut minor aut maior angulo CAB; ergo cadit *ac* in AC, adeoque superficies anguli *cab* congruit superficiei anguli CAB, et altera alteri est aequalis.

II. Sit (Fig. 2) *cab* > CAB. Cadentibus ut ante *a* in A et *ab* in AB, non potest *ac* cadere aut in ipsam AC aut intra angulum ACB, quia alias foret aut *acb* aequalis ipsi ACB, aut minor; ergo cadet *ac* extra angulum ACB, et superficies angularis *acba* superficie angulari ACBA maior erit, quippe positis ut praeceptum est angulis, hanc illius partem esse apparet.

III. Sint superficies angulorum CAB et *cab* aequales, et ipsi anguli erunt aequales. Si enim inaequales essent anguli, etiam superficies haberent inaequales, ut ostensum est (II).

IV. Sit superficies anguli *cab* maior superficie anguli CAB, etiam angulus *cab* angulo CAB maior erit. Si enim essent aequales anguli haberent et areas aequales (I); si vero angulus CAB maior esset angulo *cab*, haberet quoque superficiem superficie anguli *cab* maiorem (II), utrumque contra assumta.

Quibus ab auctore praemissis sequitur, quod est caput operae susceptae, probatio enunciati: duas lineas rectas FC, DG (Fig. 3) in eodem plano a tertia ita sectas, ut externus angulus GIB, ad eandem lineae secantis partem opposito interno CAB sit maior, seu quod idem est, ut anguli CAB, GIA sint duobus rectis minores, legitime productas necessario in aliquo puncto se secare. Nisi enim hoc fiat, contineri externi anguli GIB superficiem anguli interni CAB superficie, hoc est maiorem superficiem contineri minori, quod sit absurdum.

Haec igitur sunt quibus efficere voluit vir sagacissimus, ut in theorematum ordinem, quod sua natura adeo flagitare videtur, reciperetur enunciatio, cui ad nostra usque tempora a rigidis veri arbitris et custodibus non nisi inter axiomata locus datus est. Enimvero non negandum est, habere hanc ipsam demonstrationem, quo primo intuitu se commendet. Nihil in ea non simplex, nihil non facile videtur. Non circumducit, qui se ad eam dant pernoscendam, per longas perplexorum ratiociniorum ambages, verbo, ita est comparata, ut demonstrationem propositionis tam simplicis decet comparatam esse. Sed multa specie posse capere, quae si propius intuearis, tristem difficultatum segetem tibi offerant, non

non eſt novum et quotquot in inveniendo vero elaborant, ſaepius quam quidem optent experiuntur. Magnam praeterea demonſtrationi ſuae accedere commendationem putat auctor ex eo, quod eadem plane via, qua inceſſit, etiam pateat converſae enunciationis demonſtratio, illa quidem ad rigorem ab Euclide efformata Prop. 16. Lib. I. ſed eo modo, qui noſtros directae demonſtrandae conatus deſtituat; quod ipſum ſatis doceat, Euclideam converſae demonſtrationem non petitam eſſe ex genuino et proprio proximoque fonte, ſed ex alieno et ſpurio moleſte arceſſitam. Hanc enim ſibi videri eſſe enunciationum reciprocarum naturam, ut ex iisdem principiis demonſtrari poſſint ac debeant, quoniam converſio nec in notionibus ipſis, qui eas ingrediantur, nec in harum nexu quicquam mutet. Nec multum ab hac ſententia Proclus, qui idem iam axiomate Euclidis XI offendebatur, abfuiſſe videtur, huius axiomatis propterea demonſtrationem exigens, quoniam idem converſum plena demonſtratione gaudeat. Attamen vim ratiocinii, quo nixus uterque, hic ſaltim demonſtrationem qualemcunque, ille adeo prorſus ſimilem utriusque enunciationis poſtulabat, me non aſſequi fateor. Quemadmodum enim multae enunciationes verae ſunt, quae converſae peccant, licet ex iisdem notionibus conflatae: ita aliqua via demonſtrabilem eſſe enunciationem, in cuius converſa probanda aliunde arceſſenda ſint demonſtrandi praeſidia, non mirum debet videri. Si poſito A tanquam conditione aſſeratur B, atque hoc ita eſſe, ad rigorem poſſit probari, iam autem aſſertum convertatur, ita ut B conditionis vicem ſubeat, ſub qua aſſeratur A: poteſt A aliquid habere, quod non ſit in B, quodque faciat, ut alterius enunciationum reciprocarum demonſtratio nulla difficultate procedat, alterius non item, quoniam quod in altera probandum eſt, in altera ſumitur. Cuius igitur enunciati demonſtrationem neceſſario dari, allatae rationes non evincunt, eius multo minus talem expectandi jus dabunt, quae certa aliqua ratione adornata ſit et ad exemplar aliquod, quod animo impreſſum habemus, compoſita. Et quemadmodum in iuſte demonſtratis nihil refert, non ſimiliter demonſtrata eſſe, ita nec haec

ſimi-

ſimilitas ubi conſpicua eſt, vitioſe demonſtratis quicquam ponderis addit. Lubenter largimur auctori noſtro, ſimillimas eſſe, quas duarum reciprocarum enunciationum demonſtrationes dedit: utinam vero non etiam in eo ſibi ſimiles, quod eodem utraque morbo aegrotent!

Demonſtrationes quidem axiomatis vexatiſſimi, quas ipſi ſuperficierum angularium conſideratio benigna ſuppeditavit, tres libello ſuo exhibuit: nos vero tantum unam earum, et quidem eam, quam prae ceteris ſibi placere ſignificavit, *) commemoravimus; quoniam, quum omnes in eodem peccent, ſufficere debet, nos in refutando ad hanc ſolam reſpicere.

