ABHANDLUNGEN

ACHTZEHNTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ACHTZEHNTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1878.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1878.

INHALT.

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE ÜBER DIE

ENERGIE DER WECHSELWIRKUNG

VON

WILHELM WEBER,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° VIII.

MIT EINER TAFEL.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1878.

Vom Verfasser übergeben den 10. März 1878.
Der Abdruck vollendet den 10. April 1878.

Inhalt.

ELEKTRODYNAMISCHE
MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE ÜBER DIE

ENERGIE DER WECHSELWIRKUNG

VON

WILHELM WEBER.

Von dem im Jahre 1846 in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen aufgestellten allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung*), zu welchem in Poggendorff's Annalen 1848, Bd. 73, S. 229, noch das daraus abgeleitete Potential der elektrischen Kraft gefügt worden war, hatte Helmholtz behauptet, und William Thomson, Tait und Andere hatten ihm beigestimmt, dass es in Widerspruch mit dem Princip der Erhaltung der Energie stände; C. Neumann und Maxwell haben jedoch das Gegentheil dargethan, indem sie den von Helmholtz durch Aufstellung des Satzes, das Princip der Erhaltung der Energie gelte nur für Kräfte, die von der Entfernung allein abhängig seien, begangenen Irrthum nachwiesen**).

Helmholtz hat darauf ein vollkommen neues Princip der Energie aufgestellt, dessen Unterschied vom gewöhnlichen Princip der Energie von Neumann mit folgenden Worten näher bestimmt worden ist: »Während das gewöhnliche Princip der Energie für jedes materielle System die Existenz einer Energiefunction, d. i. die Existenz einer vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängenden Function, verlangt, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um eben so viel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums zugeführte Arbeit beträgt, — verlangt das neue von Helmholtz aufgestellte Princip nicht allein die Existenz einer solchen Function, sondern zugleich eine gewisse specielle Beschaffenheit

*) Siehe Abhandlungen bei Begründung der K. Sächs. Gesellsch. der Wiss. Leipzig 1846.

**) Siehe auch Ad. Mayer: »Ueber den allgemeinsten Ausdruck der innern Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welches sich aus dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergiebt«. Mathem. Annalen, Bd. 13. S. 20.

derselben, indem es behauptet, der »kinetische Theil dieser Function (derjenige Theil derselben, welcher von der Geschwindigkeit abhängt) müsse stets positiv sein«.

Hiezu bemerkt Neumann noch: »Es unterliegt keinem Zweifel, dass die physikalischen Principien ihrer Natur nach dehnbar und biegsam sind. Das Princip der lebendigen Kraft hat sich allmählig zum Princip der Energie ausgedehnt, und ist möglicher Weise einer noch weiteren Ausdehnung fähig«.

Wirklich liegt es ganz im Wesen und Gange experimenteller Forschung, sich eines solchen Princips als Leitfadens auch dann schon zu bedienen, wenn die definitive Formulirung noch fehlt und erst später aus den Resultaten der Forschung gewonnen werden kann; da aber einleuchtet, dass das Princip, um als Leitfaden der Forschung zu dienen, doch formulirt werden müsse, was also nur versuchsweise geschehen könne; so ergiebt sich als selbstverständlich, dass ein solches Princip während dieser Forschung wirklich dehnbar und biegsam sei.

Wenn Helmholtz hienach berechtigt war, das Princip der Energie versuchsweise in der Art zu formuliren, dass mein von ihm verworfenes Grundgesetz damit in Widerspruch geriethe; so ist offenbar das Gegentheil ebenso berechtigt, nämlich dasselbe Princip versuchsweise so zu formuliren, dass es nicht allein in Uebereinstimmung mit jenem Grundgesetze stehe, sondern dass letzteres sogar als nothwendige Folge desselben sich ergebe, indem bewiesen werde, dass alle elektrodynamischen Gesetze, zu denen jenes Grundgesetz gehört, mittelst des versuchsweise aufgestellten Princips aus den elektrostatischen Gesetzen abgeleitet werden können. Dies zu versuchen ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung, wodurch statt des in der ersten Abhandlung aufgestellten allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung, welches Elektrostatik und Elektrodynamik zugleich umfasste, das Princip der Erhaltung der Energie an die Spitze gestellt wird, woraus dann in Verbindung mit dem statischen Grundgesetze der Wechselwirkung zweier Theilchen erstens jenes Grundgesetz der elektrischen Wirkung, zweitens die Existenz einer Energiefunction für jedes Theilchenpaar, aus der die Geltung des gewöhnlichen Princips der Energie folgt, wie es von Neumann ausgesprochen worden ist, deducirt werden soll.

1.

Leitfaden der experimentellen Forschung in der Elektrodynamik.

Nach der durch die allgemeinen Bewegungsgesetze der Körper gewonnenen Grundlage blieben in der Physik wesentlich nur die Gesetze der Wechselwirkungen der Körper zu erforschen übrig; denn ohne Wechselwirkungen würden alle Körper im Zustande der Ruhe oder Bewegung, in dem sie sich befinden, immer verharren. Alle Veränderungen dieser Zustände und alle davon abhängigen Erscheinungen sind daher Folgen ihrer Wechselwirkungen.

Solche Wechselwirkungen üben nun aber die Körper sowohl in Berührung mit einander, als auch aus der Ferne aus, und es ergab sich leicht, dass mit der Erforschung der letztern begonnen werden müsse, um einen Leitfaden zur Erforschung der erstern zu gewinnen, welcher besonders nöthig wird, wenn die räumlichen Verhältnisse der Körper sich der directen Beobachtung entziehen, wie es bei den Wechselwirkungen sich berührender Körper der Fall ist. Auch ist dies wirklich geschehen, indem mit der Erforschung der Wechselwirkungen der Weltkörper, d. i. mit den Gravitationswirkungen begonnen wurde.

An dieses erste Gebiet erfolgreicher Erforschung der Wechselwirkungen der Körper, nämlich der Gravitationswirkungen, hat sich sodann zunächst die Erforschung der elektrischen und magnetischen Wechselwirkungen angeschlossen, weil ausser den Gravitationswirkungen diese Wirkungen die einzigen waren, welche von einem Körper auf den andern aus messbarer Entfernung ausgeübt wurden und selbst durch Messung bestimmbar waren.

Lange Zeit hat nun fast allen theoretischen Untersuchungen über Elektricität und Magnetismus, insbesondere denen von Coulomb und Poisson, die Newton'sche Gravitationslehre als Leitfaden zu Grunde gelegen, bis endlich in Folge von Oersted's und Ampère's Entdeckungen in der Aequivalenz geschlossener Ströme und Magnete ein ganz neuer Leitfaden gewonnen wurde, welcher erstens auf die Zurückführung aller magnetischen Wirkungen auf elektrische Stromwirkungen leitete, und zweitens zur Aufstellung eines Grundgesetzes der Wechselwirkung je zweier Stromelemente führte.

Als ein dritter Leitfaden hat sodann die allgemeine Idee von der Zurückführung der Wechselwirkungen aller Körper untereinander auf blosse Wechselwirkungen je zweier gedient, wonach also auch die Wechselwirkungen von Stromelementen auf blosse Wechselwirkungen je zweier elektrischen Theilchen zurückführbar sein sollten. Diese Idee konnte im Allgemeinen, ganz abgesehen davon, dass das Gegentheil (nämlich Wechselwirkungen dreier oder mehrerer Körper, die nicht auf Wechselwirkungen je zweier zurückführbar wären) zu unendlichen Verwickelungen führen würde, erfahrungsmässig schon in weitem Kreise als fest begründet und bestätigt angesehen werden.

Die bei Wechselwirkung zweier Stromelemente wesentlich in Betracht kommenden Körpertheilchen waren nun ein positiv und ein negativ elektrisches Theilchen in jedem Stromelemente, zwischen denen 4 von einander unabhängige Wechselwirkungen je zweier Theilchen unterschieden werden konnten. Zur Bestimmung dieser 4 Wechselwirkungen bot sich das Coulomb-Poisson'sche (dem Gravitationsgesetze nachgebildete) Grundgesetz dar, welches sich im ganzen Gebiete der Elektrostatik bewährt hatte; die hienach bestimmten 4 Wechselwirkungen ergeben aber keine Gesammtwirkung, sondern alle einzelnen Wirkungen heben einander vollkommen auf, wonach also das Ampère-sche Grundgesetz der Fernwirkungen elektrischer Stromelemente nicht zurückführbar war auf das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz der Wechselwirkung je zweier elektrischen Theilchen.

Das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz der Wechselwirkung je zweier elektrischen Theilchen war aber nur für je zwei in relativer Ruhe befindliche Theilchen aufgestellt worden, oder konnte wenigstens nur für solche Theilchen als erfahrungsmässig begründet gelten. Die 4 elektrischen Theilchen in zwei Stromelementen bilden dagegen 4 Paare von Theilchen, die nicht in relativer Ruhe, sondern in relativer Bewegung sich befinden, und es lag daher die Vermuthung sehr nahe, dass das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz der Wechselwirkung je zweier elektrischen Theilchen, wenn diese Theilchen in relativer Bewegung sich befinden, noch einer Correction bedürfe, welche mit x bezeichnet werden möge. Unterscheidet man dann die Correctionen der obigen 4 Wechselwirkungen von einander der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4; so müsste die Summe derselben von Null verschieden und der durch Ampère's Gesetz bestimmten Kraft gleich sein.

Auf diese Weise wurde nun gefunden, dass, — wenn man zwei beliebige elektrische Theilchen nach absolutem Maasse mit e, e' und ihre relative Entfernung, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit r, $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{ddr}{dt^2}$ bezeichnet, und diese Werthe für die 4 in zwei Stromelementen betrachteten Paare durch die Indices 1, 2, 3, 4 unterscheidet, — die durch das Ampère'sche Gesetz bestimmte Abstossungskraft zweier Stromelemente, nämlich

$$\frac{\alpha\alpha' i i'}{rr}(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon),$$

(wo α, α' die Längen, i, i' die Stromintensitäten der beiden Stromelemente, r ihre Entfernung von einander, θ, θ' die Winkel, welche α und α' mit r bilden, und ε den Winkel bezeichnet, den α und α' mit einander bilden), durch die Summe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

wirklich dargestellt werde, wenn

$$x = \frac{1}{cc} \cdot \frac{ee'}{rr}\left(2r\frac{ddr}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

gesetzt wird, worin c eine bestimmte Constante bezeichnet, nämlich diejenige relative Geschwindigkeit zweier elektrischen Theilchen, bei welcher, während sie unverändert bleibt, keine Wechselwirkung stattfindet.

Um dies zu beweisen ist nur erforderlich, die auf die Stromelemente sich beziehenden Grössen α, α', i, i' und die Winkel θ, θ' und ε durch die Grössenwerthe von $e, e', r, \frac{dr}{dt}, \frac{ddr}{dt^2}$, bezogen auf die 4 einzelnen Theilchenpaare, auszudrücken.

Diese Correction ist also der durch das Coulomb-Poisson-sche Grundgesetz bestimmten Abstossungskraft noch hinzuzufügen, wenn es für elektrische Theilchenpaare nicht blos in relativer Ruhe, sondern auch bei solchen Bewegungen gelten soll, die in Stromelementen stattfinden, für welche das Ampère'sche Gesetz gilt.

Es leuchtet aber ein, dass jene 4 elektrischen Theilchen auch noch in mannichfaltige andere relative Bewegungen gebracht werden können, als diejenigen, welche in zwei Stromelementen, für welche das Ampère'sche Gesetz gilt, stattfinden. Es lassen sich nämlich leicht Einrichtungen treffen, wonach die beiden in einem Stromelemente befindlichen Theilchen positiver und negativer Elektricität, statt sich mit gleicher und constanter Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen zu bewegen (wie Ampère voraussetzt), sich entweder mit gleicher aber veränderlicher Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen, oder mit ungleicher Geschwindigkeit in Richtungen bewegen, die einen beliebigen Winkel mit einander bilden. Alle diese verschiedenen Fälle lassen sich leicht darstellen, theils indem man den im einen Leiter vorhandenen Strom, durch Oeffnen und Schliessen der Stromkette, bald verschwinden bald wieder entstehen lässt, theils indem man den im Leiter entgegengesetzt strömenden Elektricitäten noch eine gemeinsame Bewegung mit ihrem Leiter ertheilt.

Gilt nun das corrigirte Coulomb-Poisson'sche Gesetz wirklich allgemein von zwei elektrischen Theilchen nicht blos in relativer Ruhe, oder wenn sie constanten Strömen in ruhenden Leitern angehören, sondern auch bei allen ihren andern Bewegungen; so muss daraus die Wirkung von Stromelementen, wie von einzelnen Theilchen, auch in den soeben angeführten, wie überhaupt in allen Fällen, wo das Ampère'sche Gesetz nicht gilt (die lange Zeit unbeachtet und unbeobachtet geblieben waren) vorausgesagt und vorausbestimmt werden können, was zur Prüfung und Bestätigung der allgemeinen Gültigkeit jenes Gesetzes dient. Es sind auf diese Weise wirklich alle Gesetze der Voltainduction, in vollkommener Uebereinstimmung mit den von Faraday entdeckten Erscheinungen, gefunden und durch die mannichfaltigsten Beobachtungen und Messungen allseitig bestätigt worden.

An dieses allgemeine Grundgesetz der Wechselwirkung zweier elektrischen Theilchen lassen sich nun noch weitere Betrachtungen über das Wesen der Wechselwirkung knüpfen.

Bei allen Veränderungen in der Körperwelt bleiben die Massen der Körper immer unverändert, und auch die lebendigen Kräfte der Körper würden, wenn keine Wechselwirkung stattfände, dem Trägheitsgesetze gemäss, unverändert bleiben. Wechselwirkungen ergeben sich demnach als Grund aller Veränderungen lebendiger Kräfte, und es liegt daher die Frage sehr nahe, ob nicht ebenso umgekehrt der Grund aller Veränderungen der Wechselwirkungen in den lebendigen Kräften zu suchen sei, sodass Verstärkung der Wechselwirkung nur gewonnen werde, wenn lebendige Kraft verloren geht, und dass umgekehrt lebendige Kraft nur gewonnen werde, wenn die Wechselwirkung eine Verminderung erleidet. Wechselwirkung der Körper wäre dann das Aequivalent für die verloren gegangene lebendige Kraft, und lebendige Kraft das Aequivalent für verloren gegangene Wechselwirkung, wodurch die Grössenwerthe der Wechselwirkungen und lebendigen Kräfte in bestimmte Abhängigkeit von einander gebracht würden.

Das oben angeführte allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung entspricht dieser Vorstellung dadurch, dass von ihm die Abhängigkeit der aus der Wechselwirkung resultirenden Kraft von der lebendigen Kraft der Körper festgestellt wird, im Gegensatz zum Coulomb-Poisson'schen Gesetze, nach welchem eine solche Abhängigkeit nicht stattfindet.

Wird nun die Grösse der Wechselwirkung zweier Theilchen ihre Wechselwirkungsenergie, und ebenso die Grösse der relativen lebendigen Kraft zweier Theilchen ihre Bewegungsenergie genannt; so liegt die Vermuthung sehr nahe, dass bei Zunahme der einen Energie und gleichzeitiger Abnahme der andern, der Gewinn an einer Energie auch quantitativ einen Ersatz für den Verlust an der andern Energie gewähre, was die Homogeneität beider Energiegrössen voraussetzt, und so viel heisst, als dass ihre Summe constant sei. Bezeichnet man also mit Q die relative lebendige Kraft zweier Theilchen, und mit P die Energie ihrer Wechselwirkung; so würde hiernach

$$P + Q = a$$

zu setzen sein, wo a eine jedem Theilchenpaare zukommende Constante wäre, ebenso wie die Masse eine jedem einzelnen Theilchen zukommende Constante ist.

Es würde dadurch bestimmt werden, was in der Wechselwirkung zweier Theilchen durch gegenseitige Bewegung geändert wird, wodurch ein Fundament für Ableitung der dynamischen aus den statischen Gesetzen gewonnen würde.

Die constante Energiesumme a wäre zugleich der Grenzwerth, welcher von der Energie P nicht überschritten werden könnte, weil nämlich die Energie Q (d. i. die lebendige Kraft der Theilchen) keinen kleineren Werth als Null haben kann.

Die hier ausgesprochene Vermuthung hat nun mancherlei Modificationen erlitten, und hat demgemäss verschiedenen Ausdruck in den versuchsweise gegebenen Aussprüchen von dem Princip der Erhaltung der Energie gefunden, welches der Leitfaden vieler Forschungen in neuester Zeit, vorzüglich im Gebiete der Wärmelehre und Elektricitätslehre, geworden ist*). Bei der Wichtigkeit und

---

*) Die Bezeichnung der Summe der lebendigen Kraft und Wärme eines Körpersystems nebst der durch sein Potential bestimmten Arbeit mit dem Namen seiner mechanischen Energie, oder kurz seiner Energie, rührt von Thomas Young und W. Thomson her, und ist sodann von Clausius als sehr zweckmässig gewählt anerkannt und angenommen worden.

