Elementare

Begründung der Axonometrie.

Nach einer brieflichen Mittheilung

des

K. Sardinischen Bergingenieurs Herrn Quintino Sella

in Turin

an Herrn Prof. Weisbach

bearbeitet

von

Dr. August Junge,

Professor in Freiberg.

(Separat-Abdruck aus der Zeitschrift „Civilingenieur", Bd. III, Heft 3.)

Sächs. Landes-Bibl.

Freiberg.

Buchhandlung J. G. Engelhardt.

(Bernhard Thierbach.)

1857.

Mathem.

Geometr.

Sächsische Landesbibliothek –
Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/2
gefördert von der
Deutschen Forschungsgemeinschaft

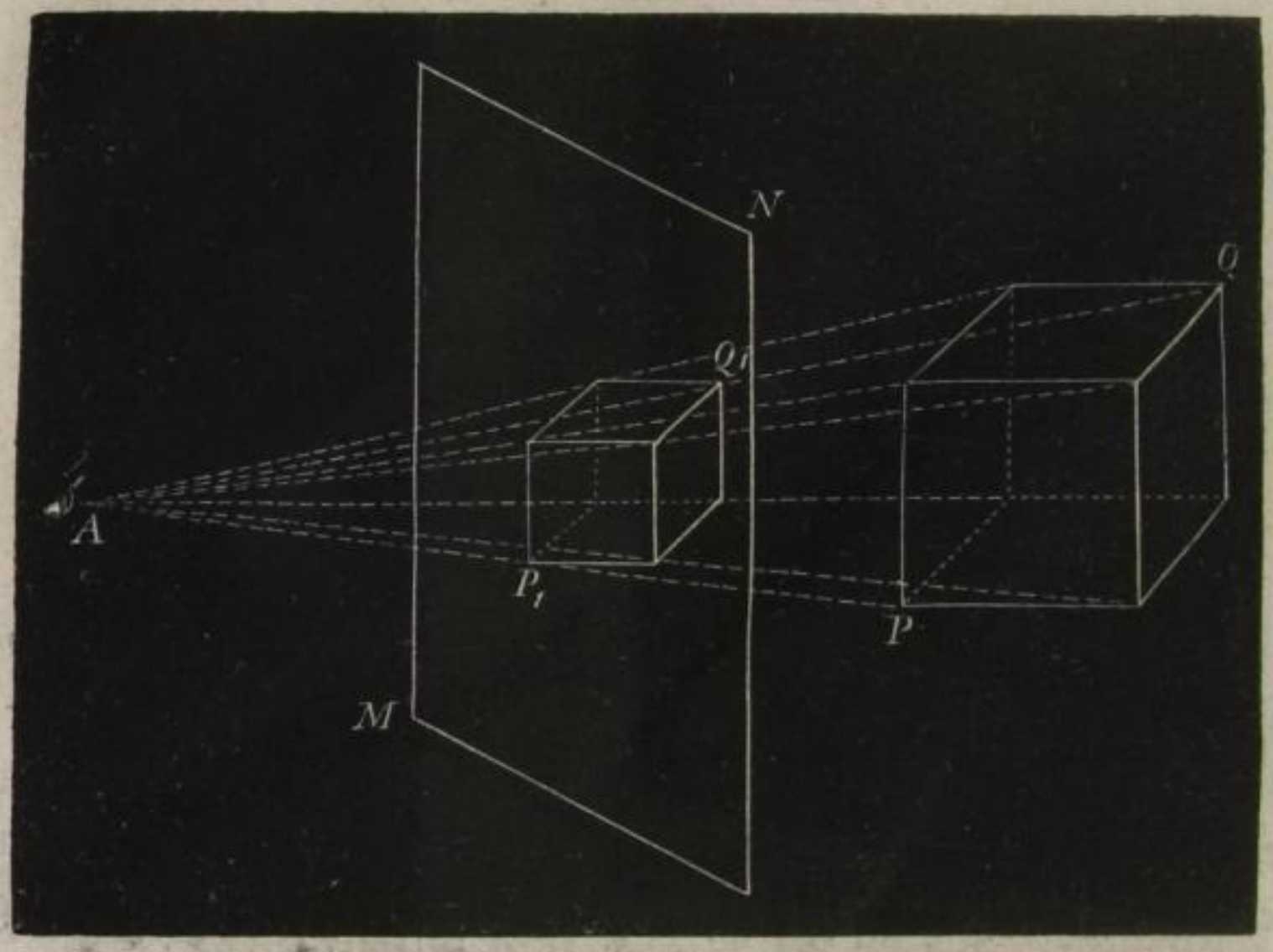
Die Axonometrie ist in der Zeitschrift „Civilingenieur", Bd. II, S. 236 u. ff., von ihrem Begründer, dem Herrn Prof. Weisbach, einer neuen Bearbeitung unterworfen worden, welche bei dem Leser die Lehren der Trigonometrie und der analytischen Geometrie als bekannt voraussetzt. Es liegt in der Natur der Sache, daß das axonometrische Zeichnen oft von Personen wird geübt werden müssen, bei denen tiefere mathematische Kenntnisse nicht vorausgesetzt werden können, und es dürfte daher neben der soeben erwähnten Bearbeitung der Axonometrie eine elementare Behandlung desselben Gegenstandes gewiß Vielen nicht unwillkommen sein. In dem Nachfolgenden soll der Versuch einer solchen möglichst populären Darstellung der Axonometrie gemacht werden. Als Grundlage hierzu dient uns eine briefliche Mittheilung des Herrn Quintino Sella, welcher Gelegenheit hatte, im Königl. technischen Institute zu Turin mit dem besten Erfolge die Axonometrie Schülern vorzuführen, deren geometrische und algebraische Kenntnisse höchst beschränkt waren, und die von Trigonometrie und analytischer Geometrie noch keine Ahnung hatten.

§. 1. Ein körperlicher Gegenstand PQ, Fig. 1, läßt sich in folgender Weise auf einer Ebene bildlich darstellen. Man nimmt an, daß der darzustellende Gegenstand PQ von irgend einem Punkte A aus betrachtet werde, und denkt sich vor dem

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/3 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Beobachter eine Ebene MN als sogenannte Bildebene aufgestellt. Hierauf zieht man von dem Auge des Beobachters

Fig. 1.



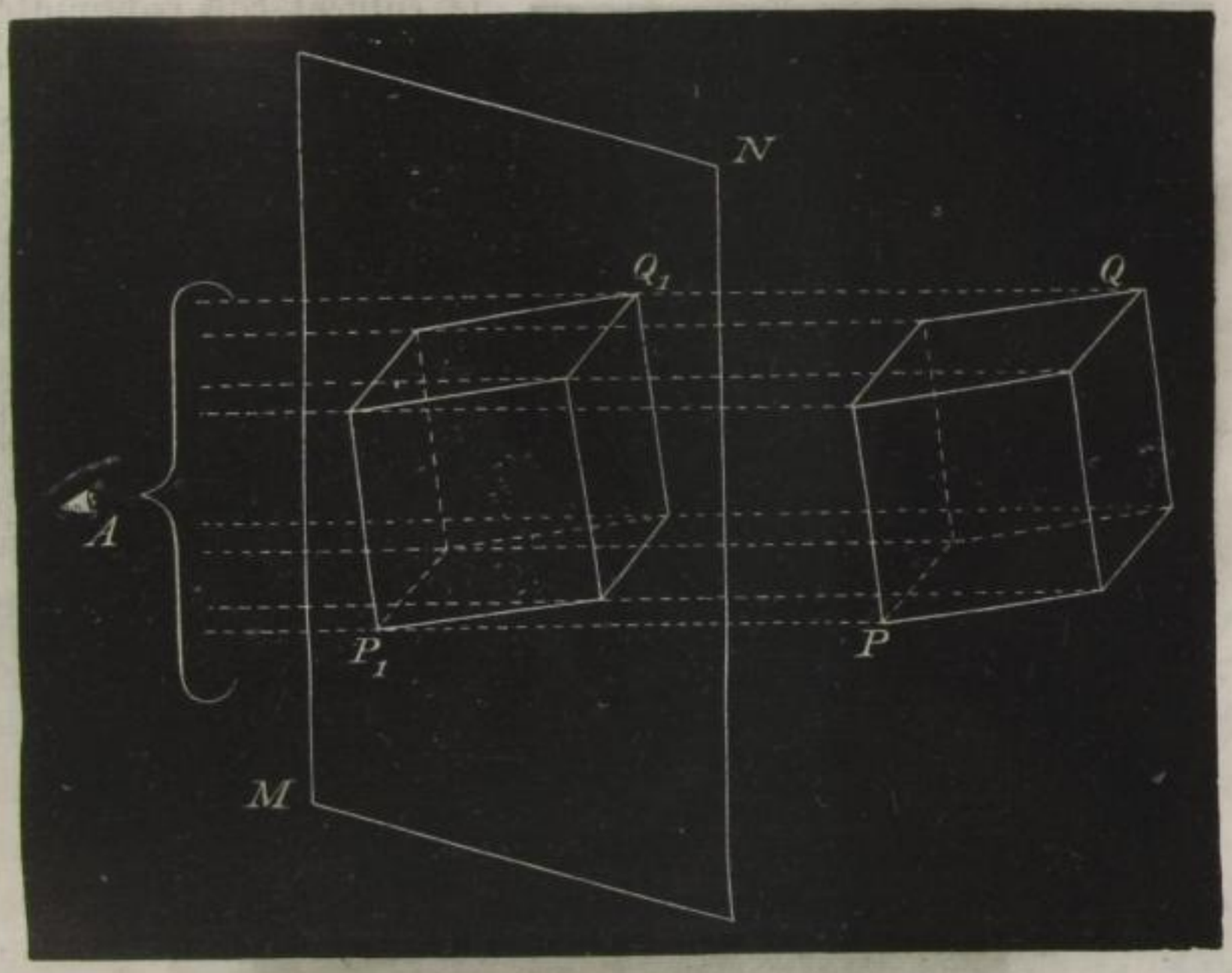
aus nach jedem Punkte des Objectes Sehlinien, wie AP und AQ. Die Durchschnittspunkte P_1 und Q_1 dieser Sehlinien mit der Bildebene MN geben die Bilder der betreffenden Punkte P und Q. Die sämmtlichen Bilder der einzelnen Punkte geben das Gesammtbild des darzustellenden Gegenstandes. Dieses Gesammtbild heißt ein perspectivisches. Dasselbe macht auf das Auge des Beobachters denselben Eindruck, wie der dargestellte Gegenstand selbst.