Ac in univerſum quidem perſpicuum eſt, ſi theoriae huius aliquam labem eſſe volumus, aut principia ipſa, quae de mutua aequalitatis aut inaequalitatis angulorum et ſuperficierum angularium dependentia demonſtrationi ſuae praeſtruxit, falſa eſſe, aut male tantum in rem ſuam ab auctore verſa. Prius eſſe non dixerim, quia, ut infra videbimus, principia illa certo modo vera eſſe poſſunt; ergo poſterius ponamus neceſſe eſt. Maior itaque ſit maioris anguli ſuperficies, duobus angulis inaequalibus ita ſitis, ut verticibus et alterutro crure congruant. Iam vero in eum ſitum transferantur anguli, quem axiomatis parallelarum Euclidei demonſtratio ab auctore data requirit: quid eſt, quod nos cogat ſtatuere crus alterum GI (Fig. 3) rite continuatum tandem evaſurum eſſe extra angulum CAB, licet ſuperficies anguli GIB ſuperficie anguli CAB maior ſit? Dimotis verticibus ita ut maior angulus GIB ſuper crure minoris AB protrudatur verſus B; quibus quaeſo rationibus vincemus, non tandem totum angulum maiorem intra anguli minoris ſpatium ſuccedere? Scilicet regeret auctor, tegi tunc maiorem ſuperficiem a minori. Non opus eſt, ut hoc concedamus; ſed concedamus tantiſper, tamen quod auctor vult non ſequetur. Quid enim, ſi quod coniunctis verticibus et crure altero maior angulus aliqua parte ſupra minorem promineat, hoc ex ſitu accidere dicamus, qui ita mutari poſſit, ut angulus minor tandem

reci-

*) pag. 16. ſui libri.

recipiat partem maioris anguli prius prominentem? Sint (Fig. 4) duo anguli CAB, DEB, aequales, ſicque ſuper communi crure AB poſiti, ut vertices A, E, diſtent: et ſuperficies angularis CAB ſuperficiem angularem DEB parte parallelogramma CAED ſuperabit, ideoque aequalium angulorum unus ſecundum ſcita auctoris maiore ſuperficie gaudebit, quod augmentum non aliunde niſi ex ſitu habet, nec hoc augmentum impedit, quo minus angulus DEB angulum CAB mutato eorum ſitu includere poſſit. Nihil igitur agit auctor dicendo, (pag. 62 ſui libri) non cogitari poſſe, angulorum ſuperficies interea dum in alium ſitum transferantur crescere. Hoc enim ipſum ei ſtatuendum eſt, ſi angulos CAB, DEB aequales, etiam eo ſitu aequales haberi velit, ubi verticibus non coincidunt. Quod ſi vero in angulis aequalibus hoc ſitui tribuere debeat, ut augere alterutrum horum angulorum poſſit: quidni pariter in inaequalibus angulis concedat, minoris anguli ſuperficiem ſitu mutando in tantum augeri poſſe, ut tandem maiori angulo capiendo par ſit?

Ipſa igitur haec theoria arma, quibus eam oppugnemus, ſuppeditat. Sed eadem, quod deterius eſt, etiam viam aperit, qua angulos aequales, eosdem et inaequales eſſe demonſtrare liceat. Ad quod quidem efficiendum nihil aliud opus eſt, quam ut huiusmodi angulos CAB, DEB (Fig. 4) in communi crure AB verticibus modo diſtantibus collocemus, quo facto in oculos incurrit, ſuperficiem anguli DEB tegere tantum partem ſuperficiei anguli CAB, partem autem CAED anguli CAD reliquam eſſe, quae non tegatur ab angulo DEB. Itaque inaequales eſſe angulos CAB, DEB concludemus. Neque enim aliter auctor ſuperficiem angularem alteram altera maiorem et exinde angulos inaequales eſſe probat, niſi ut ſuperimpoſitis ſibi angulis, partem aliquam unius ſuperficiei eminere oſtendat, quum caetera ſeſe tegant ex aſſe. Habemus igitur ope huius theoriae ſophisma ſimile illi, quod dicitur cooperti et latentis; quo quemadmodum aliquis demonſtratur patrem noſſe et non noſſe, ita hic duo anguli demonſtrantur aequales eſſe et non aequales. Si ſuperficierum verſus aliquam partem patentium neque in figuram clauſarum una cadente ad eandem terminorum linearium alterius partem, exinde contineri ſpatium illius huius ſpatio, inferre velimus: non diſſimile nobis monſtrum naſcetur, comparantibus aream hyperbolae cum eius anguli aſymptotici area. Ita enim poſito hoc angulo, ut recta eum dimidians, in axem, vertex vero in verticem hyperbolae cadat; totius anguli area intra hyperbolae aream continebitur, et crura anguli cum hyperbolae cruribus non niſi unicum punctum commune habebunt. An igitur proptera minus eſſe ſpatium angulare ſpatio hyperbolico pronunciare audebimus? Atqui eadem opera, ſitu anguli mutato, contrarium demonſtraveris.

Sed vidit auctor, cum damnoſum eſſe ſuae theoriae, tum nec rationi conſentaneum, angulorum ſuperficies augmentum ex ſitu capere, quum interim anguli ipſi non mutentur. Hunc igitur naevum tollere ita conatus eſt, ut partem illam redundantem CAED (Fig. 4) quae exiſtit angulis aequalibus CAB, DEB, ſuper communi crure ita locatis, ut vertices diſtent, hanc igitur partem *nihil eſſe* affirmaret. Sed parum eo ſibi conſuluiſſe videtur. Certe mihi hoc legenti in mentem veniebat illius apud Phaedrum *) canis, qui ſua conditione multum collaudata lupo perſuadere conatur, ut ſimilem ſuae vitam eligat; huic autem interea partem pilis vacuam, catenae veſtigia, in collo canis animadvertenti, mirantique, quid hoc rei ſit, *nihil eſſe* reſpondet. Etſi enim peculiare theorema eo conſilio condidit auctor **), ut hunc nobis ſcrupulum eximeret et partem illam abundantem plane evaneſcere demonſtraret: ubi tamen quum facere non potuerit, quin id ipſum, de quo quaerimus, enunciatum, aequalium nempe angulorum etiam verticibus diſtantibus aequales eſſe areas, in auxilium vocaret; per orbem inceſſiſſe, adeoque operam luſiſſe cenſendus eſt. Qui enim ex illa parte abundante dubium auctori movet, is inaequales eſſe areas CAB, DEB contendit; igitur auctor huic dubio reſponſurus, non hoc ipſum ſumere

*) Lib. 3. fab. 7. **) pag. 90 libri ſui.