Thomas Young, Lectures on Natural Philosophy, London 1807, Lecture VIII, sagt Seite 78: The term energy may be applied, with great propriety, to the product of the mass or weight of a body, into the square of the number expressing its velocity. — Young bezeichnet hiernach blos die lebendige Kraft eines Körpers (eigentlich ihren doppelten Werth) mit dem Namen energy, jedoch ohne ausdrücklich hinzuzufügen, dass der Körper nur diese und keine andere Energie besitze. Vielmehr da er auf der folgenden Seite für die lebendige Kraft eines Körpers die vollständigere Bezeichnung energy of its motion gebraucht, so scheint dadurch angedeutet zu sein, dass einem Körper, abgesehen von seiner Bewegung, noch eine andere Energie zukommen könne.

W. Thomson im Phil. Magazin and Journal of Science, IV. Series 9. London 1855 pag. 523, sagt: A body which is either emitting heat, or altering his dimensions against resisting forces, is doing work upon matter external to it. The mechanical effect of this work in one case is the excitation of thermal motions, and in the other the overcoming of resistances. The body must itself be altering in its circumstances, so as to contain a less store of work within it by an amount precisely equal to the aggregate value of the mechanical effects produced; and conversely the aggregate value of the mechanical effects produced must depend solely on the initial and final states of the body, and is therefore the same whatever be the intermediate states through which the body passes, provided the initial and final states be the same. — The total mechanical energy of a body might be defined as the mechanical value of all the effect it would produce in heat emitted and in resistances overcome, if it were cooled to the utmost, and allowed to contract indefinitely or to expand indefinitely, according as the forces between its particles are attractive or repulsive, when the thermal motions within it are all stopped.

Es ist hierin von W. Thomson mit dem Namen der Energie zugleich auch das Princip der Erhaltung der Energie ausgesprochen worden; denn was ein Körpersystem an seinem Vorrath an Energie verliert, gewinnt ein anderes Körpersystem, hieraus folgt offenbar die Erhaltung der Energie in allen Körpersystemen zusammengenommen. — Dasselbe Princip ist im Wesentlichen, nur unter anderem Namen, schon früher ausgesprochen worden, namentlich von Helmholtz unter dem Namen des Princips der Erhaltung der Kraft.

Bedeutung, die dieser neue Leitfaden gewonnen, verdienen einige Verschiedenheiten der Ansichten und Meinungen, die dabei hervorgetreten sind, besondere Beachtung.

Der oben versuchsweise gegebene Ausspruch vom Princip der Erhaltung der Energie ist nämlich wesentlich verschieden, und könnte leicht im Widerspruch zu stehen scheinen (was näher betrachtet nicht der Fall ist) mit dem Ausspruch des »gewöhnlichen Princips der Energie«, von welchem C. Neumann im XI. Bande der Mathematischen Annalen S. 320 sagt: »Dieses Princip verlangt, dass für jedes materielle System eine Energiefunction existire, d. i. eine vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängende Function, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um ebensoviel anzuwachsen, als die dem Systeme während dieses Zeitraums von Aussen zugeführte Arbeit beträgt. Zugleich erkennen wir, dass diese Energiefunction (welche man kurzweg die Energie des Systems zu nennen pflegt) bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes [womit Neumann das oben angeführte corrigirte Coulomb-Poisson'sche Gesetz bezeichnet] durch die Summe von lebendiger Kraft und Potential dargestellt ist ..... Helmholtz indessen nimmt dieser Frage gegenüber eine etwas andere Stellung ein ..... nämlich in dem Aufsatze (Monatsber. d. Berl. Akad. 18. April 1872) heisst es:

»Man hat sich bei den Untersuchungen darüber, ob das Gesetz der Erhaltung der Energie für gewisse Naturprocesse gültig sei oder nicht, meist damit begnügt, zu untersuchen, ob, wenn ich das analytische Resultat praktisch ausdrücken darf, ein immer wiederholter Cirkelprocess in das Unendliche Arbeit erzeugen oder zerstören kann. — In diesem Sinne nun verletzt die Weber'sche Annahme das Gesetz der Erhaltung der Energie nicht; aber sie thut es in einem andern Sinne — — —«

»Der nun folgende Einwand«, fährt Neumann weiter fort, »betrifft indessen nicht mehr das gewöhnliche Princip der Energie, sondern ein vollkommen neues, hier zum ersten Mal ausgesprochenes Princip. Während nämlich das gewöhnliche Princip der Energie für jedes materielle System die Existenz einer Energiefunction, d. i. die Existenz einer Function verlangt, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um ebensoviel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums zugeführte Arbeit beträgt, — verlangt jenes neue Princip nicht allein die Existenz einer solchen Function, sondern zugleich eine gewisse specielle Beschaffenheit derselben, indem es behauptet, der kinetische Theil dieser Function (derjenige Theil derselben, welcher von der Geschwindigkeit abhängt) müsse stets positiv sein.«

Neumann fügt in einer Note noch folgende, bereits oben citirte Bemerkung hinzu: »Es unterliegt keinem Zweifel, dass die physikalischen Principien einer festen Formulirung unfähig, mithin ihrer Natur nach dehnbar und biegsam sind. Das Princip der lebendigen Kraft hat sich allmählig zum Princip der Energie ausgedehnt, und ist möglicher Weise einer noch weiteren Ausdehnung fähig. — Demgemäss ist es a priori keineswegs unmöglich, dass dieses Princip der Energie sich allmählig zu jenem neuen Helmholtz'schen Princip erweitere. Nur scheint es mir zweckmässig, vorläufig wenigstens, die beiden Principien mit verschiedenen Namen zu bezeichnen.« —

Diese letzte Bemerkung gilt nun nicht blos von dem neuen Helmholtz'schen Princip, sondern auch von dem oben aufgestellten, welches ebenfalls von dem gewöhnlichen abweicht, weshalb zu seiner besseren Unterscheidung schon bisher der Name des Princips der Erhaltung der Energie gebraucht worden ist, weil darnach die ganze Energie, nämlich die der Bewegung und der Wechselwirkung in Summa, wirklich unverändert erhalten wird, während nach dem gewöhnlichen Energieprincip blos eine Energiefunction existirt, deren Grösse keineswegs unverändert erhalten wird, sondern die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraume um ebensoviel anzuwachsen, als die dem Systeme während dieses Zeitraums von Aussen zugeführte Arbeit beträgt. Nur in zwei besondern Fällen kann das gewöhnliche Princip ebenfalls als ein Princip der Erhaltung der Energie betrachtet werden, nämlich in dem Falle, wo das betrachtete materielle System alle Körper in der Welt umfasst, und ferner in dem Falle, wo das betrachtete System als vollkommen isolirt anzusehen ist, weil es nämlich in diesen beiden Fällen gar keine äusseren Einwirkungen giebt.

Dass nun aber bei dieser Verschiedenheit doch kein Widerspruch stattfinde zwischen obigem Principe der Erhaltung der Energie und dem gewöhnlichen Energieprincip, wie es von Neumann definirt worden ist, muss bewiesen werden, wozu es, wie man leicht sieht, nur der Nachweisung bedarf, dass die Energie der

Wechselwirkung P in jedem Zeitraum um ebensoviel wachse, als für diesen Zeitraum die Differenz des Wachsthums des Potentials V, und der dem Theilchenpaare von Aussen zugeführten Arbeit S beträgt, d. h. dass $dP = dV - dS$ sei, was mit Zuziehung der durch das Princip der Erhaltung der Energie gegebenen Gleichung, nämlich $P + Q = a$, wo a eine Constante bezeichnet, zum gewöhnlichen Energieprincipe führt, nämlich

$$d(Q + V) = dS,$$

wo $(Q + V)$ die Neumann'sche Energiefunction bezeichnet. — Diesen Beweis zu geben wird unten im 4. Artikel versucht werden.

Das Ziel, welches durch diesen neuen, sowohl von dem gewöhnlichen als auch von dem von Helmholtz aufgestellten verschiedenen Ausspruch des Energieprincips erreicht werden soll, besteht aber wesentlich darin,

ein Princip zu gewinnen, wodurch bestimmt werde, was in der Wechselwirkung der Körper durch ihre Bewegung verändert wird.

Wechselwirkung findet nur zwischen je zwei Körpern statt und erleidet nur durch die relative lebendige Kraft ihrer Bewegung eine Veränderung. Dies vorausgesetzt, und ferner vorausgesetzt, dass diese Wechselwirkung zweier Körper oder Körpertheilchen eine mit ihrer relativen lebendigen Kraft homogene Grösse sei, welche mit der Grösse dieser Kraft die constante Energiesumme a bilde; so bedeutet a offenbar die Grösse der Wechselwirkung der beiden ruhenden Theilchen, d.i. ihre statische Wechselwirkung, und das Princip der Erhaltung der Energie ist dann das Gesetz, wodurch bestimmt wird, dass diese statische Wechselwirkung, in Folge irgend einer durch die lebendige Kraft Q ihrer Grösse nach gegebenen relativen Bewegung, um Q vermindert werde.

Das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung würde als solches alsdann durch das Princip der Erhaltung der Energie vollkommen ersetzt und in ein Theorem verwandelt werden, welches aus dem elektrostatischen Grundgesetze, mittelst des Princips der Erhaltung der Energie, abgeleitet und bewiesen würde.

2.
Die Energie der Wechselwirkung auf absolutes Maass zurückgeführt.

Es leuchtet ein, dass aus der im vorhergehenden Artikel aufgestellten Gleichung, in welcher versuchsweise das Princip der Erhaltung der Energie ausgesprochen worden ist, nämlich

$$P + Q = a,$$

die Energie der Bewegung Q bestimmt werden kann, wenn die Energie der Wechselwirkung P gegeben ist, und umgekehrt; zugleich leuchtet aber ein, dass der Sinn der Gleichung, als Ausspruch eines Princips, auf der physikalischen Bedeutung beruht, welche mit dem Begriff jeder einzelnen Energie zu verbinden ist, aus welcher die Möglichkeit der Grössenbestimmung jeder Energie unabhängig von der andern einleuchten muss. Für die Bewegungsenergie ist eine solche Bestimmung bekanntlich längst gegeben; es handelt sich daher nur um eine ebensolche Bestimmung für die Energie der Wechselwirkung.

Die Wechselwirkung zweier Theilchen während einer Entfernungsänderung besteht in Arbeit. Ohne Entfernungsänderung findet zwar Wechselwirkung aber keine Arbeit statt; doch besitzt das Theilchenpaar stets ein Arbeitsvermögen, d. i. die Eigenschaft, bei Entfernungsänderungen Arbeit leisten zu können. Aus diesem Arbeitsvermögen wird die Wechselwirkung erkannt und seine Grösse giebt den Maassstab für die Energie der Wechselwirkung.

Eine Grössenbestimmung des Arbeitsvermögens muss auf Arbeitsmessung gegründet werden. Nun besteht aber Arbeit entweder in Aufhebung entgegengesetzter Arbeit, oder in Erzeugung (resp. Vernichtung) von lebendiger Kraft. Arbeiten, die einander aufheben, entziehen sich directer Messung; dagegen ist Zunahme oder Abnahme der lebendigen Kraft unter geeigneten Verhältnissen ein Gegenstand directer Beobachtung und Messung, worauf in letzter Instanz alle Arbeitsmessung zurückzuführen ist.

Ist hiernach Arbeit bestimmbar aus der messbaren lebendigen Kraft, welche von ihr erzeugt wird, wenn sie von keiner entgegengesetzten Arbeit aufgehoben wird; so genügt für das Arbeitsvermögen eines Theilchenpaares die Bestimmung der Arbeitsgrösse, welche durch Wechselwirkung der Theilchen während einer gewissen noch näher zu bestimmenden Entfernungsänderung geleistet werden würde. Ob diese Arbeitsgrösse positiv oder negativ ist, kommt dabei nicht in Betracht, und es dient daher der absolute Werth*) dieser Arbeitgrösse als Maass des Arbeitsvermögens.

Dagegen muss, nach dem aufgestellten Princip der Erhaltung der Energie, beim Arbeitsvermögen die Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ in Betracht gezogen werden, mit welcher die Entfernungsänderung erfolgt, weil mit dieser Geschwindigkeit die Bewegungsenergie Q, und folglich nach dem angeführten Principe auch die Wechselwirkungsenergie P sich ändert. Es leuchtet daraus ein, dass die Energie P, d. i. das Arbeitsvermögen eines Theilchenpaars, nur für einen gegebenen Werth der Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ genau bestimmbar ist, und dass dieser Werth während der betreffenden Entfernungsänderung als constant angenommen werden müsse.

Da aber bei constantem Werthe von $\frac{dr}{dt}$ keine Zunahme oder Abnahme der lebendigen Kraft stattfindet, welche zu directer Arbeitsmessung dienen könnte; so muss zur Bestimmung des Arbeitsvermögens eine indirecte Methode der Arbeitsmessung gesucht werden. Soll nun während einer Entfernungsänderung keine Aenderung der relativen Geschwindigkeit durch Wechselwirkung hervorgebracht werden; so muss die während der Entfernungsänderung durch Wechselwirkung geleistete Arbeit von der durch äussere Einwirkung geleisteten aufgehoben werden, und diese letztere kann, wenn sie aus bekannten Ursachen stammt, z. B. wenn sie von bekannten Gewichten herrührt, welche während der Entfernungsänderung auf die Theilchen wirken, und dadurch genau bestimmt ist, zur indirecten Messung der durch Wechselwirkung geleisteten Arbeit benutzt werden.

Die durch Wechselwirkung der beiden Theilchen e und e' während der Entfernungsänderung dr geleistete Arbeit wird nun ihrem absoluten

*) Hieraus folgt, dass die Gültigkeit des Princips $P + Q = a$ beschränkt ist auf die Fälle, wo Q den Werth von a nicht überschreitet. Alle lebendigen Kräfte Q der uns bekannten Körper sind jedoch nur so kleine Bruchtheile von a, dass höchstwahrscheinlich der Fall $Q > a$ gar nicht vorkommt. Nach unserer jetzigen Kenntniss würden nämlich dazu zwei Körper mit einer relativen Geschwindigkeit $> 439450 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Secunde}}$ erforderlich sein.

Werthe nach durch $\pm \frac{\partial V}{\partial r} dr$*) dargestellt, wo V das Potential des Theilchenpaars bezeichnet, und das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product ee' positiv oder negativ ist. Die während einer grösseren Entfernungsänderung von ϱ' bis ϱ'' geleistete Arbeit wird auf ähnliche Weise durch $\pm \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ dargestellt. Die Aufgabe, die Energie der Wechselwirkung zweier Theilchen e und e' auf absolutes Maass zurückzuführen, d. i. die Bestimmung ihres Arbeitsvermögens nach absolutem Maasse, ist hienach auf die Bestimmung des Integralwerths $\pm \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ zurückgeführt, worin nur die Integrationsgrenzen ϱ' und ϱ'' noch der nähern Bestimmung bedürfen.

Da unter Arbeitsvermögen der Grössenwerth der durch Wechselwirkung während einer genau zu bestimmenden Entfernungsänderung geleisteten Arbeit verstanden wird; so leuchtet ein, dass die Entfernungsgrenzen ϱ' und ϱ'' im Ausdrucke $\pm \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ genau bestimmte und constante Werthe erhalten müssen, woraus folgt, dass diese Grenzen nicht dieselben wie die des Potentials $\int_{\infty}^{r} \frac{dV}{dr} dr$ sein können, von denen eine, nämlich r, variabel ist.

Da es sich ferner um die Bestimmung des ganzen, dem betrachteten Theilchenpaare vermöge der Wechselwirkung seiner Theilchen zukommenden Arbeitsvermögens handelt, so leuchtet ein, dass diese Grenzen möglichst weit auseinander zu rücken sind, so weit als es geschehen kann, ohne dadurch in Widerspruch mit dem Princip der Erhaltung der Energie zu gerathen, nach welchem die dem Theilchenpaare zugehörige Energiesumme eine Constante a sein soll, und diese Constante zugleich der Grenzwerth sein soll, welchen die Energie der Wechselwirkung nicht überschreiten darf, und nur dann erreichen soll, wenn die Bewegungsenergie Null ist.

---

*) Das Zeichen der partiellen Differentiation ist hier gewählt worden, um auszudrücken, dass bei dieser Differentiation $\frac{dr}{dt}$ als constant betrachtet werden soll.

Hieraus ergiebt sich zunächst die Bestimmung der einen Grenze $\varrho' = \infty$; was dagegen die andere Grenze ϱ'' betrifft, so darf ihr Werth nicht kleiner sein als derjenige, für welchen $\pm \int_\infty^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr = a$ sein würde. Der hienach bestimmte Werth von ϱ'' soll mit ϱ bezeichnet werden.