Von der Perspective unterscheidet sich die Aronometrie vorzugsweise dadurch, daß bei derselben der Beobachtungspunkt in unendliche Entfernung hinausgerückt wird (Fig. 2). Die Sehlinien sind daher bei derselben sämmtlich unter sich als parallel anzunehmen und es wird außerdem noch vorausgesetzt, daß dieselben auf der Bildebene senkrecht stehen. Da sich ein Gegenstand nicht aus unendlicher Entfernung betrachten läßt, so kann das aronometrische Bild allerdings auf das Auge nicht genau denselben Eindruck machen, wie der dargestellte

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/4
gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Gegenstand selbst. Dagegen aber gewährt die aronometrische Zeichnung den Vortheil, daß in ihr, wie wir später zeigen

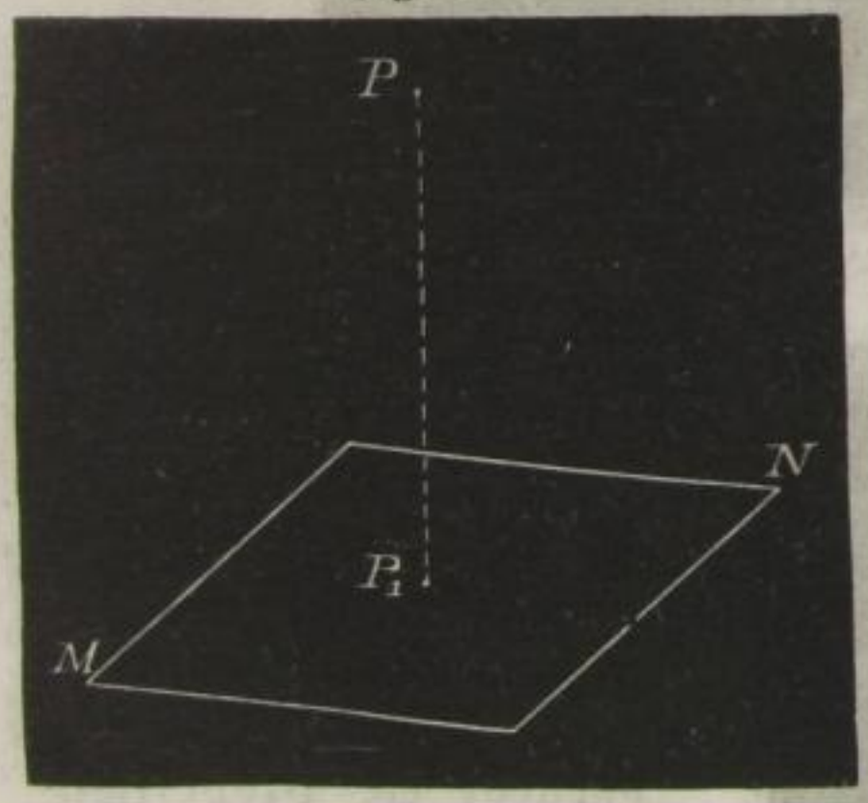
Fig. 2.



werden, alle Dimensionen eines Objectes mit Leichtigkeit dargestellt werden können. (Vergl. §. 10.)

§. 2. Bei der Aronometrie nennt man die Bildebene die Projectionsebene, die Sehlinien die Projectionslinien oder projicirenden Linien und die erhaltenen Bilder die Projectionen der betreffenden Gegenstände. Die Projection eines Punktes P, Figur 3, ist jedenfalls wieder ein Punkt P_1. Wenn eine gerade Linie PQ, Figur 4, auf der Projections-

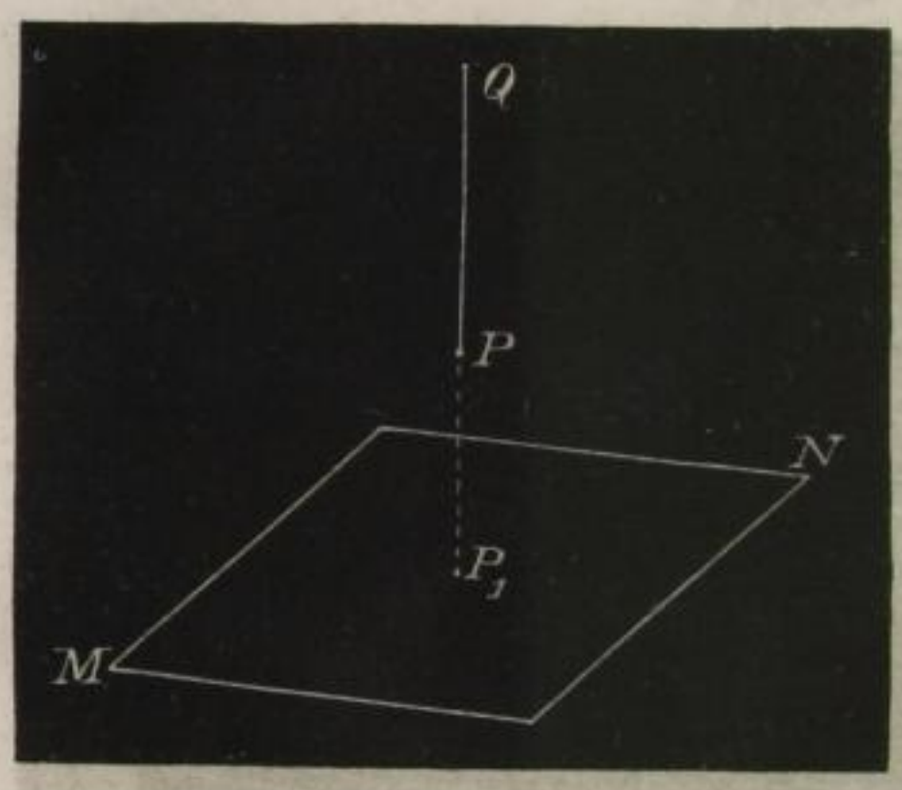
Fig. 3.



ebene senkrecht steht, so ist ihre Projection ein Punkt P_1. Wenn eine gerade Linie PQ, Fig. 5, gegen die Projections-

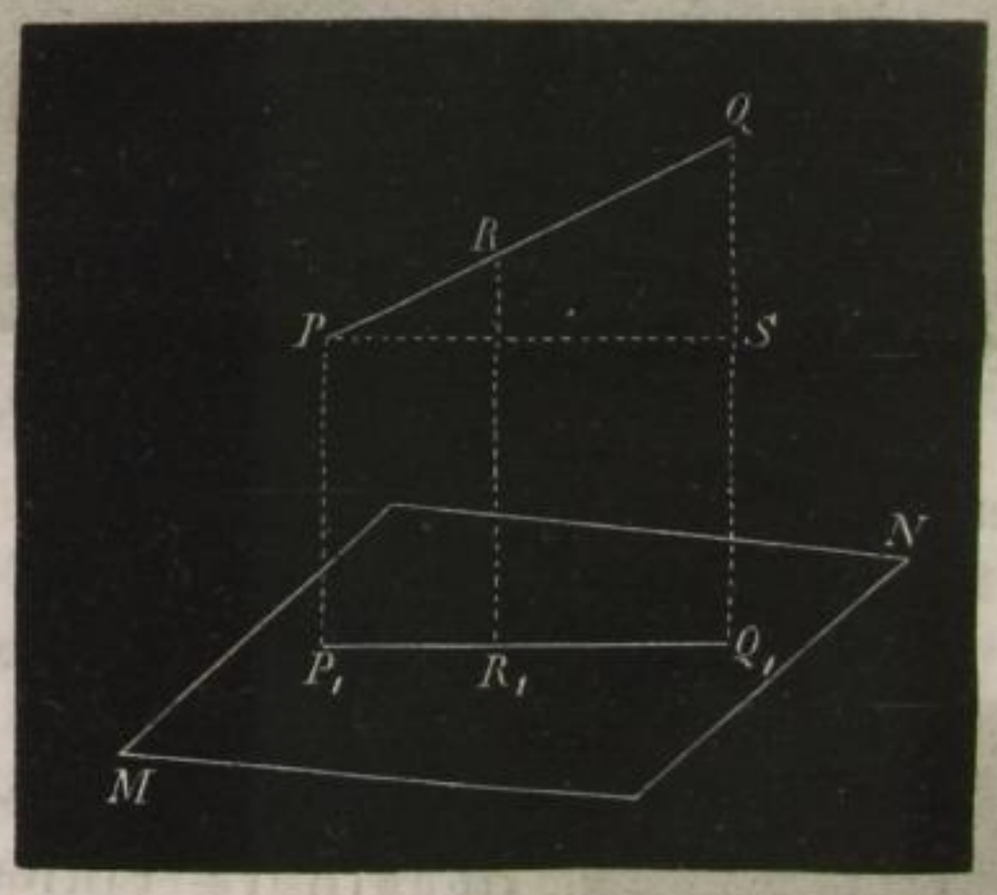
ebene geneigt ist, so ist die Projection eine gerade Linie $P_1 Q_1$, die kleiner ist, als die projicirte Linie; denn zieht man

Fig. 4.