ſumere debebat areas CAB, DEB, eſſe aequales. Ut non commemorem quantum tali aſſertione animum tironis ſacris matheſeos primum initiandi (haec enim parallelarum doctrina ipſi vix limina huius artis transgreſſo eſt aperienda) offenſum iri credibile ſit, qui jubeatur ea pro nihilo agnoscere, quae eadem infinita ſtatuere cogatur, praeſertim quum res per diagrammata tractetur, ubi vel oculis uſurpare ipſi licet hoc nihilum infinite magnum. Modo non viſum, ſuum ſibi praeceptorem talia inculcantem eripere velle putabit. *)

Sed quod magis etiam ſtupescas, ut ſartam tectamque ſuam theoriam conſervet auctor, aeternum illud rationis dictatum, totum parte ſua eſſe maius labefactare et quaſi intercidere non detrectat, proque eo porro ſubſtitui vult hoc: totum eſſe vel maius ſua parte vel aequale. **) At cuius quaeſo vel aures vel animum tale quale nobis hic propinatur enunciatum non offendat? Quis non libentius, ne auditis quidem ullis rationibus hanc in rem allatis, ſubſcribat illi Euclideo de parallelis axiomati orbo demonſtrationis, quam ut tam putido quod ipſi videbitur aſſerto aſſenſum praebeat? Ita ſcilicet ſi loqueremur mathematici, multos amatores huic arti conciliaverimus. Sane nihil aeque anſam daret bonae geometriae obtrectatoribus, quibus nulla aetas caruit, ad eam novo argumento aggrediendam vituperandamque, quam ſi talem maculam, qua nulla eſt turpior, nobis oſtendere poſſint. Non magis portentoſa eſſe clamarent, quae a ſuis credi ſuperſtitio poſtulet, quam quae geometriae atria in gredientibus obtrudantur. Igitur ſi honorem ſuum optimae arti ſtare velimus, talia ut ex illa exulent, nobis



*) Non equidem ſtatuo, figuras propterea a mathematicis adhiberi, ut ex iis aliquid concludant, qui eſt ſolennis ἀγεωμετρήτων error; imo totum matheſeos purae quam dicunt negotium in ratiocinatione poſitum eſſe probe ſcio, quaeque ea tradit, eſſe οὐκ αἰσθητὰ ἀλλὰ νοητά, ut Proclus ait: attamen aliud eſt rem ruditer adumbrare ad juvandum intellectum, et rem plane diverſam figura exprimere vid. Io. Chriſtoph. Sturm diſp. de diagrammatibus.

**) pag. 77. ſui libri.

omni studio laborandum est. Et si vel maxime demus in verbis tantum positam esse illam quae tantopere nobis displicet duritiem, eamque justa explicatione facile emolliri: in tradendis tamen primis artis elementis non licere puto ita loqui, ac si id statuamus quod

*non homines non dii non concessere columnae.*

Id ipsum quidem quod dixi in verbis tantum extare offendiculum, non in re ipsa latere, utrum auctor mihi concesserit, minus perspectum habeo; attamen rem aliter se habere, vix persuadere mihi possum. Sit quantitatis $a$ finitae ad quantitatem infinitam A ratio quavis data minor. Ratio itaque $A : A + a$ quantumlibet prope ad aequalitatis rationem accedet. Nam erit $\frac{A + a}{A} = 1 + \frac{a}{A} = 1 + \frac{a}{\infty}$. Si quis propterea aequalia dicat A et $A + a$ non refragabimur. Aperte autem non eo sensu aequalia esse volet, quo verbi gratia aequalia esse dicimus duo triangula eiusdem altitudinis et baseos. Nam subtracta quantitate A, a quantitate $A + a$ semper relinquitur $a$ quantitas finita. Exemplum huius rei habemus quando in invenienda asymptoto curvae, subtrahenda datur abscissa infinita a subtangente itidem infinita, ubi nisi asymptotus lineae abscissarum parallela est, aut asymptotus per ipsam originem abscissarum transit, puncti in quo lineam abscissarum asymptotus secat distantia ab origine abscissarum semper finita prodit. Vid. Kästn. an. unendl. §. 113. Cavendum igitur est, ne quae nonnunquam ut aequalia spectari solent, quoniam id quo differunt non in censum veniat, eodem numero habeamus, ac ea, quae vere, et secundum rationem arithmeticam quam dicunt spectata, aequalia sunt; neque haec mathematicorum infinitas quantitates finita aliqua differentes pro aequalibus habendi ratio tanti est, ut propterea sacra Euclidis nostri axiomata refingamus, aut eorum fidem lubricam reddamus. Alioquin eodem jure evertat nobis aliquis enunciatum, quantitatem quamvis sibi ipsi aequalem esse. Nam cuiuscuncunque quantitatis finitae ad infinitam eadem ratio est, ac nihili ad finitam; et hoc sensu quantitates finitae quaevis (monente Segnero curs. math. P. II. §. 589) dici possunt nihila.

Licet autem plura huic theoriae sint adversa: praecipuum tamen fontem omnium difficultatum hic obviarum, quem etiam hactenus disputata non obscure produnt, esse credimus in notionis infiniti, qua tanquam ultimo fundamento omnis haec theoria nititur, usu non consentaneo. Ex huius notionis usu fore, ut lectoribus suis nubes exsurgerent et assensus impedimenta, facile quidem praevideri ab auctore poterat, nisi quae ingrata nobis sunt facile oculis se subtrahere pateremur. Igitur persuasit sibi potius, *) talem esse suam enunciati de parallelis demonstrationem supra nobis expositam, quae plane non afficiatur infiniti notione, seu in qua infinitas superficierum angularium plane non in censum veniat. Quod equidem quomodo sustineri possit, plane non video, quum omnis ratiocinii hic adhibiti vis ex infinitate crurum angularium pendeat, huiusque infinitatis cogitatio adeo non seponi possit, ut potius si finita crura fingere velis, haec omnis tibi demonstratio pereat, nec aliunde opus sit eius evertendae praesidia petere. Si igitur non parvi in hac theoria momenti est infiniti notio (esse autem maximi dubia et tela inde illi imminentia demonstrabunt): eius aperiendae et enodandae quam maxima cura esse oportebat auctoris nostri. Sed nulla fuit: imo potius in obscuro omnem eius notionis vim et naturam reliquit. Quod eo magis miror, quum partim in definiendis caeteris, quae eius theoriam ingrediuntur notionibus non parvam et vere mathematicam diligentiam adhibuerit; partim ipse pulchre agnoverit (in introductione ipsi theoriae praemissa pag. 20) geometram teneri in quocunque casu notionum suarum realitatem demonstrare; eaque re sola fieri, ut suis demonstrationibus summam, quae quidem desiderari possit certitudinem conciliet, quod inter omnes suas notiones nullum imaginationis ludicrum reperiri persuasus sit. Ex quo autem vocabulum



*) pag. 58. sui libri.