Zur Grössenbestimmung der mit P bezeichneten Energie der Wechselwirkung zweier Theilchen e und e', deren Massen mit ε und ε' bezeichnet worden, und deren Bewegungsenergie $Q = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$ ist, wird dann folgende Gleichung erhalten:

$$P = \pm \int_\infty^\varrho \frac{\partial V}{\partial r}\, dr,$$

wobei zu beachten ist, dass erstens während der Entfernungsänderung ausser der Wechselwirkung eine äussere Einwirkung auf das Theilchenpaar stattfinden soll, durch welche der gegebene Werth von $\frac{\partial r}{\partial t}$ in V constant erhalten wird; ferner dass das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product ee' positiv oder negativ ist; und endlich dass $P = a$ ist für $Q = 0$, was zur Bestimmung von ϱ dient.

Diese Formel für P kann noch auf folgende Weise transformirt werden. Man kann $P = \pm \int_\infty^\varrho \frac{\partial V}{\partial r} dr$ in zwei Theile zerlegen, nämlich:

$$P = \pm \int_\infty^r \frac{dV}{dr}\, dr \pm \int_r^\varrho \frac{\partial V}{\partial r}\, dr,$$

wovon der erstere Theil der absolute Werth des Potentials V ist, worin die gewöhnlichen Differentialzeichen gesetzt sind, weil es gleichgültig ist, ob darin $\frac{dr}{dt}$ variabel gesetzt wird oder nicht. Bei dem letztern Theile bleibt aber zu beachten, dass der gegebene Werth der Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ während der Entfernungsänderung von r bis ϱ constant anzunehmen ist.

Bezeichnet dann s die während der Entfernungsänderung von r bis ϱ durch äussere Einwirkung geleistete Arbeit, so muss nothwendig, um $\frac{dr}{dt}$ constant zu erhalten,

$$\pm\int_r^\varrho \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + s = 0$$

sein, woraus zur Bestimmung der Energie P folgende Formel erhalten wird:

$$P = \pm V - s,$$

wo V das Potential der Theilchen e und e' bezeichnet, und s die Arbeit, welche während der Entfernungsänderung von r bis ϱ durch äussere Einwirkung geleistet werden muss, damit der für r gegebene Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ unverändert bleibe.

3.

Ableitung des elektrodynamischen aus dem elektrostatischen Potentialgesetze mittelst des Energieprincips.

Nach gegebener Definition der beiden Energieen eines elektrischen Theilchenpaars e und e', deren Massen mit ε und ε', und deren Entfernung mit r bezeichnet worden, nämlich

der Energie der Bewegung $Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}$ *), und

der Energie der Wechselwirkung $P = \pm\int_\infty^\varrho \frac{\partial V}{\partial r}\,dr$, —

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product ee' positiv oder negativ ist, und der mit der Grösse Q gegebene Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ während der Entfernungsänderung constant und dem für Q gültigen gleich anzunehmen ist, — ergiebt sich

---

*) Bezeichnen α, β die Geschwindigkeiten der Masse ε in der Richtung r und senkrecht darauf, α', β' dieselben Geschwindigkeiten für ε', wonach $\alpha - \alpha' = \frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit beider Theilchen ist; so ist $\frac{1}{2}\varepsilon(\alpha\alpha+\beta\beta) + \frac{1}{2}\varepsilon'(\alpha'\alpha'+\beta'\beta')$ die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft. Setzt man nun

$$\text{für } \alpha,\ \frac{\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha'}{\varepsilon+\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'(\alpha-\alpha')}{\varepsilon+\varepsilon'};\ \text{für } \alpha',\ \frac{\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha'}{\varepsilon+\varepsilon'} - \frac{\varepsilon(\alpha-\alpha')}{\varepsilon+\varepsilon'};$$

so erhält man die ganze lebendige Kraft der beiden Theilchen als Summe zweier Theile, $= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon+\varepsilon'} + \varepsilon\beta\beta + \varepsilon'\beta'\beta'\right)$, wovon der erstere, nämlich $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}$ die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen ist, welche oben mit Q bezeichnet worden. — Siehe Abhandlungen d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Bd. X. S. 12.

aus dem Art. 1 ausgesprochenen Energieprincipe, wonach $P+Q=a$ eine constante Summe bildet, folgende Gleichung zwischen den beiden Constanten a und ϱ und den beiden Variabeln Q und V, nämlich

$$\pm\int_{\infty}^{\varrho}\frac{\partial V}{\partial r}\,dr=a-Q. \qquad (1.)$$

Nun ist nach dem Grundgesetze der Elektrostatik für $Q=0$ das Potential $V=\frac{ee'}{r}$ gegeben. Setzt man diese Werthe der Variabeln Q und V in Gleichung (1.), so erhält man folgende Gleichung zwischen den beiden Constanten a und ϱ, wodurch sie auf einander zurückgeführt werden, nämlich

$$\pm\int_{\infty}^{\varrho}\frac{d\frac{ee'}{r}}{dr}\,dr=a,$$

woraus der Werth der Constanten ϱ gefunden wird

$$\varrho=\pm\frac{ee'}{a}. \qquad (2.)$$

Setzt man nun diesen Werth von ϱ in die Gleichung (1.), so ergiebt sich folgende Gleichung blos zwischen einer Constanten, nämlich a, ferner dem gegebenen Werthe der Variabeln Q und dem gesuchten Werthe der Variabeln V, nämlich

$$\pm\int_{\infty}^{\pm\frac{ee'}{a}}\frac{\partial V}{\partial r}\,dr=a-Q, \qquad (3.)$$

woraus V zu bestimmen ist.

Man sieht leicht ein, dass dieser Gleichung (3.) durch folgende Bestimmung von V

$$V=\frac{ee'}{r}\left(1-\frac{Q}{a}\right)$$

genügt werde; denn substituirt man diesen Werth im ersten Gliede der Gleichung (3.), und berücksichtigt, dass, nach der Art. 2 gegebenen Definition, in der Formel $P=\pm\int_{\infty}^{\varrho}\frac{\partial V}{\partial r}\,dr$ der gegebene Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$, folglich auch $Q=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}$, während der Entfernungsänderung constant anzunehmen ist; so findet man für den einen Grenzwerth, $r=\pm\frac{ee'}{a}$, den Werth von $V=\pm a\left(1-\frac{Q}{a}\right)$, und für den andern Grenzwerth $r = \infty$ den Werth $V = 0$; folglich die Differenz dieser Werthe

$$\int_{\infty}^{\pm\frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r}\, dr = \pm a\left(1 - \frac{Q}{a}\right);$$

folglich

$$\pm \int_{\infty}^{\pm\frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r}\, dr = a\left(1 - \frac{Q}{a}\right) = a - Q,$$

ganz in Uebereinstimmung mit Gleichung (3.).

Diese aus dem Grundgesetze der *Elektrostatik* mit Hülfe des *Energieprincips* abgeleitete Formel des *elektrodynamischen Potentialgesetzes*, nämlich

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{Q}{a}\right), \qquad (4.)$$

lässt sich nun noch auf folgende Weise umgestalten.

Die *constante Energiesumme* a ist nach dem Energieprincipe der Grenzwerth der Bewegungsenergie $Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}$ für abnehmende Werthe der Energie der Wechselwirkung P, d. h. es ist $Q = a$ für $P = 0$. Bezeichnet man daher die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ der beiden Theilchen für diesen *Grenzwerth* der Bewegungsenergie a mit c, so ergiebt sich

$$a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot cc.$$

Substituirt man nun diese Werthe von $Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}$ und $a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot cc$ in Gleichung (4.), so erhält man für das elektrodynamische Potentialgesetz folgenden Ausdruck:

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Zwischen den drei in dieser Ableitung des elektrodynamischen Potentialgesetzes vorkommenden *Constanten* a, ϱ, c eines elektrischen Theilchenpaars e, e', dem die Massen ε und ε' zugehören, finden endlich folgende Beziehungen statt, wonach jede derselben aus jeder von den beiden andern bestimmt werden kann, nämlich

$$a = \pm\frac{ee'}{\varrho} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot cc.$$

Für das *elektrodynamische Potential* V erhält man durch Vertauschung dieser Constanten folgende Formeln:

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{Q}{a}\right) = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}\right) = \frac{ee'}{r} \mp \frac{\varrho}{r} Q,$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product ee' positiv oder negativ ist.

4.

Ableitung des gewöhnlichen Princips der Energie aus dem Princip der Erhaltung der Energie.

Das gewöhnliche Energieprincip, wie es Neumann ausgesprochen hat, verlangt, dass für jedes materielle System eine Energiefunction existire, d. i. eine nur vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängende Function, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraume um ebensoviel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums von Aussen zugeführte Arbeit beträgt. Diese Energiefunction hat man oft kurzweg die Energie genannt.

Im Falle eines Systems von zwei Theilchen in der Entfernung r von einander, auf welches während der Entfernungsänderung dr durch Wechselwirkung die innere Arbeit Rdr, und durch äussere Einwirkung die äussere Arbeit dS ausgeübt wird, ist nach einem bekannten allgemeinen Satze der Mechanik die Zunahme der lebendigen Kraft Q eben so gross, wie die Summe aller auf das System ausgeübten innern und äussern Arbeiten, nämlich

$$dQ = Rdr + dS.$$

Giebt es also eine vom augenblicklichen Zustande des Theilchenpaars abhängende Function, welche die Eigenschaft hat, während der Entfernungsänderung dr um $dQ - Rdr = dS$ anzuwachsen, so gilt für ein solches Theilchenpaar das gewöhnliche Energieprincip.

Da nun für ein elektrisches Theilchenpaar e, e' durch das, unter Voraussetzung des Princips der Erhaltung der Energie, im vorigen Artikel entwickelte Potentialgesetz bewiesen ist, dass die innere Arbeit Rdr das vollständige Differential der Function $-\frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{dr^2}{c^2dt^2}\right)$ ist, welche ebenso wie Q nur vom augenblicklichen Zustande des Theilchenpaars abhängt, so leuchtet ein, dass die Differenz beider Grössen, welche ebenfalls nur vom augenblicklichen Zustand des Theilchenpaars abhängt, nämlich

$$Q+\frac{ee'}{r}\left(1-\frac{dr^2}{c^2dt^2}\right),$$

die Eigenschaft hat, während der Entfernungsänderung dr um $dQ-Rdr=dS$ anzuwachsen, wonach also für ein solches Theilchenpaar nicht allein das Princip der Erhaltung der Energie, sondern auch das gewöhnliche Energieprincip gilt, und

$$Q+\frac{ee'}{r}\left(1-\frac{dr^2}{c^2dt^2}\right)$$

seine Energiefunction ist.

Die gleichzeitige Geltung beider Principien, nämlich des Princips der Erhaltung der Energie, wonach $P+Q=a$ ist, und des gewöhnlichen Energieprincips, wonach $d(Q+V)=dS$ ist, wo S die durch äussere Einwirkung geleistete Arbeit bezeichnet, setzt voraus, wie schon am Schlusse von Art. 1 bemerkt worden, dass

$$dP=dV-dS,$$

oder, da nach Art. 2 $P=\pm V-s$, folglich

$$dP=\pm dV-ds$$

war, dass $\pm dV-ds=dV-dS$ sei, was mit Hülfe der Art. 2 und 3 gefundenen Gleichungen:

$$\pm\int_r^\varrho \frac{\partial V}{\partial r}dr+s=0, \tag{1.}$$

$$V=\pm\frac{\varrho}{r}(a-Q), \tag{2.}$$

und mit Hülfe der als Ausspruch des gewöhnlichen Energieprincips dienenden, schon Art. 1 angeführten, Gleichung

$$dS=d(Q+V) \tag{3.}$$

leicht bewiesen werden kann. Nämlich aus (1) und (2) ergeben sich die Gleichungen

$$s=(a-Q)\left(\frac{\varrho}{r}-1\right),$$

$$-ds=\varrho(a-Q)\frac{dr}{rr}+\left(\frac{\varrho}{r}-1\right)dQ,$$

$$\pm dV=-\varrho(a-Q)\frac{dr}{rr}-\frac{\varrho}{r}dQ,$$

woraus folgt

$$\pm dV-ds=-dQ.$$

Nun ist aber nach (3) auch $dV-dS=-dQ$, folglich ist $\pm dV-ds=dV-dS$, was zu beweisen war.

5.

Das allgemeine Gesetz der elektrischen Kraft.

Das Potential zweier elektrischen Theilchen e und e' in der Entfernung r ist Art. 3 gefunden worden

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{Q}{a}\right),$$

worunter die Arbeit verstanden wird, welche durch Wechselwirkung der beiden, die relative lebendige Kraft Q besitzenden, Theilchen e und e' geleistet werden würde, wenn sie aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r versetzt würden. Der Differentialquotient $\frac{dV}{dr}$ bezeichnet alsdann die von den Theilchen in der Entfernung r durch Wechselwirkung auf einander ausgeübte Kraft, und zwar, je nachdem er positiv oder negativ ist, eine Anziehungskraft oder Abstossungskraft.

Die relative lebendige Kraft Q beider Theilchen, deren Massen mit ε und ε' bezeichnet werden, wird durch

$$Q = \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$$

dargestellt, woraus erhellt, dass Q eine Function der Zeit t ist (ausgenommen wenn $\frac{dr}{dt}$ ausdrücklich als constant angenommen wird), ebenso wie r, und dass folglich auch jede von diesen beiden Variabelen r und Q als Function der andern betrachtet werden kann.

Es ergiebt sich hiernach die Abstossungskraft

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{Q}{a}\right) + \frac{ee'}{ar} \cdot \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dr}{dt}},$$

oder, wenn man hierin die Werthe

$$Q = \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \quad \text{und} \quad a = \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot cc$$

substituirt, woraus

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{ddr}{dt^2} = \frac{2a}{cc} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{ddr}{dt^2}$$

folgt, ergiebt sich die Abstossungskraft

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc} \cdot \frac{ddr}{dt^2}\right).$$

Nun ist aber die relative Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$ aus zwei Theilen zusammengesetzt, nämlich aus dem von der Wechselwirkung beider Theilchen abhängigen, und aus dem davon unabhängigen Theile. Der letztere werde mit f bezeichnet; der erstere giebt mit $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}$

multiplicirt die Abstossungskraft $-\frac{dV}{dr}$, und kann also durch den Quotienten $-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{dV}{dr}$ dargestellt werden. Es ist also

$$\frac{ddr}{dt^2}=f-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{dV}{dr}.$$

Substituirt man diesen Werth für $\frac{ddr}{dt^2}$ in obiger Gleichung, und setzt nach Art. 3 $\varrho=\pm 2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{ee'}{cc}$, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product ee' positiv oder negativ ist; so erhält man

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{cc}f\right)\mp\frac{\varrho}{r}\cdot\frac{dV}{dr},$$

und hieraus endlich folgenden Ausdruck der Abstossungskraft:

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}\cdot\left(1-\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{cc}f\right),$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product ee' positiv oder negativ ist. Es kann dafür auch gesetzt werden

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{ee'}{r\left(r-\frac{ee'}{a}\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{cc}f\right).$$

Der Ausdruck der elektrischen Kraft in dieser entwickelten Form kann nun zur leichteren Uebersicht über die von beiden Theilchen unter den verschiedensten Verhältnissen aufeinander ausgeübten Kräfte dienen, jedoch ist dabei zu beachten, dass in dieser Form die Kräfte nicht nach dem Gesetze des Parellelogramms componirt werden können *). Man erkennt z. B. daraus unmittelbar, dass für positive Werthe des Products ee' diese Kraft unendlich gross sein würde nicht blos für $r=0$, sondern auch für $r=\varrho$; erkennt aber zugleich auch, dass in Wirklichkeit der letztere Fall, nämlich wo $r=\varrho$ sei, niemals vorkomme, weil, so gross auch die relative Geschwindigkeit der Theilchen in irgend einer von ϱ um eine endliche Grösse verschiedenen Entfernung sein möge, doch niemals $r=\varrho$ werden könne.

---

*) Da die Componenten der Beschleunigung bei Kräften, deren Potential von den Geschwindigkeiten der bewegten Punkte abhängt, durch Ausdrücke gegeben sind, welche die Beschleunigungen selbst enthalten, dergestalt, dass die Werthe der letzteren nur durch Auflösung von Gleichungen erhalten werden können, so ist nach einer Bemerkung Carl Neumann's ins Auge zu fassen, dass während vor jener Auflösung die Ausdrücke der Beschleunigungen bei gleichzeitiger Wirkung mehrerer Kräfte nach den gewöhnlichen Regeln componirt werden dürfen, diese letztere Eigenschaft nach Umformung der Ausdrücke durch Auflösung der Gleichungen verloren geht. Das Unendlichwerden der Beschleunigungen wird dabei durch das Verschwinden der Determinante aus den Coefficienten der Beschleunigungen in den einzelnen Gleichungen charakterisirt. Vergl. Mathemat. Annalen Bd. 11, S. 323 Anm.