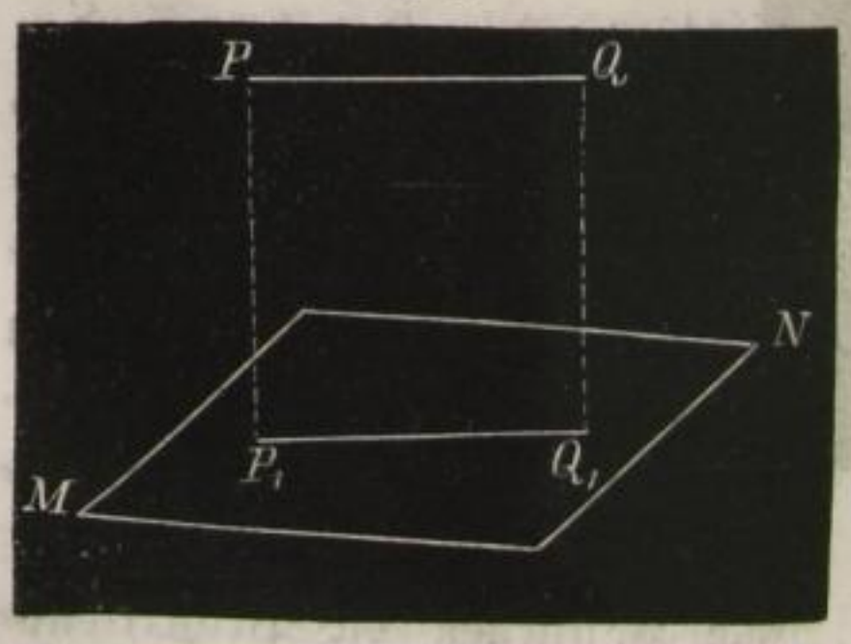
PS parallel mit $P_1 Q_1$, so entsteht das rechtwinkelige Dreieck PSQ, in welchem die Kathete PS kleiner ist, als die Hypotenuse PQ. Es ist aber $P_1 Q_1 = PS$, folglich ist auch $P_1 Q_1 < PQ$. Wenn eine gerade Linie PQ, Fig. 6, mit der Projectionsebene parallel ist, so ist die Projection eine

Fig. 5.



gerade Linie $P_1 Q_1$, die gleich ist der projicirten Linie PQ. Einzelne Theile einer projicirten Linie PQ, Fig. 5, verhalten sich zu einander, wie ihre Projectionen; denn es besteht offenbar die Proportion $PR : RQ = P_1 R_1 : R_1 Q_1$.

Fig. 6.

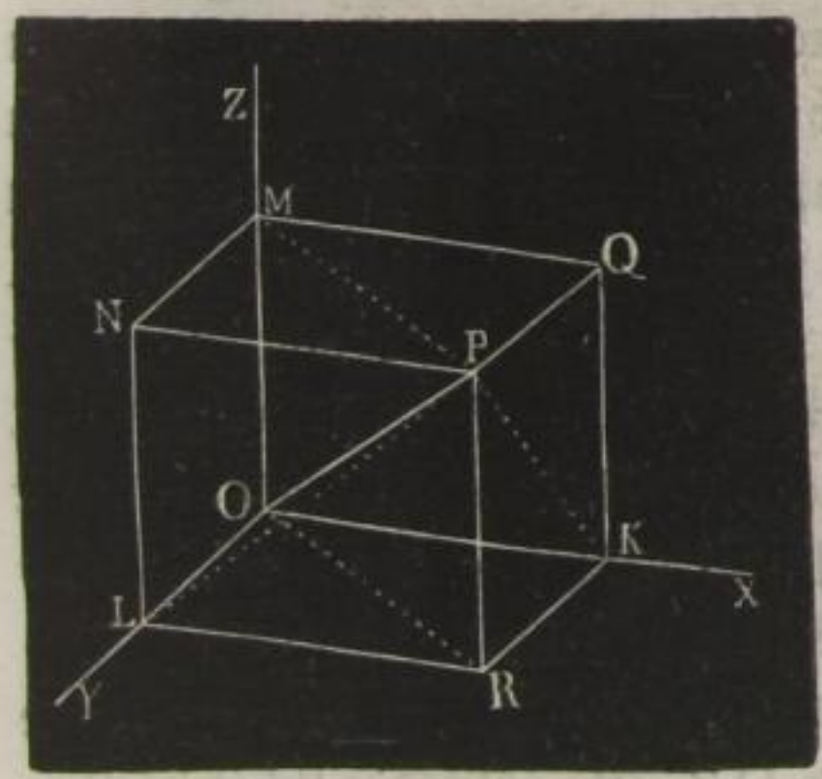


Die Projection einer ebenen Figur ist entweder

wieder eine ebene Figur oder eine gerade Linie, und zwar findet das Letztere statt, wenn die projicirte Figur auf der Projectionsebene senkrecht steht. Die Projection eines Körpers PQ, Fig. 2, ist jeder Zeit eine ebene Figur $P_1 Q_1$.

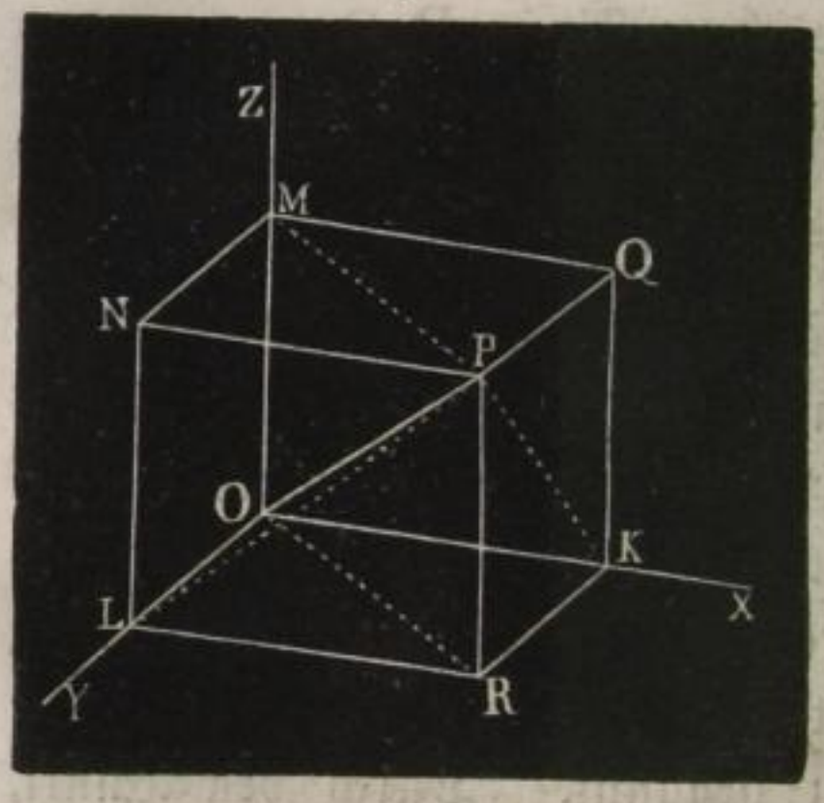
§. 3. Die Lage eines Punktes im Raume kann man in folgender Weise bestimmen. Man nimmt eine horizontale Ebene an und stellt darauf zwei senkrechte Ebenen, die sich selbst unter einem rechten Winkel durchschneiden. Diese Ebenen nennt man Coordinatenebenen und die drei geraden Linien, in welchen sich dieselben durchschneiden, Coordinatenaxen. Der Punkt, in welchem sich sowohl die Coordinatenaxen, als auch die Coordinatenebenen durchschneiden, heißt der Ursprung oder auch der Anfangspunkt der Coordinaten. Das Ganze wird ein Coordinatensystem genannt. Durch den Punkt, dessen Lage bestimmt werden soll, legt man hierauf drei neue Ebenen, welche auf den Coordinatenaxen und folglich auch auf den Coordinatenebenen senkrecht stehen. Diese so erhaltenen sechs Ebenen bilden ein rechtwinkeliges Parallelepiped, in welchem der Punkt, dessen Lage bestimmt werden soll, diejenige Ecke ist, welche dem Ursprunge der Coordinaten gegenüber liegt, und man erkennt nun leicht, daß durch die drei Kanten dieses rechtwinkeligen Parallelepipeds die Lage unseres Punktes in Bezug auf das angenommene Coordinatensystem vollständig bestimmt wird. Die drei Kanten des rechtwinkeligen Parallelepipeds werden die Coordinaten des betreffenden Punktes genannt. Dieselben sind jedenfalls so groß, als die Entfernungen des Punktes von den drei Coordinatenebenen. Zur weiteren Veranschaulichung bedienen wir uns der Fig. 7. XOY, XOZ und YOZ sollen die erwähnten drei Coordinatenebenen vorstellen, gegen welche die Lage eines Punktes P bestimmt werden soll. Der Punkt O ist der Ursprung der

Fig. 7.