bulum infiniti inter mathematicos frequentari coepit, ea res tam multos ſcrupulos nonnullis hominibus injecit, ut quicquid infinitum ſaperet maxime horrerent et tantum non tanquam ineptum repudiarent — nedum tironum animos, quibus ſuam operam dicatam voluit auctor, oblata infiniti notione confundi expectemus.*) Non ſum ex iis, quibus magnam crucem figit infiniti in geometrarum libris uſurpata notio; idem tamen perpendens, quae de infinito ſtatuant ſummi mathematici, neque ignorans, a quam multis in recto eius uſu peccatum fuerit: illam auctoris noſtri ſecuritatem in re ubi facillimum ſit labi et in qua maxima cum circumſpectione verſari decet, magnopere ſuſpectam habeo. Crudum nobis appoſuit infinitum: ipſe viderit, an ſibi conveniat cum Leibnitio (at quanto judice veri!) ſcribente: **) *Infinitum continuum vel diſcretum proprie nec unum, nec totum nec quantum eſt, etſi analogia quadam pro tali a nobis adhibeatur, ut verbo dicam, eſt modus loquendi.* Et paucis interjectis: *Quum infinitum aut infinite parvum dicimus, commoditati expreſſionis ſeu breviloquio mentali inſervimus, ſed non niſi toleranter vera loquimur, quae explicatione rigidantur.* Ab his non abludunt verba illuſtris Käſtneri: ***) *infinite magnum non quantitatis nomen eſt ſed poſſibilitatis ſine fine et ultra omnes limites creſcendi.* Quamquam non aperte dixit auctor, an horum virorum de infinito ſententiae adſtipuletur, et quanquam aegre a me impetrare potui, ut cum illis facere eum putarem, qui vere dari quas in matheſi dicimus quantitates infinitas affirmant, quorum cauſam praecipue Fontenellius tuitus eſt a Maclaurino ****) diligenter refutatus, ita

ut

*) Quae dubia rudibus animis circa infinitum mathematicum naſci poſſint et ſoleant et quam pronum ſit hic deviare vide v. c. apud Sturmium de matheſeos incomprehenſibilibus, in praelect. acad. editis a Dan. Algoewero 1722. His adde quae effutiit bonus Thomaſius in libro: Cautelen welche ein ſtudioſus juris zu beobachten hat, cap. XI.

**) Act. erud. anni 1712. pag. 168.

***) De vera infiniti notione in differtt. math. et phyſ. pag. 36.

****) traité des flux. introd. pag. XLI ſeq. ed. Pariſ. 1749.

ut a nullo hodie facile mathematico agnoscatur meritoque pro exploſa habeatur haec ſententia: attamen diverſam auctori noſtro ſententiam de infinito ſedere, quam quae e verorum quantorum numero id excludit, hoc arguere videtur, quod demonſtrationem aequalitatis quantitatum infinitarum ſuperimpoſitione abſolvi poſſe credat. Alias enim intellexiſſet ſe ea re idem facere, ac qui duas quantitates imaginarias ex earum genere quas ex radicibus quantitatum negativarum obtinemus, aequales eſſe probaturus, ad ſuperimpoſitionem recurrat. Lineam quae ſit $= \sqrt{-c^2}$ aequalem eſſe lineae quae ſit $= \sqrt{-(a+b)^2}$ ſi ſit $c = a + b$, res eſt manifeſta: ſed hoc ad intuitionem traducere velle uti a Schulzio in infinitorum quantorum aequalitate demonſtranda factum eſt, abſonum eſſet. Sed quas porro dubitationes genuina doctrinae infiniti principia ſuppeditent age videamus.

Tralatitium eſt, infinitum aliud alio concipi poſſe maius, nec qui infinitum dicat, aequale dicere, non ſecus ac qui duas quantitates finitas eſſe ſtatuit, propterea aequales eſſe vult, nec eodem vocabulo notata pro iisdem quantitate habet. Imo duarum quantitatum infinitarum poteſt quaecunque ratio eſſe. Sit variabilium $x$, $y$, conſtans ratio $= a : b$; hanc ipſam rationem retinebunt $x$ et $y$ etiam tum, quum quavis data quantitate maiora facta eſſe concipiuntur. *) Qui igitur infinita accipere iubet crura duorum angulorum, niſi aliud praeterea paciſcatur, non propterea aequalia accipere juſſit. Et ſi iam duo anguli aequales ita ſibi imponantur, ut vertices et crura unius in verticem et crura alterius cadant, in noſtra poteſtate eſſe apparet, an velimus terminos crurum utriusque anguli, quos quidem fingere

hic

*) Exemplum in hanc rem affert ill. Käſtnerus l. c. pag. 37. triangulum rectangulum cuius unus angulus ſit 30 graduum. Crus huic angulo oppoſitum hypotenuſae perpetuo dimidium erit, cuiuscunque magnitudinis ſit crus et hypotenuſa. Poteſt autem crus data quavis recta maius ſumi; et tunc hypotenuſa duplo eiusdem rectae maior fiet, quod dicunt, crus infinitum fieri poſſe eiusque infiniti duplam fieri hypotenuſam.

hic oportet, coincidere, ſalva infiniti affectione, quam tribuimus his cruribus angulorum. Etiam qui ſola Schulziana legit et diverſorum angulorum ſuperficies angulares diverſas eſſe didicit, quamvis infinitas, hoc facillime ad lineas transferet et crura duorum angulorum diverſa eſſe poſſe, quamvis infinita, pronunciabit. Fingantur modo crura utriusque anguli e fluxu puncti orta eſſe, in alterius autem cruribus formandis quantumlibet celeriori motu ferri hoc punctum, in reliqui autem anguli cruribus, tardiori: fluxu in infinitum continuato crura non coincidere tota, palam eſt, ſed tantum quoad aequalia ſunt, licet vertices et initia utriusque anguli exacte congruant. Niſi autem tota crura infinita ſe tegant; neque aequalitatem ſuperficierum iis comprehenſarum recte exinde inferemus. Et ſic concidit omnis argumentatio auctoris noſtri, qui ex congruentia crurum colligit aequalitatem ſuperficierum angularium, hoc ſolum ſibi poſcens, ut infinita ſint crura.

Recte quidem alias utimur congruentiae principio in aequalitate angulorum aſſerenda; ſed hoc non ita fit, ut requiramus congruentiam ipſorum crurum ſecundum omnem eorum longitudinem, quippe quae in angulis proprie et natura ſua plane non in cenſum venit, *) ita ut aut productis cruribus non augeri aut abbreviatis minui ipſius anguli quantitas concipiatur; ſed ſufficit, congruentibus verticibus, crura ſibi ſuperimpoſita ex parte congruere, ut quousque producere libeat, utraque congruere cenſeamus utque eandem inclinationem angulorum inde colligamus. Aliter ſe res habet, ubi ex ſuperficierum angularium aequalitate ad angulorum aequalitatem colligere inſtituas aut contraria ratione a ſuperficiebus ad angulos commees. Superficierum enim harum quantitas pendet ex longitudine crurum, angulorum quantitas non item; illa variabilis eſt, ut ſunt crura, haec conſtans.

Atqui,

*) Hoc ſolum innuunt geometrae quando rectas angulum includentes tanquam infinitas conſiderant Segner curſ. math. P. II. §. 581.