Denn weil ee' positiv ist, ist die Kraft für $r > \varrho$ abstossend und wächst, während r abnimmt und dem Grenzwerthe ϱ sich nähert, ins Unendliche, woraus einleuchtet, dass die Annäherungsgeschwindigkeit, die wenn auch sehr gross, doch nicht unendlich gewesen war, aufgehoben werden müsse von dieser ins Unendliche wachsenden Abstossungskraft, noch bevor $r = \varrho$ geworden ist, und dass sodann r wieder wachsen werde. Es folgt hieraus, dass in diesem Falle niemals $r = \varrho$ werde, sondern dass die beiden Theilchen nothwendiger Weise stets in grösserer Entfernung als ϱ von einander bleiben müssen.

Für $r < \varrho$ ist die Kraft anziehend und wächst, während r zunimmt und dem Grenzwerth ϱ sich nähert, ins Unendliche, woraus einleuchtet, dass die Entfernungsgeschwindigkeit, die wenn auch sehr gross, doch nicht unendlich gewesen war, von der ins Unendliche wachsenden Anziehungskraft aufgehoben werden müsse, noch bevor $r = \varrho$ geworden sei, und dass sodann r wieder abnehmen werde. Die beiden Theilchen werden also in diesem Falle stets in geringerer Entfernung als r von einander bleiben.

Sollte eine ähnliche Beschränkung der Bewegung, wie für zwei Theilchen, welche darin bestand, dass sie in geringerer Entfernung als ϱ von einander immer bleiben mussten, wenn sie einmal darin waren, auch für eine grössere Zahl in einem eng begrenzten Raume eingeschlossener Theilchen sich ergeben, welche nämlich darin bestände, dass alle diese Theilchen immer in einem gleich begrenzten Raume zusammen bleiben müssten; so würde eine solche grössere Zahl von Theilchen, ebenso wie jene zwei, zusammen ein Molekül bilden, und es würden auf dieselbe Weise unter geeigneten Verhältnissen auch die ausserhalb des von diesem Moleküle eingenommenen Raumes befindlichen Theilchen zu Molekülen vereinigt sein können. Alle diese Moleküle, leuchtet ein, müssten durch Zwischenräume mindestens von der Grösse ϱ von einander geschieden sein, und würden sich einander wechselseitig abstossen. Es würde aber weiterer Untersuchung bedürfen, um zu entscheiden, ob, und unter welchen Verhältnissen ein System solcher Moleküle in stabilem Gleichgewicht verharren könnte, und, wenn dies der Fall sein sollte, nach welchen Gesetzen kleine Störungen des Gleichgewichts fortgepflanzt werden würden, um die Frage zu entscheiden, ob nicht dem Lichtäther und den Lichtwellen im Weltenraume ein stabiler Aggregatzustand solcher von elektrischen Theilchen gebildeten, im Weltenraume verbreiteten Moleküle zu Grunde liegen und zur Erklärung dienen könne. —

Man pflegt diejenige Kraft, welche zwei elektrische Theilchen e und e' in der Entfernung r auf einander ausüben, wenn sie in relativer Ruhe sich befinden, als ihre elektrostatische Kraft zu bezeichnen und dieselbe nach elektrostatischem Gesetze zu bestimmen, nämlich $=\frac{ee'}{rr}$. In relativer Ruhe befinden sich aber zwei Theilchen, wenn ihre relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}=0$ ist. Alsdann ergiebt sich aber aus dem gefundenen allgemeinen Gesetze der Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen die Grösse der Kraft nicht $=\frac{ee'}{rr}$, sondern $=\frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}\cdot\left(1+\frac{2r}{cc}f\right)$, wo f der von der Wechselwirkung der beiden Theilchen unabhängige Theil ihrer relativen Beschleunigung ist, d. i. die Summe derjenigen Beschleunigung $=\frac{\alpha\alpha}{r}$, welche von der relativen Geschwindigkeit α in einer gegen r senkrechten Richtung, welche die Theilchen besitzen, herrührt, und derjenigen Beschleunigung $=\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\Delta$, welche von der Differenz Δ der auf die Theilchen e und e' ausgeübten und nach r zerlegten äusseren Kräfte herrührt, wo ε und ε' die Massen der beiden Theilchen bezeichnen.

Aber auch dann, wenn die beiden Theilchen sich nicht blos in relativer Ruhe befinden, sondern auch der mit f bezeichnete, von ihrer Wechselwirkung unabhängige Theil ihrer Beschleunigung $=0$ ist, ergiebt sich ihre Abstossungskraft noch immer verschieden von dem durch das elektrostatische Gesetz bestimmten Werthe $\frac{ee'}{rr}$; sie ergiebt sich nämlich nach dem obigen allgemeinen Gesetze $=\frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}$. —

Um nach diesem allgemeinen Gesetze den durch das statische Gesetz bestimmten Werth $\frac{ee'}{rr}$ zu erhalten, darf der mit f bezeichnete Theil der Beschleunigung nicht $=0$ sein, sondern muss dem anderen von der Wechselwirkung der beiden Theilchen abhängigen Theile, nämlich $\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{ee'}{rr}$ entgegengesetzt gleich sein, d. h.

$$f=-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{ee'}{rr}=\mp\frac{\varrho cc}{2rr}.$$

Mit diesem Werthe von f findet man nach dem allgemeinen Gesetze, wenn $\frac{dr}{dt}=0$ ist, die Grösse der Abstossungskraft:

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}\cdot\left(1+\frac{2r}{cc}f\right) = \frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}\cdot\left(1\mp\frac{\varrho}{r}\right) = \frac{ee'}{rr},$$

d. i. gleich dem durch das elektrostatische Gesetz bestimmten Werthe. — Wirkliches statisches Gleichgewicht findet also zwischen zwei in relativer Ruhe befindlichen Theilchen nur dann statt, wenn die aus ihrer Wechselwirkung resultirende Beschleunigung durch die von ihrer Wechselwirkung unabhängige Beschleunigung aufgehoben wird.

6.

Bewegungsgesetze zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen.

Die Bewegungsgesetze zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen, die schon in den Elektrodyn. Maassbest. Bd. X dieser Abhandlungen entwickelt worden sind, sollen hier nur für den Fall, wo diese Theilchen keine relative Bewegung senkrecht gegen ihre Verbindungslinie besitzen, näher betrachtet und graphisch dargestellt werden, um zur Widerlegung irriger aus dem Grundgesetze gezogenen Folgerungen zu dienen.

Nach Art. 3 war das allgemeine Potential zweier elektrischen Theilchen e, e' in der Entfernung r von einander

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}\right),$$

wo die Abstossungskraft beider Theilchen, wie im vorigen Artikel bemerkt worden, durch $-\frac{dV}{dr}$ dargestellt wurde; soll aber diese Abstossungskraft durch $+\frac{dV}{dr}$ dargestellt werden, so ist das Potential

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2dt^2} - 1\right)$$

zu setzen.

Dieser letztern Bestimmung gemäss ergiebt sich die Beschleunigung des Theilchens e in der Richtung r, $= \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{dV}{dr}$, und die Beschleunigung des Theilchens e' in der entgegengesetzten Richtung $= \frac{1}{\varepsilon'}\cdot\frac{dV}{dr}$, wenn ε und ε' die Massen der Theilchen e und e' bezeichnen, woraus die relative Beschleunigung beider Theilchen resultirt,

$$\frac{ddr}{dt^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Multiplication mit $2dr$ die Differentialgleichung

$$2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{ddr}{dt} = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\cdot\frac{dV}{dr}dr,$$

durch deren Integration zwischen den Grenzen $r = r_0$ und $r = r$, wo r_0 den Werth von r bezeichnet, für welchen die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = 0$ ist, erhalten wird:

$$\frac{dr^2}{dt^2} = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) \cdot \left[\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2 dt^2} - 1\right) + \frac{ee'}{r_0}\right],$$

oder, wenn $\frac{dr}{cdt} = u$ und $2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) = \pm \frac{\varrho cc}{ee'}$ gesetzt wird,

$$u^2 = \pm \varrho \left[\frac{1}{r}(u^2 - 1) + \frac{1}{r_0}\right],$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product ee' positiv oder negativ ist.

Wird zunächst nun der Fall betrachtet, wo ee' positiv ist, und drückt man die Entfernungen r und r_0 in Theilen der dem Theilchenpaare zukommenden Constanten ϱ aus, so erhält man

$$u^2 = \frac{1}{r}(u^2 - 1) + \frac{1}{r_0}.$$

Sind nun für ein solches Theilchenpaar zu irgend einer Zeit die Entfernung r und die Geschwindigkeit u bestimmt, so ergiebt sich aus obiger Gleichung

$$r_0 = \frac{r}{1 - (1 - r)u^2}.$$

Ist aber auf diese Weise für das betrachtete Theilchenpaar, welches nur durch Wechselwirkung getrieben sich bewegt, die Entfernung r_0 bestimmt, für welche $u = 0$ ist, so können nun aus folgender Gleichung

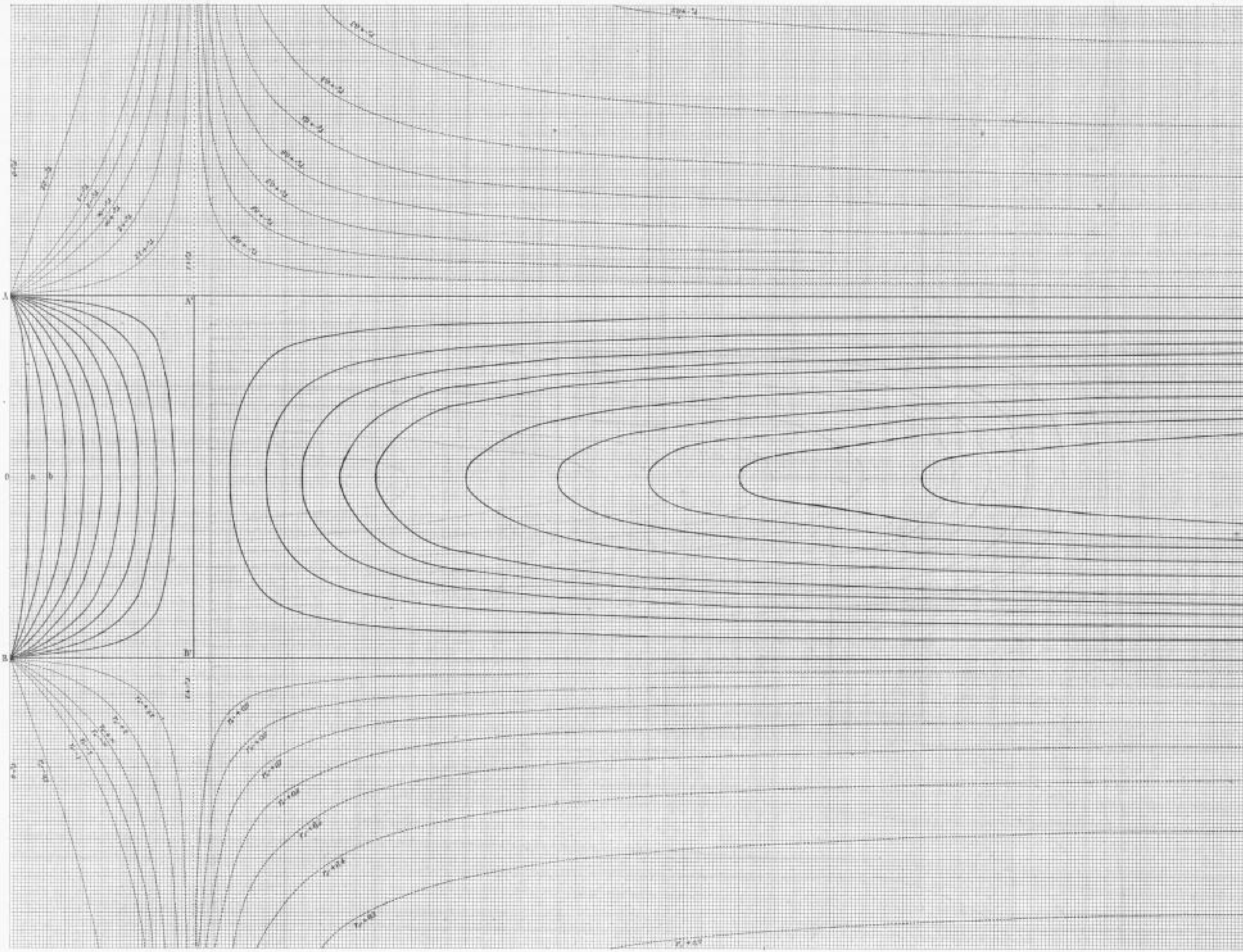
$$u^2 = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\frac{1}{1 - r}$$

alle zusammengehörigen Werthe von r und u für den nämlichen Werth von r_0 gefunden werden, wenn darin für r eine Reihe beliebiger von $r = 0$ bis $r = \infty$ wachsender Werthe gesetzt wird.

Eine solche Reihe zusammengehöriger Werthe von r und u wird graphisch durch eine Curve dargestellt, deren Abscissen und Ordinaten die zusammengehörigen Werthe von r und u darstellen.

Der Werth von r_0 kann nun aber für dasselbe Theilchenpaar zu verschiedenen Zeiten sehr verschieden sein, wenn dazwischen ausser der Wechselwirkung äussere Einwirkungen stattgefunden haben. Für jeden andern Werth von r_0 ergiebt sich aber, nach Beseitigung der äussern Einwirkung, eine andere Reihe zusammengehöriger Werthe von r und u, welche durch eine andere Curve graphisch dargestellt werden.

Hiernach erhält man für ein ganzes System verschiedener Werthe von r_0 folgende nach diesen Werthen geordnete Zahlentafel von zu-



Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

sammengehörigen Werthen von r und u, und ein entsprechendes Curvensystem, welches die Figur auf beigefügter Tafel darstellt, wobei zu bemerken ist, dass in dieser graphischen Darstellung die Werthe von r der folgenden Zahlentafel als Abscissen, die von $\pm u$ als Ordinaten aufgetragen sind, und zwar die von $+u$ als positive und die von $-u$ als negative, zur Unterscheidung der Entfernung der Theilchen von ihrer Annäherung. Das der ersten Abtheilung der Zahlentafel entsprechende Curvensystem erfüllt den Raum $AA'B'B$, das der zweiten den Raum $A'A_0B_0B'$, der auf der Seite von A_0B_0 ins Unendliche zu erstrecken ist.

Werthe von $u = \sqrt{\frac{1}{1-r}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)}$, für Werthe von r und r_0 zwischen 0 und 1.

$r_0 =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$r =$ 0,0	0,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00	± 1,00
0,1		0,00	± 0,75	± 0,86	± 0,91	± 0,95	± 0,97	± 0,98	± 0,99	± 0,99	± 1,00
0,2			0,00	± 0,65	± 0,79	± 0,86	± 0,91	± 0,94	± 0,97	± 0,98	± 1,00
0,3				0,00	± 0,60	± 0,75	± 0,84	± 0,90	± 0,94	± 0,97	± 1,00
0,4					0,00	± 0,57	± 0,75	± 0,84	± 0,91	± 0,96	± 1,00
0,5						0,00	± 0,57	± 0,75	± 0,86	± 0,94	± 1,00
0,6							0,00	± 0,60	± 0,79	± 0,91	± 1,00
0,7								0,00	± 0,65	± 0,86	± 1,00
0,8									0,00	± 0,75	± 1,00
0,9										0,00	± 1,00
1,0											± 0/0

Werthe von $u = \sqrt{\frac{1}{1-r}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)}$, für Werthe von r und r_0 zwischen 1 und ∞.

$r_0 =$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	∞
$r =$ 1,0	± 0/0												
1,2	± 1,00	0,00											
1,4	± 1,00	± 0,65	0,00										
1,6	± 1,00	± 0,75	± 0,49	0,00									
1,8	± 1,00	± 0,79	± 0,60	± 0,40	0,00								
2,0	± 1,00	± 0,82	± 0,65	± 0,50	± 0,33	0,00							
2,5	± 1,00	± 0,85	± 0,72	± 0,61	± 0,51	± 0,41	0,00						
3,0	± 1,00	± 0,86	± 0,75	± 0,66	± 0,57	± 0,50	± 0,32	0,00					
3,5	± 1,00	± 0,88	± 0,77	± 0,68	± 0,62	± 0,55	± 0,40	± 0,26	0,00				
4,0	± 1,00	± 0,88	± 0,79	± 0,71	± 0,64	± 0,57	± 0,45	± 0,33	± 0,22	0,00			
5,0	± 1,00	± 0,89	± 0,80	± 0,73	± 0,66	± 0,61	± 0,50	± 0,41	± 0,33	± 0,24	0,00		
6,0	± 1,00	± 0,89	± 0,81	± 0,74	± 0,68	± 0,63	± 0,53	± 0,45	± 0,37	± 0,31	± 0,20	0,00	
∞	± 1,00	± 0,91	± 0,84	± 0,79	± 0,74	± 0,71	± 0,63	± 0,57	± 0,54	± 0,50	± 0,45	± 0,41	0,00

Die nach diesen Zahlenwerthen in der beigefügten Figur gegebene graphische Darstellung gewährt nun eine klare Einsicht davon, welche Bewandtniss es mit dem aus der Formel sich ergebenden Resultate habe, dass nämlich die wechselseitige Beschleunigung zweier Theilchen in der sogenannten kritischen Entfernung ϱ unendlich gross sei, was vielseitige Bedenken gegen das dieser Formel zu Grunde liegende allgemeine Gesetz der elektrischen Kraft hervorgerufen hat.