Coordinaten und die Durchschnittslinien OX, OY und OZ sind die Coordinatenaxen. Wir wollen die Ebene XOY als horizontal, die Ebenen XOZ und YOZ dagegen als vertical voraussetzen. Hieraus ergiebt sich von selbst für OX und OY die horizontale und für OZ die verticale Lage. Wir legen nun durch den Punkt P drei neue Ebenen, nämlich PQKR senkrecht auf OX, PNLR senkrecht auf OY und PQMN senkrecht auf OZ. Hierdurch entsteht

Fig. 7.



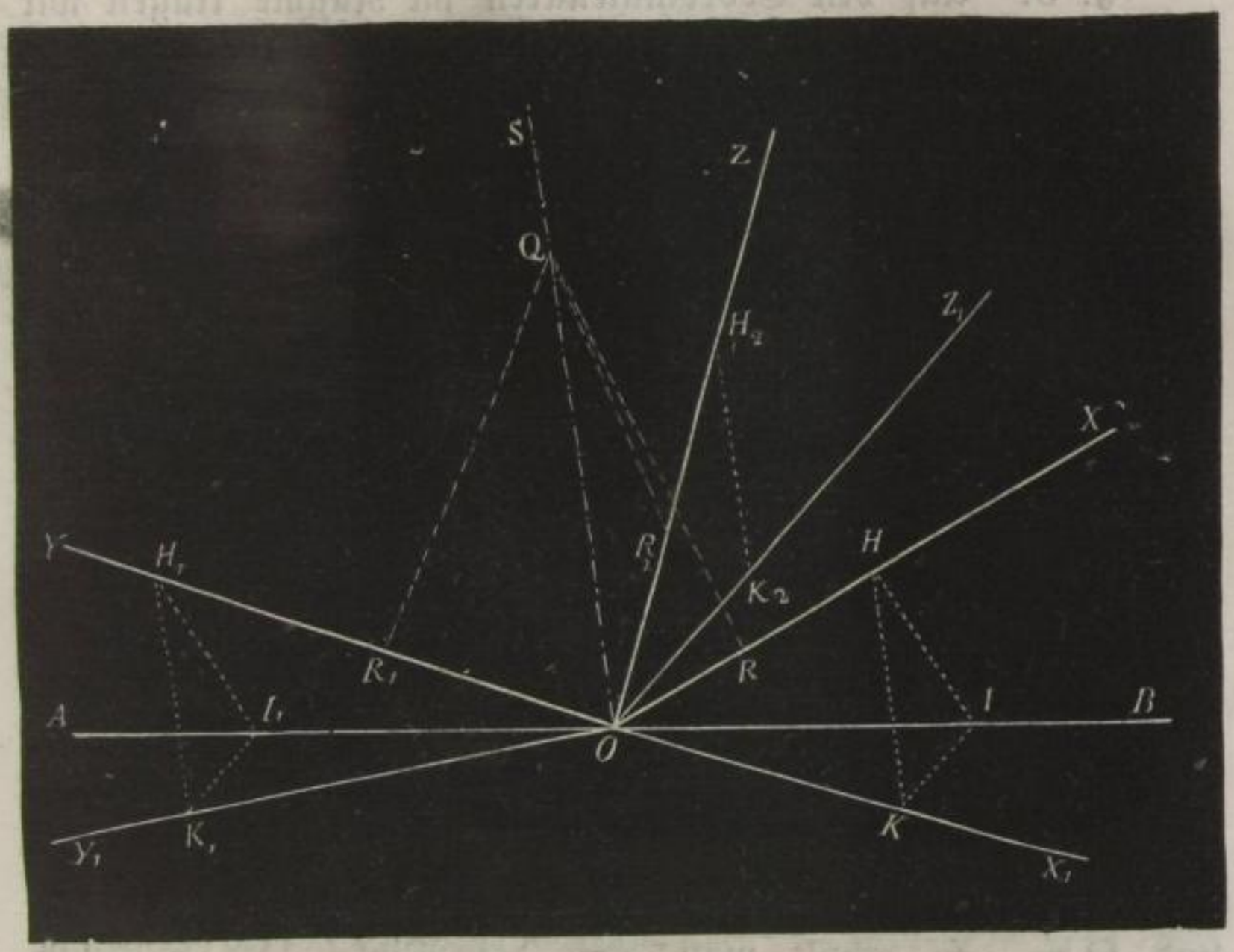
das rechtwinkelige Parallelepiped OKRLNMQP und es ist die Lage des Punktes P gegen die angenommenen drei Coordinatenebenen durch die drei Kanten dieses Parallelepipeds vollständig bestimmt; denn man gelangt z. B. jedenfalls zu dem Punkte P, wenn man die drei Kanten OK, KR und RP der Reihe nach durchläuft. Es ist zu beachten, daß jede Coordinate des Punkes P in dem erwähnten Parallelepiped viermal vorkommt; denn es ist 1. OK = LR = NP = MQ, 2. OL = KR = QP = MN und 3. OM = KQ = RP = LN. Diese drei Coordinaten des Punktes P liegen, wie die Figur zeigt, der Reihe nach in den drei Coordinatenaxen OX, OY und OZ oder in Richtungen, welche mit diesen Coordinatenaxen parallel sind, und man bezeichnet dieselben daher der Reihe nach mit x, y und z, so daß man hat OK = x, OL = y und OM = z. Da die Coordinaten x, y und z der Reihe nach gleich den Linien PN, PQ und PR sind, so geben dieselben zugleich, wie oben bereits bemerkt wurde, die Entfernungen des Punktes P von den Coordinatenebenen YOZ, XOZ und XOY an.

§. 4. Wir denken uns jetzt im Raume drei rechtwinkelige Coordinatenaxen OX, OY und OZ, Fig. 8, wie wir dieselben in dem vorhergehenden Paragraphen beschrieben haben. Durch den Ursprung O legen wir eine beliebige gerade Linie OS,

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/8 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

welche die Beobachtungslinie heißen soll, weil wir annehmen wollen, daß unsere Coordinatenaxen in der Richtung

Fig. 8.



dieser Linie aus unendlicher Entfernung betrachtet werden. Wenn wir nun rechtwinkelig auf diese Beobachtungslinie durch den Ursprung O der Coordinaten die Bild- oder Projectionsebene legen, so ist klar, daß sich auf dieser Projectionsebene die drei Coordinatenaxen OX, OY und OZ in bestimmten Lagen OX_1, OY_1 und OZ_1 projiciren und zwar hängt die Lage dieser Projectionen der Coordinatenaxen von den Winkeln XOS, YOS und ZOS ab, welche die Beobachtungslinie OS, mit welcher alle projicirenden Linien parallel sind, mit den Coordinatenaxen bildet. Diese drei Winkel sind aber die Complemente von den Winkeln XOX_1, YOY_1 und ZOZ_1, welche die Coordinatenaxen OX, OY und OZ mit der Projectionsebene oder ihren Projectionen OX_1, OY_1 und OZ_1 bilden; denn es ist $XOS + XOX_1 = 90^0$, $YOS + YOY_1 = 90^0$ und $ZOS + ZOZ_1 = 90^0$.

Man kann daher auch sagen, daß die Lage der Projectionen der Coordinatenaxen von den Winkeln abhängt, welche

die Coordinatenaren mit ihren Projectionen oder mit der Projectionsebene bilden.

§. 5. Auf den Coordinatenaren im Raume tragen wir drei gleiche Längen $OH = OH_1 = OH_2$ auf, die wir gleich der Einheit, etwa gleich einem Fuß, setzen wollen. Diese drei gleichen Längen projiciren sich mit den Coordinatenaren zugleich auf der Projectionsebene, und zwar ist OK die Projection von OH, OK_1 die Projection von OH_1 und OK_2 die Projection von OH_2. Als projicirende Linien der Endpunkte H, H_1 und H_2 erscheinen die Linien HK, H_1K_1 und H_2K_2. Wenn die Projectionen OK, OK_1 und OK_2 der Einheit bekannt sind, so lassen sich aus denselben die Winkel ableiten, welche die Coordinatenaren OX, OY und OZ mit ihren Projectionen OX_1, OY_1 und OZ_1 oder mit der Projectionsebene bilden; denn wenn man ein rechtwinkeliges Dreieck OKH bildet, in welchem $OH = 1$ als Hypotenuse und OK als eine Kathete vorkommt, so ist HOK der Winkel, welchen die Coordinatenare OX mit ihrer Projection OX_1 bildet. Verfährt man in derselben Weise mit den Größen OK_1 und OK_2, so erhält man auch die Winkel H_1OK_1 und H_2OK_2, welche die Coordinatenaren OY und OZ mit ihren Projectionen OY_1 und OZ_1 bilden. Da von diesen Winkeln die Lage der Projectionen der Coordinatenaren abhängt, so ist die Lage dieser Projectionen auch durch die Größen OK, OK_1 und OK_2, nämlich durch die Projectionen der Einheit gegeben.