Atqui, inquiat aliquis, ſi aequalitas crurum in comparandis angulis tibi requiritur: non ergo ſolum infinita, ſed eadem etiam aequalia crura accipiamus, ut ratiocinium ſibi conſtet ſicque optato fine potiamur. Hoc vero modo in aliam nos incidere Charybdin, quis non videt? Dimotis enim (Fig. 4) verticibus A, E, angulorum aequalium CAE, DEB, ſe prius tegentium, et crure EB immanente cruri AB, iam non amplius termini licet infinite a verticibus diſſiti utriusque cruris congruent, ſed tantum inter ſe diſtabunt, quantum vertices. Itaque non amplius quidem moleſta nobis eſſet pars illa parallelogramma CAED neque opus haberemus eam, pro nihilo declarare; ſed in remotae difficultatis vicem gravior ſuccederet ---- totius novae demonſtrationis jactura. Recta enim MB (Fig. 3) ſecante rectas CF, GD in A et I ita ut externus angulus GIB maior ſit interno CAB; ſi crura utriusque anguli accipiantur aequalia, finita an infinita nihil refert, crura coincidentia non in eodem puncto terminabuntur, ſicut non in eodem puncto incipiunt, ſed utrinque diſcongruent, ad ſiniſtram prominente parte AI ad dextram aequali parte KL, ſi AK fiat = IL, adeoque nec anguli GIL ſuperficiem partem eſſe ſuperficiei anguli CAK concludi poterit, etiamſi rectae CF, GD non concurrant, quoniam non tota ſuperficies GIL tegitur ad dextram rectae GI ſuperficie CAK ſuperimpoſita, ſed pars, quae terminatur linea KL emergit; et ita omnis abeſt cauſa, quae cogat, ut crus GI extra angulum CAB cadere credamus. Sive igitur aequalia crura ſive ſecus ſtatuamus, utrinque ſpem noſtram fruſtrabimur; neutro enim quod voluit auctor efficiemus. Neutrum igitur horum ſtatuere licet, ergo id ſtatuendum eſſet, quod fieri non poteſt. Neque enim ſpero negaturum eſſe auctorem, ad congruentiam requiri etiam in infinitis aequalitatem, quoniam fictum ſit quod infinitum dicant mathematici. Nam partim aequalitas a congruentia nunquam poteſt ſeparari, et ſi vel fictis congruentia tribuatur, etiam aequalitas concedenda eſt; partim nec ipſi, quod tamen fecit, liceret ex congruentia infinitorum, eorum aequalitatem deducere.

Nihil praeterea ad convellendam fidem novae demonstrationis opus esset: sed ut eo magis, quae nobis hanc controversiam peperit, causam quasi insecter, juvat aliud desertae ab auctore nostro verae infiniti notionis exemplum addere. Rectam infinitam ubicunque diviseris mediam te divisisse asseritur ab auctore. *) Quod ut constet, superimponere jubet partes sic divisas alteram alteri, ex quo scilicet eas perfecte congruere appariturum sit. Sed fateor mihi non apparere. Primo enim ubi finem non invenio neque aliunde de aequalitate et similitudine constet, ibi nec de congruentia judicium ferre audeo. Deinde omnino impossibile suscipere videtur, qui mediam dividere vult lineam infinitam, quippe in qua medium aliquod punctum non magis assignari potest, quam ultimum. Ubicunque enim esse dicitur punctum illud medium. Nusquam autem est, quod ubicunque est. Quo ipso tamen minime negatum velim, ea lege concipi posse lineam rectam infinitam, ut ab utraque parte alicuius puncti procedant sive aequales sibi lineae infinitae, sive aliam quamcunque rationem inter se habentes. Hoc enim dicendo nihil aliud dico, quam duas rectas variabiles, communi puncto copulatas et in directum jacentes, ita accipi posse, ut quamcunque datam rationem habeant. Harum variabilium altera infinitescente, infinitescet et altera, ita tamen ut ratio inter eas prius accepta constanter perseveret. Hae tum duae rectae pro unica haberi possunt ad utramque partem infinita, et si ratio inter eas stabilita, sit ratio aequalitatis, atque sibi invicem superimponantur, puncto quidem, a quo prius procedere fingebantur, copulatae manentes, congruere recte dicentur, quoniam duae rectae aequales infinitae superimpositae et altero sui termino congruentes, ex toto, hoc est, quousque prosequi labet crescentes, necessario congruunt. Inde autem non sequitur,

*) p. 91. sui libri.

tur, quae nulla lege ad utramque partem excurrere recta fingatur, eam itidem in duas partes aequales dividi posse. Hoc enim ipsi conditioni hic assumtae adversaretur.

Sed ut nihil omittam quod nocere posse reperi causae demonstratoris nostri, liceat mihi etiam hoc in medium afferre, quod quum absque aliqua figura superficiem cogitare non valeamus, iure hic quaeri posse videatur, qualisnam sit illa superficies infinita, qua determinari dicit angulum? an parallelogramma? an triangularis? an sectorem circuli referens? an rudis quaedam et informis? aut quae tandem alia? Certe si parallelogrammam statuas, aut triangularem, multum a vero aberrabis. Accipiamus v. c. angulum 30 graduum, qui est tertia pars recti. Quum igitur altitudo rhombi, cuius unus angulus sit 30 graduum, sit ad altitudinem quadrati eiusdem lateris in ratione subdupla, parallelogramma vero quorum aequales sunt bases, sint in ratione altitudinum: statuendo angulos esse in ratione superficierum parallelogrammarum sibi competentium, in venires angulum 30 graduum se habere ad rectum sicut $\frac{1}{2}\infty^2$ ad $\infty^2$, hoc est $\frac{1}{2}$ ad 1, absurda consequentia. Possim et hoc notare, proprie dici, quod tamen facit auctor, non posse, angulum determinari quantitate aliqua infinita, quippe ipsa haec non est determinata, *) non certa et stabilis, sed ambulatoria quaedam et erronea: sed nolo eo ipsi molestus esse, ne verbis inhaerere videar ineptus. Manifeste enim ita loquendo, tantum hoc dicere voluit, angulos in eadem ratione esse, in qua sunt superficies singulae singulis angulis respondentes, variabiles illae quidem sed rationem tamen constantem servantes.

Quod si vero superficies suas angulares infinitas in ratione ipsorum angulorum esse velit, apparet, cum nihil aliud per has

 super-

*) *Quantitates infinite magnas ac infinite parvas determinatas non esse, vel ipsa denominatio innuit. Non mutatur infinite magni conceptus si maius id cogitem; imminuere quoque id possum dummodo non adeo minuam, ut quantitate aliqua determinata minus evadat.* Segner curs. math. P. II. §. 584.

ſuperficies niſi ſectores circulares infinitos intellectos voluiſſe aut intelligere debuiſſe. Qui quidem eſt modus angulos metiendi dudum inter mathematicos receptus, quum ſectores circuli ſint in ratione ſuorum angulorum. Neque minus conſiderationem infinitatis crurum angularium refugerunt, qui de geometria ſcripſere. Si igitur primus aut a definitione Euclidea anguli, quae ſuperficiem cruribus comprehenſam negligit, receſſiſſe, aut infinitatem crurum in auxilium advocaſſe credit auctor, *) aliquanto fallitur. Niſi enim fuere, qui utrumque hoc in angulis coniunctim ſpectarent: ſaltim diverſi hic crurum infinitatem, ille ſuperficiem comprehenſam reſpexerunt. Quod vero has notiones ad theoriam parallelarum condendam in uſum vertere animum induxerit, hoc ſine dubio ſibi ſoli vindicat auctor nec habet praeeuntem quenquam. **)

Ut appareat quam parum diſſimili ratione infinitum iam olim ab aliis adhibitum ſit in menſura angulorum determinanda, non alienum erit adſcribere locum Caillii Lectionum element. mathem. §. 432, ubi *manifeſtum eſt,* inquit, *duas rectas fixas AB, NT (Fig. 10.) ad ſe ſub dato quovis angulo AEN vel TEB inclinatas a ſe magis ſemper recedere, ut magis ſemper producuntur, ita ut lex diſceſſus binorum quorumvis punctorum correſpondentium, velut A, N, in*

*) Hanc vero ipſi mentem eſſe, ex verbis, quae pag. 70. ſui libri profert his concludo: *weil indeſſen die Geometer der Flächen der Winkel bisher in keine Betrachtung gezogen* &c.

**) Ita ſcripſi et putavi antequam Promtuarii Mathematici Hindenburgiani anni 1786. particulam 3. videre licuiſſet, in qua multa de parallelarum doctrina in medium afferuntur. Quam particulam quum mecum benevole communicaſſet, etiam antequam tota prelum reliquiſſet, Hindenburgius vir uti eruditione et ingenio ita humanitate excellentiſſimus, qui ſciret me de eodem argumento ſcriptiunculam paraſſe et iamiam prelo ſubditurum eſſe: ex ea didici iam Ludovicum Bertrandum in libro, *Developement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques Genenae 1778*, eadem principia in axiomate, quod eſt de parallelis, demonſtrando in ſubſidium vocaſſe.

*in quacunque ab interſectione E diſtantia ſumantur, nunquam mutetur. Hinc ſequitur rationem metiendi angulum TEB eandem debere eſſe tam in infinito, quam in finito, hoc eſt, ſeu eius menſura a vertice E ad diſtantiam infinitam, ſeu ad finitam accipiatur. Quare duo anguli in finito aequales, ſeu quorum menſurae non niſi quantitate infinite parva differunt, debent etiam in infinito eſſe aequales, et eorum menſura nequit differre, niſi quantitate finita. Item duo anguli in finito inaequales, ſive quorum menſura differt quantitate finita, manent in infinito quoque inaequales, et eorum menſura differt quantitate infinita; ac viciſſim. His poſitis, ſi duae rectae fixae ſint inter ſe parallelae, atque altera ab altera habeat diſtantiam finitam, in infinito cenſendae ſunt tota ſua longitudine ita congruere, ut unam eandemque rectam efficiant, quippe mutua punctorum omnium correſpondentium diſtantia finita, et ubivis aequali, reſpectu harum rectarum infinitae extenſionis evaneſcente. Sic dum mobilis infinita AB circa punctum E ſuper infinita fixa AB rotatur, cenſenda eſt rotari ſuper una eademque recta compoſita e binis parallelis AB, CD, quarum altera alteri incumbat: et quoniam puncta interſectionum E, G finite diſtant inter ſe, putanda ſunt in E congruere, angulusque TEB cum angulo TGD. Et reapſe menſura anguli TEB accepta in infinito, ſeu arcus TB infinite a puncto E diſtans, non differt a menſura anguli TGD itidem ad diſtantiam infinitam accepta, niſi ea quantitate qua diſcrepat arcus TB, cuius centrum in E, ab arcu TD, cuius centrum G. Iam vero quum tam puncta G et E, quam puncta B et D inter ſe diſtantiam finitam habeant, differentia quae eſt in menſura angulorum TEB, TGD ad diſtantiam infinitam accepta, nequit eſſe niſi finita: quare etiam anguli TEB, TGD in finito non poſſunt niſi infinite parum differre, ideoque in finito aequales habendi ſunt.*

Quod vero ſuperficiem attinet ad quam animum intendere ex Ven. Schulzii ſententia recte in demonſtrandis affectionibus angulorum verſari cupientes oportuerit: magna ſe nobis offert caterva eorum, qui dudum idem ſentirent, eosque reprehenderent, qui omitterent ſuperficiem in conſideratione angulorum.

Prodeat hanc in rem primum teſtimonium Procli qui *) τὴν γωνιαν, inquit, ὁι μεν των γραμμων ἐν τῃ προς τι κατηγορια ταττοντες κλισιν ἐιρηκασιν, ἡ γραμμων ἐιναι προς ἀλληλας κεκλιμενων, ἡ ἐπιπεδων, ὁι δε ἐν τῃ ποιοτητι και ταυτην περιλαμβανοντες ὡς το ἐυθυ και το καμπυλον παθος, τοιονδε λεγουσιν ἐπιφανειας ἡ στερεου, ὁι δε ἐις ποσοτητα ἀναφεροντες ἐπιφανειαν ἡ στερεον ἀυτην ἐιναι συγχωρουσιν. διαιρειται γαρ ἡ μεν ἐν ταις ἐπιφανειαις ὑπο γραμμης, ἡ δε ἐν τοις στερεοις ὑπο ἐπιφανειας. το δε ὑπο τουτων φασι διαιρουμενον ουκ ἀλλο τι ἐστι ἡ μεγεθος, και τουτο ου γραμμικον, ἡ γαρ γραμμη ὑπο σημειου διαιρειται, λειπεται ουν ἀυτην ἡ ἐπιφανειαν ἡ στερεον ἐιναι. Definitionem anguli plani Phil. Müllerus, huius quondam academiae profeſſor matheſeos, in geom. Ariſt. theſ. 29. pag. 66. ex Ariſtotele nobis ſuppeditat hanc: *eſt ſpatium in concurſu aut commiſſura binorum laterum figurae collectum ad unum punctum.* Quibus addit Müllerus: *quum angulus angulo maior ſit aut minor non in nudo concurſa definiri poteſt, ſed eſſentia illius conſiſtit in intercepto ſpatio, quod a concurſu illo duarum linearum colligitur in mucronem. Hoc autem ſpatio ſemel conſtituto nihil refert quam longa ſint crura.* Eiusdem ſententiae fuit Io. Frid. Weidlerus, qui adeo ipſum Euclidem ope interpretationis commodae in ſocietatem ita opinantium pertrahere ſtudet in diſp. quam vindicias mathematum inſcripſit §. XVII. ubi *Euclides*, inquit, *quando ἐπιπεδον γωνιαν appellat non obſcure ſpatium inter inclinantes lineas interceptum indicat. Eſtque quod vel ex verbis conſtabit ipſi planus angulus nihil aliud, quam ſpatium in plano a duarum linearum ſe tangentium κλισει terminatum. Unde quum docet Pr. IX. dividere angulum, non κλισιν, ſed ab ea comprehenſum ſpatium dividendum intelligit. Ita enim ait: ἡ δοθεισα γωνια ἐυθυγραμμος ἡ ὑπο βαγ, id eſt ſpatium quod comprehenſum eſt ab illis lineis. Licet enim expreſſis verbis Euclides in definitione ſpatium non nominaverit, tacite tamen per vocem ἐπιπεδου inſinuat, neque duxit opus eſſe illius mentionem κατα ῥητον iniicere, quod res ipſa docere cuivis et monſtrare poterat.* Etiam notus Euclidis reprehenſor Petrus Ramus Geom. lib. 3. §. 3. non audet ille qui-

dem

*) Comment. Eucl. pag. 34. ed. Baſ. 1533.

dem angulum planum simpliciter superficiem appellare; definit enim, novum vocabulum comminiscendo, esse *lineatum in communi sectione terminorum,* per *terminos* crura intelligens (ibid. § 4): attamen in scholis mathematicis Lib. VI. pag. 151, ubi haec uberius disputat, *tota geometria,* inquit, *locis omnibus angulum superficiem aut corpus, id est lineatum facit, nusquam facit inclinationem, neque inclinatio secatur.* Taceo reliquos, quibus idem visum est, velut auctorem artis cogitandi, Io. Clericum et alios. Hi omnes eo fere nomine accusabant Euclidem (manifeste enim Weidlerus ipsi explicatione subveniendum esse ratus dormitavit, quum ἐπιπεδος γωνια tantum dicatur, quia in plano describitur, quemadmodum geometriam planam dicimus, non quod ipsa planum sit, sed quia plana tractat) quod sibi non constiterit definiendo angulum esse inclinationem et deinceps tamen praecipiendo angulum dimidiare, quo ipso per angulum spatium se intelligere innuat; inclinationem enim dimidiari non posse. Quae quidem accusatio perquam mihi inepta videtur. Etenim si altera maiorem vel minorem licet inclinationem cogitare, quidni etiam dimidiam alterius? Eodem fere argumento quidam in divisione rationum geometris usitata nescio quid absurdi deprehendisse sibi visi sunt eamque sollicitarunt; temere, quum rationem aliam alia maiorem vel minorem nemo neget. *) Gravior auctoris nostri erat causa, quare non acquiesceret in nuda circa angulos inclinationis notione Euclidi usurpata: hunc tamen peccati idcirco insimulare minime ut opinor debebat. **)

Et

*) Vid. Bas. Chr. Bernh. Wideburg Abh. von den mathem. Verhältnissen und ihrer Grösse, Ien. 1750.

**) Verba eius sunt p. 58. haec: vielleicht wurde man auch von der Betrachtung der Winkelflächen noch um so mehr dadurch abgezogen, weil, wenn man bei ebenen geradlinigten Winkeln blos auf die Neigung der Schenkel gegeneinander sieht, die Grösse der Schenkel in keine Betrachtung kommt, und man sich daher schon *mit dem Euclides* frühe dazu gewöhnte, sich diese Neigung blos nahe am Scheitel des Winkels vorzustellen. Allein *daß dieses letztere ein offenbarer Fehler ist* &c. Aliud aeque praecipitanter Euclidi peccatum impingit pag. 18. Soviel,

in-

Et ſi, quid novae theoriae ratio poſtulet, excipiamus, 'quid tandem eſt, quod nos vetat ex Schulzii quidem ſententia contentos eſſe definitione anguli Euclidea? nempe obſcuram inclinationis notionem accuſat. At vero hac ipſa notione nihil novi clarius. Quis unquam haeſitavit auditis vocibus, ad rectum angulum, hoc eſt, ad utramque partem aequaliter inclinari, rectum inclinatione ſuperare aut a recto deficere, niſi qui etiam lineae rectae notione confundatur? Quod ſi autem anguli conſiderationi adiungendam eſſe ſuperficiem propterea quis exiſtimet, quoniam absque ſuperficie nulla anguli crura dentur: nae is parum mathematicae tractationis gnarus eſſe mihi videtur. Divellit enim cogitatione et discludit geometria, quae ſeparari alias non poſſunt, lineam a ſuperficie, ſuperficiem a corpore &c. Inhaeret angulo ſuperficies ſive adiacet cruribus ad partes ſe reſpicientes, continet aream circulus; ſed ſeorſim poteſt animus et angulum et circularem lineam contemplari. Euclides quum angularis ſuperficiei conſiderationem nullius ſibi uſus eſſe videret: de ea quicquam monere operae non pretium exiſtimabat, imo potius ſuperfluum et a concinnitate operis ſui alienum.

Haec ſunt, quae ad recte judicandum de nova viri celeberrimi theoria facere mihi videbantur. Quae quantis incommodis prematur, quam inſanabili morbo aegrotet, facile ipſe auctor vidiſſet, ſi memor fuiſſet eorum, quae rectiſſime monuit ſummus Kaeſtnerus, *) *in eo,* inquiens, *quod infinitum vocant recentiores mathematici ad notionem veterum geometrarum reducendo opera*

inquiens, muſz ich indeſſen zum voraus anzeigen, daſz die *Euclidiſche Angabe* von der Gröſſe beider Winkel (des Berührungswinkels des Kreiſes und des Winkels des Halbkreiſes) nach meiner Theorie der Lage *in der That unrichtig iſt* &c. Quam longe aliter de Euclide ſentiat oportet ill. Kaeſtnerus, cuius hoc eſt nobile pronunciatum: bei Euklids Elementen haben ſelbſt Abſchreiber, Ueberſetzer, Exegeten, Kommentatoren, Dogmatiker keine Unwahrheit hinein bringen können, und keine Wahrheit heraus. Leipz. Magaz. zur Naturk. &c. anni 1781. pag. 372. Taceo aliorum de inconcuſſa elementorum Euclideorum veritate iudicia.