Man ersieht nämlich aus dieser graphischen Darstellung, dass in der Entfernung ϱ zugleich mit der unendlich grossen Beschleunigung ein Sprung in der relativen Geschwindigkeit beider Theilchen von $-c$ bis $+c$, oder umgekehrt, eintritt, und zwar so plötzlich, dass während desselben die Entfernung ϱ nicht die mindeste Aenderung erleidet.

Die Beschleunigung, indem sie unendlich gross wird, wechselt das Vorzeichen, und in Folge davon geht die Geschwindigkeit im selbigen Augenblicke, ohne allen Zeitverlust, von $-c$ zu $+c$ über, oder umgekehrt. Ehe die Entfernung ϱ die kleinste endliche Aenderung erleiden kann, hat der Uebergang der Geschwindigkeit c in die entgegengesetzte schon stattgefunden.

Obige Formel giebt im Grunde nur die Beschreibung einer plötzlichen Zurückwerfung der Theilchen von einander, im Augenblicke, wo sie in die Entfernung ϱ gelangen, geradeso wie die Formel der Mechanik für zwei zusammenstossende elastische Kugeln, die ebenfalls von einander zurückgeworfen werden, und zwar desto plötzlicher, je kleiner die Kugeln und je grösser ihr Elasticitätscoefficient ist. Momentane Zurückwerfung bildet den Grenzfall, der wirklich zwar nicht vorkommt, doch nach den bisherigen Principien der Mechanik keineswegs für ungereimt oder absurd erklärt wird. Dass endlich nach der Formel, für $r = \varrho$, die Beschleunigung zwar unendlich gross sein würde, dass aber der Fall $r = \varrho$ ebenso wenig wirklich vorkommt, wie ein elastischer Körper mit unendlich grossem Elasticitätscoefficienten, verdient besondere Beachtung.

Ferner ersieht man, dass die Gesammtheit aller nach der angeführten Formel darstellbaren Curven zwei von einander ganz getrennte Gruppen bildet, nämlich erstens eine Gruppe, in welcher alle Entfernungen der Theilchen kleiner als ϱ, und zweitens eine Gruppe, in der sie grösser als ϱ sind, welche beide von einander dadurch geschieden sind, dass, wie oben gezeigt worden, der Fall, wo die Entfernung $= \varrho$ wäre, gar nicht wirklich vorkommt, noch vorkommen kann.

Beide Gruppen zusammen füllen den ganzen Raum für alle Abscissenwerthe von $r = 0$ bis $r = \infty$ und für alle Ordinatenwerthe von $u = -c$ bis $u = +c$ aus, und keine dieser Curven gestattet eine Fortsetzung über die Grenzen dieses Raums hinaus. Es folgt hieraus, dass zwei durch blosse Wechselwirkung getriebene elektrische Theilchen, deren relative Geschwindigkeit in irgend einem Augenblicke nicht grösser als $+c$ und nicht kleiner als $-c$ ist, stets innerhalb der angegebenen Grenzen bleiben*).

7.

Elektrische Strahlung, insbesondere Reflexion und Zerstreuung der Strahlen.

Die Bewegungen zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen, die sich in Bewegung gegen einander sowohl in der sie verbindenden Geraden, als auch senkrecht darauf befinden, sind in den Elektrodyn. Maassbest. Bd. X dieser Abhandlungen betrachtet und zu ihrer Bestimmung folgende Gleichungen gefunden worden:

*) Etwas Anderes wäre es, wenn der bei der Definition des Arbeitsvermögens ausgeschlossene Fall einträte, dass zwei elektrische Theilchen schon anfänglich eine Geschwindigkeit $> +c$ oder $< -c$ besässen, oder wenn die beiden Theilchen nicht blos durch Wechselwirkung, sondern ausserdem noch durch äussere Einwirkung getrieben sich bewegten und dadurch eine solche Geschwindigkeit, entweder $> +c$ oder $< -c$, erhalten hätten. Gesetzt ein solcher Fall käme wirklich vor, so würden die Bewegungen zweier solcher Theilchen, wenn sie von diesem Augenblicke an blos durch Wechselwirkung getrieben sich weiter bewegten, durch ganz andere Curven dargestellt werden, welche vom Gebiete des oben betrachteten Curvensystems ganz ausgeschlossen wären. Alle diese andern Curven würden ein in sich abgeschlossenes System bilden, welches den ganzen übrigen Raum erfüllte. Alle Curven dieser zweiten Art sind in der beigefügten Figur durch punktirte Linien dargestellt worden. Auch diese Bewegungsarten, oder die sie darstellenden Curven, zerfallen in zwei von einander an der durch die kritische Entfernung ϱ bestimmten Stelle ganz geschiedene Gruppen, nämlich eine Gruppe, in welcher alle Entfernungen der Theilchen stets kleiner als ϱ, und in eine Gruppe, in welcher sie stets grösser als ϱ sind. Ausserdem findet auch hier eine vollkommene Symmetrie zwischen den Curvenarmen mit Ordinaten $> +c$ und $< -c$ statt. Beide Curvenarme sind ferner bei $r = \varrho$ mit einander verbunden in Folge des plötzlichen Wechsels der Geschwindigkeit von $\pm\infty$ zu $\mp\infty$.

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r+r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right), \qquad (1.)$$

$$r\alpha = r_0\alpha_0, \qquad (2.)$$

wo r die Entfernung beider Theilchen von einander, und u und α ihre relativen Geschwindigkeiten in der Richtung von r und senkrecht darauf bezeichnen; ferner bezeichnet r_0 den Werth von r, für welchen $u = 0$ ist, α_0 den Werth von α, für welchen $r = r_0$ ist, endlich ϱ die von der Natur und den Massen ε und ε' der beiden Theilchen e und e' abhängende Constante

$$\varrho = 2\,\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc},$$

wo ϱ positiv oder negativ ist wie das Product ee'. — Soll ϱ die Bedeutung einer Entfernung beider Theilchen von einander haben, die nur positiv sein kann, wie r und r_0, so ist

$$\varrho = \pm 2\,\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}$$

zu setzen, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product ee' positiv oder negativ ist. Für Gleichung (1.) ist dann zu setzen

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r-r_0}{r \mp \varrho}\left(\frac{r+r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} \pm \frac{\varrho}{r_0}\right),$$

mit derselben Bestimmung der Vorzeichen. — Da im Folgenden nur gleichartige elektrische Theilchen betrachtet werden sollen, so werden stets die oberen Vorzeichen gelten. — Die Gleichung $r\alpha = r_0\alpha_0$ ergiebt $\alpha = 0$ für $r = \infty$, bei gegebenen endlichen Werthen von r_0 und α_0, womit die Existenz einer geradlinigen Asymptote, mit welcher die Bahn im Unendlichen zusammenfällt, verbunden ist.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, dass zwei gleiche elektrische Theilchen e und e' aus grosser Entfernung sich einander mit grosser, aber in Folge wechselseitiger Abstossung abnehmender, Geschwindigkeit u nähern, deren grösster Werth, nämlich für $r = \infty$, mit u_0 bezeichnet werden soll. Der Einfachheit halber soll bei dieser relativen Bewegung e als ruhend betrachtet werden. In derselben Bahn und relativ gegen e mit gleicher Geschwindigkeit soll dem Theilchen e' eine Reihe gleicher Theilchen e'', e''' .... folgen, in solchen Intervallen, dass die wechselseitigen Störungen derselben nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Aus dem oben angeführten Gesetze Gleichung (1.) ergiebt sich der für $r = \infty$ geltende Werth von u, nämlich

$$u_0 = c\sqrt{\left(\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} + \frac{\varrho}{r_0}\right)}. \tag{3.}$$

Da nun ϱ für gleiche Theilchen gleich ist, und auch u_0 als gleich angenommen worden ist, so kann eine Verschiedenheit nur noch in Beziehung auf den Werth von r_0 und den daraus nach Gleichung (3.) sich ergebenden Werth von α_0 stattfinden.

Das System aller dieser Theilchen heisse ein elektrischer Strahl, und die Asymptote, in der sich die Theilchen befinden, wenn sie sehr weit von e entfernt sind, diene zur Bestimmung der Richtung des Strahls.

Wäre für alle Theilchen $r_0 = \varrho\frac{cc}{u_0{}^2}$, woraus $\alpha_0 = 0$ folgte, so würden sie alle sich in derselben Geraden fortbewegen bis zur Entfernung r_0, worauf sie alle wieder in derselben Geraden rückwärts gehen würden. Ist α_0 aber von Null verschieden, und zwar, zugleich mit r_0, verschieden für alle Theilchen e', e''.., für welche u_0 gleich ist, für alle aber sehr klein; so wird jedes Theilchen, wenn r sich dem Werthe r_0 nähert, von jener Asymptote abweichen. Der Winkel, welchen dann die Gerade, z. B. $e'e$, in Folge dieser Abweichung, mit der Richtung des Strahls bildet, werde mit φ bezeichnet, und es sei $\varphi = \varphi_0$, wenn die abnehmende Entfernung $e'e = r_0$ geworden ist, wo nämlich die Geschwindigkeit in der Richtung $e'e$, $= 0$, in der Richtung senkrecht darauf, $= \alpha_0$ ist.

Von dem Augenblicke an, wo $r = r_0$ geworden, entfernen sich die beiden Theilchen e und e' wieder von einander, und ihre Verbindungslinie nähert sich einer andern Geraden, die mit der Richtung, welche ee' besass, als es $= r_0$ geworden, ebenfalls einen Winkel $= \varphi_0$ bildet und mit der Richtung des ursprünglichen Strahls den Winkel $= 2\varphi_0$, welcher der Reflexionswinkel heissen soll. Dieser Reflexionswinkel ist nun aber für die verschiedenen Theilchenpaare ee', ee''..., welche zu demselben Strahl gehören, sehr verschieden, nach Verschiedenheit der Werthe von α_0 oder $\frac{r_0}{\varrho}$, woraus sich ergiebt, dass ein solcher reflectirter Strahl zugleich auch zerstreut werde. Diese Zerstreuung elektrischer Strahlen soll nun nach obigen Gesetzen näher bestimmt werden.

Zunächst ergiebt sich aus obigem Gesetze (2.) das Wachsthum des mit φ bezeichneten Winkels, nämlich

$$d\varphi = \frac{\alpha\, dt}{r} = \frac{\alpha_0 r_0}{rr} dt. \tag{4.}$$

Substituirt man ferner in Gleichung (4.) den aus Gleichung (3.) sich ergebenden Werth von $\alpha_0{}^2 = u_0{}^2 - \frac{\varrho}{r_0} c^2$, so erhält man

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{dr^2}{c^2 dt^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{u_0{}^2}{c^2} - \frac{\varrho}{r}\right), \tag{5.}$$

folglich, wenn r bei wachsendem t abnimmt,

$$dt = -dr \sqrt{\frac{r(r-\varrho)}{(r-r_0)(u_0{}^2(r+r_0) - \varrho c^2)}}. \tag{6.}$$

Hieraus folgt

$$d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{rr} dt = -\frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot \frac{dr \sqrt{(rr - r\varrho)}}{rr \sqrt{\left(rr - \frac{c^2}{u_0{}^2}\varrho r\right) - \left(r_0 r_0 - \frac{c^2}{u_0{}^2}\varrho r_0\right)}},$$

oder, wenn $\frac{1}{r} = s$ gesetzt wird,

$$d\varphi = +\frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot ds \sqrt{\frac{(1-\varrho s)}{1 - \frac{c^2}{u_0{}^2}\varrho s - \left(r_0 r_0 - \frac{c^2}{u_0{}^2}\varrho r_0\right) s^2}}, \tag{7.}$$

woraus man sieht, dass φ durch elliptische Functionen dargestellt werden kann.

Beschränkt man sich nun aber auf diejenigen Fälle, wo der Werth von $\alpha_0{}^2 = u_0{}^2 - \frac{\varrho}{r_0} c^2$, und demnach auch der Werth von $\left(r_0 r_0 - \frac{c^2}{u_0{}^2}\varrho r_0\right) s^2$, entweder ganz verschwindet oder doch sehr klein ist, so reducirt sich obige Gleichung im ersteren Falle auf

$$d\varphi = +\frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot ds \sqrt{\frac{1-\varrho s}{1 - r_0 s}}; \tag{8.}$$

im letztern Falle, wo α_0 sehr klein sein soll, jedoch ohne ganz zu verschwinden, werde $r_0 \frac{\alpha_0{}^2}{u_0{}^2} = r_0 - \frac{c^2}{u_0{}^2}\varrho = \beta$ gesetzt und β so klein angenommen, dass in Gleichung (7.), welche durch Einführung von β in

$$d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot ds \sqrt{\frac{(1-\varrho s)}{(1 - r_0 s)(1 + \beta s)}}$$

übergeht, $(1 - \frac{1}{2}\beta s)$ für den Factor $\sqrt{\frac{1}{1+\beta s}}$ gesetzt werden kann, wodurch für (7.) folgende Gleichung erhalten wird:

$$d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot (1 - \tfrac{1}{2}\beta s)\, ds \sqrt{\frac{1-\varrho s}{1 - r_0 s}}, \tag{9.}$$

woraus sich ergiebt, wenn $S = 1 - (\varrho + r_0) s + \varrho r_0 s^2$ gesetzt wird,

$$\int d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{u_0}\left[\int \frac{ds}{\sqrt{S}} - (\tfrac{1}{2}\beta + \varrho)\int \frac{s\, ds}{\sqrt{S}} + \tfrac{1}{2}\beta\varrho \int \frac{s^2 ds}{\sqrt{S}}\right].$$

Setzt man $b = -(\varrho + r_0)$ und $c = \varrho r_0$, so erhält man durch Ausführung der Integration *):

$$\frac{u_0}{\alpha_0 r_0}\int d\varphi = \left[1 + \frac{b}{4c}(\beta + 2\varrho) + \frac{\beta\varrho}{4c}\left(\frac{3b^2}{4c} - 1\right)\right]\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \log\left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) - \frac{1}{c}\left(\varrho + \frac{\beta}{2}\left(1 + \frac{3b}{4c}\varrho\right) - \frac{\beta\varrho}{4}s\right)\sqrt{S},$$

woraus, wenn man $m = \frac{\varrho}{r_0}$, $n = \frac{c}{u_0}$, folglich nach Gleichung (3.) $\frac{\alpha_0}{u_0} = \sqrt{(1 - mn^2)}$ setzt, erhalten wird:

$$\varphi_0 = \int_{s=0}^{s=\frac{1}{r_0}} d\varphi = \sqrt{(1 - mn^2)} \cdot \left[\frac{1-m}{2}\left(1 - \frac{1+3m}{8m}(1 - mn^2)\right)\sqrt{\frac{1}{m}} \cdot \log\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} + 1 + \frac{1-3m}{8m}(1 - mn^2)\right]. \quad (10.)$$

Hiernach ist folgende Tafel der Werthe von φ_0, für verschiedene Werthe von m und n, berechnet worden:

	$n = 1$	$n = 2$
$m = 1$	0	
$\frac{1}{2}$	0,9658	
$\frac{1}{3}$	1,1269	
$\frac{1}{4}$	1,1479	0
$\frac{1}{5}$	1,2272	0,7776
$\frac{1}{6}$	1,2486	0,9688
$\frac{1}{7}$	1,2629	1,0690
$\frac{1}{8}$	1,2732	1,1302
0	1,2500	1,2500

Es ergiebt sich hieraus für alle Theilchen e', e''... eines elektrischen Strahls, welche sich dem Theilchen e aus grosser Entfernung mit der Geschwindigkeit u_0 nähern, dass sie, wenn sie bis zur Entfernung r_0 gelangt sind, umkehren und sich von e wieder entfernen, mit einer Geschwindigkeit, die in grosser Entfernung bis u_0 wieder wächst; dass aber die beiden Richtungen, in welchen beide Theilchen mit der Geschwindigkeit u_0 sich erst näherten und dann entfernten,

*) Nämlich $\displaystyle\int\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \log\left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right)$,

$$\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = -\frac{b}{2c\sqrt{c}}\log\left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) + \frac{\sqrt{S}}{c},$$

$$\int\frac{s^2\,ds}{\sqrt{S}} = \frac{3b^2 - 4c}{8c^2\sqrt{c}}\log\left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) + \frac{1}{2c}\left(s - \frac{3b}{2c}\right)\sqrt{S}.$$

einen Winkel $2\varphi_0$ mit einander bilden, der für die verschiedenen Paare nach Verschiedenheit des Werths von r_0 sehr verschieden ist.