§. 6. Auf der Beobachtungslinie OS tragen wir jetzt ebenfalls eine der Einheit gleiche Länge $OQ = OH = OH_1 = OH_2$ auf und ziehen von Q aus auf die Coordinatenaren die Senkrechten QR, QR_1 und QR_2. Man begreift leicht, daß OR, OR_1 und OR_2 als die Kanten eines rechtwinkeligen Parallelepipedes betrachtet werden können, in welchem $OQ = 1$ die Diagonale ist, und man hat daher nach einem bekannten Satze

$$\overline{OR}^2 + \overline{OR_1}^2 + \overline{OR_2}^2 = \overline{OQ}^2 = 1.$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/10 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Es ist auch

$$\Delta\, ORQ \cong \Delta\, OHK,$$
$$\Delta\, OR_1Q \cong \Delta\, OH_1K_1 \text{ und}$$
$$\Delta\, OR_2Q \cong \Delta\, OH_2K_2,$$

denn man hat

$$\begin{array}{c} OQ = OH \\ ROQ = KHO \\ ORQ = OKH \\ \hline \Delta\, ORQ \cong \Delta\, OHK. \end{array}$$

In derselben Weise kann die Congruenz der beiden anderen Paare von Dreiecken bewiesen werden.

Daraus folgt $OR = HK$, $OR_1 = H_1K_1$ und $OR_2 = H_2K_2$ und $\overline{HK}^2 + \overline{H_1K_1}^2 + \overline{H_2K_2}^2 = 1$. Wenn man demnach auf den drei Coordinatenaxen vom Ursprung aus drei der Einheit gleiche Längen $OH = OH_1 = OH_2$ aufträgt und dieselben auf eine durch den Ursprung des Coordinatensystems gehende Ebene projicirt, so ist die Summe der Quadrate der Linien HK, H_1K_1 und H_2K_2, welche die Endpunkte H, H_1 und H_2 von jenen Längen projiciren, gleich der Einheit. Verbindet man mit dieser Beziehung $\overline{HK}^2 + \overline{H_1K_1}^2 + \overline{H_2K_2}^2 = 1$ die Gleichungen

$$\overline{OK}^2 + \overline{HK}^2 = 1,$$
$$\overline{OK_1}^2 + \overline{H_1K_1}^2 = 1 \text{ und}$$
$$\overline{OK_2}^2 + \overline{H_2K_2}^2 = 1,$$

so erhält man die neue Relation

$$\overline{OK}^2 + \overline{OK_1}^2 + \overline{OK_2}^2 = 2.$$

Wenn man daher auf den Coordinatenaxen drei der Einheit gleiche Längen annimmt, so ist die Summe der Quadrate der Projectionen derselben stets gleich zwei. Wenn nun das Verhältniß dieser Projectionen OK, OK_1 und OK_2 durch die beliebigen Zahlen m, n und p gegeben ist, so lassen sich aus den Bedingungsgleichungen

$$\overline{OK}^2 + \overline{OK_1}^2 + \overline{OK_2}^2 = 2 \text{ und}$$
$$OK : OK_1 : OK_2 = m : n : p$$

die Projectionen OK, OK_1 und OK_2 leicht berechnen, und zwar findet man

$$OK = \sqrt{\frac{2\,m^2}{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$OK_1 = \sqrt{\frac{2\,n^2}{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$OK_2 = \sqrt{\frac{2\,p^2}{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

In dem vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, daß die Lage der Projectionen der Coordinatenaren durch die Größen OK, OK_1 und OK_2 völlig bestimmt ist. Da nun aber diese letzteren Größen auch durch die Verhältnißzahlen m, n und p gegeben sind, so läßt sich behaupten, daß die Lage der Projectionen der Coordinatenaren auch durch das Verhältniß der Projectionen von gleichen Längen auf den Coordinatenaren bestimmt ist.

§. 7. Wir wollen jetzt zeigen, wie sich aus den Verhältnißzahlen m, n und p die Lage der Projectionen OX_1, OY_1 und OZ_1 der Coordinatenaren OX, OY und OZ ableiten läßt. Wenn man die für OK, OK_1 und OK_2 gefundenen Werthe in die Gleichungen

$$\overline{OK}^2 + \overline{HK}^2 = 1,$$

$$\overline{OK_1}^2 + \overline{H_1K_1}^2 = 1 \text{ und}$$

$$\overline{OK_2}^2 + \overline{H_2K_2}^2 = 1$$

einführt, so erhält man

$$HK = \sqrt{\frac{-m^2 + n^2 + p^2}{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$H_1K_1 = \sqrt{\frac{m^2 - n^2 + p^2}{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$H_2K_2 = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - p^2}{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Erweitert man in Fig. 8 die Coordinatenebene XOY bis sie die Projectionsebene in der geraden Linie AB durchschneidet, so steht AB jedenfalls senkrecht auf der Coordinatenare OZ und auch auf ihrer Projection OZ_1. Legt man ferner durch die projicirende Linie HK eine Ebene senkrecht auf AB, so entsteht das rechtwinkelige Dreieck HIK. Die Seiten dieses

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/12 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Dreieckes kreuzen die Seiten des Dreieckes OH_2K_2 rechtwinkelig, und daher ist

$$\Delta\, HIK \sim OH_2K_2.$$

Es gilt also die Proportion $IK : HK = H_2K_2 : OK_2$. Daraus folgt

$$IK = \frac{HK \,.\, H_2K_2}{OK_2}.$$

Führt man hierin die oben für HK, H_2K_2 und OK_2 berechneten Werthe ein, so ist

$$IK = \sqrt{\frac{(m^2 + n^2 - p^2)\,(-m^2 + n^2 + p^2)}{(m^2 + n^2 + p^2)\,2\,p^2}}.$$

Ferner hat man $HI : HK = OH_2 : OK_2$ folglich

$$HI = \frac{HK \,.\, OH_2}{OK_2} = \sqrt{\frac{-m^2 + n^2 + p^2}{2\,p^2}},$$

$$OI = \sqrt{1 - \overline{HI}^2} = \sqrt{\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2\,p^2}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{IK}{OI} = \sqrt{\frac{(m^2 + n^2 - p^2)\,(-m^2 + n^2 + p^2)}{(m^2 + n^2 + p^2)\,(m^2 - n^2 + p^2)}}.$$

Legt man durch die projicirende Linie H_1K_1 eine Ebene senkrecht auf AB, so entsteht das Dreieck $H_1I_1K_1$, welches ebenfalls dem Dreieck OH_2K_2 ähnlich ist. Man hat daher

$$I_1K_1 : H_1K_1 = H_2K_2 : OK_2,$$

$$I_1K_1 = \frac{H_1K_1 \,.\, H_2K_2}{OK_2}$$

$$= \sqrt{\frac{(m^2 - n^2 + p^2)\,(m^2 + n^2 - p^2)}{(m^2 + n^2 + p^2)\,.\,2\,p^2}}.$$

Ferner

$$H_1I_1 : H_1K_1 = OH_2 : OK_2,$$

$$H_1I_1 = \frac{H_1K_1 \,.\, OH_2}{OK_2} = \sqrt{\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2\,p^2}},$$

$$OI_1 = \sqrt{1 - \overline{H_1I_1}^2} = \sqrt{\frac{-m^2 + n^2 + p^2}{2\,p^2}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{I_1K_1}{OI_1} = \sqrt{\frac{(m^2 + n^2 - p^2)\,(m^2 - n^2 + p^2)}{(m^2 + n^2 + p^2)\,(-m^2 + n^2 + p^2)}}.$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/13 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Setzt man