*) Diſſertt. math. et phyſ. pag. 85.

*ra collocanda eſt cuivis, qui de evidentia cogitat repertis recentiorum quanta deſiderari poteſt adſerenda.* Hoc inquam conſilium ſi ſequi voluiſſet novae theoriae conditor; omnem illam formam quam demonſtrationibus ſuis induit, repudiaſſet, neque tanquam magnum theoriae ſuae emolumentum iactaſſet, *) quod tirones in familiaritatem infiniti in ipſo geometriae aditu adducat et viam quaſi ipſis ad altiora ſternat. Quanto melius, ſi in prima ſtatim geometria imbui animi diſcentium infiniti cognitione debeant, huic officio ſatisfactum eſt a laudatiſſimo Käſtnero. Evolvat modo ſi quis hac de re edoceri cupiat, eius Geometriae prop. 20, coroll. 2; prop. 22, coroll. 11 et 24; prop. 24, coroll. 1; prop. 41; prop. 43, coroll. 4; et prop. 61, coroll. 5. Conſideret modo rationem, qua idem in ipſa parallelarum doctrina verſatus eſt prop. 11 et 12: et nihil hoc in genere ad deſiderandum reliquiſſe fatebitur eum, qui tam largiter infiniti quaſi ſemina per omnem elementarem geometriam ſparſerit. **)

*) pag. 59. 60 ſui libri.

**) Qūum huius ſcriptiunculae elaborationem abſolviſſem; comperi, eiusdem theoriae, quam in ea oppugnavi refutationem etiam dediſſe ill. Karſtenium in libro nuperrime edito: mathematiſche Abhandlungen, Halle 1786. Plane igitur abiicere hunc meae opellae fructum primo volui; ſed quum nihil aliud ſtatim ad manus eſſet, quod eius loco ſubiicerem, et haec tamen ſcribendi opportunitas moram diuturniorem non ferre videretur: coactus ſum, quas Vulcano deſtinaveram, chartis parcere. Quod quidem eo magis faciendum mihi eſſe putavi, quum ſatis apparere videretur, quamvis mea in quibusdam ſatis conveniant cum iis, quae ill. Karſtenius protulit, me tamen illum non exſcripſiſſe.

THESES.

# THESES.

## I.

*Non recte legere potest poetas veteres graecos et Romanos, qui non aliqua astronomiae cognitione imbutus est.*

## II.

*Non probanda est consuetudo astronomorum nostrorum, Arabica stellarum nomina usurpandi et apud nos propagandi.*

## III.

*Inepta diligentia quorundam videtur orthographiam Germanicam ex etymologia reformantium.*

## IV.

*Scepticismus quidam sanior philosopho christiano est dignissimus.*

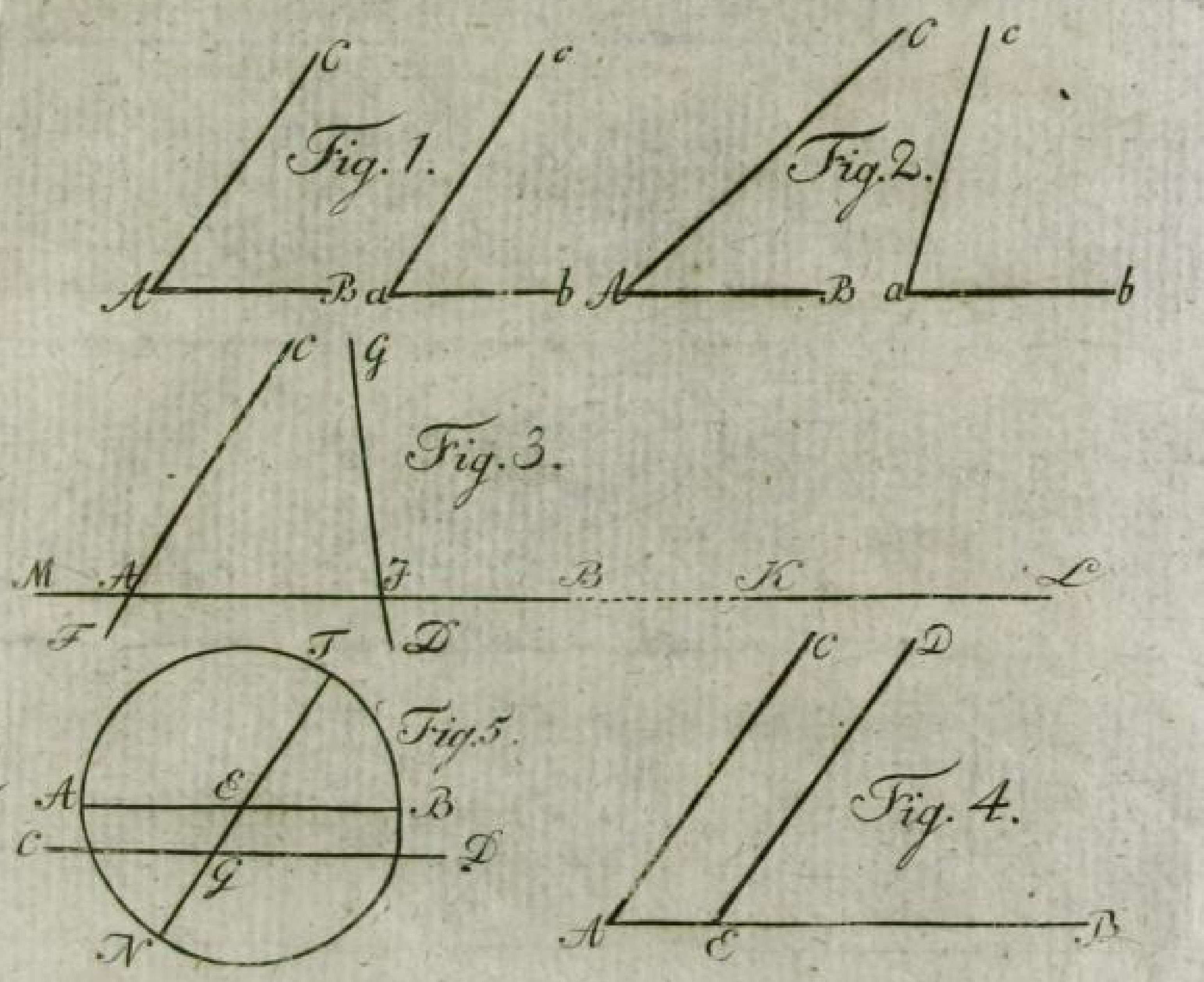
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.