Die Verschiedenheit des Winkels $2\varphi_0$, welcher der Reflexionswinkel genannt worden ist, für die verschiedenen Theilchenpaare nach Verschiedenheit des Werths von r_0, bildet das mit dem Namen der Zerstreuung elektrischer Strahlen durch Reflexion bezeichnete Faktum, und das gefundene Gesetz der Abhängigkeit des Reflexionswinkels $2\varphi_0$ von m und n giebt von dieser Zerstreuung genaue Bestimmung, wenn man beachtet, dass n für alle Theilchen eines und desselben Strahls denselben von u_0, nach der Gleichung $n = \frac{c}{u_0}$, abhängigen Werth besitzt; ferner dass m für jedes Theilchenpaar durch die 3 Gleichungen $m = \frac{\varrho}{r_0}$, $\alpha_0^2 = u_0^2 - \frac{\varrho}{r_0}c^2$ und $\alpha_0 r_0 = \alpha r$, nach Elimination von r_0 und α_0, aus der relativen Geschwindigkeit α beider Theilchen in der Richtung senkrecht auf ihre Verbindungslinie, für jede beliebige Entfernung r bestimmt werden kann, nämlich durch die Gleichung:

$$m^2 + \frac{\varrho^2 c^2}{r^2 \alpha^2} m = \frac{\varrho^2 u_0^2}{r^2 \alpha^2}.$$

8.

Anwendung der Theorie der Zurückwerfung und Zerstreuung elektrischer Strahlen auf Lichtäther und Gase nach der Krönig-Clausius'schen Theorie der molecularen Stösse.

Die Zurückwerfung und Zerstreuung elektrischer Strahlen, welche aus elektrisch gleichartigen Theilchenpaaren bestehen, die im leeren Raume mit gleicher Wurfgeschwindigkeit sich nähern oder entfernen, führt zu einem ähnlichen Aggregatzustand des ganzen Systems solcher im leeren Raume befindlichen Theilchen, als in der Gastheorie nach Krönig und Clausius den Gasen zugeschrieben wird, blos mit dem Unterschiede, dass die in Wurfbewegung befindlichen Theilchen der Gase ponderable Theilchen sind, während jene elektrischen Theilchen als imponderabel bezeichnet zu werden pflegen, weil die Geltung des allgemeinen Gravitationsgesetzes von ihnen bisher wenigstens nicht bewiesen ist. Nur nach Mosotti's Gravitationstheorie (siehe Zöllner, Wissenschaftliche Abhandlungen. Erster Band. Nr. 2. Leipzig 1878), wonach alle Gravitationskräfte aus elektrischen Abstossungs- und Anziehungskräften resultiren, würden alle Wechselwirkungen, ponderabler sowohl als elektrischer Theilchen, unter gemeinsame Bestimmungen gefasst werden, indem jedes ponderable Theilchen hienach ein elektrisches Doppeltheilchen (gleich einem Doppelsterne) wäre, nämlich ein positiv und ein negativ elektrisches Theilchen, die sich um einander drehten.

Nach dieser Mosotti'schen Vorstellung ponderabler Theilchen ergiebt sich von selbst, dass, wenn diese Theilchen sich im leeren Raum in Wurfbewegung befinden, wie nach der Krönig-Clausius'schen Gastheorie bei den Gasen angenommen wird; so würden aus den Gesetzen der elektrischen Wechselwirkung für diese im leeren Raum in Wurfbewegung befindlichen ponderablen Theilchen ähnliche Zurückwerfungs- und Zerstreuungsgesetze sich ergeben, als im vorigen Artikel für gleichartige elektrische in Wurfbewegung befindliche Theilchen gefunden worden sind, wie leicht erkannt wird, wenn man beachtet, dass jene Gesetze vorzugsweise für Paare von gleichartigen Theilchen gelten, die sich bei ihrer relativen Wurfbewegung bis auf eine Entfernung r_0 nähern, die ϱ zur unteren Grenze hat. Denn zwei ponderable Molecule enthalten zwei Paare gleichartig elektrischer Theilchen, und für jedes dieser beiden Paare giebt es eine Entfernung ϱ, bis zu welcher die Theilchen des Paares nicht gelangen können, weil ihre Abstossungskraft unendlich werden würde, was nur dadurch verhindert wird, dass die beiden Theilchen durch die immer schneller wachsende Abstossungskraft zum Stillstand gebracht werden, und zwar bevor sie zur Entfernung ϱ gelangen, worauf sie durch die in Folge ihrer Wechselwirkung fortdauernde Abstossungskraft sich wieder ebenso von einander entfernen, als sie sich vorher genähert hatten.

Es lassen sich hienach die im vorigen Artikel gefundenen Gesetze der Zurückwerfung und Zerstreuung für Strahlen gleichartig elektrischer Theilchen auch auf Strahlen ponderabler, nach Mosotti's Vorstellung zusammengesetzter, Molecule übertragen. Und sind nun diese ponderabeln Molecule Gasmolecule, so wird dadurch ein Aggregatzustand des Gases gebildet, welcher dem nach der Krönig-Clausius'schen Theorie den Gasen zugeschriebenen Aggregatzustande ganz entspricht, ohne dass es nöthig wäre, diesen ponderablen Gasmoleculen mit Krönig eine besondere Form und Elasticität, oder mit Clausius und Maxwell besondere, einer höheren Potenz der Entfernung umgekehrt proportionale Abstossungskräfte zuzuschreiben.

Giebt es aber einen Raum, z. B. den Weltraum, worin keine ponderabeln Molecule sich befinden; so leuchtet doch die Möglichkeit ein, dass sich in diesem Raume die Theilchen eines der beiden Bestandtheile dieser ponderabeln Molecule, d. h. entweder die positiv oder die negativ elektrischen Theilchen, befinden, die in Wurfbewegung ebenfalls einen Körper von besonderem Aggregatzustand bilden würden, der aber, weil er nur aus gleichartig elektrischen Theilchen bestände, nicht als ponderabler Körper bezeichnet werden dürfte, sondern als imponderabler Aether, für den aber ebenfalls die von Maxwell (Philos. Transact. 1867) für dynamische Medien entwickelten Bewegungsgesetze, namentlich die mit den Verbreitungsgesetzen der Lichtwellen übereinstimmenden Gesetze der Wellenverbreitung gelten würden. Eine solche Vorstellung von einem Raum erfüllenden Medium, bestehend aus wechselseitig sich abstossenden Theilchen, scheint ohne feste Raumbegrenzung nur unter Voraussetzung einer ganz unbegrenzten Erstreckung ins Unendliche möglich zu sein; jedoch scheint eine Beschränkung eines solchen Mediums auf einen endlichen Raum ohne feste Begrenzung nach Mosotti dadurch ermöglicht, dass dieses Medium einen Mosotti'schen ponderabeln Körper umgäbe, welcher auf dasselbe anziehend wirken, und es dadurch zusammenhalten würde.

9.

Bewegungsgesetze zweier durch Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen elektrischen Theilchen.

Es soll nur der einfache Fall betrachtet werden, wo die äussere Einwirkung auf das Theilchen e in einer constanten Kraft nach Richtung der verlängerten Geraden $e'e$ besteht, welche, mit der Summe $\varepsilon + m$ der eigenen Masse des Theilchens e und der damit fest verbundenen ponderabelen Masse dividirt, den Quotienten g giebt. — Die äussere Einwirkung auf das andere Theilchen e' bestehe in einer Kraft, welche der aus der Wechselwirkung von e und e' resultirenden auf e' wirkenden Kraft entgegengesetzt gleich ist.

Das Potential V der beiden Theilchen e und e' in der Entfernung r ist nach Art. 5, wenn man unter V diejenige Function versteht, deren Differentialquotient $\frac{dV}{dr}$ die Abstossungskraft beider Theilchen darstellt,

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2dt^2} - 1\right).$$

Hieraus folgt nun die Beschleunigung durch Wechselwirkung des Theilchens e nach r, $= \frac{1}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr}$, und die des Theilchens e' in entgegengesetzter Richtung $= \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr}$, woraus die relative Beschleunigung beider Theilchen durch Wechselwirkung resultirt:

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon + m} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) \cdot \frac{dV}{dr}.$$

Hiezu kommt die Beschleunigung durch äussere Einwirkung, welche für e in der Richtung r, $= g$ ist, und für e', in derselben Richtung, $= \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr}$, woraus die relative Beschleunigung beider Theilchen durch äussere Einwirkung resultirt:

$$= g - \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr}.$$

Die ganze relative Beschleunigung ergiebt sich hieraus:

$$\frac{ddr}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr} + g.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2\,dr$, so erhält man

$$2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{ddr}{dt} = \frac{2}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr}\,dr + 2g\,dr,$$

und hieraus durch Integration zwischen den Grenzen $r = r_0$ und $r = r$, wo r_0 den Werth von r zur Zeit, wo $\frac{dr}{dt} = 0$ ist, bezeichnet:

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{2}{\varepsilon + m}\left[\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2dt^2} - 1\right) + \frac{ee'}{r_0}\right] + 2g\,(r - r_0).$$

Bezeichnet man $\frac{dr}{c\,dt}$ mit u, und beachtet, dass $\pm \frac{ee'}{\varrho} = a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\,cc$ ist, so erhält man

$$uu = \pm \frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\,uu\right) + \frac{2g}{cc}\,(r - r_0),$$

und hieraus

$$uu = \frac{\pm \frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + \frac{2g}{cc}\,(r - r_0)}{1 \mp \frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')} \cdot \frac{1}{r}}.$$

Setzt man nun $\frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')} = \varrho'$, so ergiebt sich:

für positive Werthe von ee', $\quad uu = \frac{\varrho'}{\varrho' - r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\left(1 + \frac{2g}{cc} \cdot \frac{rr_0}{\varrho'}\right)$, (1.)

für negative Werthe von ee', $\quad uu = \frac{\varrho'}{\varrho' + r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\left(1 - \frac{2g}{cc} \cdot \frac{rr_0}{\varrho'}\right)$, (2.)

oder, wenn r und r_0 in Theilen von ϱ' ausgedrückt werden:

für positive Werthe von ee', $\quad uu = \frac{1}{1 - r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{2g\varrho'}{cc} \cdot rr_0\right)$, (3.)

für negative Werthe von ee', $\quad uu = \frac{1}{1 + r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{2g\varrho'}{cc} \cdot rr_0\right)$. (4.)

Es ergeben sich hieraus, wie man sieht, wenn $g = 0$ gesetzt wird, die Art. 6 gefundenen Gleichungen für zwei blos durch Wechselwirkung getriebene Theilchen; wenn dagegen ε oder $\varepsilon' = 0$ gesetzt wird, wo $\varrho' = 0$ wird, erhält man aus (1.) und (2.)

$$uucc = \frac{dr^2}{dt^2} = 2g(r - r_0),$$

d. i. das Fallgesetz, worin $(r - r_0)$ den Fallraum bezeichnet.

Die graphische Darstellung dieser Bewegungsarten eines elektrischen Theilchenpaars durch Wechselwirkung und äussere Einwirkung ergiebt sich leicht für positive Werthe von ee' aus der in der Figur zu S. 669 gegebenen graphischen Darstellung der Bewegungsarten eines Theilchenpaars durch Wechselwirkung allein, ohne äussere Einwirkung; es brauchen in obiger Figur, bei unveränderten Abscissen r, alle Ordinaten $\pm u$ der durch einen bestimmten Werth der Constante gegebenen Curve, nur im Verhältniss von $1 : \sqrt{\left(1 + \frac{2g\varrho'}{cc} r_0 r\right)}$ vergrössert zu werden, um diejenige Curve zu erhalten, welche die Bewegungen des Theilchenpaars unter den angegebenen äussern Einwirkungen darstellt, wobei nur zu beachten ist, dass r_0 und r in Theilen von ϱ', statt von ϱ, dargestellt sind, und dass $\varrho' : \varrho = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} : \varepsilon + m$, d. i. nahezu $= \varepsilon : m$, für kleine Werthe von ε, sich verhält.

Man ersieht hieraus, dass auch bei äusserer Einwirkung wie die oben angegebene, für eine bestimmte Entfernung ϱ' gleichartiger Theilchen von einander, ihre relative Beschleunigung durch Wechselwirkung zwar nach der Formel unendlich gross sein würde; dass aber diese Entfernung ϱ' niemals eintreten könne, aus dem im vorigen Artikel angeführten Grunde, der auch hier stattfindet. Denn sollte der Fall, wo die Entfernung der Theilchen $= \varrho'$ wäre, wirklich eintreten; so müsste er eintreten, entweder indem beide Theile sich einander näherten oder von einander entfernten. Findet nun während der Annäherung Abstossung, während der Entfernung Anziehung statt, und wächst jene Abstossung und diese Anziehung nach dem angeführten Gesetz in der Art, dass sie für die Entfernung ϱ' unendlich werden würde; so werden die Theilchen in keinem von beiden Fällen bis zur Entfernung ϱ' gelangen, sondern zum Stillstand und zur Umkehr gebracht werden, ehe sie dahin gelangt sind. Dies findet nach unserm Gesetze statt und es leuchtet daraus der Grund ein, warum der Fall unendlicher Beschleunigung nach diesem Gesetz wirklich niemals eintreten kann.

Es bietet also auch der in diesem Artikel erörterte Fall der Verbindung von Wechselwirkung mit äusserer Einwirkung keinen Grund dar zu Bedenken gegen das aufgestellte Gesetz, und es ist daher gar nicht nöthig, zur Vertheidigung dieses Gesetzes in der Annahme Zuflucht zu suchen, dass, weil ϱ und ϱ' Moleculardistanzen seien, besondere Molecularkräfte noch in Betracht kommen können, durch welche der Fall unendlicher Beschleunigung in den Molecularentfernungen ϱ oder ϱ' beseitigt würde.

Es bleiben übrigens die Entfernungen ϱ und ϱ' stets Molecularentfernungen, weil nämlich, wenn auch durch Vergrösserung der auf einander wirkenden elektrischen Massen ϱ vergrössert werden kann, doch wenigstens eine von den beiden auf einander wirkenden elektrischen Massen an eine ponderable Masse gebunden sein wird, welche mit ihr fortbewegt werden muss, wie in dem eben betrachteten Falle, wodurch eine Verkleinerung von ϱ eintritt, im Verhältniss der ganzen Masse $\varepsilon + m$ zur elektrischen ε, wo m eine ponderable Masse bezeichnet, gegen welche ε verschwindet.

Der in diesem Artikel betrachtete Fall zweier durch Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen elektrischen Theilchen ist der nämliche, auf welchen sich der von Helmholtz erhobene Einwand bezog, welchen Neumann in seiner Abhandlung, S. 91 ff. dieses Bandes, einer nähern Prüfung unterworfen hat.

Neumann erblickte S. 92 in dem von Helmholtz gerügten »absurden Resultate unendlicher Beschleunigung«*) in der sogenannten kritischen Entfernung, ein neues Argument dafür, dass mein elektrisches Grundgesetz (ähnlich wie das Newton'sche) für ausserordentlich kleine Entfernungen einer gewissen Modification bedürfe; erhob indessen selbst den Einwand dagegen, dass jener Fall unendlicher Beschleunigung sich so einrichten lasse, dass nur grosse Entfernungen in Betracht kämen, welche eine Modification des Resultats durch Molecularkräfte ausschlössen.

*) Eine unendliche Beschleunigung kommt bei Betrachtung zusammenstossender Körper häufig vor und wird in der Mechanik nicht als absurd betrachtet, sondern als Grenzfall bei wachsender Elasticität. Kommt dieser Grenzfall niemals vor, so gilt das nämliche auch von obigem Falle, wie sogleich gezeigt werden wird.

Von diesen Fällen, wo nur grosse Werthe als kritische Entfernungen in Betracht kämen, sei nur, bemerkt Neumann, die Wirklichkeit oder Realisirbarkeit nicht nachgewiesen, ohne welche diese Fälle nicht als Controle eines physikalischen Gesetzes benutzt werden könnten, und der von Helmholtz erhobene Einwand würde ernstliche Bedeutung nicht früher gewinnen, als bis dieser Nachweis geliefert worden sei.

Dagegen ist nun in diesem und im vorigen Artikel der Beweis geliefert worden, dass die Möglichkeit des Falls, in welchem nach Helmholtz das »absurde Resultat unendlicher Beschleunigung« stattfinden würde, dadurch ganz ausgeschlossen werde, dass die beiden Theilchen, ehe sie zur kritischen Entfernung gelangen können, sich derselben vorher genähert haben müssen, entweder aus kleinerer oder aus grösserer Entfernung; dass sie aber wegen der, bei der Annäherung, ins Unendliche wachsenden Beschleunigung rückwärts, d. i. Verlangsamung, welche stattfindet, sowohl wenn die Theilchen aus kleinerer als auch wenn sie aus grösserer Entfernung der kritischen Entfernung nahen, zur kritischen Entfernung niemals gelangen können, woraus folgt, dass das von Helmholtz gerügte »absurde Resultat unendlicher Beschleunigung« gar nicht existirt, und dass nur ein von Helmholtz begangener und bisher nicht widerlegter Irrthum dazu geführt hat. — Auf die Grösse der kritischen Entfernung kommt übrigens hiebei gar nichts an. —

Doch sollen in den beiden nächsten Artikeln noch ein Paar Fälle näher erörtert werden, in denen man eine sehr bedeutende Vergrösserung der sogenannten kritischen Entfernung erreichen zu können geglaubt hat, und welche durch die daran geknüpften Folgerungen besonderes Interesse auf sich gezogen haben.

10.

Bewegungsgesetze eines in elektrischer Hohlkugel eingeschlossenen, durch elektrische Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen Elektricitätstheilchens.

In diesen Abhandlungen hat S. 103—106 dieses Bandes C. Neumann folgenden Fall besonders hervorgehoben und erörtert:

»Es sei gegeben eine gleichmässig mit Elektricität belegte und fest aufgestellte Kugelschaale (vom Radius α). Im Innern dieser Schaale befinde sich ein mit Elektricität belegter, um seine fest aufgestellte horizontale Axe drehbarer Cylinder (dessen Radius $= a$ und dessen Trägheitsmoment $= \mathfrak{M}$ sei). Auf diesen Cylinder sei ein Faden aufgewickelt, und das freie Ende dieses Fadens mit einem Gewicht Mg beschwert. — Es soll die Bewegung, welche der Cylinder unter der Einwirkung der elektrischen Kugelschaale einerseits und unter der Einwirkung des Gewichts Mg andererseits annehmen wird, näher untersucht werden.«

»Dabei soll vorausgesetzt sein, dass der Cylinder mit der in ihm vorhandenen elektrischen Materie starr und unlöslich verbunden sei, und dass Gleiches auch stattfinde bei der Kugelschaale.«

Neumann ist für diesen Fall, wenn dabei die elektrischen Ladungen des Cylinders und der Kugelschaale constant angenommen werden, schliesslich Seite 106 zu folgender Gleichung gelangt:

$$L\vartheta'\vartheta' = Mga\vartheta + \text{Const.},$$

oder, nach t differentiirt,

$$2L\vartheta'' = Mga,$$

wo ϑ den Drehungswinkel, ϑ' die Drehungsgeschwindigkeit und ϑ'' die Drehungsbeschleunigung des Cylinders bezeichnet, und, wenn H die Dichtigkeit der Elektricität auf der Kugelschale und Σe die Ladung der Cylinderoberfläche bezeichnet,

$$L = \frac{Maa + \mathfrak{M}}{2} - \frac{4\pi\alpha H \cdot aa\Sigma e}{3cc}$$

gesetzt und constant angenommen ist.

Neumann hat hieran nun folgenden Ausspruch geknüpft: »Ist die Constante $L =$ pos., so wird das angehängte Gewicht Mg mit beschleunigter Geschwindigkeit sinken. Ist $L = 0$, so entsteht eine unendlich grosse Beschleunigung. Ist endlich $L =$ neg., so wird jenes Gewicht mit beschleunigter Geschwindigkeit gehoben werden. In diesem letztern Falle könnte, falls man den Faden unendlich lang annimmt, das Gewicht unendlich hoch emporgehoben, also unendlich grosse Arbeit geleistet werden.«

»Untersucht man aber, ob die Fälle $L = 0$ und $L =$ neg. wirklich eintreten können, so stösst man auf dieselben Schwierigkeiten wie früher.« — —

Von diesen hier von Neumann angedeuteten Schwierigkeiten mögen folgende zwei besonders hervorgehoben werden, nämlich erstens diejenige, welche von den durch die Natur der Körper den elektrischen Scheidungskräften gesetzten Schranken herrühren, zweitens die mit der Annahme eines constanten Werths von L verbundenen Schwierigkeiten, welche darin bestehen, dass mit dieser Annahme die Voraussetzung bestimmter unveränderlicher Ladungen der Kugel und des Cylinders verbunden ist.

1) Schwierigkeiten, welche von den durch die Natur der Körper den elektrischen Scheidungskräften gesetzten Schranken herrühren.

Bezeichnet man die Elektricität des Cylinders und der Kugelschaale kurz mit e und e' (statt mit Σe und $4\pi\alpha^2 H$), und setzt das Trägheitsmoment des Cylinders $\mathfrak{M} = maa$, so ist

$$L = \left(\frac{M+m}{2} - \frac{ee'}{3\alpha cc}\right) aa;$$

folglich ist für $L = 0$

$$ee' = \frac{3}{2}\alpha cc(M+m).$$

Nun ist $\frac{2e'}{\alpha}$ die zur Ladung e' einer Kugelschaale erforderliche Scheidungskraft*); die Grösse dieser Scheidungskraft ist

*) Die von einer mit der Elektricität e' gleichförmig belegten Kugelschaale vom Halbmesser α auf einen ausserhalb befindlichen linearen Leiter von unbegrenzter Länge l, welcher in der Verlängerung eines Radius liegt, ausgeübte Scheidungskraft ist die Differenz der auf die in jeder Längeneinheit des Leiters befindliche Einheit positiver Elektricität ausgeübten Abstossungskraft $= e'\int_0^l \frac{dx}{(\alpha+x)^2}$, und der auf die in jeder Längeneinheit befindliche Einheit negativer Elektricität ausgeübten Anziehungskraft $= -e'\int_0^l \frac{dx}{(\alpha+x)^2}$; folglich

$$= 2e'\int_0^l \frac{dx}{(\alpha+x)^2} = 2e'\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+l}\right),$$

woraus sich bei unbegrenztem Werthe von l die Scheidungskraft $= \frac{2e'}{\alpha}$ ergiebt, wie oben angegeben worden ist.

Ist in diesem Leiter eine Säule eingeschaltet, durch welche die Kugelladung unverändert erhalten wird, so wird dadurch bewiesen, dass die von der Kugelladung und die von der Säule auf den Leiter ausgeübten Scheidungskräfte entgegengesetzt gleich sind, wodurch auch die Scheidungskraft der Säule bestimmt wird, nämlich $= -\frac{2e'}{\alpha}$.

aber beschränkt und hängt von den in der Natur vorhandenen Scheidungsmitteln ab; denn bei aller Mannichfaltigkeit dieser Mittel giebt es doch kein Mittel für unendlich grosse Scheidungskräfte.

Soll nun $L = 0$ sein, so muss nach obiger Gleichung

$$\frac{2e'}{\alpha} = 3cc \cdot \frac{M+m}{e},$$

oder es muss, da $c = 439450 \cdot 10^6$ ist,

$$\frac{2e'}{\alpha} \cdot \frac{e}{2(M+m)} = 289670 \cdot 10^{18} \text{ sein.} —$$

Es wird schwer halten, einen mit fester Drehungsaxe versehenen geladenen Cylinder darzustellen, dessen Ladung e, nach absolutem Maasse, grösser wäre als die in Milligrammen ausgedrückte ponderable Masse $2m$; fügt man aber zu $2m$ noch die doppelte Masse des Gewichts $= 2M$ hinzu, so kann sicher $\frac{e}{2(M+m)}$ als echter Bruch angenommen werden, woraus folgt, dass zur Ladung der Kugelschaale, wenn $L = 0$ werden sollte, eine Scheidungskraft erforderlich wäre, die nach mechanischem Maasse $= \frac{2e'}{\alpha} > 289670 \cdot 10^{18}$ sein müsste, d. i. eine Scheidungskraft, welche die grösste von den in den Elektrodyn. Maassbest. Bd. V dieser Abhandlungen S. 243—250 gemessenen, nämlich $= 2\frac{6410,5}{11,567} = 1108$, mindestens 261 Trillionen Mal überträfe. Dass es uns noch unbekannte Körper in der Natur gebe, welche die Möglichkeit so grosser Scheidungskräfte gewährten, darf mit Recht bezweifelt werden. Eine Vergrösserung der beiden Coefficienten $\frac{e}{M+m}$

Es leuchtet ferner aber ein, dass, wenn die Kugelschaale noch nicht geladen wäre, sie durch die Säule geladen werden würde, und dass diese Ladung wachsen würde, bis sie $= e'$ geworden wäre, bei einem Kugelhalbmesser $= \alpha$, d. h. bis die Scheidungskraft der Kugelladung $= \frac{2e'}{\alpha}$ geworden wäre und die Scheidungskraft der Säule aufhöbe.

Ferner folgt hieraus, dass zwei Kugeln mit den Ladungen e' und ne', deren Halbmesser α und $n\alpha$ sind, deren Potentiale folglich für alle Punkte im Innern, nämlich $\frac{e'}{\alpha}$ und $\frac{ne'}{n\alpha}$, einander gleich sind, leitend verbunden sein können, ohne dass irgend ein Theil der Ladung von der einen Kugel zur andern überginge, in Uebereinstimmung mit dem Satze, dass bei Gleichheit der Potentiale im Innern zweier Leiter kein Uebergang der Elektricität bei leitender Verbindung der Leiter stattfinde. —

Noch ist zu bemerken, dass obige Scheidungskräfte in mechanischem Maasse ausgedrückt sind und mit $155370 \cdot 10^6 = \frac{c}{2\sqrt{2}}$ zu multipliciren sind, um sie in magnetischem Maasse ausgedrückt zu erhalten.

und $\frac{e'}{\alpha}$ um das 10- oder 100fache würde gar nicht in Betracht kommen; ist in der Natur der Körper nicht die Möglichkeit gegeben, das Product dieser beiden Coeffcieten viele Trillionen Mal zu vergrössern, so bleibt die Darstellung des Falls $L = 0$ immer unmöglich.

Wäre aber auch in der Natur der Körper die Möglichkeit so grosser Scheidungskräfte gegeben, so würden doch auch mit diesen Scheidungskräften die geforderten Ladungen nicht zu effectuiren sein, weil kein Isolator existirt, welcher fest genug wäre, um den Expansivkräften solcher Ladungen zu widerstehen, welche stärker wie Pulverladungen explodiren und Alles zerstören würden.

Gäbe es endlich aber auch so feste und vollkommene Isolatoren, welche selbst den ungeheuern Expansivkräften solcher Ladungen zu widerstehen vermöchten, und könnte auch demnach die Kugelladung bis zu der geforderten Grösse gebracht werden, so würde zwar alsdann $L = 0$ werden, aber die Beschleunigung ϑ'' würde auch dann nicht unendlich werden, auch nicht nach dem der obigen Rechnung zu Grunde liegenden Gesetze, wie im folgenden Artikel nachgewiesen werden soll.

11.

Fortsetzung.

2) Schwierigkeiten, welche mit der Annahme eines constanten Werths von L verbunden sind.

Abgesehen von dem im vorigen Artikel erörterten Zweifel, ob, bei den durch die Natur der Körper den elektrischen Scheidungskräften gesetzten Schranken, $L = 0$ werden könne, bleibt noch die Frage zu erörtern übrig, ob das für $L = 0$ genau bestimmte Product der beiden Ladungen e und e' constant erhalten werden könne, was angenommen werden muss, wenn L constant und zwar $= 0$ sein soll. Es fragt sich ferner, welchen Einfluss es haben würde, wenn eine der beiden Ladungen veränderlich wäre.

Der Werth von L hängt von den Ladungen e und e' des Cylinders und der Kugelschaale ab, und zwar kommt es, wenn der Werth von $L = 0$ constant sein soll, nicht blos auf die Grösse der Ladungen e und e' an, sondern auch auf die Art der Herstellung eines genau bestimmten Werthes.

Wäre auch die eine von beiden Ladungen, nämlich die Cylinderladung e, constant gegeben, so müsste doch die Ladung der Kugelschaale e' veränderlich bleiben, um durch ihr allmähliges Wachsthum dahin zu gelangen, dass $L=0$ würde. Die Ladung e' würde aber auch dann nicht plötzlich aufhören sich zu ändern, um von nun an vollkommen constant zu bleiben, sondern sie würde ohne Zweifel innerhalb gewisser Grenzen immer schwanken, weil die Herstellung der geforderten Ladung mit absoluter Genauigkeit gar nicht möglich ist, sondern nur innerhalb gewisser weiterer oder engerer Grenzen. Die Ladung e' würde folglich stets als eine Function der Zeit zu betrachten sein, welche für irgend einen kürzeren Zeitraum durch $e'=p+qt$ dargestellt werden kann.

Für diesen Fall, wo e' variabel ist, gilt nun die von Neumann S. 105 dieses Bandes aufgestellte Gleichung, nämlich:

$$T=P-U+Mga\vartheta+\text{Const.},$$

wo $T=\frac{M+m}{2}\cdot aa\vartheta'\vartheta'$, $P=\frac{ee'}{3\alpha cc}\cdot aa\vartheta'\vartheta'+\text{Const.}$ und $U=\frac{ee'}{\alpha}$, was also mit e' zugleich sich ändert.

Setzt man nun $e'=p+qt$ und $L=\left(\frac{M+m}{2}-\frac{ee'}{3\alpha cc}\right)aa$, so erhält man

$$L\vartheta'\vartheta'=Mga\vartheta-\frac{e}{\alpha}(p+qt)+\text{Const.},$$

oder, nach t differentiirt,

$$2L\vartheta''=Mga-\frac{eq}{\alpha\vartheta'},$$

woraus für $L=0$ folgt entweder $\vartheta''=\infty$ oder (wenn ϑ'' nicht unendlich ist), $\vartheta'=\frac{eq}{Mga\alpha}$.

Diese Alternative wird nun entschieden, wenn man beachtet, dass L mit der Zeit t variirt. Man rechne die Zeit t von dem Augenblicke an, wo nach der Gleichung $e'=p+qt$ $L=0$ sein würde, woraus folgt

$$\frac{M+m}{2}=\frac{ep}{3\alpha cc}.$$

Es ist alsdann nach Verlauf des Zeitelements δ

$$L=-\frac{eq\delta}{3\alpha cc}aa,$$

folglich, wenn dieser Werth für L in obiger Gleichung gesetzt wird,

$$2L\vartheta''=-\frac{2eq\delta}{3\alpha cc}aa\cdot\vartheta''=Mga-\frac{eq}{\alpha\vartheta'}.$$

Da nun für $L=0$ und $t=0$ bei endlichem Werthe von ϑ''

$$\vartheta'=\frac{eq}{Mga\alpha}$$

gefunden worden ist, und der Werth von ϑ' für $t=\delta$, wenn δ verschwindend klein ist, nicht merklich verschieden ist von dem Werthe von ϑ'' für $t = 0$, so ergiebt sich:

$$2L\vartheta'' = -\frac{2eq\delta}{3\alpha cc}a\alpha \cdot \vartheta'' = Mga - \frac{eq}{\alpha} \cdot \frac{Mga\alpha}{eq} = 0,$$

wonach $\vartheta'' = 0$ ist.

Dieser Werth $\vartheta'' = 0$ gilt nun, so klein auch q sein möge, er gilt folglich auch noch, wenn $q = 0$ ist.

Man sieht hieraus, wenn der Fall, dass $L = 0$ sei, nur der Uebergang ist von kleineren Werthen zu grösseren oder umgekehrt, dass die Beschleunigung ϑ'' für $L = 0$ keineswegs unendlich, sondern $= 0$ ist, wodurch alle von der behaupteten unendlichen Beschleunigung hergenommenen Einwände beseitigt werden.

12.
Schluss.

Schon bevor Neumann den im vorigen Artikel betrachteten Fall bemerkt und untersucht hatte, war von Helmholtz die Aufmerksamkeit auf einen ähnlichen Fall gerichtet worden, wo nämlich ein elektrischer Massenpunkt ε im Innern einer elektrischen Kugelfläche sich befindet, und es war von ihm das überraschend einfache Resultat gefunden worden, dass die Componenten der von der elektrischen Kugelfläche auf ε ausgeübten Kraft den Beschleunigungen x'', y'', z'', mit einem constanten Factor multiplicirt, gleich seien.

Es war ferner von Helmholtz (Borchardt's Journal, Bd. 75) aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung die Gleichung der lebendigen Kraft entwickelt worden, die sich für den Fall blos eines beweglichen Massenpunkts μ mit dem elektrischen Quantum ε in einem Raume ergiebt, welcher von einer gleichmässig mit Elektricität belegten Kugeloberfläche vom Halbmesser R begrenzt ist, nämlich die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\left(\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'\right)qq - V + C = 0\ ^{*)},$$

wo ε' das Quantum Elektricität auf der Flächeneinheit der Kugelober-

---

*) Der Factor von $\frac{1}{2}qq$ in obiger Gleichung ist nicht $\left(\mu - \frac{4\pi}{3cc}R\varepsilon e\right)$, wie Helmholtz angegeben, sondern $\left(\mu - \frac{8\pi}{3cc}R\varepsilon\varepsilon'\right)$. Vergl. Neumann, § 3 und 7 seiner Abhandlung in diesem Bande.

fläche, q die Geschwindigkeit des Massenpunkts μ in seiner Bahn s, also $q = \frac{ds}{dt}$, und V das Potential der nicht elektrischen Kräfte bezeichnet. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung durch Differentation nach s:

$$\mu q \frac{dq}{ds} - \left(\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds}\right) = 0,$$

wo $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds}$ die auf μ in Richtung der Bahn s wirkende elektrische Kraft, und $\frac{dV}{ds}$ die auf μ in derselben Richtung wirkende nicht elektrische Kraft ist.

Da nun $q = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punkts μ in seiner Bahn s bezeichnet und $q\frac{dq}{ds} = \frac{dq}{dt} = \frac{dds}{dt^2}$ die Beschleunigung von μ in seiner Bahn ist, so ergiebt sich, dass die aus obiger Gleichung gefundene, auf μ wirkende elektrische Kraft $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds}$ das Product dieser Beschleunigung $q\frac{dq}{ds}$ multiplicirt mit dem constanten Factor $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'$ ist, ganz in Uebereinstimmung mit dem oben angeführten Resultate.

Ist nun die auf μ wirkende elektrische Kraft der Beschleunigung $q\frac{dq}{ds}$ des Punkts μ proportional, auf welchen zwei Kräfte wirken, nämlich ausser der angegebenen elektrischen Kraft $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds}$, die nicht elektrische Kraft $\frac{dV}{ds}$; so leuchtet ein, dass $q\frac{dq}{ds}$ durch Division der Summe dieser beiden Kräfte mit μ erhalten wird, nämlich:

$$q\frac{dq}{ds} = \frac{\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds}}{\mu},$$

woraus gefunden wird

$$q\frac{dq}{ds} = \frac{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{dV}{ds}}{1 - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'}.$$

Substituirt man diesen Werth für $q\frac{dq}{ds}$ im Ausdrucke der auf μ wirkenden elektrischen Kraft, so erhält man einen von der Beschleunigung unabhängigen Ausdruck dieser Kraft, nämlich

$$\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds} = \frac{\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'}{\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{ds},$$

woraus man leicht erkennt, dass diese elektrische Kraft in der Bahn s nach derselben Seite gerichtet ist, wie die nicht elektrische Kraft $\frac{dV}{ds}$, so lange als $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' < \mu$ ist; dass sie aber die entgegengesetzte

Richtung hat, sobald als $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' > \mu$ wird. Während aber $\frac{8\pi}{3cc} R\varepsilon\varepsilon'$, indem es wächst, $= \mu$ wird, wächst gleichzeitig die elektrische Kraft stetig bis $+\infty$, springt alsdann plötzlich über von $+\infty$ zu $-\infty$, und wächst mit $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'$, was $> \mu$ geworden, wieder stetig von $-\infty$ bis zu 0. Wenn dagegen $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'$, indem es abnimmt, $= \mu$ wird, nimmt gleichzeitig die elektrische Kraft stetig bis $-\infty$ ab, springt alsdann plötzlich von $-\infty$ zu $+\infty$, und nimmt, nachdem $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' < \mu$ geworden, wieder stetig ab, von $+\infty$ bis zu 0.

Sowohl das Wachsthum einer solchen Kraft ins Unendliche, als auch der Wechsel ihrer Richtung, im Augenblicke, wo sie unendlich gross geworden ist, könnte nun wohl als eine Verletzung der in der Natur sonst herrschenden Stetigkeit erscheinen und zur Bestreitung allgemeiner Gültigkeit des Gesetzes, woraus solche Stetigkeitsverletzungen gefolgert werden, angeführt werden. Indessen lässt sich leicht beweisen, dass aus jenem Gesetze diese Folgerungen mit Recht gar nicht gezogen werden können, weil nämlich diese Folgerungen noch an ganz unerfüllbare Bedingungen geknüpft sind, wie schon in Poggendorff's Annalen Bd. 156, Seite 29 bemerkt worden*), was einer nähern Nachweisung zu bedürfen scheint, die hier schliesslich noch gegeben werden soll.

Die Beschleunigung von μ durch die oben angeführte elektrische und nicht elektrische Kraft hat sich aus der von Helmholtz aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Gleichung ergeben, nämlich:

$$q\frac{dq}{ds} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'},$$

*) Es heisst an der angeführten Stelle: Ein solcher Sprung in der Grösse und Richtung der elektrischen Kraft, nämlich von $+\infty$ zu $-\infty$, tritt wirklich nach dem Gesetze gar nicht ein, weil nämlich die Masse μ mit ihrer Ladung e, in Folge der immer wachsenden Beschleunigung, gar nicht im Innern des Kugelraums so lange verweilen kann, bis $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' = \mu$ geworden ist, sondern schon früher bis an die vom festen Isolator gebildete Kugeloberfläche getrieben worden sein müsste, durch deren Widerstand Ruhe wiederhergestellt worden wäre, und die in der Rechnung vorausgesetzten Verhältnisse gar nicht mehr stattfinden.

wo die Beschleunigung von μ, statt mit $q\frac{dq}{ds}$, auch mit $\frac{dq}{dt}$ oder $\frac{dds}{dt^2}$ bezeichnet werden kann.

Diese Beschleunigung ist unendlich gross, wenn der Werth von $\varepsilon' = \frac{3cc\mu}{8\pi R\varepsilon}$ ist. Die Bestimmung dieses Werths von ε', welcher mit η bezeichnet werden soll, setzt hiernach voraus, dass der Werth von ε schon vorher bestimmt sei. Es könnte zwar scheinen, dass auch umgekehrt η vorher bestimmt werden könnte, indem die Bestimmung von ε abhängig von der Kenntniss von η gemacht würde; indess leuchtet ein, dass, nachdem die Kugelschaale geladen und η bestimmt worden wäre, keine Ladung im Innern der Kugel, also auch nicht die Ladung ε des Theilchens μ, mehr vorgenommen werden könnte.

Ist also die Ladung ε des Theilchens μ im Innern der Kugel gegeben, so kann die Ladung der Kugeloberfläche, bei welcher die Kraft unendlich wird, voraus berechnet werden, nämlich für jede Flächeneinheit, wie schon angegeben worden ist,

$$\eta = \frac{3cc}{8\pi} \cdot \frac{\mu}{R\varepsilon},$$

es würde aber die wirkliche H e r s t e l l u n g dieser Ladung nothwendig mit einem a l l m ä h l i g e n Wachsthum der Ladung von $\varepsilon' = 0$ bis $\varepsilon' = \eta$ verbunden sein.

Dies vorausgesetzt, bezeichne man die Zeit, wo $\varepsilon' = \eta$ geworden ist, mit $t = 0$, und die Zeit, wo $\varepsilon' = 0$ war, mit $t = -\theta$. Setzt man nun ferner das Wachsthum der Ladung ε' der Zeit proportional, nämlich

$$\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{t}{\theta}\right),$$

und nimmt man, zur Vereinfachung der Betrachtung, den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkt der Bahn s, wo das Theilchen μ zur Zeit $t = -\theta$ (d. i. zur Zeit, wo $\varepsilon' = 0$ ist) sich in Ruhe befindet, also mit $\varepsilon' = 0$ zugleich auch $s = 0$ und $q = 0$ ist, und nimmt man endlich die auf μ wirkende n i c h t e l e k t r i s c h e Kraft $\frac{dV}{ds} = a$ c o n s t a n t an; so ergiebt sich aus der angeführten Gleichung, nämlich aus

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'},$$

nach den Substitutionen $\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{t}{\theta}\right)$, $\mu = \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\eta$ und $\frac{dV}{ds} = a$,

$$dq = -\frac{a\theta}{\mu} \cdot \frac{dt}{t}.$$

Das Integral dieser Gleichung kann geschrieben werden:

$$q = -\frac{a\theta}{2\mu} \cdot \log c^2 t^2.$$

Hieraus folgt, da $q = 0$ für $t = -\theta$ ist, $c^2 = \frac{1}{\theta^2}$.

Substituirt man diesen Werth für c^2 in der vorhergehenden Gleichung, und setzt $\frac{ds}{dt}$ für q, so erhält man

$$ds = -\frac{a\theta}{2\mu} \cdot \log \frac{tt}{\theta\theta} \cdot dt.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$s = \frac{a\theta t}{\mu}\left(1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right) + C.$$

Da nun $s = 0$ für $t = -\theta$ ist; so ergiebt sich $C = \frac{a\theta\theta}{\mu}$; folglich

$$s = \frac{a\theta\theta}{\mu}\left[1 + \frac{t}{\theta}\left(1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right)\right].$$

Die beiden gefundenen Formeln, welche, wenn die auf μ wirkende nicht elektrische Kraft $a = g\mu$ gesetzt wird, geschrieben werden können:

$$q = -\frac{g\theta}{2} \cdot \log\frac{tt}{\theta\theta},$$

$$s = g\theta\theta\left[1 + \frac{t}{\theta}\left(1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right)\right],$$

lassen sich nun leicht in tabellarischer Uebersicht auf folgende Weise darstellen, worin e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet:

$\frac{t}{\theta}$	$\frac{s}{g\theta\theta}$	$\frac{q}{g\theta}$	$\frac{\varepsilon'}{\eta} = \left(1 + \frac{t}{\theta}\right)$
1	0	0	0
$-e^{-1}$	$1 - 2e^{-1}$	1	$1 - e^{-1}$
$-e^{-2}$	$1 - 3e^{-2}$	2	$1 - e^{-2}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
0	1	∞	1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$+e^{-2}$	$1 + 3e^{-2}$	2	$1 + e^{-2}$
$+e^{-1}$	$1 + 2e^{-1}$	1	$1 + e^{-1}$
$+1$	2	0	2
$+e$	1	-1	$1 + e$
$+e^2$	$1 - e^2$	-2	$1 + e^2$

Man sieht aus dieser Uebersicht, dass das Theilchen μ, welches durch die von der nicht elektrischen Kraft herrührenden Beschleunigung g in der Zeit θ den Weg $\frac{1}{2}g\theta\theta$ zurückgelegt haben würde, unter Mitwirkung der elektrischen Kraft den doppelten Weg macht, und, während es ohne elektrische Kraft die Geschwindigkeit $g\theta$ erreicht hätte, mit elektrischer Kraft zu unendlicher Geschwindigkeit gelangt.

Mit dieser erlangten unendlich grossen Geschwindigkeit legt es aber nicht das kleinste endliche Wegelement zurück, in Folge davon, dass die unendlich gross gewordene positive Beschleunigung plötzlich in unendlich grosse negative Beschleunigung umschlägt, und dass in Folge davon die Geschwindigkeiten gleich lange vor und nach diesem Augenblicke einander gleich sind, wonach also die Geschwindigkeit q zur Zeit $t = +\theta$ (d. i. nach Verlauf des Zeitraums 2θ vom Beginn der Bewegung an gerechnet) gleich der am Anfang zur Zeit $t = -\theta$, nämlich $q = 0$ ist, wobei der Weg s, wenn die Kugelschaale gross genug ist, dass s darin Platz findet, auch wieder um $g\theta\theta$ zugenommen haben würde, also $s = 2g\theta\theta$ geworden wäre. Die Ladung ε' würde dabei bis 2η gestiegen sein. Es würde aber von nun an, bei fortgesetztem Wachsthum der Zeit und der Ladung, die Entfernung s des Theilchens μ vom Kugelmittelpunkte schnell wieder abnehmen bis zu $s = 0$, und darauf negativ werden bis zu $s = -R$, wo das Theilchen μ gegen die Kugelschaale stossen würde, zur Zeit t, welche aus der Gleichung $-R = g\theta\theta\left[1 + \frac{t}{\theta}\left(1 - \frac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right)\right]$ bestimmt werden kann, und mit der Geschwindigkeit q, die, nachdem t bestimmt worden, $= \frac{g\theta}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}$ gefunden wird.

Es ist bisher, wie schon bemerkt, angenommen worden, dass der Kugelhalbmesser R grösser sei als der Maximum-Werth $2g\theta\theta$, welchen s zur Zeit $t = +\theta$ erreicht. Wäre R kleiner, so leuchtet von selbst ein, dass das Theilchen μ früher gegen die Kugelschaale stossen würde, nämlich in dem Augenblicke, wo $s = R$ geworden wäre, zur Zeit t, welche aus der Gleichung $R = g\theta\theta\left[1 + \frac{t}{\theta}\left(1 - \frac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right)\right]$, bestimmt werden könnte.

Es soll nun aber kein fortwährendes Wachsthum der elektrischen Ladung betrachtet werden, sondern der Fall, wo die Ladung, nachdem sie den Werth η etwas überstiegen hat, constant bleibt. Es werde z. B. diese constante Ladung $\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)$ angenommen, wobei μ die

Geschwindigkeit $q = 2g\theta$ besitzt und in der Entfernung $s = \left(1 + \frac{3}{ee}\right) g\theta\theta$ vom Kugelmittelpunkte sich befindet.

Setzt man demnach in der Helmholtz'schen Gleichung

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'}$$

den Werth $\eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)$ für ε', also

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3cc} R\varepsilon\eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)},$$

und setzt hierin wieder wie früher $\frac{dV}{ds} = a$ und $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\eta = \mu$; so erhält man die Differentialgleichung

$$dq = -\frac{aee}{\mu} \cdot dt,$$

und durch Integration derselben

$$q = -\frac{aee}{\mu} t + C.$$

Wird nun die Zeit von dem Augenblicke an gerechnet, wo $\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)$ geworden war, so ist für $t = 0$ der Werth von $q = 2g\theta$ schon oben gefunden worden, folglich, wie oben $a = g\mu$ gesetzt,

$$C = 2g\theta,$$

also

$$q = 2g\theta - eegt,$$

oder

$$ds = (2g\theta - eegt)\, dt,$$

woraus durch Integration

$$s = 2g\theta t - \frac{ee}{2} gtt + C'.$$

Nun war, wenn die Zeit von dem Augenblicke an gerechnet wird, wo $\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)$ geworden war, für $t = 0$ der Werth von $s = \left(1 + \frac{3}{ee}\right) g\theta\theta$ gefunden worden, folglich

$$C' = \left(1 + \frac{3}{ee}\right) g\theta\theta,$$

also

$$s = \left(1 + \frac{3}{ee}\right) g\theta\theta + 2g\theta t - \frac{ee}{2} g \cdot tt.$$

Diese Formel nebst der vorhergehenden

$$q = 2g\theta - eegt$$

lassen sich nun ebenfalls leicht so übersichtlich, wie die früheren Formeln für s und q, tabellarisch darstellen, wie folgt:

$\frac{t}{\theta}$	$\frac{s}{g\theta\theta}$	$\frac{q}{g\theta}$	$\frac{\varepsilon'}{\eta}$
0	$1 + \frac{3}{ee}$	2	$1 + \frac{1}{ee}$
1	$3 + \frac{3}{ee} - \frac{ee}{2}$	$2 - ee$	$1 + \frac{1}{ee}$
2	$5 + \frac{3}{ee} - 2ee$	$2 - 2ee$	$1 + \frac{1}{ee}$

Diese Tafel lässt sich leicht weiter fortsetzen; man ersieht aber schon hieraus, dass von $t = \frac{2\theta}{ee}$ an, nachdem die Ladung constant geworden, die Entfernung s des Theilchens μ vom Kugelmittelpunkte abnimmt und sehr bald negativ wird, bis endlich das Theilchen μ, wenn $s = -R$ geworden, gegen die Kugelschaale stösst, zur Zeit t und mit der Geschwindigkeit q, welche aus den beiden Gleichungen

$$-R = \left(1 + \frac{3}{ee}\right) g\theta\theta + 2g\theta t - \frac{ee}{2} gtt,$$

$$q = 2g\theta - eegt$$

bestimmt werden können.

Man sieht aus dieser Darstellung des ganzen Processes in seinem Zusammenhange, dass keine von den »ungereimten oder absurden« Consequenzen, durch welche Helmholtz das aufgestellte Grundgesetz hat widerlegen wollen, wirklich eintritt.

Zwar ist hiebei noch nicht der Helmholtz'sche Einwand (A) in Borchardt's Journal, Bd. 72 S. 61 und Bd. 75 S. 38 erörtert worden, der in der Behauptung besteht, dass das aufgestellte Grundgesetz der elektrischen Wirkung, oder vielmehr die aus diesem Gesetz entspringenden Kirchhoff'schen Differentialgleichungen, zu einer labilen Gleichgewichtslage der elektrischen Materie, respective zu einer Bewegung dieser Materie hinführe, deren Geschwindigkeit mit der Zeit ins Unendliche wachse. Aber es hat Neumann schon in den Ber. d. K. S. Ges. Oct. 1871 S. 477 nachgewiesen, dass die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen, ausser auf jenem Grundgesetze, noch auf mancherlei andern accessorischen Voraussetzungen beruhen, und dass also jenes Gesetz durch ein gegen diese Differentialgleichungen im Allgemeinen erhobenes Bedenken nicht erschüttert werden könne.

Nach dieser schon von Neumann gegebenen Berichtigung, für welche besonders auf die von Neumann in seiner Abhandlung S. 128—149 dieses Bandes gegebenen näheren Erörterungen zu verweisen ist, bedarf es keiner weitern Erörterung dieses Einwands, die, da sie hauptsächlich doch nur jene accessorischen Voraussetzungen betreffen würde, ganz ausserhalb der der vorliegenden Abhandlung gesetzten Schranken liegen würde.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.