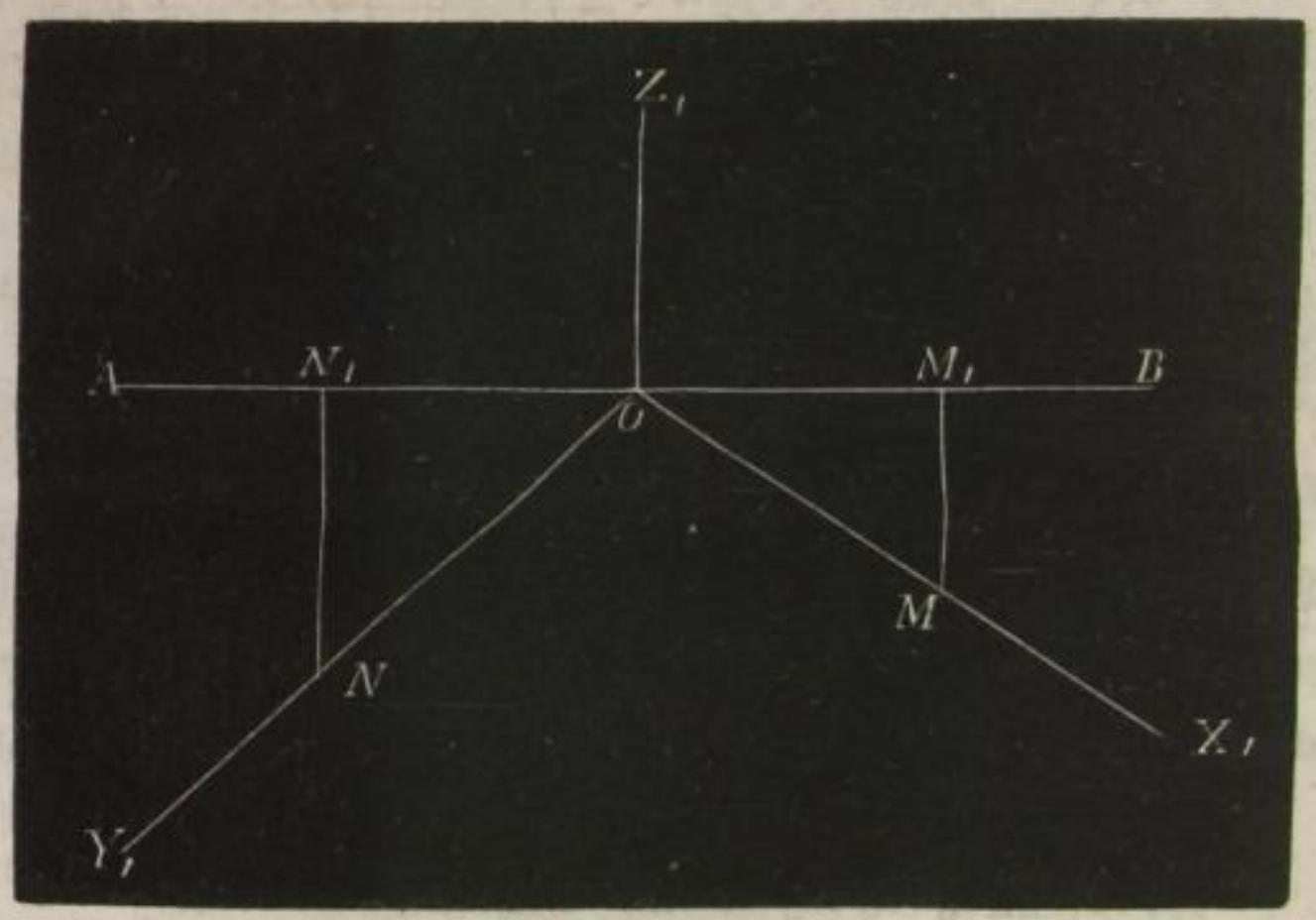
$$\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2} = s^2, \text{ so ist}$$

$$\frac{IK}{OI} = \sqrt{\frac{(s^2 - p^2)\,(s^2 - m^2)}{s^2\,(s^2 - n^2)}} \text{ und}$$

$$\frac{I_1 K_1}{OI_1} = \sqrt{\frac{(s^2 - p^2)\,(s^2 - n^2)}{s^2\,(s^2 - m^2)}}.$$

Mit Hilfe dieser Linienverhältnisse lassen sich nun nach den gegebenen Verhältnißzahlen m, n und p die Lagen der Axenprojectionen OX_1, OY_1 und OZ_1 construiren, und zwar kann dies in folgender Weise geschehen (Fig. 9). Man nimmt

Fig. 9.



zunächst die Projection OZ_1 beliebig an und legt darauf senkrecht die Linie AB als Hilfslinie. Hierauf zieht man OX_1 und OY_1 so, daß man hat

$$\frac{M_1 M}{OM_1} = \frac{IK}{OI} = \sqrt{\frac{(s^2 - p^2)\,(s^2 - m^2)}{s^2\,(s^2 - n^2)}} \text{ und}$$

$$\frac{N_1 N}{ON_1} = \frac{I_1 K_1}{OI_1} = \sqrt{\frac{(s^2 - p^2)\,(s^2 - n^2)}{s^2\,(s^2 - m^2)}}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Linien $M_1 M$ und $N_1 N$ senkrecht auf AB stehen. (Vergl. Fig. 8 und §. 11.)

§. 8. Die Verhältnißzahlen m, n, p dürfen keineswegs ganz beliebig gewählt werden. Da die Projection einer geraden

Linie immer kleiner oder höchstens eben so groß ist, als die projicirte Linie selbst, so ist, Fig. 8, $OK \leqq OH$, $OK_1 \leqq OH_1$ und $OK_2 \leqq OH_2$. Da aber $OH = OH_1 = OH_2 = 1$ angenommen wurde, so hat man $OK \leqq 1$, $OK_1 \leqq 1$ und $OK_2 \leqq 1$. Setzt man hierin die für OK, OK_1 und OK_2 die in §. 6 berechneten Werthe ein, so findet man leicht die Bedingungsgleichungen

$$n^2 + p^2 \geqq m^2, \quad m^2 + p^2 \geqq n^2 \quad \text{und} \quad m^2 + n^2 \geqq p^2.$$

Man muß also die Verhältnißzahlen m, n und p so wählen, daß das Quadrat der einen immer kleiner, oder höchstens gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen ist.

§. 9. Wenn sich, Fig. 8, die Projectionen OK, OK_1 und OK_2 der Einheit $OH = OH_1 = OH_2$ auf den drei Coordinatenaren wie $m : n : p$ verhalten und wenn die Projection der Einheit auf der X-Axe gleich OK ist, so ist die Projection OK_1 der Einheit auf der Y-Axe gleich $OK . \frac{n}{m}$ und die Projection OK_2 der Einheit auf der Z-Axe gleich $OK . \frac{p}{m}$; denn man hat dann

$$OK : OK . \frac{n}{m} : OK . \frac{p}{m} = m : n : p.$$

Es mögen nun auf den drei Coordinatenaren OX, OY und OZ drei beliebige Strecken x, y und z als die Coordinaten eines Punktes im Raume gegeben sein.

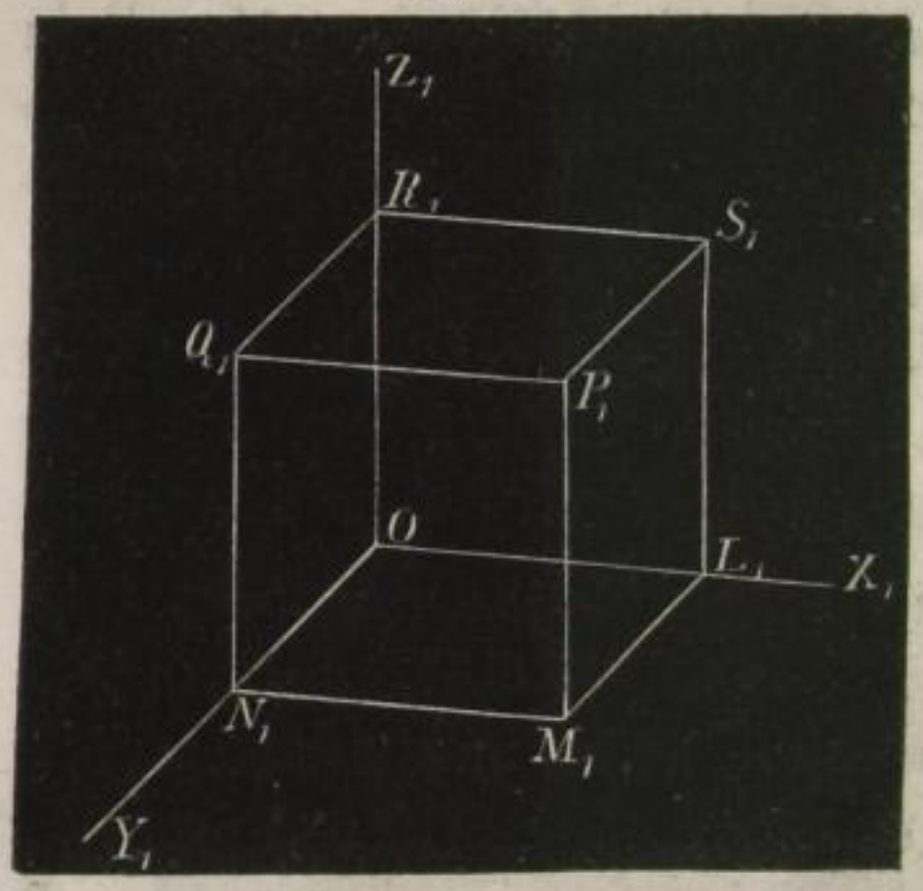
Wenn man dann die Coordinatenaren auf eine Bildebene projicirt, so projiciren sich natürlich auch die Coordinaten x, y und z zugleich mit und es erhalten nach der so eben gemachten Voraussetzung die Projectionen von x, y und z der Reihe nach die Werthe $OK . x$, $OK . \frac{n}{m} . y$ und $OK . \frac{p}{m} . z$.

Wenn die Lage der Projectionen OX_1, OY_1 und OZ_1, Fig. 10, der Coordinatenaren OX, OY und OZ im Raume nach dem in §. 7 angegebenen Verfahren gefunden worden ist, so kann man nun auch die Projectionen der Coordinaten x, y und z eines Punktes P mit Leichtigkeit auf die Projectionen der Coordinatenaren auftragen, und zwar braucht man nur

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/15 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

$OL_1 = OK . x$, $ON_1 = OK . \frac{n}{m} . y$ und $OR_1 = OK . \frac{p}{m} . z$ zu machen. In dem rechtwinkeligen Parallelepiped, dessen Seiten gleich den Coordinaten des Punktes P sind, sind je vier Seiten gleich und parallel. Es müssen daher auch die Projectionen derselben gleich und parallel sein. Zieht man daher

Fig. 10.



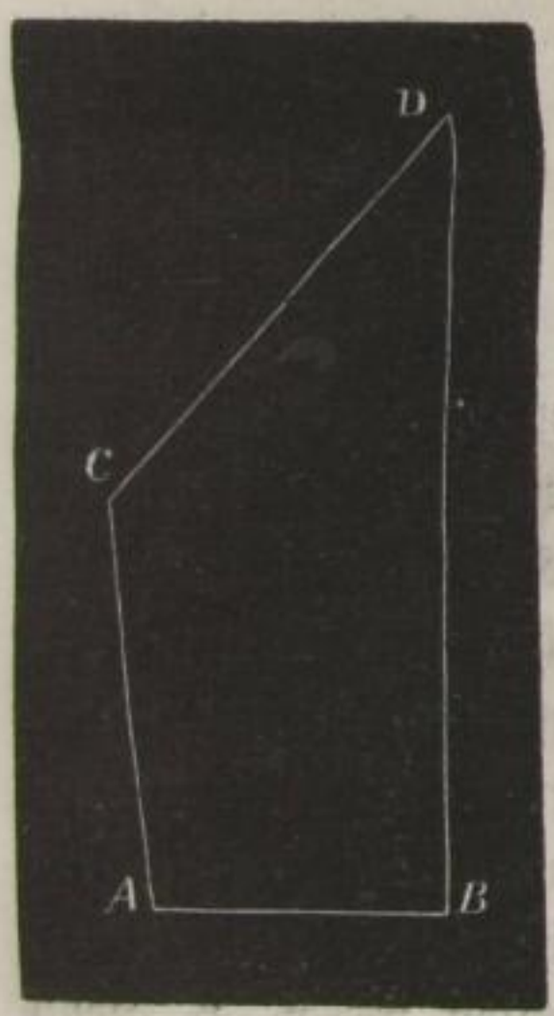
$L_1 M_1 \parallel OY_1$,
$L_1 S_1 \parallel OZ_1$,
$N_1 M_1 \parallel OX_1$,
$N_1 Q_1 \parallel OZ_1$,
$R_1 Q_1 \parallel OY_1$,
$R_1 S_1 \parallel OX_1$,

und sodann $M_1 P_1 \parallel OZ_1$, $S_1 P_1 \parallel OY_1$, $Q_1 P_1 \parallel OX_1$, so hat man die Projection des betreffenden Parallelepipeds erhalten und P_1 ist die Projection des Punktes P im Raume. Wenn es sich blos darum handelt, die Projection P_1 eines Punktes P im Raume, dessen Lage durch seine Coordinaten x, y und z bestimmt ist, anzugeben, so wird man $OL_1 = OK . x$, ferner $L_1 M_1$ parallel mit OY_1 und gleich $OK . \frac{n}{m} . y$ und endlich $M_1 P_1$ parallel mit OZ_1 und gleich $OK . \frac{p}{m} . z$ eintragen. Nach diesem Verfahren kann man natürlich die Projectionen von jeder beliebigen Anzahl von Punkten eintragen, d. h. man kann hiernach jeden beliebigen Gegenstand aronometrisch projiciren.

Die Multiplication mit OK kann vermieden werden. Wenn man nämlich die Projectionen $OL_1 = OK . x$, $ON_1 = OK . \frac{n}{m} . y$ und $OR_1 = OK . \frac{p}{m} . z$ mit $\frac{1}{OK}$ multiplicirt, so erhält man die Werthe x, $\frac{n}{m} . y$ und $\frac{p}{m} . z$. Diese Werthe sind das $\frac{1}{OK}$fache von den ursprünglichen, und wenn man die-

selben anstatt der ursprünglichen in die Zeichnung einträgt, so erscheinen alle Dimensionen $\frac{1}{OK}$ mal vergrößert. Man hat also nach einem $\frac{1}{OK}$ mal größeren Maßstabe gearbeitet. Dies bleibt aber ohne weiteren Einfluß, da man in der Regel ohnehin nach einem verjüngten Maßstabe zeichnet. Zeichnet man z. B. nach einem Maßstabe mit einer Verjüngung von $\frac{1}{1000}$ und ist $OK = 0{,}5$, so erscheint die Zeichnung, wenn man die Multiplication mit OK unterläßt und also die Werthe x, $\frac{n}{m}y$, $\frac{p}{m}z$ als Projectionen der Coordinaten aufträgt, in einer Verjüngung von $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{0{,}5} = \frac{1}{500}$. Künftighin werden wir daher, der Bequemlichkeit wegen, die Multiplicationen mit OK immer unterlassen.

Fig. 11.



Da man bei dem aronometrischen Zeichnen fortwährend mit den Projectionen OX_1, OY_1 und OZ_1 Parallellinien zu ziehen hat, so thut man wohl, wenn man sich ein Winkellineal anfertigen läßt, dessen Kanten die Richtungen OX_1, OY_1 und OZ_1 angeben. In Fig. 11 ist ein solches Winkellineal dargestellt. Die Kante AB soll die Richtung OX_1, die Kante AC die Richtung OZ_1 und die Kante CD die Richtung OY_1 darstellen. Die Gestalt eines solchen Winkellineals ändert sich natürlich mit den Verhältnißzahlen m, n, p. (Vergl. §. 11.)

§. 10. Wir wollen jetzt die verschiedenen Arten des aronometrischen Zeichnens kennen lernen. Zunächst kann man die Beobachtungslinie OS, Fig. 8, mit einer der Coordinatenaren OX, OY und OZ zusammen fallen lassen. Die Bild- oder Projectionsebene liegt dann in einer von den Coordinatenebenen XOY, XOZ, YOZ. Dieser Fall wird im engeren Sinne

nicht zur Axonometrie gerechnet, sondern bildet die unter dem Namen der orthographischen Projection bekannte Zeichnenmethode. Bei derselben ist immer eine von den Verhältnißzahlen m, n, p gleich Null und die anderen beiden sind gleich 1. Wenn die Beobachtungslinie OS mit der Coordinatenaxe OZ zusammenfällt, so liegt die Bildebene in der horizontalen Coordinatenebene XOY. Die Projection der Coordinate z ist jetzt blos ein Punkt und die Coordinaten x und y erscheinen in ihren wirklichen Größen. Das so erhaltene Bild heißt der Grundriß des dargestellten Gegenstandes. Man kann aus demselben nur zwei Dimensionen, die Länge und Breite, des Gegenstandes entnehmen, und es macht auf das Auge den Eindruck, als ob der Gegenstand aus unendlicher Entfernung in der Richtung von oben nach unten betrachtet worden wäre. Wenn die Beobachtungslinie mit der Axe OY zusammenfällt, so liegt die Bildebene in der verticalen Coordinatenebene XOZ. Jetzt ist die Projection der Coordinate y ein bloßer Punkt und die Projectionen der Coordinaten x und z erscheinen in ihren wirklichen Größen. Das so erhaltene Bild heißt der erste Aufriß des dargestellten Gegenstandes, und es sind in demselben wiederum nur zwei Dimensionen, die Länge und Höhe, des Gegenstandes enthalten. Läßt man endlich noch die Beobachtungslinie OS mit der Coordinatenaxe OX zusammen fallen, so erhält man den zweiten oder seitlichen Aufriß, in welchem nur die Breite und Höhe des dargestellten Gegenstandes enthalten sind. Wenn man daher alle Dimensionen eines Gegenstandes darstellen will, so muß man bei der orthographischen Projection zwei Bilder entwerfen. Bei der Axonometrie im engeren Sinne dagegen kann man alle drei Dimensionen eines Gegenstandes in einem Bilde darstellen, indem bei derselben keine von den Verhältnißzahlen m, n, p gleich Null ist, und also auch keine von den Coordinaten x, y und z verschwindet.

§. 11. Jenachdem man von den Verhältnißzahlen m, n, p alle drei einander gleich, oder nur zwei einander gleich setzt, oder endlich alle drei verschieden annimmt, erhält man drei verschiedene Arten von Axonometrie im engeren Sinne, die

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/18 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

von Prof. Weisbach der Reihe nach mit den Namen der isometrischen, der monodimetrischen und der anisometrischen Projectionsmethoden belegt worden sind.

1. Bei der isometrischen Projection ist also $m = n = p = 1$, und in Beziehung auf §. 7

$$s^2 = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{IK}{OI} = \sqrt{\frac{(s^2 - p^2)\ (s^2 - m^2)}{s^2\ (s^2 - n^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - 1\right)}{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{I_1 K_1}{OI_1} = \sqrt{\frac{(s^2 - p^2)\ (s^2 - n^2)}{s^2\ (s^2 - m^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - 1\right)}{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Um daher jetzt die Projectionen der Coordinatenaxen zu finden, wird man in Figur 9 $MM_1 = NN_1 = 1$ und $OM_1 = ON_1 = \sqrt{3}$ machen. Aus einfachen geometrischen Gründen ist dann $\angle MOM_1 = NON_1 = 30^0$, daraus folgt $X_1OY_1 = X_1OZ_1 = Y_1OZ_1 = 120^0$. Die Lage der Projectionen OX_1, OY_1 und OZ_1 der Coordinatenaxen läßt sich also bei der isometrischen Projection sehr leicht finden, desgleichen ist auch das Eintragen der Coordinaten x, y und z eines Punktes sehr bequem, da man mit Rücksicht auf die in §. 9 gemachte Bemerkung dieselben nach ihren wirklichen Maßen einzeichnen kann.

2. Bei der monodimetrischen Projection kann man natürlich die Verhältnißzahlen m, n, p in sehr verschiedener Weise wählen, gewöhnlich setzt man jedoch

$$m : n : p = 1 : \frac{1}{2} : 1.$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/19 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Es ist dann §. 7

$$s^2 = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2} = \frac{9}{8},$$

$$\frac{IK}{OI} = \sqrt{\frac{(s^2 - p^2)\ (s^2 - m^2)}{s^2\ (s^2 - n^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{9}{8} - 1\right)\left(\frac{9}{8} - 1\right)}{\frac{9}{8}\left(\frac{9}{8} - \frac{1}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{63}}$$

oder annähernd gleich $\frac{1}{8}$,

$$\frac{I_1 K_1}{O_1 I} = \sqrt{\frac{(s^2 - p^2)\ (s^2 - n^2)}{s^2\ (s^2 - m^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{9}{8} - 1\right)\left(\frac{9}{8} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{9}{9}\left(\frac{9}{8} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{7}{9}}$$

oder annähernd gleich $\frac{8}{9}$.

Macht man demnach in Fig. 9 $OM_1 = 8$ und $MM_1 = 1$, so findet man die Lage von OX_1, macht man $ON_1 = 9$ und $NN_1 = 8$, so erhält man die Lage von OY_1. Von den Coordinaten x und z werden die wirklichen Maße, von der Coordinate y aber wird die Hälfte des wirklichen Maßes eingetragen.

3. Auch bei der anisometrischen Projectionsmethode kann man die Verhältnißzahlen m, n und p sehr verschieden wählen. Wir wollen blos den einen Fall hervorheben, bei welchem $m : n : p = 0{,}9 : 0{,}5 : 1$ ist. Man hat dann

$$s^2 = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2} = \frac{206}{200},$$

$$\frac{IK}{OI} = \sqrt{\frac{(s^2 - p^2)\ (s^2 - m^2)}{s^2\ (s^2 - n^2)}}$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/20 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{206}{200}-1\right)\left(\frac{206}{200}-\frac{81}{100}\right)}{\frac{206}{200}\cdot\left(\frac{206}{200}-\frac{25}{100}\right)}} = \sqrt{\frac{11}{1339}}$$

oder annähernd gleich $\frac{1}{11}$,

$$\frac{I_1 K_1}{O I_1} = \sqrt{\frac{(s^2-p^2)(s^2-n^2)}{s^2(s^2-m^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{206}{200}-1\right)\left(\frac{206}{200}-\frac{25}{100}\right)}{\frac{206}{200}\cdot\left(\frac{206}{200}-\frac{81}{100}\right)}} = \sqrt{\frac{117}{1133}}$$

oder annähernd $\frac{1}{3}$ oder $\frac{8}{25}$.

Macht man daher in Fig. 7 $OM_1 = 11$ und $MM_1 = 1$, so erhält man die Lage von OX_1, und macht man $ON_1 = 3$ und $NN_1 = 1$, so erhält man die Lage von OY_1.

In Bezug auf die Coordinaten eines Punktes trägt man von z die wirkliche Länge, von y nur 0,5 und von x nur 0,9 der wirklichen Länge auf.

Man wird nicht wohlthun, wenn man die Richtungen der Axenprojectionen OX_1, OY_1 und OZ_1 bei jeder Zeichnung von Neuem construirt. Es wird vielmehr vortheilhaft sein, wenn man die vorstehenden Linienverhältnisse benutzt, um das §. 9 erwähnte Winkellineal darnach zu construiren.

§. 12. Wenn die Lage der Axenprojectionen OX_1 und OY_1, Fig. 9, durch die Linienverhältnisse $\frac{MM_1}{OM_1} = a$ und $\frac{NN_1}{ON_1} = b$ gegeben ist, so kann man daraus das Verhältniß $m:n:p$ der Projectionen der Einheit finden. Es ist dann nämlich

$$a = \sqrt{\frac{(m^2+n^2-p^2)(-m^2+n^2+p^2)}{(m^2+n^2+p^2)(m^2-n^2+p^2)}} \text{ und}$$

$$b = \sqrt{\frac{(m^2+n^2-p^2)(m^2-n^2+p^2)}{(m^2+n^2+p^2)(-m^2+n^2+p^2)}}, \text{ folglich}$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/21 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

$$ab = \frac{m^2 + n^2 - p^2}{m^2 + n^2 + p^2} \text{ und}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-m^2 + n^2 + p^2}{m^2 - n^2 + p^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man

$$m : n : p = \sqrt{(1 + a^2)\, b} : \sqrt{(1 + b^2)\, a} : \sqrt{(1 - ab)\,(a + b)}.$$

Führt man diese Werthe für m, n und p in den Formeln §. 6 für OK, OK_1 und OK_2 ein, so erhält man

$$OK = \sqrt{\frac{(1 + a^2)\, b}{a + b}},$$

$$OK_1 = \sqrt{\frac{(1 + b^2)\, a}{a + b}},$$

$$OK_2 = \sqrt{1 - ab}.$$

Die vorstehenden Resultate kann man auch direct aus Fig. 8 ableiten. Man hat nämlich $\Delta\, OHI \cong \Delta\, O_1 H_1 I_1$, weil in diesen Dreiecken $OH = OH_1$ ist und weil außerdem alle Winkel paarweise gleich sind. Daher ist $OI = I_1 H_1$. Nun ist

$$\overline{I_1 H_1}^2 + \overline{OI_1}^2 = \overline{OH_1}^2 = 1,$$

folglich auch

$$\overline{OI}^2 + \overline{OI_1}^2 = 1.$$

Man hat ferner

$$\overline{OK}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IK}^2,$$

$$\overline{OK_1}^2 = \overline{OI_1}^2 + \overline{I_1 K_1}^2,$$

und da nach §. 6

$$\overline{OK}^2 = \overline{OK_1}^2 + \overline{OK_2}^2 = 2$$

ist, so ist auch

$$\overline{OI}^2 + \overline{IK}^2 + \overline{OI_1}^2 + \overline{I_1 K_1}^2 + \overline{OK_2}^2 = 2$$

oder

$$\overline{IK}^2 + \overline{I_1 K_1}^2 + \overline{OK_2}^2 = 1$$

und folglich

$$\overline{IK}^2 + \overline{I_1 K_1}^2 + \overline{OK_2}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{OI_1}^2$$

oder

$$\overline{OK_2}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{OI_1}^2 - \overline{IK}^2 - \overline{I_1 K_1}^2.$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/22 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Setzt man für OK, OK_1 und OK_2 die soeben gefundenen Werthe, so gelangt man zu der Proportion:

$$\overline{OK}^2 : \overline{OK_1}^2 : \overline{OK_2}^2$$
$$= \overline{OI}^2 + \overline{IK}^2 : \overline{OI_1}^2 + \overline{I_1K_1}^2 : \overline{OI}^2 + \overline{OI_1}^2 - \overline{IK}^2 - \overline{I_1K_1}^2.$$

Aus der Congruenz der Dreiecke OHI und OH_1I_1 und der Aehnlichkeit der Dreiecke HIK und $H_1I_1K_1$ folgt $OI . IK = OI_1 . I_1K_1$. Dividirt man durch diese Producte die rechte Seite der vorstehenden Proportion, so erhält man

$$\overline{OK}^2 : \overline{OK_1}^2 : \overline{OK_2}^2$$
$$= \frac{OI}{IK} + \frac{IK}{OI} : \frac{OI_1}{I_1K} + \frac{I_1K_1}{OI_1} : \frac{OI}{IK} + \frac{OI_1}{I_1K_1} - \frac{IK}{OI} - \frac{I_1K_1}{OI_1}.$$

Wenn nun

$$\frac{IK}{OI} = \frac{MM_1}{OM_1} = a \text{ und}$$
$$\frac{I_1K_1}{OI_1} = \frac{NN_1}{ON_1} = b \text{ ist, so hat man}$$

$$\overline{OK}^2 : \overline{OK_1}^2 : \overline{OK_2}^2 = \frac{1}{a} + a : \frac{1}{b} + b : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - a - b,$$

oder

$$m : n : p = \sqrt{(1 + a^2)\, b} : \sqrt{(1 + b^2)\, a} : \sqrt{(1 - ab)\,(a + b)}.$$

Hiermit ist die elementare Begründung der Aronometrie beendigt. Praktische Anleitung zum aronometrischen Zeichnen geben die betreffenden Abhandlungen des Herrn Prof. Weisbach in der Zeitschrift „Civilingenieur", von welchen soeben ein Separat-Abdruck erschienen ist.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/23
gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Druck von A. Th. Engelhardt in Leipzig.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn335441270/24
gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG