PROGRAMM

des

Gymnasiums mit Realklassen

zu

INSTERBURG,

wodurch

zu der öffentlichen Prüfung aller Klassen

am

1. und 2. October 1863

im Namen des Lehrer-Collegiums

ergebenst einladet

der Director Dr. Eduard Krah.

Inhalt: 1) Die Entwickelung algebraischer transcendenter Functionen von x in unendliche Reihen und die kubischen Gleichungen vom Oberlehrer Alexander Fischer.
2) Schulnachrichten von Michael 1862 bis Michael 1863. Vom Director.

Insterburg, 1863.
Druck der Otto Hagenschen Buchdruckerei.

Ordnung der Prüfung.

Donnerstag, 1. Oct., Morgens von 8½ Uhr ab.

Gesang und Gebet.

3. Vorkl. Religion. Eggert.
Rechnen. Sackersdorff.
Kohnert, Roddewig und Schäfer: Die Katze, die alte und die junge Maus, von Pfeffel.

2. Vorkl. Lesen Eggert.
Bähcker: Lohn der Freigebigkeit, von Rückert.

1. Vorkl. Rechnen. Sackersdorff.
Kretzer, Mück, Karl und Fritz Romeick: Der Schulgang von Castelli.

2. u. 1. Vorkl. Singen. Eggert.

Sexta. Rechnen. Schaefer.
Weinberg: Graf Eberhard im Barte von Zimmermann.

Quinta. Religion Kislatis.
Mäding: Der kleine Hydriot von Müller.

Quarta R. Französisch. Schwarzlose.
Peyssan: le laboureur et ses enfans p. La Fontaine.

Quarta G. Griechisch. Rumpel.
Falkenthal: Der Bäume Gedanken von Stöber.

Donnerstag, 1. Oct., Nachm. von 2½ Uhr ab.

Tertia R. Mathematik. Fischer.
Görke, Hochmann, Lutkat, Vorbringer: King Alfred by Dr. Aikin.

Tertia G. Griechisch. Schaper.
Dennukat: Homer Od. IV, 335—424.

Secunda R Geographie. Wiederhold.
Kullak und Uhse: Wilhelm Tell II, 1.

Secunda G. Latein (Vergil) Meissner.
Kleiber: Inwiefern ist die Jungfrau von Orleans ein vaterländisches Schauspiel? (Eigene Arbeit).

Freitag, 2. Oct., von Morgens 9 Uhr ab.

Prima R. Englisch. Koch.

Prima G. Geschichte. Preuss.
Deutsche Rede des Abiturienten der Realschule Schon.
Französische Rede des Primaners der Realschule Fröhlich.

Entlassung der Abiturienten durch den Director und Translocation der Schüler.

Zum Schluss wird der Singchor einige Gesänge vortragen.

Die Entwickelung algebraischer und transcendenter Functionen von x in unendliche Reihen und die cubischen Gleichungen.

§ 1.
Methode der unbestimmten Coefficienten.

Wenn eine gebrochene, rationale, algebraische Function von x, z. B.

$$\frac{1-2x+3x^2}{1+5x-2x^2+4x^3}$$

in eine unendliche Reihe verwandelt werden soll, welche nach Potenzen von x fortschreitet, so wird man wohl durch die Division des Nenners in den Zähler eine beliebige Anzahl von Gliedern der gesuchten Reihe erhalten können; aber man lernt auf diesem Wege gewiss nicht das Gesetz kennen, nach welchem der Coefficient eines jeden späteren Gliedes aus den Coefficienten gewisser vorhergehenden Glieder sich berechnen lässt, und man wird also, wenn bereits 10 Glieder des Quotienten ermittelt sind, die Coefficienten dieser Glieder zur Berechnung des eilften Coefficienten nicht zu benutzen verstehn und das eilfte Glied nur durch die fortgesetzte Division kennen lernen. Wendet man aber zur Umwandlung jener gebrochenen, rationalen Function von x in eine unendliche Reihe nicht die Division, sondern die Methode der unbestimmten Coefficienten an, so findet man sehr bald eine Gleichung, welche das Gesetz für die Ableitung der späteren Coefficienten aus den vorhergehenden angiebt.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten beruht auf folgendem Lehrsatze: Wenn beide Seiten einer analytischen Gleichung unendliche Reihen sind, welche nach Potenzen einer veränderlichen Grösse x fortschreiten, so müssen diejenigen Coefficienten übereinstimmen, welche zu gleichhohen Potenzen von x gehören. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus der Betrachtung, dass eine solche Gleichung

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

für $x = o$ in die Gleichung $A = a$ übergeht und dass, wenn man diese gleichen Glieder weggelassen und die zurückbleibende Gleichung durch x dividirt hat, die neue Gleichung

$$B + Cx + Dx^2 + \text{etc.} = b + cx + dx^2 + \text{etc.}$$

auf die Gleichung $B = b$ führt, sobald man o für x eingesetzt hat; es müssen sich also durch ähnliche Schlussfolgerungen auch die Gleichungen $C = c$; $D = d$; u. s. w. ergeben.

Wenn man nun die Methode der unbestimmten Coefficienten bei der oben angeführten gebrochenen Function anwenden will, so muss man, da sie 1 wird, für $x = o$,

$$\frac{1-2x+3x^2}{1+5x-2x^2+4x^3} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.}$$

setzen und diese Gleichung mit dem Nenner der linken Seite multipliciren. Es entsteht alsdann die Gleichung:

$$1-2x+3x^2 = 1 + (a+5)x + (b+5a-2)x^2 + (c+5b-2a+4)x^3 + (d+5c-2b+4a)x^4 + \text{etc.}$$

Hier hat man es aber mit einer analytischen Gleichung zu thun, auf welche der Satz von der Uebereinstimmung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x Anwendung findet, da auch die linke Seite der Gleichung als eine unendliche Reihe anzusehen ist, weil man die Glieder $+ o . x^3 + o . x^4 +$ etc. dort zuschreiben darf. Auf diese Weise gelangt man zu den algebraischen Gleichungen:

$1)\ a + 5 = -2;\ 2)\ b + 5a - 2 = 3;\ 3)\ c + 5b - 2a + 4 = 0;\ 4)\ d + 5c - 2b + 4a = 0;$ u. s. w. aus welchen die unbekannten Coefficienten a, b, c, d etc. sich berechnen lassen und nachdem -7 für a; $+40$ für b; -218 für c; $+1198$ für d aus den ersten 4 Gleichungen gefunden worden, kann man jeden folgenden Coefficienten aus den 3 vorhergehenden nach dem Gesetze berechnen, welches durch die Gleichung 4) $d = -5c + 2b - 4a$ ausgedrückt ist. Dieses Gesetz schreibt nämlich vor, dass man jeden spätern n^{ten} Coefficienten berechnen soll, indem man den $(n-1)^{ten}$ mit -5, den $(n-2)^{ten}$ mit $+2$ und den $(n-3)^{ten}$ mit -4 multiplicirt und die drei Producte addirt. Hiernach wird folgende unendliche Reihe für die gebrochene, algebraische, rationale Function erhalten:

$$\frac{1 - 2x + 3x^2}{1 + 5x - 2x^2 + 4x^3} = 1 - 7x + 40x^2 - 218x^3 + 1198x^4 - 6586x^5 + 36198x^6 - \text{etc.}$$

Die algebraischen, rationalen, gebrochenen Functionen von x lassen sich alle, wie es eben an einem Beispiele gezeigt ist, in unendliche Reihen verwandeln und es reicht dazu die Methode der unbestimmten Coefficienten ganz allein aus. Da hierbei dieselbe Rechnung zur Bestimmung der nachfolgenden Coefficienten aus den vorhergehenden sich beständig wiederholt, so hat man solche Reihen wiederkehrende oder recurrente Reihen genannt.

§. 2.
Beweis des binomischen Lehrsatzes für ganze, positive Exponenten durch die (n + 1) Methode.

Bei der Umwandlung anderer Functionen von x in unendliche Reihen führt die Methode der unbestimmten Coefficienten allein nicht zum Ziele, es ist vielmehr nöthig, den binomischen Lehrsatz für ganze, positive Exponenten zu Hilfe zu nehmen. Dieser Satz wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$(x+y)^n = x^n + n\,x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \text{etc.}$$

Das binomische Gesetz für die Bildung der Coefficienten lässt sich also auf folgende Art angeben: der Coefficient des zweiten Gliedes ist der Exponent n; der Coefficient des dritten Gliedes ist der Exponent n multiplicirt mit dem Exponenten n weniger 1, dividirt durch 1, 2; u. s. w. Da hierbei n. eine ganze, positive Zahl vorstellt, so kann die Reihe keine unendliche sein; sie erreicht vielmehr ihr Ende, sobald in dem Coefficienten der Factor $(n-n)$ auftritt, und muss $n + 1$ Glieder enthalten, da sämmtliche Potenzen von y von der o^{ten} bis zur n^{ten} in den Gliedern vorkommen.

Setzt man nämlich in diese Gleichung für n die Zahl 1, so erhält man $(x+y)^1 = x + y$, da schon das dritte Glied, wie jedes folgende, durch den Factor $(1-1)$ null wird;

$$\begin{aligned} n = 2 &\text{ giebt } (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ n = 3 &\quad „\quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ n = 4 &\quad „\quad (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \end{aligned}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stimmen mit den Resultaten genau überein, welche man bei der Berechnung der zweiten, dritten und vierten Potenz von $(x+y)$ durch die Multiplication erhält und um zu zeigen, dass das binomische Gesetz für jedes ganze, positive n Giltigkeit habe, kann man die $(n.+1)$ Methode zu Hilfe nehmen, d. h. man kann beweisen, dass dieses Gesetz, wenn es für irgend ein ganzes, positives n gilt, auch für das folgende um 1 grössere n gelten muss.

Deshalb multiplicirt man die Gleichung, welche den binomischen Lehrsatz ausdrückt und für $n = 4$ wirklich Giltigkeit hat, mit $x + y$ und erhält:

$$\left.\begin{aligned} (x+y)^{n+1} = x^{n+1} &+ n x^n y + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-1}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}x^{n-2}y^3 + \text{etc.} \\ &+ x^n y + \quad n \quad x^{n-1}y^2 + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\quad x^{n-2}y^3 + \text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

$$\text{oder } (x+y)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n y + \frac{(n+1).\,n}{1.\ 2.}x^{n-1}y^2 + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.\ 2.\ 3.}x^{n-2}y^3 + \text{etc.}$$

Man sieht nun deutlich, dass in dieser endlichen Reihe die Coefficienten aus dem Exponenten $(n+1)$ auf dieselbe Weise hervorgegangen sind, wie in der vorigen Reihe aus dem Exponenten n und da dieses binomische Gesetz für die Coefficienten bei dem Exponenten $n=4$ gegolten hat, so wird man zugeben, dass es auch noch gelten muss bei $n=5$ und deshalb auch bei jeder folgenden ganzen, positiven Zahl.

Dass bei der Entwickelung der Potenz $(x+y)^n$ für den Fall, dass n eine ganze, positive Zahl ist, die Coefficienten in denjenigen Gliedern übereinstimmen müssen, welche vom Anfange und Ende der Reihe gleichweit abstehen, folgt ganz einfach daraus, dass man dieselben Glieder in umgekehrter Reihenfolge erhalten muss, wenn man dieselbe Entwickelung für die n^te Potenz von $(y+x)$ ausführt.

§. 5. 3

Sätze über Combinationen ohne Wiederholungen.

Wenn man den binomischen Satz für ganze, positive Exponenten direct zu beweisen hat, so sind einige Sätze aus der Lehre von den Combinationen unentbehrlich, welche hier folgen sollen.

Man combinirt gegebene Elemente ohne Wiederholungen zur dritten Klasse, wenn man so oft als möglich andere drei Elemente aus den gegebenen auswählt. Es kommt nun für den vorliegenden Zweck hauptsächlich darauf an, die Anzahl der Combinationen für eine bestimmte Klasse zu ermitteln. Sollen n Elemente zur k^ten Klasse ohne Wiederholungen combinirt werden, und bezeichnet man die Anzahl der Combinationen mit $\overset{n}{C}_k$, so lässt sich dieselbe aus der Anzahl der vorhergehenden Klasse ableiten, weil es möglich ist, diese Abhängigkeit durch eine Gleichung auszusprechen. Denn wenn man annimmt, dass sämmtliche Combinationen der $(k-1)$^ten Klasse aufgestellt wären und von diesen zu den Combinationen der k^ten Klasse durch Hinzustellung eines Elements übergegangen werden soll, so wird man alle die $n-(k-1)$ Elemente einzeln zu jeder Combination der $(k-1)$^ten Klasse hinzunehmen müssen, die in jeder Combination gefehlt haben. Auf diese Weise werden nicht nur alle Combinationen der k^ten Klasse entstehen, sondern es wird sogar jede k-mal zum Vorschein kommen. Denn durch Weglassung eines jeden einzelnen Elementes aus einer Combination der k^ten Klasse kehrt man immer zu den k verschiedenen Combinationen der $(k-1)$^ten Klasse zurück, die zur k-maligen Entstehung gerade dieser einen Combination der k^ten Klasse verwendet worden sind. Daher ist nun $\overset{n}{C}_k$ nicht übereinstimmend mit $\left(n-(k-1)\right)\overset{n}{C}_{k-1}$, sondern es ist $\overset{n}{C}_k = \frac{n-(k-1)}{k}\,.\,\overset{n}{C}_{k-1}$,

Mit Hilfe dieser Gleichung ist man im Stande, die Zahl der Combinationen ohne Wiederholungen bei n Elementen zur k^ten Klasse durch die beiden gegebenen Zahlen n und k auszudrücken. Denn da man in jene Gleichung für den Factor $\overset{n}{C}_{k-1}$ seinen Werth $\frac{n-(k-2)}{k-1}\,.\,\overset{n}{C}_{k-2}$ einsetzen darf und wieder $\overset{n}{C}_{k-2}$ mit $\frac{n-(k-3)}{k-2}\,.\,\overset{n}{C}_{k-3}$ zu vertauschen ist, so gelangt man nach und nach zu einem Werthe für $\overset{n}{C}_k$, welcher durch folgende Factorenreihe dargetsellt wird:

$$\overset{n}{C}_k = \frac{n-(k-1)}{k}\,.\,\frac{n-(k-2)}{k-1}\;\ldots\;\frac{n-1}{2}\,.\,\frac{n}{1},$$

wobei der Nenner eines jeden Bruchfactors um 1 grösser ist, als die im zugehörigen Zähler von n abgezogene Zahl. Wählt man die umgekehrte Reihenfolge der Factoren, so ist

$$\overset{n}{C}_k = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\;\ldots\ldots\;\left(n-(k-1)\right)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;.\;.\;.\;.\;k}$$

und setzt man in diese Gleichung für k den Werth $(n-k)$ ein, so wird

$$\overset{n}{C}_{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(k+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots(n-k)}.$$

Da aber beide Brüche übereinstimmen müssen, weil sie bei der Multiplication mit dem Producte ihrer Nenner sich in die Factorenreihe $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ verwandeln, so ist hierdurch der Satz bewiesen

$$\overset{n}{C}_k = \overset{n}{C}_{n-k}$$

d. h. die Anzahl der Combinationen ist dieselbe, ob man 20 Elemente zur 19ten oder 1ten Klasse, zur 18ten oder 2ten, zur 17ten oder 3ten Klasse u. s. w. combinirt.

§. 4.
Directer Beweis des binomischen Lehrsatzes für ganze, positive Exponenten.

Diese beiden Lehrsätze reichen zur directen Beweisführung des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten hin, wenn man damit folgende Betrachtung über die Multiplication von Binomialfactoren in Verbindung bringt.

Die Multiplication von Binomialfactoren muss, wenn ihre Anzahl n ist, 2^n Producte von der nten Dimension liefern und zwar betheiligen sich alle n Factoren auf gleiche Weise bei der Bildung dieser 2^n Producte, indem jeder von den n Factoren seinen ersten oder zweiten Summanden zu der Zusammenstellung jedes einzelnen der 2^n Producte hergiebt. Das erste Product entsteht durch das Zusammentreten aller n ersten Summanden und das letzte Product erhält man, wenn man alle n zweite Summanden als Factoren zusammenstellt. Die zwischenliegenden Producte lassen sich in folgende correspondirende Gruppen ordnen.

Erstes Product.	Letztes Product.
Erste Gruppe oder Producte, welche nur von einem Binomialfactor den 2ten Summanden enthalten.	(n—1)te Gruppe oder Producte, welche nur von einem Factor den ersten (oder nur von n —1 Factoren den 2ten) Summanden enthalten.
Zweite Gruppe oder Producte, welche nur aus 2 Factoren den 2ten Summanden entnehmen.	(n — 2)te Gruppe oder Producte, welche nur aus 2 Factoren den ersten (oder nur aus n — 2 Factoren den 2ten) Summanden entnehmen.
————	————
kte Gruppe oder Producte, zu welchen nur k Factoren den zweiten Summanden hergeben.	(n — k)te Gruppe oder Producte, an welchen sich nur k Factoren mit dem ersten (oder nur n—k Factoren mit dem 2ten) Summanden betheiligen.

Um die Anzahl der Producte in der kten Gruppe zu bestimmen, muss man folgende Frage beantworten: „Wie oft kann man aus n Binomialfactoren immer andere k Factoren wählen, welche allein mit ihrem 2ten Summanden zur Bildung eines Products der kten Gruppe beitragen, während die übrigen n—k Factoren den ersten Summanden liefern?“

Man sieht also, dass es sich um die Anzahl der Combinationen bei n Elementen zur kten Klasse handelt, wofür die Bezeichnung $\overset{n}{C}_k$ gewählt ist und dass eine eben so grosse Anzahl von Producten sich in der correspondirenden (n—k)ten Gruppe befinden muss, da dieselbe entweder auch mit $\overset{n}{C}_k$ oder mit $\overset{n}{C}_{n-k}$ zu bezeichnen ist, welche Ausdrücke aber übereinstimmen. Wenn man das erste und letzte Product ebenfalls als zwei correspondirende Gruppen mit derselben Zahl von Producten ansieht, so müsste für sie die Bezeichnung o^{te} und n^{te} Gruppe gewählt und die übereinstimmende Anzahl mit C^{n}_{o} oder C^{n}_{n}, welche Grössen 1 bedeuten, bezeichnet werden.

Im besonderen Falle, wenn die Anzahl n der Binomialfactoren eine gerade Zahl, etwa 2 p ist, muss es immer eine mittlere, vereinzelte Gruppe von Producten geben, zu welchen nur p Factoren den 2ten (oder nur p Factoren den ersten) Summanden hergegeben haben, ihre Anzahl ist also C^{2p}_{p}

Lässt man nun die gegebenen n Binomialfactoren alle gleich a + b werden, so muss natürlich ihre Multiplication wieder die correspondirenden Gruppen von Producten geben, bei welchen nun aber nicht nur die Anzahl der Producte übereinstimmt, sondern auch sämmtliche Producte derselben Gruppe gleich werden und so erhält man für ein ganzes, positives n

$$(a+b)^{n} = C^{n}_{o}\, a^{n} + C^{n}_{1}\, a^{n-1} b + C^{n}_{2}\, a^{n-2} b^{2} + \ldots + C^{n}_{k}\, a^{n-k} b^{k} + \ldots + C^{n}_{1}\, a\, b^{n-1} + C^{n}_{n}\, b^{n}$$

$$\text{oder } (a+b)^{n} = a^{n} + n\, a^{n-1} b + \frac{n\,(n-1)}{1.\ 2}\, a^{n-2} b^{2} + \ldots + n\, a\, b^{n-1} + b^{n}$$

§. 65

Entwickelung der Function Log (1 + x) nach Potenzen von x.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten soll nun in Verbindung mit dem binomischen Lehrsatze für ganze, positive Exponenten Anwendung finden bei der Umwandlung der Function Log. (1+x) in eine unendliche Reihe, welche nach Potenzen von x fortschreitet. Die Grundzahl des Logarithmensystems ist hierbei vorläufig eine beliebige Zahl B und wenn man beachtet, dass die Function Log. (1+x) in jedem System o werden muss für x = o, so erscheint es gerechtfertigt, dass man folgende Reihe für Log. (1 + x) setzt:

$$\text{Log }(1+x) = a x + b x^{2} + c x^{3} + d x^{4} + \text{ etc.}$$

Um algebraische Gleichungen zur Berechnung der Coefficienten dieser unendlichen Reihe zu erhalten, setzt man für x den Werth x + y ein und verwandelt Log (1 + x + y) in die Summe der Logarithmen der beiden Factoren (1 + x) und $\left(1 + \frac{y}{1+x}\right)$, dann heisst die neue Gleichung

$$\text{Log}\,(1+x) + \text{Log}\left(1 + \frac{y}{1+x}\right) = a\,(x+y) + b\,(x+y)^{2} + c\,(x+y)^{3} + d\,(x+y)^{4} + \text{ etc.}$$

oder wenn man nach Potenzen von y ordnet

$$(a x + b x^{2} + c x^{3} + \text{ etc.}) + \frac{a}{1+x}\, y + \frac{b}{(1+x)^{2}}\, y^{2} + \text{ etc.} =$$

$$(a x + b x^{2} + c x^{3} + \text{ etc.}) + (a + 2 b x + 3 c x^{2} + 4 d x^{3} + \text{ etc.})\, y + \text{ etc.}$$

wobei man in die Reihe für Log (1+x) nur den Bruch $\frac{y}{1+x}$ statt x zu schreiben hat, um die Reihe für Log $\left(1 + \frac{y}{1+x}\right)$ zu erhalten. Setzt man jetzt die Coefficienten gleich, welche zur ersten Potenz von y gehören, so kommt man auf die Gleichung

$$\frac{a}{1+x} = a + 2 b x + 3 c x^{2} + 4 d x^{3} + \text{ etc.}$$

welche, wenn der Nenner 1 + x fortgeschafft wird, in die neue Gleichung übergeht:

$$a = a + (2 b + a)\, x + (3 c + 2 b)\, x^{2} + (4 d + 3 c)\, x^{3} + \text{ etc.}$$

Aus dieser analytischen Gleichung ergeben sich nun, wenn man die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x gleichsetzt, folgende algebraische Gleichungen:

$$2 b + a = 0;\ 3 c + 2 b = 0;\ 4 d + 3 c = 0;\ \text{u. s. w.}$$

oder

$$2b = -a;\ 3c = -2b = +a;\ 4d = -3c = -a;\ \text{u. s. w.}$$

Man sieht hieraus, dass die Werthe von $2b$; $3c$; $4d$; u. s. w. abwechselnd $-a$ und $+a$ betragen, also gilt für Log $(1+x)$ bei der Grundzahl B folgende Reihe:

$$\mathrm{Log}\,(1+x) = a\,(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.}).$$

Die willkürliche Constante a, der Modul des Systems mit der Basis B, ist natürlich abhängig von der Grundzahl B des jedesmaligen Logarithmensystems und diese Abhängigkeit wird durch die Gleichung ausgesprochen, welche man aus der letzten ableitet, wenn darin x den Werth $B - 1$ erhält. Es ist dann

$$\frac{1}{(B-1) - \frac{1}{2}(B-1)^2 + \frac{1}{3}(B-1)^3 - \text{etc.}} = a.$$

Nun muss es für die Basis B offenbar einen Zahlenwerth geben, welcher den Nenner in der letzten Gleichung in 1 verwandelt und bezeichnet man diese Basis mit e, so gehört sie zu demjenigen Logarithmensystem, dessen Modul $a = 1$ ist. Dieses System wird das natürliche genannt. Die Logarithmen des natürlichen Systems sollen vorläufig als bekannte Grössen gelten, später wird gezeigt werden, wie man dieselben auf die einfachste Weise berechnen kann.

Bezeichnet man den natürlichen Logarithmus einer Zahl y mit $\mathrm{l}\,y$ so muss nun

$$\mathrm{l}\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \text{etc.}$$

sein und setzt man für x den Werth $(B-1)$ ein, so wird $\mathrm{l}\,B = (B-1) - \frac{1}{2}(B-1)^2 + \frac{1}{2}(B-1^3 + \text{etc.}$

also kann man die Abhängigkeit des Moduls a von seiner zugehörigen Basis B durch die Gleichung feststellen $a = \frac{1}{\mathrm{l}\,B}$, d. h. der Modul eines jeden Logarithmensystems ist der reciproke Werth von dem natürlichen Logarithmus der Basis.

Sobald aber der Modul a eines künstlichen Logarithmen-Systems bekannt ist; z. B. des Briggeschen $\frac{1}{\mathrm{l}\,10}$, so hat man die natürlichen Logarithmen nur mit dieser Zahl zu multipliciren, um die Logarithmen des künstlichen Systems zu erhalten.

§. 6.

Berechnung der natürlichen Logarithmen der drei kleinsten Primzahlen 2, 3, 5 und der höheren Primzahlen.

Die unendliche Reihe, welche für den natürlichen Logarithmus von $(1+x)$ abgeleitet ist, lässt sich zur directen Berechnung der natürlichen Logarithmen der Primzahlen nicht anwenden, wohl aber kann man durch Umformungen zu einer Reihe gelangen, die zur indirecten Berechnung der natürlichen Logarithmen der drei kleinsten Primzahlen ganz geeignet ist. Man setzt nämlich in die Gleichung

$$\mathrm{l}\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.}$$

für x den Werth $-x$ ein und erhält:

$$\mathrm{l}\,(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \text{etc.}$$

und durch Subtraction dieser Gleichungen

$$\mathrm{l}\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\} = 2\,(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \text{etc.}).$$

Wählt man nun für den Bruch $\frac{1+x}{1-x}$ das einfache Zeichen z, so muss natürlich auf der rechten Seite das Zeichen x mit dem Bruche $\frac{z-1}{z+1}$ vertauscht werden und man erhält:

$$l\,z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7 + \text{etc.}\right\}$$

Diese Reihe wird hinreichend convergent, wenn man für z Brüche einsetzt, welche nur wenig grösser als 1 sind, bei welchen z. B. der Zähler nur um 1 grösser als der Nenner ist und wählt man drei solche Brüche für z, bei welchen die Zähler und Nenner nur die Primfactoren 2, 3 und 5 enthalten, so kann die Reihe zur indirecten Berechnung von $l\,2$, $l\,3$ und $l\,5$ benutzt werden. Bestimmt man nämlich durch Summation der Reihe die drei Logarithmen $l\left(\frac{16}{15}\right)$, $l\left(\frac{25}{24}\right)$, $l\left(\frac{81}{80}\right)$ und nennt die berechneten Summen m, n, p, so kann man aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 4\,l\,2 - l\,3 - l\,5 &= m \\ -3\,l\,2 - l\,3 + 2\,l\,5 &= n \\ -4\,l\,2 + 4\,l\,3 - l\,5 &= p \end{aligned}$$

die unbekannten Grössen $l\,2$, $l\,3$, $l\,5$ erhalten.

Wenn man die Rechnung ausführt, ergeben sich folgende Werthe:

$$\begin{aligned} m &= 0{,}0645383211; & l\,2 &= 7\,m + 5\,n + 3\,p = 0{,}6931450991 \\ n &= 0{,}0408218584; & l\,3 &= 11\,m + 8\,n + 5\,p = 1{,}0986089983 \\ p &= 0{,}0124225197; & l\,5 &= 16\,m + 12\,n + 7\,p = 1{,}6094330777 \end{aligned}$$

Die natürlichen Lagarithmen der höheren Primzahlen können, sobald die der 3 ersten Primzahlen gefunden sind, durch Summirung einer unendlichen Reihe mit Hinzuziehung der bereits berechneten Lagarithmen kleinerer Primzahlen erhalten werden. Wenn man nämlich irgend eine Primzahl mit p bezeichnet und von der Gleichung

$$p^2 = \frac{p^2}{p^2-1}\,(p+1)(p-1)$$

die natürlichen Logarithmen nimmt, so ist

$$2\,l\,p = l\,(p+1) + l\,(p-1 + l\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)$$

und setzt man in die Reihe für $l\,z$ den Bruch $\frac{p^2}{p^2-1}$ für das veränderliche z ein, so wird

$$l\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right) = 2\left\{\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3\,(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5\,(2p^2-1)^5} + \text{etc.}\right\}$$

Daher findet man für $l\,p$ folgenden Werth

$$l\,p = \frac{1}{2}\,l\,(p+1) + \frac{1}{2}\,l\,(p-1) + \frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3\,(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5\,(2p^2-1)^5} + \text{etc.}$$

und da $(p+1)$ und $(p-1)$ keine Primzahlen sind und auch nur kleinere Primzahlen als p enthalten können, so ist die letzte Gleichung zur Berechnung der Logarithmen höherer Primzahlen sehr brauchbar, besonders da die zu benutzende Reihe in dem Grade convergirt, dass man nicht leicht mehr als die beiden ersten Glieder wird berechnen dürfen, um die Summe der Reihe bis auf 7 Decimalstellen zu erhalten.*)

---

*) Es ist nicht schwierig, statt der drei Brüche $\frac{15}{15}$, $\frac{25}{24}$, $\frac{81}{80}$ mit Hilfe einer Factorentafel 4 andere mit höheren Zahlen zusammenzustellen, bei welchen der Zähler um 1 grösser ist, als der Nenner, während beide nur die 4 Primfactoren 2, 3, 5, 7 enthalten und so mit einem Male die Logarithmen der 4 ersten Primzahlen aus 4 Gleichungen zu berechnen, um dann zu der Gleichung $l\,11 = \frac{1}{2}\,l\,12 + \frac{1}{2}\,l\,10 + \frac{1}{241} + \frac{1}{3.\,241^3} + \frac{1}{5.\,241^5} +$ etc. überzugehn. Für die Auseinandersetzung der Methode sind aber auch die gewählten drei Brüche genügend.

§ 7.

Binomisches Gesetz für Exponenten, welche nicht ganze, positive Zahlen sind.

Die Potenz $(a+b)^n$ erhält, wenn man $a+b$ mit $a\left(1+\frac{b}{a}\right)$ vertauscht, die Form $a^n\left(1+\frac{a}{b}\right)^n$ Wenn nun n keine ganze, positive Zahl ist und für $\frac{b}{a}$ das Zeichen x gesetzt wird, so kann man die Function $(1+x)^n$ in eine unendliche Reihe verwandeln, welche nach Potenzen von x fortschreitet und wenn dann in diese Reihe für x wieder der Bruch $\frac{b}{a}$ eingesetzt und die Multiplication mit a^n ausgeführt wird, so hat man das binomische Gesetz für Exponenten kennen gelernt, welche nicht ganze, positive Zahlen sind. Für $x = o$ wird die Function $(1+x)^n$ der Zahl 1 gleich, also muss man

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

setzen und eine analytische Gleichung suchen, aus welcher sich algebraische Gleichungen zur Berechnung der Coefficienten A, B, C, etc. ableiten lassen. Man wird bald sehen, dass zur vollständigen Bestimmung dieser Coefficienten die natürlichen Logarithmen zu Hilfe genommen werden müssen.

Denn setzt man in die Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

für x den Werth $(x+y)$ ein und zerlegt die Grösse $(1+x+y)$ in die Factoren $(1+x)$ und $(1+\frac{y}{1+x})$, so erhält man

$$(1+x)^n \left(1+\frac{y}{1+x}\right)^n = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + \text{etc.}$$

Es ist aber $(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$

und $\left(1+\frac{y}{1+x}\right)^n = 1 + A\frac{y}{1+x} + B\frac{y^2}{(1+x)^2} + C\frac{y^3}{(1+x)^3} + \text{etc.}$

also $(1+x)^n . \left(1+\frac{y}{1+x}\right)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.} + (A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \text{etc.})\frac{y}{1+x} + \text{etc.}$

und wenn die andere Reihe für $(1+x+y)^n$ auch nach Potenzen von y geordnet wird, so nimmt sie folgende Form an:

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.} + (A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{etc.})\,y + \text{etc.}$$

Setzt man nun die Coefficienten der ersten Potenz von y aus beiden Reihen einander gleich, so kommt man auf die analytische Gleichung

$$\frac{A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \text{etc.}}{1+x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{etc.}$$

welche zur Bestimmung der Coefficienten benutzt werden soll. Die Multiplication mit dem Nenner $1+x$ führt auf die Gleichung

$$A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \text{etc.} = A + (2B+A)x + (3C+2B)x^2 + (4D+3C)x^3 + \text{etc.}$$

und hieraus ergeben sich folgende algebraische Gleichungen:

$$A^2 = 2B + A;\ AB = 3C + 2B;\ AC = 4D + 3C;\ \text{u. s. w.}$$

oder $2\,B = A\,(A-1)$; $3\,C = A\,B - 2\,B = B\,(A-2)$; $4\,D = A\,C - 3\,C = C\,(A-3)$; u. s. w.

oder endlich $\quad B = \frac{A\,(A-1)}{1\,.\,2}$; $C = \frac{A\,(A-1)\,(A-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$; $D = \frac{A\,(A-1)\,(A-2)\,A-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$; u. s. w.

Nun ist also

$$(1+x)^n = 1 + A\,x + \frac{A\,(A-1)}{1\,.\,2}\,x^2 + \frac{A\,(A-1)\,(A-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \frac{A\,(A-1)\,(A-2)\,(A-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,x^4 + \text{etc.}$$

und es bleibt noch die Grösse A zu bestimmen. Deshalb nimmt man von der Gleichung die natürlichen Logarithmen

$$n\,l\,(1+x) = l\,(1+K)$$

wobei K die unendliche Reihe

$$A\,x + \frac{A\,(A-1)}{1\,.\,2}\,x^2 + \frac{A\,(A-1)\,(A-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \text{etc.}$$

bedeutet. Wenn man nun für diese Logarithmen die entsprechenden, unendlichen Reihen schreibt, so erhält man die Gleichung

$$n\left\{x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4 + \text{etc.}\right\} = K - \frac{1}{2}\,K^2 + \frac{1}{3}\,K^3 - \frac{1}{4}\,K^4 + \text{etc.}$$

und hier darf man die Coefficienten der ersten Potenz von x gleichsetzen, also ist $n = A$.

Man sieht hieraus, dass das binomische Gesetz für Exponenten, welche nicht ganze, positive Zahlen sind, genau übereinstimmt mit dem binomischen Gesetz für ganze, positive Exponenten.

§. 8.

Reihen für sin. x und cos. x.

Da die Function sin. x in — sin. x übergeht, wenn man für x den Werth $-x$ einsetzt, so kann die unendliche Reihe für sin. x nicht alle Potenzen von x enthalten, sondern nur die ungeraden und da die Function cos. x ihren Werth nicht ändert, wenn man $-x$ statt x schreibt, so wird die unendliche Reihe für cos. x nur die geraden Potenzen von x enthalten dürfen; auch lässt sich leicht erkennen, dass die Reihe für cos. x zum constanten Gliede 1 haben muss, denn für $x = o$ muss die Reihe für cos. x die Zahl 1 liefern. Daher nimmt man folgende Reihen für sin. x und cos. x an:

$$\sin. x = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + d\,x^7 + \text{etc.};\ \cos. x = 1 + A\,x^2 + B\,x^4 + C\,x^6 + \text{etc.}$$

und sucht Gleichungen zur Bestimmung der noch unbekannten Coefficienten.

Wenn man in beiden Gleichungen y statt x schreibt, so erhält man durch Subtraction die Gleichungen

$$\sin. x - \sin. y = 2\cos.\frac{x+y}{2}\sin.\frac{x-y}{2} = a(x-y) + b\,(x^3-y^3) + c\,(x^5-y^5) + d\,(x^7-y^7) + \text{etc.}$$

$$\cos. x - \cos. y = -2\sin.\frac{x+y}{2}\,\sin.\frac{x-y}{2} = A\,(x^2-y^2) + B\,(x^4-y^4) + C\,(x^6-y^6) + \text{etc.}$$

und nach der Division durch $(x-y)$

$$\frac{2\cos.\frac{x+y}{2}\,\sin.\frac{x-y}{2}}{x-y} = \frac{\cos.\frac{x+y}{2}\,\sin.\frac{x-y}{2}}{\left(\frac{x-y}{2}\right)} = a + b(x^2+xy+y^2) + c(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) + \text{etc.}\,.1)$$

$$\frac{-2\sin.\frac{x+y}{2}\,\sin.\frac{x-y}{2}}{x-y} = \frac{-\sin.\frac{x+y}{2}\,\sin.\frac{x-y}{2}}{x-y} = \quad +y)\,x + B\,(x^3+x^2y+xy^2+y^3) + C\,(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5) + \text{etc.}\,2)$$

Wird nun für y der Werth x eingesetzt, so nehmen die Gleichungen 1) und 2) folgende Formen an:

$$\cos. x. \frac{\sin. o}{o} = a + 3bx^2 + 5cx^4 + 7dx^6 + \text{etc.} = (1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \text{etc.}) \frac{\sin. o}{o}$$

$$-\sin. x. \frac{\sin. o}{o} = 2Ax + 4Bx^3 + 6Cx^5 + 8Dx^7 + \text{etc.} = -(ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \text{etc.}) \frac{\sin. o}{o}$$

und wenn man den Zahlenwerth des Bruches $\frac{\sin. o}{o}$ ermittelt hat, so darf man nur die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x in jeder dieser beiden Gleichungen gleichsetzen, um die Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten a, b, c u. s. w. und A, B, C, u. s. w. zu erhalten.

Die Berechnung des Bruches $\frac{\sin. o}{o}$, welcher aus $\frac{\sin. x}{x}$ entsteht, wenn man $x = o$ setzt, wird durch folgende Betrachtung eingeleitet. Wenn Zähler und Nenner eines Bruches verschiedene Functionen von x sind und für einen gewissen Zahlenwerth von x beide Functionen o werden, so ist dieses ein sicheres Zeichen, dass die gebrochene Function von x noch nicht auf die einfachste Form gebracht war, dass vielmehr Zähler und Nenner noch einen gemeinschaftlichen Factor haben, nach dessen Entfernung zuerst der verständliche Zahlenwerth der gebrochenen Function zum Vorschein kommen kann. Ist z. B. die gebrochene Function

$$\frac{x^2 - 12x + 35}{x^3 - 4x^2 - 17x + 60},$$

so kann daraus nur in dem ganz besondern Falle der unverständliche Bruch $\frac{o}{o}$ entstehen, wenn 5 für x eingesetzt wird, weil Zähler und Nenner den Factor $(x - 5)$ und zwar nur in der ersten Potenz enthalten; ist aber dieser Factor entfernt, so ist die gebrochene Function in ihrer einfachsten Form

$$\frac{x - 7}{x^2 + x - 12}$$

und nun ergiebt sich für $x = 5$ der verständliche Werth $-\frac{1}{9}$. Man pflegt daher die Bezeichnung $\frac{o}{o}$, auf welche man bei gebrochenen Functionen von x kommen kann, wenn sie nicht in ihrer einfachsten Form angegeben sind, eine unbestimmte Grösse zu nennen, deren eigentlicher Werth in jedem besondern Falle aufzusuchen ist. Kommt man aber auf $\frac{o}{o}$ bei einem Bruche, dessen Zähler und Nenner von derselben Function von x gebildet wird, so ist eigentlich gar keine gebrochene Function von x vorhanden, sondern die Zahl 1 und sieht man dennoch einen solchen Bruch als eine Function von x an und stellt Zahlen für x ein, so muss der Werth der Function in jedem Falle mit der Zahl 1 gleichbedeutend sein, also auch wenn der Bruch die Form $\frac{o}{o}$ angenommen hat. Geht daher der Bruch $\frac{\sin. x}{\sin. x}$ für $x = o$ in $\frac{o}{o}$ über, so hat man dafür die Zahl 1 zu setzen.

Vergleicht man nun die 3 Grössen $\frac{\sin. x}{\sin. x}$, $\frac{\sin. x}{x}$, $\frac{\sin. x}{tg. x}$, wovon die erste für jeden Zahlenwerth von x den Werth 1 annimmt, und die letzte, da sie gleich cos. x ist, von o bis 1 wächst, während die unbenannte Zahl x von $\frac{\pi}{2}$ bis o abnimmt, so erkennt man leicht, dass die zwischenliegende zweite Grösse $\frac{\sin. x}{x}$, welche für $x = \frac{\pi}{2}$ den Werth $\frac{2}{\pi}$ erhält, für $x = o$ mit den beiden Grenzen 1 zusammenfallen muss.

Es ist also in den früheren Gleichungen für die Bruchform $\frac{\sin. o}{o}$ die Zahl 1 zu setzen und dann ergeben sich aus den beiden letzten analytischen Gleichungen folgende Bestimmungsgleichungen:

$$a = 1;\ 2A = -a;\ 3b = A;\ 4B = -b;\ 5c = B;\ 6C = -c;\ 7d = C \text{ u. s. w.}$$

$$\text{also ist } a = 1;\ b = -\frac{1}{1.2.3};\ c = \frac{1}{1.2.3.4.5};\ d = \frac{-1}{1.2.3.4.5.6.7};\ \text{u. s. w.}$$

$$A = \frac{-1}{1.2};\ B = \frac{1}{1.2.3.4};\ C = \frac{-1}{1.2.3.4.5.6};\ D = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8};\ \text{u. s. w.}$$

und die Reihen für sin. x und cos. x heissen nun:

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{x^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.}$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}$$

§. ~~8~~ 9

Entwickelung einer Zahl x nach Potenzen ihres Sinus.

Wie man den Sinus einer Zahl nach Potenzen der Zahl entwickeln kann, ebenso lässt sich eine Zahl x nach Potenzen ihres Sinus entwickeln. Bei dieser Umkehrung der Reihe ist zu beachten, dass die neue Reihe nur die ungeraden Potenzen von sin. x enthalten darf, also von folgender Form sein muss:

$$x = a \sin. x + b \sin. x^3 + c \sin. x^5 + d \sin. x^7 + \text{etc.}$$

Schreibt man y für x und zieht die Gleichungen von einander ab, so ist

$$x - y = a(\sin. x - \sin. y) + b(\sin. x^3 - \sin. y^3) + c(\sin. x^5 - \sin. y^5) + \text{etc.}$$

Wird diese Gleichung durch (sin. x — sin. y) dividirt und vertauscht man die Differenz der Sinus mit

$$2 \cos. \frac{x+y}{2} \sin. \frac{x-y}{2}$$

so kann man der linken Seite der Gleichung die Form geben

$$\frac{\dfrac{1}{\cos. \frac{x+y}{2} \sin. \frac{x-y}{2}}}{\dfrac{x-y}{2}}$$

und setzt man dann x für y ein, so entsteht die Gleichung

$$\frac{1}{\cos. x} = (1 - \sin. x^2)^{-\frac{1}{2}} = a + 3b \sin. x^2 + 5c \sin. x^4 + 7d \sin x^6 + \text{etc.}$$

oder

$$1 + \frac{1}{2}\sin. x^2 + \frac{3}{8}\sin. x^4 + \frac{5}{16}\sin. x^6 + \frac{35}{128}\sin. x^8 + \frac{63}{256}\sin. x^{10} + \text{etc.} = a + 3b\sin. x^2 + 5c\sin. x^4 + 7d\sin. x^6 + \text{ꝛc}$$

Setzt man nun die Coefficienten einander gleich, welche zu gleich hohen Potenzen von sin. x gehören, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$a = 1;\ 3b = \frac{1}{2};\ 5c = \frac{3}{8};\ 7d = \frac{5}{16};\ 9e = \frac{35}{128};\ 11f = \frac{63}{256};\ \text{u. s. w.}$$

$$\text{oder } a = 1;\ b = \frac{1}{6};\ c = \frac{3}{40};\ d = \frac{5}{112};\ e = \frac{35}{1152};\ f = \frac{63}{2816};\ \text{u. s. w.}$$

Das Gesetz für die Bildung dieser Coefficienten tritt erst dann deutlich hervor, wenn man dieselben in folgender Form schreibt;

$$a = 1;\ b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3};\ c = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{1}{5};\ d = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7};\ e = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{1}{9};\ \text{u. s. w.}$$

Es ist also

$$x = \sin.x + \frac{1}{2}\frac{\sin.x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin.x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin.x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\sin x^9}{9} + \text{etc.}$$

§. 10.

Die Exponentialfunction B^x und die Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems.

Bedeutet B die Basis eines beliebigen Logarithmensystems und soll man die Potenz B^x in eine unendliche Reihe verwandeln, welche nach Potenzen des Exponenten x fortschreitet, so ist dies nicht verschieden von der Aufgabe: man soll eine Zahl nach Potenzen ihres Logarithmus entwickeln, also handelt es sich hierbei wieder um die Umkehrung einer Reihe, nämlich der Logarithmenreihe, denn bei dieser wurde der Logarithmus einer Zahl $(1+x)$ nach Potenzen der um 1 verkleinerten Zahl x entwickelt.

Für $x = o$ muss die unendliche Reihe für B^x der Zahl 1 gleich werden, also wird man

$$B^x = 1 + a x + b x^2 + c x^3 + d x^4 + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

zu setzen haben. Nimmt nun x den Werth y an, so ist

$$B^y = 1 + a y + b y^2 + c y^3 + d y^4 + \text{etc.}$$

und die Multiplication beider Gleichungen führt auf

$$B^{x+y} = B^x + B^x \cdot a y + . B^x \cdot b y^2 + \text{etc.} = 1 + a(x+y) + b(x+y)^2 + c(x+y)^3 + \text{etc.}$$

welche letzte Reihe aus der Gleichung 1) erhalten wurde, indem man $(x+y)$ für x einsetzte. Werden nun die beiden Reihen für B^{x+y} nach Potenzen von y geordnet, so erhält man die Gleichung

$$B^x + (a + a^2 x + a b x^2 + a c x^3 + a d x^4 + \text{etc.})\,y + \text{etc.} = B^x + (a + 2 b x + 3 c x^2 + 4 d x^3 + \text{etc.})\,y + \text{zc}$$

und hier darf man die Coefficienten der ersten Potenz von y gleichsetzen. Es ist also

$$a + a^2 x + a b x^2 + a c x^3 + a d x^4 + \text{etc.} = a + 2 b x + 3 c x^2 + 4 d x^3 + 5 e x^4 + \text{etc.}$$

und daraus ergeben sich die Gleichungen

$$2 b = a^2;\ 3 c = a b;\ 4 d = a c;\ 5 e = a d;\ \text{u. s. w.}$$

$$\text{oder } b = \frac{a^2}{1.2};\ c = \frac{a^3}{1.2\,3};\ d = \frac{a^4}{1.2.3.4};\ e = \frac{a^5}{1.2.3.4.5}\ \text{u. s. w.}$$

und für B^x ist nun folgende Reihe gefunden:

$$B^x = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{1\,.\,2} + \frac{a^3 x^3}{1.2.3} + \frac{a^4 x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Schreibt man diese Gleichung in der abgekürzten Form $B^x = 1 + K$ und nimmt davon die natürlichen Logarithmen, so wird

$$x\,.\,lB = K - \frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{3}K^3 - \text{etc}$$

und hierin müssen die Coefficienten der ersten Potenz von x übereinstimmen; daher ist $a = lB$.

In dem §. 5 kam bei der Reihe für Log $(1+x)$ für die beliebige Basis B ebenfalls eine willkührliche Constante vor, welche der Modul des Logarithmensystems genannt wurde und den Werth $\frac{1}{lB}$ hatte und bei der Umkehrung jener Reihe tritt hier eine willkührliche Constante auf, welche der reciproke Werth von jener ist. Man kann nun also die allgemeine Exponentialfunction

$$B^x = 1 + (lB) \cdot x + \frac{(lB)^2 \cdot x^2}{1 \cdot 2} + \frac{(lB)^3 \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

setzen und diese Gleichung geht, wenn für B die Basis e des natürlichen Logarithmensystems eingesetzt wird, in folgende Gleichung über:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

aus welcher sich für $x = 1$ der Werth der Grundzahl

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.} = 2{,}718281828$$

ergiebt.

§. 11.

Zusammenhang zwischen Exponentialfunctionen und Kreisfunctionen; die Leibnitz'sche Reihe.

Zwischen der Exponentialfunction e^x und den Kreisfunctionen sin. x und cos. x lässt sich ein merkwürdiger Zusammenhang nachweisen, bei dessen näherer Untersuchung man durch die natürlichen Logarithmen zur Leibnitz'schen Reihe gelangt. Setzt man nämlich in die Gleichung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

für x zuerst den Werth ix und dann — ix ein, so entstehen die Gleichungen

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{1.2} - \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{ix^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{1.2} + \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{ix^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

welche sich in folgender, abgekürzter Form schreiben lassen:

$$e^{ix} = \cos. x + i \sin. x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

$$e^{-ix} = \cos. x - i \sin. x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Hieraus erhält man ferner, wenn man die Gleichungen addirt und die Summe durch 2 dividirt

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos. x$$

und wenn man die Gleichungen subtrahirt und den Rest durch 2i dividirt

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin. x$$

Wenn man aber die Gleichungen 1) und 2) dividirt, so wird

$$e^{2ix} = \frac{\cos. x + i \sin. x}{\cos. x - i \sin. x} = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\, x}{1 - i\,\mathrm{tg}\, x}$$

sein und nimmt man von dieser Gleichung die natürlichen Logarithmen, so ist

$$2\,i\,x = l\left(\frac{1 + i\,tg\,x}{1 - i\,tg\,x}\right).$$

Für die rechte Seite dieser Gleichung kann man leicht eine unendliche Reihe erhalten, wenn man die Gleichung aus dem §. 6

$$l\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = 2\left(x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 + \text{etc.}\right)$$

zu Hilfe nimmt. Denn setzt man für x den Werth i tg x ein, so wird

$$l\left(\frac{1 + i\,tg\,x}{1 - i\,tg\,x}\right) = 2\left(i\,tg\,x + \frac{1}{3}\,i^3\,tg\,x^3 + \frac{1}{5}\,i^5\,tg\,x^5 + \text{etc.}\right) = 2i\left(tg\,x - \frac{1}{3}\,tg\,x^3 + \frac{1}{5}\,tg\,x^5 - \text{etc.}\right)$$

und es ist nun auch

$$2i\,x = 2i\left(tg\,x - \frac{1}{3}\,tg\,x^3 + \frac{1}{5}\,tg\,x^5 - \text{etc.}\right)$$

oder $$x = tg\,x - \frac{1}{3}\,tg\,x^3 + \frac{1}{5}\,tg\,x^5 - \frac{1}{7}\,tg\,x^7 + \text{etc.}$$

und setzt man $\frac{\pi}{4}$ für x ein, so erhält man die Leibnitz'sche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

Eine ähnliche und zur Berechnung der Zahl π eben so wenig brauchbare Reihe findet man, wenn man die Entwickelung der Zahl x nach Potenzen ihres Sinus benutzt. Die Gleichung des §. 9

$$x = \sin.\,x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin.\,x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{\sin.\,x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{\sin.\,x^7}{7} + \text{etc.}$$

giebt nämlich, wenn man $\frac{\pi}{6}$ für x einsetzt, da $\sin.\,\frac{\pi}{6} = 0{,}5$ ist,

$$\frac{\pi}{6} = 0{,}5 + \frac{1\,.\,0{,}5^3}{2\,.\,3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{0{,}5^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,.\,\frac{0{,}5^7}{7} + \text{etc.}$$

§. 12.

Directe Entwickelung der Zahl x nach Potenzen ihrer Tangente; Berechnung der Zahl π.

Bei der Entwickelung der Zahl x nach Potenzen ihrer Tangente geht man von folgender Reihe aus:

$$x = a\,tg\,x + b\,tg\,x^3 + c\,tg\,x^5 + d\,tg\,x^7 + \text{et.}$$

denn die geraden Potenzen von tg x können in die Reihe nicht aufgenommen werden, weil dann die Summe der Reihe nicht in den entgegengesetzten Werth übergehen könnte, sobald für x der Werth — x eingesetzt wird. Schreibt man nun y statt x und zieht die Gleichung

$$y = a\,tg\,y + b\,tg\,y^3 + c\,tg\,y^5 + d\,tg\,y^7 + \text{etc.}$$

von der ersten ab, so erhält man

$$x - y = a\,(\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y) + b\,(\mathrm{tg}\,x^3 - \mathrm{tg}\,y^3) + c\,(\mathrm{tg}\,x^5 - \mathrm{tg}\,y^5) + \text{etc.}$$

und die Division durch ($\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y$) giebt:

$$\frac{x-y}{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y} = a + b(\mathrm{tg}\,x^2 + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y + \mathrm{tg}\,y^2) + c(\mathrm{tg}\,x^4 + \mathrm{tg}\,x^3\,\mathrm{tg}\,y + \mathrm{tg}\,x^2\,\mathrm{tg}\,y^2 + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y^3 + \mathrm{tg}\,y^4) + \text{etc.}$$

Nun kann man für $\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y$ den Ausdruck $\frac{\sin.\,(x-y)}{\cos.\,x\,\cos.\,y}$ setzen, also für die linke Seite der letzten Gleichung

$$\frac{\cos.\,x\,\cos.\,y}{\left[\frac{\sin.\,(x-y)}{x-y}\right]}$$

schreiben und wenn dann für y der Werth x in die Gleichung eingesetzt wird, so nimmt sie die Form an

$$\cos.\,x^2 = a + 3\,b\,\mathrm{tg}\,x^2 + 5\,c\,\mathrm{tg}\,x^4 + 8\,d\,\mathrm{tg}\,x^6 + \text{etc.}$$

weil der Bruch $\frac{\sin.\,o}{o}$ die Zahl 1 bedeutet. Da man aber für $\cos.\,x^2$ den Bruch $\frac{1}{\sec.\,x^2}$ und dafür $\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,x^2}$ setzen darf, so enthält die Gleichung

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,x^2} = a + 3\,b\,\mathrm{tg}\,x^2 + 5\,c\,\mathrm{tg}\,x^4 + 7\,d\,\mathrm{tg}\,x^6 + \text{etc.}$$

nur die geraden Potenzen von $\mathrm{tg}\,x$ und wenn man den Nenner fortgeschafft hat, so führt die neue Gleichung

$$1 = a + (a + 3\,b)\,\mathrm{tg}\,x^2 + (3\,b + 5\,c)\,\mathrm{tg}\,x^4 + (5\,c + 7\,d)\,\mathrm{tg}\,x^6 + \text{etc.}$$

auf die Bestimmungsgleichungen

$$a = 1\,;\; 3\,b + a = o\,;\; 5\,c + 3\,b = o\,;\; 7\,d + 5\,c = o;\ \text{u. s. w.}$$

oder

$$a = 1\,;\; b = -\frac{1}{3}\,;\; c = \frac{1}{5}\,;\; d = -\frac{1}{7}\,;\ \text{u. s. w.}$$

Die Entwickelung der Zahl x nach Potenzen ihrer Tangente wird also durch die Gleichung angegeben

$$x = \mathrm{tg}\,x - \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,x^3 + \frac{1}{5}\,\mathrm{tg}\,x^5 - \frac{1}{7}\,\mathrm{tg}\,x^7 + \text{etc.}$$

Um eine bequemere Berechnung der Zahl π, als sie die Leibnitzsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

gewährt, möglich zu machen, theilt man $\frac{\pi}{4}$ in zwei Theile $a + b$, entwickelt jeden Theil nach Potenzen seiner Tangente und addirt die Summen der beiden unendlichen Reihen. So hat Euler die beiden Theile gewählt, deren Tangenten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ betragen und wirklich lässt sich $\frac{\pi}{4}$ in solche Theile a und b zerlegen, denn wenn man von der Gleichung $\frac{\pi}{4} = a + b$ die Tangenten nimmt, so muss

$$1 = \frac{\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b}{1 - \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b}$$

werden und diese Bedingung wird erfüllt, menn man $\frac{1}{2}$ für $\mathrm{tg}\,a$ und $\frac{1}{3}$ für $\mathrm{tg}\,b$ einsetzt. Hiernach ergeben sich für $\frac{\pi}{4}$ die beiden Reihen

$$\pi = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \text{etc.}\right\} + \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \text{etc.}\right\}$$

In neuerer Zeit hat man einer andern Theilung der Zahl $\frac{\pi}{4}$ in zwei Theile den Vorzug gegeben, weil dieselbe auf zwei Reihen führt, welche sich zur Berechnung der Zahl π besser eignen, da sie stärker convergiren. Man wählt nämlich einen Theil 4 a, der aber mehr als $\frac{\pi}{4}$ da $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$ sein soll und fügt noch einen passenden negativen Theil — b hinzu. Ist $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$, so muss $\operatorname{tg} 2a = \frac{5}{12}$ und $\operatorname{tg} 4a = \frac{120}{119}$ sein. Da nun $b = 4a - \frac{\pi}{4}$ wird, so ergiebt sich für $\operatorname{tg} b$ der Bruch $\frac{\operatorname{tg} 4a - 1}{1 + \operatorname{tg} 4a}$ od. $\frac{1}{239}$ und die beiden Reihen für $\frac{\pi}{4}$ sind dann:

$$\frac{\pi}{4} = 4a - b = 4\left(0{,}2 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}2^3 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}2^5 - \frac{1}{7}\cdot 0{,}2^7 + \text{etc.}\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\,.\,239}^3 + \frac{1}{5\,.\,239}^5 - \text{etc.}\right)$$

§. 13.

Die cubischen Gleichungen und der Moivre'sche Lehrsatz.

Wenn man die Gleichungen $x - 1 = 0$ und $x^2 + x + 1 = o$ mulitplicirt, so entsteht die reine cubische Gleichung $x^3 = 1$, deren drei Wurzeln sich aus den beiden genannten Factoren ergeben. Man findet für x einen reellen Werth 1 und zwei imaginaire Werthe $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, welche durch die Buchstaben J und J^1 vorgestellt werden sollen. Diese imaginairen Grössen J u. J^1 haben also die Eigenschaft, dass ihr Cubus 1 beträgt und da das Product derselben ebenfalls 1 ist, so wird sich $\frac{1}{J}$ mit J^1 und $\frac{1}{J^1}$ mit J vertauschen lassen.

Hat nun die reine cubische Gleichung die Form $x^3 = a$, wobei a eine beliebige positive, oder negative Zahl bedeutet, so lassen sich leicht drei Grössen nennen, deren Cubus a beträgt, welche also die Wurzeln der Gleichung $x^3 = a$ sein müssen, nämlich:

$$\sqrt[3]{a}\,;\quad J\sqrt[3]{a}\,;\quad J^1\sqrt[3]{a}.$$

Es macht also die Auflösung der reinen cubischen Gleichung gar keine Schwierigkeit und immer gehören dazu eine reelle Wurzel und zwei imaginaire Wurzeln.

Man kann jede auf o gebrachte cubische Gleichung entstanden denken aus der Multiplikation dreier Gleichungen von der Form

$$x - a = o\,;\; x - b = o\,;\; x - c = o\,.$$

Die cubische Gleichung heisst dann

$$x^3 - (a + b + c)\,x^2 + (ab + bc + ca)\,x - abc = o$$

und hat die Wurzeln a; b; c und man übersieht leicht den Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der cubischen Gleichung. Immer muss bei einer geordneten, auf o gebrachten cubischen Gleichung der Coefficient der zweiten Potenz der unbekannten Grösse das Entgegengesetzte von der Summe der drei Wurzeln, der Coefficient der ersten Potenz die Summe der Wurzelproducte zu zweien und der Coefficient der o^{ten} Potenz das Entgegengesetzte von dem Producte aller drei Wurzeln sein.

Sieht man die cubische Gleichung als das Product einer Gleichung des ersten Grades und einer quadratischen Gleichung an, so erkennt man sogleich, dass es nur zwei Arten von cubischen Gleichungen geben kann, nämlich cubische Gleichungen mit drei reellen Wurzeln und cubische Gleichungen, welche neben einer reellen Wurzel noch zwei imaginaire Wurzeln haben.

Die Schwierigkeiten, welche die Auflösung einer nicht reinen cubischen Gleichung darbietet, lassen sich immer dadurch überwinden, dass man zur reinen cubischen Gleichung übergeht und dieses geschieht auf folgende Art. Zuerst muss man die unbekannten drei Wurzeln der vollständigen Gleichung

$$z^3 + A z^2 + B z + C = o$$

so verändern, dass ihre Summe o beträgt und da die Summe der jetzigen Wurzeln — A ist, so geht man zu einer Gleichung über, deren unbekannte Grösse x die Grösse z um $\frac{A}{3}$ übertrifft und diese Gleichung muss man erhalten, wenn man in die gegebene Gleichung für z seinen Werth $x - \frac{A}{3}$ aus der Gleichung $x = z + \frac{A}{3}$ einsetzt. Natürlich wird dann die Gleichung mit der neuen unbekannten Grösse x die Form haben müssen

$$x^3 + a x + b = o$$

und von dieser Form der cubischen Gleichung ist immer der Uebergang zu einer reinen cubischen Gleichung möglich. Denn geht man zunächst zu einer unbestimmten Aufgabe über, indem man die Grösse x in die beiden unbekannten Theile m und n zerlegt, so verwandelt sich die Gleichung

$$x^3 + a x + b = o \text{ für } x = m + n$$

in folgende Gleichung mit zwei unbekannten Grössen m und n:

$$\left.\begin{matrix} m^3 + 3 m^2 n + 3 m n^2 + n^3 \\ + \quad a m + \quad a n \quad + b \end{matrix}\right\} = o$$

Da aber die Bestimmung der beiden Unbekannten in dieser Gleichung eine unbestimmte Aufgabe ist, so muss man diese dadurch wieder in eine bestimmte Aufgabe verwandeln, dass man eine zweite Gleichung mit m und n hinzuwählt und wenn diese zweite Gleichung

$$3 m n + a = o$$

heisst, so nimmt die vorige Gleichung die viel einfachere Form

$$m^3 + n^3 + b = o$$

an und setzt man in diese Gleichung für n seinen Werth $\frac{-a}{3m}$ ein, so erhält man

$$m^3 - \frac{a^3}{27 m^3} + b = o\text{, oder } \left(m^3\right)^2 + b\, m^3 = \frac{a^3}{27}.$$

Aus dieser Gleichung gewinnt man nun die reine cubische Gleichung

$$m^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}\right)}.$$

Setzt man, der Kürze wegen, für die rechte Seite der letzten Gleichung den Buchstaben K, so erhält man für m die drei Werthe

$$\sqrt[3]{K}\,;\ J\sqrt[3]{K}\,;\ J^1\sqrt[3]{K} \quad \text{und für n} \ldots \quad \frac{\left(-\frac{a}{3}\right)}{\sqrt[3]{K}}\,;\ \frac{\left(-\frac{a}{3}\right)}{J\sqrt[3]{K}}\,;\ \frac{\left(-\frac{a}{3}\right)}{J^1\sqrt[3]{K}}.$$

Multiplicirt man den Zähler und Nenner der drei Werthe von n mit

$\sqrt[3]{\left\{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}\right)}\right\}}$ und setzt man für $-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}\right)}$ den Buchstaben

K^1, so beträgt das Product $\sqrt[3]{K}\sqrt[3]{K^1}$ eben so viel als der Zähler $\left(-\frac{a}{3}\right)$ und da man J^1 für $\frac{1}{J}$ und J für $\frac{1}{J^1}$ setzen kann, so nehmen die Werthe von n die einfache Form an

$$\sqrt[3]{K^1};\ J^1\sqrt[3]{K^1};\ J\sqrt[3]{K^1}$$

und die Grösse x hat dann die drei Werthe

$$\sqrt[3]{K}+\sqrt[3]{K^1};\ J\sqrt[3]{K}+J^1\sqrt[3]{K^1};\ J^1\sqrt[3]{K}+J\sqrt[3]{K^1}.$$

Es ist hinreichend, wenn man der Quadratwurzel in der Grösse K das Pluszeichen, und in der Grösse K^1 das Minuszeichen vorsetzt, weil das zweite Zeichen doch nur auf eine Wiederholung der drei Werthe von x führt.

Wenn in der Cardanischen Formel $x=\sqrt[3]{K}+\sqrt[3]{K^1}$ der Ausdruck $\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}=o$ ist, so nehmen die Werthe von x folgende Form an:

$$-2\sqrt[3]{\frac{b}{2}};\ -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}\left\{J+J^1\right\};\ -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}\left\{J^1+J\right\},$$

und da $J+J^1=-1$ ist, so hat in solchem Falle die Gleichung $x^3+ax+b=o$ die drei reellen Wurzeln

$$-2\sqrt[3]{\frac{b}{2}};\ \sqrt[3]{\frac{b}{2}};\ \sqrt[3]{\frac{b}{2}};$$

wovon die letzten beiden übereinstimmen; es gehören dann aber auch zu der vollständigen Gleichung

$$z^3+Az^2+Bz+C=o$$

drei reelle Wurzeln, worunter sich zwei gleiche befinden.

Wird der Ausdruck $\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}>o$ — und dieser Fall muss immer eintreten, wenn a positiv, aber auch, wenn a negativ und zugleich $-\frac{a^3}{27}<\frac{b^2}{4}$ ist — so hat die Gleichung $x^3+ax+b=o$ nur eine reelle Wurzel $x=\sqrt[3]{K}+\sqrt[3]{K^1}$ und zwei sind imaginair

$$x=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{K}+\sqrt[3]{K^1}\right)\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{K}-\sqrt[3]{K^1}\right).$$

Ist endlich der Ausdruck $\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}$ in den Grössen K und K^1 negativ, also a negativ und $-\frac{a^3}{27}>\frac{b^2}{4}$, so tritt in allen drei Werthen von x das Imaginaire in beiden Cubikwurzeln auf; aber gerade dann lässt sich nachweisen, dass die Gleichung

$$x^3+ax+b=o$$

drei reelle und zwar verschiedene Wurzeln haben muss, weil in jedem scheinbar imaginairen Werthe von x sich die imaginairen Glieder vollständig aufheben.

Um dieses auf die einfachste Art zu zeigen, nimmt man den Moivre'schen Lehrsatz zu Hilfe, welcher behauptet, dass für jeden Werth von n

$$(\cos. x \pm i \sin. x)^n = \cos. nx \pm i \sin. nx$$

sei. Es ergiebt sich aber die Richtigkeit dieses Satzes sehr einfach aus den Gleichungen des §. 11

$$e^{ix} = \cos. x + i \sin. x$$
$$e^{-ix} = \cos. x - i \sin. x,$$

welche sich auch in der kürzeren Form schreiben lassen

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin. x.$$

Denn giebt man hierin der veränderlichen Grösse x den Werth n x, so entsteht die Gleichung

$$e^{\pm inx} = \cos. nx \pm i \sin. nx$$

und da man für $e^{\pm inx}$ die Potenz $\left(e^{\pm ix}\right)^n$ und dafür $\left(\cos. x \pm i \sin. x\right)^n$ setzen darf, so ist wirklich

$$(\cos. x \pm \sin. x)^n = \cos. nx \pm i \sin. nx.$$

§. 14.

Der sogenannte irreducible Fall.

Um nun mit Hilfe des Moivre'schen Satzes, für den Fall dass a negativ und $-\frac{a^3}{27} > \frac{b^2}{4}$ ist, das Imaginaire aus den Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + ax + b = o$$

zu beseitigen, muss man die Grössen K und K^1 umformen.

Es ist nämlich

$$K = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}\right)} = -\frac{b}{2} + \sqrt{-\frac{a^3}{27}\left(-1 + \frac{b^2 . 27}{4(-a^3)}\right)} = -\frac{b}{2} + \sqrt{-\frac{a^3}{27} . (-1)\left(1 - \frac{b^2 . 27}{(4-a^3)}\right)}$$

$$= -\frac{b}{2} + i\sqrt{-\frac{a^3}{27}}\sqrt{\left(1 - \frac{b^2 . 27}{4(-a^3)}\right)}$$

und für die Grösse K^1 findet man den Werth

$$K^1 = -\frac{b}{2} - i\sqrt{-\frac{a^3}{27}} . \sqrt{\left(1 - \frac{b^2 . 27}{4(-a^3)}\right)}$$

Wird nun der Bruch $\frac{b^2 . 27}{4(-a^3)}$, welcher in dem vorliegenden Falle immer weniger als 1 beträgt, mit $\cos. M^2$ vertauscht, so erhält man

$$K = -\frac{b}{2} + i\sqrt{-\frac{a^3}{27}}\sqrt{(1 - \cos. M^2)} = -\frac{b}{2} + i \sin. M \sqrt{-\frac{a^3}{27}}$$

und

$$K^1 = -\frac{b}{2} - i \sin. M \sqrt{-\frac{a^3}{27}}$$

Da aber $\frac{b^2}{4} = \cos. M^2 . \left(-\frac{a^3}{27}\right)$, also $-\frac{b}{2} = -\cos. M \sqrt{-\frac{a^3}{27}}$ ist, so nehmen die Grössen K und K^1 folgende Formen an:

$$K = -\cos. M \sqrt{-\frac{a^3}{27}} + i \sin. M \sqrt{-\frac{a^3}{27}} = -\sqrt{-\frac{a^3}{27}} \left\{ \cos. M - i \sin. M \right\}$$

$$K^1 = -\cos M \sqrt{-\frac{a^3}{27}} - i \sin. M \sqrt{-\frac{a^3}{27}} = -\sqrt{-\frac{a^3}{27}} \left\{ \cos. M + i \sin. M \right\}$$

und die drei Wurzeln der cubischen Gleichung lassen sich nun auf folgende Art schreiben:

$$1)\ \left(-\sqrt{-\frac{a^2}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ (\cos. M - i \sin. M)^{\frac{1}{3}} + (\cos. M + i \sin. M)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$2)\ \left(-\sqrt{-\frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} (\cos. M - i \sin. M)^{\frac{1}{3}} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} (\cos. M + i \sin. M)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$3)\ \left(-\sqrt{-\frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} (\cos. M - i \sin. M)^{\frac{1}{3}} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} (\cos. M + i \sin. M)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

und da nach dem Moivreschen Lehrsatze

$$(\cos. M \pm i \sin. M)^{\frac{1}{3}} = \cos. \frac{M}{3} \pm i \sin. \frac{M}{3}$$

und $\left(-\sqrt{-\frac{a^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$ ist, so reduciren sich die drei Wurzeln auf folgende drei reelle Grössen:

$$1)\ -2 \cos. \frac{M}{3} \sqrt{-\frac{a}{3}}$$

$$2)\ -\sqrt{-\frac{a}{3}} \left\{ -\cos. \frac{M}{3} + \sin. \frac{M}{3} . \sqrt{3} \right\} = \sqrt{-\frac{a}{3}} \left\{ \cos. \frac{M}{3} - \sin. \frac{M}{3} . \sqrt{3} \right\}$$

$$3)\ -\sqrt{-\frac{a}{3}} \left\{ -\cos. \frac{M}{3} - \sin. \frac{M}{3} . \sqrt{3} \right\} = \sqrt{-\frac{a}{3}} \left\{ \cos. \frac{M}{3} + \sin. \frac{M}{3} . \sqrt{3} \right\}$$

Schreibt man aber für die beiden letzten Wurzeln, indem man dieselben mit 2 multiplicirt und durch 2 dividirt

$$2 \left\{ \frac{1}{2} \cos. \frac{M}{3} \mp \frac{1}{2} \sqrt{3} . \sin. \frac{M}{3} \right\} \sqrt{-\frac{a}{3}} .$$

so kann man für die Coefficienten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ die Werthe sin. 30^0 und cos. 30^0 setzen und dadurch nehmen alle drei reelle Wurzeln die Form von Factoren an, welche allein für die Rechnung mit Logarithmen geeignet ist. Die drei Wurzeln heissen nun

$$-2 \cos. \frac{M}{3} \sqrt{-\frac{a}{3}} \text{ und } 2 \sin. \left(30^0 \mp \frac{M}{3}\right) \sqrt{-\frac{a}{3}} .$$

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man die Grössen K und K^1 der Cardanischen Formel in folgender Form schreibt:

$$K = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}\right)} = -\frac{b}{2} + \sqrt{-\frac{b^2}{4}\left(\frac{-4a^3}{27b^2} - 1\right)} = -\frac{b}{2} \left\{ 1 - i \sqrt{\left(\frac{-4a^3}{27b^2} - 1\right)} \right\}$$

$$K^1 = -\frac{b}{2} \left\{ 1 + i \sqrt{\left(\frac{-4a^3}{27b^2} - 1\right)} \right\}$$

Setzt man nämlich für den Bruch $-\frac{4a^3}{27b^2}$, welcher in dem vorliegenden Falle immer mehr als 1 beträgt, sec. M^2, so erhält man

$$K = -\frac{b}{2}\left\{1 - i\sqrt{(\sec. M^2 - 1)}\right\} = -\frac{b}{2}(1 - i \operatorname{tg} M) = -\frac{b}{2\cos. M}(\cos. M - i \sin. M.)$$

$$K^1 = -\frac{b}{2}(1 + i \operatorname{tg} M) = -\frac{b}{2\cos. M}(\cos. M. + i \sin. M)$$

und da sich aus der Gleichung $-\frac{4a^3}{27b^2} = \sec. M^2$ für $-\frac{b}{2\cos. M}$ der Werth $-\sqrt{-\frac{a^3}{27}}$ ergiebt, so stimmen jetzt die Ausdrücke für K und K^1 mit denen, welche in der vorigen Umformung gefunden wurden, genau überein und müssen daher auch auf dieselben drei Wurzeln

$$-2\cos.\frac{M}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} \text{ und } 2\sin.(30^0 \mp \frac{M}{3})\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

führen.

Die drei reellen Wurzeln einer cubischen Gleichung können, wenn dieselbe von der Form $x^3 + ax + b = o$ ist, nicht dasselbe Vorzeichen haben, weil die Summe der Wurzeln o beträgt; es darf also nur eine Wurzel negativ oder nur eine Wurzel positiv sein. Im ersten Falle mögen die ganzen Zahlen -13; $+4$ und $+9$ als Wurzeln der Gleichung $x^3 + ax + b = o$ gelten; dann nehmen die Buchstaben a und b folgende Werthe an: $a = -133$; $b = 468$ und die Auflösung der Gleichung $x^3 - 133x + 468 = o$ wird nun auf jene drei Wurzeln -13; $+4$ und $+9$ führen müssen.

$\text{Cos. } M^2 = \frac{b^2 . 27}{4(-a^3)}$ ist für dieses Beispiel $\frac{234^2}{\left(\frac{133^3}{27}\right)}$, also $\cos. M = \frac{234}{\sqrt{\left(\frac{133^3}{27}\right)}}$ und daraus

$$\begin{cases}\log. 234 = 2,3692159 \\ \log. \sqrt{\frac{133^3}{27}} = 2,4700955\end{cases}$$

folgt $\log. \cos. M = 9,8991204$ und der Winkel $M = 37^0\ 33'\ 34'',1$,

also $\frac{M}{3} = 12^0\ 31'\ 11'',3$: $30^0 - \frac{M}{3} = 17^0\ 28'\ 48'',7$; $30^0 + \frac{M}{3} = 42^0\ 41'\ 11''3$.

Ferner ist $\log. \cos. \frac{M}{3} = 9,9895482$ $\log. \sin. (30^0 - \frac{M}{3}) = 9.4776653$ $\log. \sin. (30^0 + \frac{M}{3}) = 9,8298471$

$$\log. \sqrt{-\frac{a}{3}} = 0,8233651,5 \qquad \log. \sqrt{-\frac{a}{3}} = 0,8233651,5 \qquad \log. \sqrt{-\frac{a}{3}} = 0,8233651,5$$

$$\log. 2 = 0,3010300 \qquad \log. 2 = 0,3010300 \qquad \log. 2 = 0,3010300$$

$$\log. (-x_1) = 1,1139433,5 \qquad \log. x_2 = 0,6020604,5 \qquad \log. x_3 = 0,9542422,5$$

und hieraus ergiebt sich

$$x_1 = -12,99999 \qquad x_2 = 4,000004 \qquad x_3 = 8,999994$$

Im andern Falle mögen die ganzen Zahlen -8; -3 und $+11$ die drei reellen Wurzeln der Gleichung $x^3 + ax + b = o$ vorstellen; dann ist also die Gleichung aufzulösen

$$x^3 - 97x - 264 = 0.$$

$$\log. 132 = 2,1205739$$
$$\log. \sqrt{\left(\frac{97}{3}\right)^3} = 2,2644756$$

Hier wird $\cos. M = \frac{-132}{\sqrt{\left(\frac{97}{3}\right)^3}}$, oder $\cos. (180^0 - M) = \frac{132}{\sqrt{\left(\frac{97}{3}\right)^3}}$ u. $\log. \cos. (180^0 - M) = 9,8560983$

daher ist $180^0 - M = 44^0\ 6'\ 51'',3$ und $M = 135^0\ 53'\ 8'',7$, also wird

$$\frac{M}{3} = 45^0\ 17'\ 42'',9;\ 30^0 - \frac{M}{3} = -15^0\ 17'\ 42'',9;\ 30^0 + \frac{M}{3} = 85^0\ 17'\ 42'',9.$$

Nun ist

$$\log.\cos.\ \frac{M}{3} = 9{,}8472355 \quad \log.\sin. -\left(30^0 - \frac{M}{3}\right) = 9{,}4212634 \quad \log.\sin.\left(30^0 + \frac{M}{3}\right) = 9{,}9985342$$

$$\log.\sqrt{-\frac{a}{3}} = 0{,}7548252 \quad \log.\sqrt{-\frac{a}{3}} = 0{,}7548252 \quad \log.\sqrt{-\frac{a}{3}} = 0{,}7548252$$

$$\log.\ 2 = 0{,}3010300 \quad \log.\ 2 = 0{,}3010300 \quad \log.\ 2 = 0{,}3010300$$

$$\log.\ (-x_1) = 0{,}9030907 \quad \log.\ (-x_2) = 0{,}4771186 \quad \log.\ x_3 = 1{,}0543894$$

und hieraus ergiebt sich

$$x_1 = -8{,}000009 \quad x_2 = -2{,}999981 \quad x_3 = 10{,}99991$$

§. 15.

Directe Berechnung der drei reellen Wurzeln der Gleichung $x^3 + ax + b = o$.

Im vorigen Paragraphen gelangte man zu den drei reellen Wurzeln der cubischen Gleichung auf einem Umwege, denn es musste die Cardanische Formel durch Einführung eines Hilfswinkels so umgeformt werden, dass die Anwendung des Moivre'schen Lehrsatzes und dadurch die Beseitigung des Imaginairen möglich wurde. Die Trigonometrie bietet indessen ausreichende Mittel dar, die cubische Gleichung, wenn sie drei reelle Wurzeln hat, geradezu aufzulösen. Die allgemeine Methode, die Wurzeln der Gleichung $x^3 + ax + b = o$ zu bestimmen, welche auf die Cardanische Formel geführt hat, besteht darin, dass man die Aufgabe zuerst in eine unbestimmte Aufgabe mit zwei unbekannten Grössen verwandelt, indem man die unbekannte Grösse x in zwei unbekannte Theile m und n zerlegt und dann die Bestimmung dieser beiden unbekannten Grössen von der Auflösung einer reinen cubischen Gleichung abhängig macht. Bei der besondern Methode, welche nur bei drei reellen Wurzeln anzuwenden ist, wird auch zuerst die Aufgabe in eine unbestimmte Aufgabe verwandelt, aber nicht die unbekannte Grösse x in zwei Summanden, sondern in zwei unbekannte Factoren p sin. z zerlegt, wodurch es möglich wird, die Bestimmung dieser beiden unbekannten Grössen von der Auflösung einer Gleichung des zweiten und einer Gleichung des ersten Grades abhängig zu machen.

Wenn man nämlich in die Gleichung $x^3 + ax + b = o$ für x das Product p sin z einsetzt, in welchem p stets als eine positive Zahl angesehen werden soll, so kommt man auf die Gleichung

$$p^3 \sin. z^3 + ap \sin. z + b = o \quad \text{oder} \quad \sin. z^3 + \frac{a}{p^2} \sin. z + \frac{b}{p^3} = o$$

und hat nun zur Bestimmung der beiden unbekannten Grössen p und z nur diese cubische Gleichung. Verwandelt man aber die Aufgabe wieder in eine bestimmte, indem man gerade die Gleichung $\frac{a}{p^2} = -\frac{3}{4}$ als die noch fehlende zweite Gleichung mit p und z hinzuzieht, so erhält man mit Hilfe der Trigonometrie noch eine dritte Gleichung mit p und z und kann aus den drei Gleichungen mit p und z zur Bestimmung dieser beiden Unbekannten die passendsten beiden auswählen. Da nämlich in der Trigonometrie die Gleichung $\sin. 3z = 3 \sin. z - 4 \sin. z^3$ abgeleitet wird und diese auf o gebracht und nach Potenzen von sin. z geordnet, in die Gleichung $\sin z^3 - \frac{3}{4} \sin. z + \frac{1}{4} \sin. 3z = o$ übergeht, so stimmen die beiden ersten Glieder dieser Gleichung mit den ersten beiden Gliedern der Gleichung

$$\sin. z^3 + \frac{a}{p^2} \sin. z + \frac{b}{p^3} = o$$

überein, weil $\frac{a}{p^2} = -\frac{3}{4}$ sein soll, also wird nun auch $\frac{1}{4}$ sin. $3z = \frac{b}{p^3}$ sein müssen. Jetzt hat man also aus folgenden drei Gleichungen

$$\sin. z^3 - \frac{3}{4} \sin. z + \frac{b}{p^3} = o\,; \quad \frac{a}{p^2} = -\frac{3}{4} \text{ und } \frac{1}{4} \sin. 3z = \frac{b}{p^3}$$

die geeignetsten zwei Gleichungen zur Bestimmung von p und z auszuwählen. Offenbar verdienen die letzten beiden den Vorzug, da aus der einen $p^2 = 4\left(-\frac{a}{3}\right)$ die unbekannte Grösse p sich durch Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung ergiebt und die andere Gleichung sin. $3z = \frac{4b}{p^3}$ in Bezug auf die unbekannte Grösse sin. 3z sogar nur vom ersten Grade ist.

Um den Gang der Rechnung an einem Zahlenbeispiel zu zeigen, kann man die kurz zuvor behandelte cubische Gleichung $x^3 - 133x + 468 = o$ benutzen. Man hat also folgende zwei Gleichungen aufzulösen:

$$p^2 = \frac{133}{3} \cdot 4 = \frac{532}{3} \text{ und } \sin. 3z = 4 \cdot \frac{468}{p^3} = \frac{1872}{p^3}$$

log. 532 = 2,7259116	3 log. p = 3,3731854,5	z = 17° 28′ 48, 6
log. 3 = 0,4771213	log. 1872 = 3,2723058	x = p sin. z
2 log. p = 2,2487903	d. log. (p^3) = 6,7268145,5—10	log. p = 1,1243951,5
log. p = 1,1243951,5	log. sin. 3z = 9,8991203,5	log. sin. z = 9,4776646,4
	3z = 52° 26′ 25″, 9	log. x = 0,6020597,9
		x = 3,999998

Da die Grösse p nur einen und zwar positiven Werth haben soll, so muss der Winkel z drei Werthe erhalten, welche auf die drei reellen Zahlen für x führen. Nun ist aber zur Bestimmung des Winkels z die Gleichung sin. $3z = \frac{4b}{p^3}$ gegeben, in welcher b eine positive oder negative Zahl sein kann; man findet also aus den Tafeln für 3z einen ersten positiven oder negativen spitzen Winkel und wenn man noch andere Werthe für 3z erhält, so müssen auch diese alle durch 3 dividirt werden, um sie zur Bestimmung von x oder p sin. z zu benutzen. Es nehmen aber die Werthe von 3z, welche der Gleichung sin. $3z = \frac{4b}{p^3}$ genügen, folgende Form an:

1) 3z und der Nebenwinkel 180° — 3z

und hieran schliessen sich zwei unendliche Winkelreihen, indem man beliebig oft 360° zu diesen beiden Winkeln zulegt:

2) 360° + 3z . . 360° + 180° — 3z
3) 2.360° + 3z . . 2.360° + 180° — 3z
4) 3.360° + 3z . . 3.360° + 180° — 3z
— — — — — — — — —

Daraus ergeben sich eben so viele Winkel für z und zwar zuerst der positive oder negative Winkel

1) z . und . 60° — z
2) 120° + z . . 120° + 60° — z
3) 2.120° + z . . 2.120° + 60° — z
4) 3.120° + z . . 3.120° + 60° — z
— — — — — —

Da hier die spätern Winkelpaare, vom vierten an gerechnet, sich von den ersten drei Paaren nur um Vielfache von 360° unterscheiden, also dieselben Sinus haben, so wird man bei der Bestimmung von x durch das Product p sin. für z auch nur diese drei ersten Winkelpaare einsetzen dürfen. Aber auch unter diesen 6 Winkeln haben noch je zwei denselben Sinus, nämlich

$$\begin{array}{lll} 1)\ z & \text{und} & 120^\circ + 60^\circ - z \\ 2)\ 60^\circ - z & - & 120^\circ + z \\ 2)\ 2.120^\circ + 60^\circ - z & - & 2.120^\circ + z \end{array}$$

denn die beiden ersten Paare enthalten Nebenwinkel und bei dem dritten Paare beträgt die Summe $180^\circ + 360^\circ$. Es befinden sich also unter den unzähligen Winkeln für z nur folgende drei, welche verschiedene Sinus haben, nämlich

$$1)\ z \qquad 2)\ 60^\circ - z \qquad 3)\ 2.120^\circ + 60^\circ - z$$

oder wenn man von dem dritten Winkel noch 360° abzieht, wodurch sein Sinus nicht geändert wird,

$$1)\ z \qquad 2)\ 60^\circ - z \qquad 3)\ -(60^\circ + z).$$

Für das aufgestellte Beispiel $x^3 - 133x + 468 = o$, für welches der erste Werth von z $z_1 = 17^\circ\, 28'\, 48'',6$ war, hat man also noch die beiden Werthe $z_2 = 60^\circ - z, = 42^\circ\, 31'\, 11'',4$ und $z_3 = -(60^\circ + z_1) = -77^\circ\, 28'\, 48'',6$ in die Formel $x = p \sin. z$ einzusetzen

$$\begin{array}{rl} \log. p = & 1,1243951,5 \\ \log. \sin. (60^\circ + z_1) = & 9,8298473,2 \\ \hline \log. x_2 = & 0,9542424,7 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log. p = & 1,1243951,5 \\ \log. \sin. (60^\circ - z_1) = & 9,9895481,4 \\ \hline \log. (-x_3) = & 1,1139432,9 \end{array}$$

und dann wird

$$x_2 = 8,99999 \qquad\qquad x_3 = -12,99999$$

Sind von den drei reellen Wurzeln zwei negativ und eine positiv, wie in dem Beispiel $x^3 - 97x - 264 = o$, so erhält man

$$p^2 = \frac{4.97}{3} = \frac{388}{3} \quad \text{und} \quad \sin. 3z = -\frac{4.264}{p^3} = -\frac{1056}{p^3}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 388 = & 2,5888317 \\ \log. 3 = & 0,4771213 \\ \hline 2 \log. p = & 2,1117104 \\ \log. p = & 1,0558552 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 3 \log. p = & 3,1675656 \\ \log. 1056 = & 3,0236639 \\ \hline \text{d. } \log. (p^3) = & 6,8324344-10 \\ \log. \sin. (-3z) = & 9,8560983 \\ -3z = & 45^\circ\, 53'\, 9'',7 \end{array}$$

Für z ergeben sich hiernach folgende drei Werthe:

$$z_1 = -15^\circ\, 17'\, 43'',2; \qquad z_2 = 75^\circ\, 17'\, 43'',2; \qquad z_3 = -44^\circ\, 42'\, 16'',8$$

$$\begin{array}{rl} \log. p = & 1,0558552 \\ \log. \sin. (-z_1) = & 9,4212657,4 \\ \hline \log. (-x_1) = & 0,4771209,4 \end{array} \quad \begin{array}{rl} \log. p = & 1,0558552 \\ \log. \sin. z_2 = & 9,9855374,6 \\ \hline \log. x_2 = & 1,0413926,6 \end{array} \quad \begin{array}{rl} \log. p = & 1,0558552 \\ \log. \sin. (-z_3) = & 9,8472348,1 \\ \hline \log. (-x_3) = & 0,9030900,1 \end{array}$$

und die Werthe von x betragen nun

$$x_1 = -2,999997 \qquad x_2 = 10,99999 \qquad x_3 = -8$$

Gehören zur Gleichung $x^3 + ax + b = o$ drei reelle Wurzeln, von welchen zwei gleich gross sind, so ist $-\frac{a^4}{27} = \frac{b^2}{4}$ und $p^2 = \frac{3}{4}(-a)$, also $p^6 = \frac{64}{27}(-a^3)$ und $p^2 = 8\sqrt{\frac{-a^3}{27}} = 8.\frac{b}{2} = 4^b$

Dadurch wird $\sin. 3z = \frac{4b}{4b} = 1$, also $z_1 = 30^\circ$; $z_2 = 30^\circ$; $z_3 = -90^\circ$

und $x_1 = \frac{1}{2}p$; $x_2 = \frac{1}{2}p$; $x_3 = -p$.

Endlich sollen noch die drei verschiedenen, reellen Wurzeln der Gleichung $x^3 + ax + b = o$, wie sie sich aus der Cardanischen Formel ergeben haben, nämlich:

$$2 \sin. \left(30^\circ \mp \frac{M}{3}\right)\sqrt{-\frac{a}{3}} \text{ und } -2 \cos. \frac{M}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

mit den direct berechneten

$$p \sin. z_1;\ p \sin z_2;\ p \sin. z_3$$

verglichen werden. Der Winkel M war zu bestimmen aus der Gleichung $\cos. M = \frac{b}{2\sqrt{-\frac{a^3}{27}}}$ und für den Winkel $3z$ gilt die Gleichung $\sin. 3z = \frac{4b}{p^3}$. Da aber $p^2 = 4\left(\frac{-a}{3}\right)$ und $p^6 = 64\left(\frac{-a^3}{27}\right)$, also $p^3 = 8\sqrt{-\frac{a^3}{27}}$ ist, so erhält man für $\sin. 3z$ den Werth $\frac{b}{2\sqrt{-\frac{b^3}{27}}}$ und es ist also $\cos. M = \sin. 3z$ oder $\sin. (90^\circ - M) = 3z$, also $3z = 90^\circ - M$.

Hieraus folgt nun, dass z oder $z_1 = 30^\circ - \frac{M}{3}$; $60^\circ - z$, oder $z_2 = 30^\circ + \frac{M}{3}$; $-(60^\circ + z_1)$ oder $z_3 = -\left(90 - \frac{M}{3}\right)$ ist und da $p = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}$, so ist die vollständige Uebereinstimmung der nach beiden Methoden berechneten drei reellen Wurzeln nachgewiesen und zwar fällt

$p \sin. z_1$ mit $2 \sin. \left(30^\circ - \frac{M}{3}\right)\sqrt{-\frac{a}{3}}$; $p \sin. z_2$ mit $2 \sin. \left(30^\circ + \frac{M}{3}\right)\sqrt{-\frac{a}{3}}$

und $p \sin. z_3$ mit $-2 \cos. \frac{M}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$ zusammen, da $\sin. z_3 = \sin. -\left(90^\circ - \frac{M}{3}\right) = +\cos. \frac{M}{3}$ ist.

Chronik der Anstalt.

Das mit dem 2. October c. zu schliessende Schuljahr wurde am 9. Octbr. pr. eröffnet. — Die im vorjähr. Progr. S. 26 ausgesprochene Hoffnung, dass die Realschule bald nach der Revision in die 1. Ordnung erhoben werden würde, erfüllte sich noch vor Ablauf des Jahres, indem das Königl. Provinzial-Schul-Collegium, von Sr. Excellenz dem Herrn Minister der geistlichen etc. Angelegenheiten dazu ermächtigt, die Erhebung in die 1. Ordnung durch Erlass vom 15. Decbr. pr. aussprach (s. unten S. 8). — Am 15. Febr. begaben sich Lehrer und Schüler in feierlichem Zuge nach der Kirche, um an der Jubelfeier zur Erinnerung an den Hubertsburger Frieden und den Beginn der Befreiungskriege Theil zu nehmen. Die Schüler waren an den vorhergehenden Tagen auf die wichtigen Ereignisse, deren bez. 100jähriger und 50jähr. Gedenktag durch einen Gottesdienst gefeiert wurde, in angemessener Weise hingewiesen worden. — Am 17. März fand die öffentliche Schulfeier nach folgendem Programm statt: 1) Nun danket alle Gott, V. 1. u. 2. 2) Gebet, gesprochen von dem Religionslehrer Herrn Trosien. 3) Salvum fac regem. 4) Festrede des Historikers der Realschule, Hrn. Dr. Wiederhold „Ueber Preussens Erhebung im J. 1813". Voran ging eine hist. Uebersicht über den 7jähr. Krieg, und daran schloss sich ein Hinweis auf den bevorstehenden Geburtstug Sr Majestät des Königs. 5) Held Friedrich, 2 V. 6) Der alte Ziethen, 3 V. 7) Vortrag des Primaners G. Hubert: „Wer für sein Vaterland fühlt, denkt nicht an sich." (Aufruf Friedrich Wilhelms III. an sein Heer). 8) Schwertlied, 3 V. 9) Lützow's wilde Jagd, 2 V. 10) Deklamation des Quintaners Zimmermann: „Vor Blücher's Statue" von J. Sturm. 11) Dekl. des Quartaners R. Konopacki: „Auf Scharnhorst's Tod" von M. v. Schenkendorf. 12) Dekl. des Quartaners G. Falkenthal: „Die nächtliche Erscheinung zu Speier" von Wolfg. Müller. 13) Dekl. des Sekundaners G. Merguet: „Bundeslied vor der Schlacht" von Th. Körner. 14) Fürst Blücher 4 V. 15) Wacht am Rhein Schlussgesang, 2 V. — Am 22. März, der in diesem Jahre auf einen Sonntag fiel, nahm die Schule an der kirchlichen Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs Theil. — Zur Nachfeier des Geburtstages Sr. Majestät führten die Primaner des Gymnasiums am 28. März die Captivi des Plautus im antiken Costüm auf, welches auf die gütige Fürsprache Sr. Excellenz des Herrn Ministers der geistl. etc. Angelegenheiten, Herrn Dr. v. Mühler, der Intendant der Königl. Schauspiele, Herr v. Hülsen, hatte übersenden lassen. — Am 17. Juni fiel der Unterricht am Vormittage von 8 Uhr ab aus in Folge der Anwesenheit Ihrer Königlichen Hoheiten des Kronprinzen und der Erau Kronprinzessin. — Am 1. August feierte Se. Excellenz der Oberpräsident der Provinz, Wirkliche Geheimerath Hr. Dr. Eichmann sein 50jähriges Dienst-Jubiläum. Der Unterzeichnete hatte die Ehre, Sr. Excellenz ein Glückwunschschreiben des Lehrer-Collegiums, dem ein von dem Gymnasial-Primaner Friedrich Bahnsch verfertigtes lateinisches Gedicht beigefügt war, zu überreichen. Se. Excellenz nahm nicht nur beides freundlich und wohlwollend auf, sondern erfreute auch kurz darauf das Lehrer-Collegium durch ein Anschreiben. — Se. Excellenz der Hr. Minister der geistl. etc. Angelegenheiten hat dem hiesigen Gymnasium einen Staats-Zuschuss von 1500 Thlr. jährl. überwiesen, über dessen Verwendung, so wie über die Einrichtung des dadurch bedingten Königl. Compatronats die Verhandlungen noch schweben. Hiedurch und durch die Erhebung der Realschule in die 1. Ordnung hat die Anstalt in dem verflossenen Schuljahr einen neuen Beweis des Wohlwollens und des Vertrauens der Hohen Behörden erhalten und wird bestrebt sein, durch ihre Leistungen sich desselben werth zu machen. Es ist zu hoffen, dass auch der Beschluss der städtischen Behörden, nach dem für die erforderlichen Lokalitäten gesorgt werden wird, bald zur Ausführung kommt. Von der Ausführung dieses Beschlusses hängt die fernere gedeihliche Entwickelung der Schule wesentlich ab. Der Unterzeichnete kann es sich nicht versagen, den Hohen Königl. und städtischen Behörden für ihre in diesem Jahre der Schule in so reichlichem Masse bewiesene Fürsorge im Namen der Anstalt den aufrichtigsten Dank auszusprechen. — Während der Sommerferien übernahmen die Herren O.-L. Fischer und Preuss und Hr. Dr. Rumpel den Unterricht in der vorgeschriebenen und in früheren Programmen angegebenen Weise. Es betheiligten sich dabei 47 Schüler, nämlich aus VI. 10, V. 11, IV. G. 6, IV. R. 9, III. G. 2, III R. 9.

Der Gesundheitszustand der Lehrer und Schüler war im Ganzen ein günstiger. Denn wenn auch alle Lehrer — mit Ausnahme der Herren Schaper, Fischer, Kislatis, Metz und des Unterzeichneten — einige Stunden aussetzen mussten, so erlitt doch der Unterricht eine erhebliche Störung nur durch die fortdauernde Krankheit des Herrn Dr. Friedrich, der bereits seit dem 26. Juni in allen seinen Lectionen durch seine Collegen wieder vertreten wird. — Mit dem Schluss des Schuljahrs scheidet aus dem Collegium der Religions- und 6. ord. Gymnasiallehrer Herr Trosien, welcher an das Königl. Friedrichs-Gymnasium in Gumbinnen versetzt worden ist. Drei Jahre, von der Gründung des Gymnasiums ab, hat Hr. Trosien hier zu grossem Segen und mit dem glücklichsten Erfolge gewirkt. Von dem Gefühle des aufrichtigsten Dankes durchdrungen, geleitet ihn die Anstalt mit ihren heissesten Segenswünschen in seine neue Stellung. — In die durch Trosien's Abgang vacant gewordene 6. Stelle ascendirt nach den vom Wohllöbl. Magistrate gefassten und vom Königl. Provinzial-Schul-Collegium bestätigten Beschlusse Hr. Dr. Wiederhold, in die 7. ord. Lehrerstelle Hr. Koch. Als 8. ordentl. Lehrer und Religionslehrer ist Hr. Henning, bisher Lehrer an der Realschule zu Wehlau vom Magistrate berufen und vom Herrn Minister bestätigt worden. — Während der Sommerferien am 18. Juli starb der Realprimaner Grubert an der Kehlkopfschwindsucht, der zu Michaeli d. J. die Abiturienten-Prüfung zu bestehen gehofft hatte. Die in der Stadt anwesenden Lehrer und Schüler geleiteten ihn zu Grabe, und nach den Ferien gedachte seiner in ergreifender Weise in der Morgenandacht sein Klassenlehrer, Hr. Trosien.

Am 31. August v. J. (s. vorj. Progr. S. 27) zählte die Anstalt:

295	Schüler, d. Gymn.	162,	d. Realschule 133;	ausserdem d. Vorsch.	53 Sch.;	am Schlusse des vor. Schulj.
282	„ „	153,	„ 129;	„ „ „	53 „ ;	am Anfange dieses Schulj.
331	„ „	181,	„ 150;	„ „ „	43 „ ;	am Schlusse d. Winterhalbj.
318	„ „	182,	„ 136;	„ „ „	40 „ ;	am Anfange d. Sommerhalbj.
333	„ „	192,	„ 141;	„ „ „	52 „ ;	gegenwärtig (31. August).
316	„ „	186,	„ 130;	„ „ „	54 „ .	

Davon sind in I. G. 14, I. R. 14, II. G. 21, II. R. 40, III. G. 22, III. R. 43, IV. G. 28, IV. R. 33, V. 52, VI. 49. Aufgenommen wurden zu und nach Michaelis: 59; zu und nach Ostern: 22, im Ganzen 81. Abgegangen sind im verflossenen Schuljahr 60 Sch., nämlich mit dem Zeugniss der Reife: 6; zu andern Berufsarten oder auf andere Schulen: 53, nämlich: aus I. G. —, I. R. 2, II. G. 6, II. R. 14, III. G, 5, III. R. 8, IV. G. 2, IV. R. 8, V. 4, VI. 4; gestorben: 1, Von den 316 Schülern, welche gegenwärtig die Anstalt besuchen, sind 164 Einheimische, 152 Auswärtige. In die Vorschule wurden aufgenommen zu und nach Mich.: 13, zu und nach Ostern: 20, im Ganzen 33. Abgegangen sind nach andern Schulen 13, nach Sexta 19, im Ganzen 32. Von den 54 Sch., welche gegenwärtig die Vorschule besuchen, sind 48 Einheimische, 6 Auswärtige, und befinden sich in I. 24, in II. 13, in III. 17.

Uebersicht der Ferien und schulfreien Tage.

Mishaelis 27. Sept. — 8. Oct.; Viehmarkt 13. Oct.; Weihnachten 22. Dec. — 4. Jan.; Viehmarkt 9. Febr.; Abiturienten-Examen 21. Febr.; Jubelfeier 17. März; Ostern 2. — 15. April; Busstag 29. April; Himmelfahrt 14. Mai; Pfingsten 23. — 27. Mai; Viehmarkt 1. Juni; Sommerferien 9. Juli — 5. August; Abiturienten-Examen 24. August. — Ausserdem wurden, wie oben bereits angegeben, in Folge der Anwesenheit Ihrer Königl. Hoheiten des Kronprinzen und der Frau Kronprinzessin 4 Vormittagsstunden am 17. Juni, und wegen übergrosser Hitze die Nachmittagsstunden am 31. Aug. und 1. September ausgesetzt.

Mittheilungen allgemeinen Inhalts aus den Verfügungen der Behörden.

a) Des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums.

7. Octbr. 1862. Der Lehrplan für 1862/63 wird genehmigt. — 20. Oct. Das Hülfsbuch „Preussen unter den Regenten aus dem Hause Hohenzollern“ wird empfohlen. — 31. Oct. „Die Anleitung zur Errichtung von Turnanstalten“ von Angerstein wird empfohlen. — 8. Novbr. und 2. Decbr. Es sind fortan 2 Programm-Exemplare mehr als bisher einzusenden. — 17. Novb. In Ansehung der Zöglinge von höheren Schulen ist das über ihre moralische Qualification der Departements-Prüfungs-Commission einzureichende Attest fortan nicht mehr von den Polizei-Behörden, sondern von den Directoren der betr. Unterrichts-Anstalten auszustellen. — 29. Novbr. Die Weihnachtsferien sollen ausnahmsweise vom 22. Decbr. c. bis 4. Jan. fut. dauern. — 8. Decbr. Betr. den geogr. Unterricht. — 15. Dec. Die mit dem Gymnasium verbundenen Realklassen sind in die erste Ordnung der Realschulen erhoben. — 17. Decbr. Der Bescheid über die am 19/21. August abgehaltene Revision wird übersandt. — 27. Decbr. Der Erlass des Herrn Ministers der geistlichen etc. Angelegenheiten über den Unterricht im Deutschen und in der phil Propädeutik wird mitgetheilt. — 7. Jan. und 1. Juli 1863. Das Urtheil der Königl. Wiss. Prüf.-Commission über die Abiturienten-Prüfungen um Mich. u. Ostern wird übersandt. — 12. Jan. Betr. die Anstellung, bez. Bestätigung der Lehrer. — 20. Jan. Der Ministerial-Erlass vom 9. Mai 1826 wird republicirt, wodurch angeordnet worden ist, dass den von einem andern Gymnasium kommenden Schülern eine höhere Klasse, als die, in welcher sie bis dahin gewesen, nicht angewiesen werden darf; und hinzugefügt, dass solche Schüler erst nach Ablauf eines vollen Semesters in eine höhere Klasse versetzt werden dürfen. — 1. Febr. Das von dem Professor v. Klöden bearbeitete Handbuch der Erdkunde wird empfohlen. — 6. Febr. Der Herr Minister der geistl. etc. Angelegenheiten genehmigt, dass in der Realschule das lat. Uebungsbuch von Lattmann eingeführt werde. — 7. Febr. Für die Theilnahme der Schüler an dem Gemeinde-Gottesdienste am 15. Febr. zur Feier des 100jähr. Gedenktages des Hubertsburger Friedens ist Sorge zu tragen, und sind jene durch eine angemessene histor. Belehrung in der Schule darauf vorzubereiten. Am 17. März fällt der regelmässige Unterricht an diesem Tage aus, und ist statt dessen eine der Bedeutung des Tages angemessene öffentliche Schulfeier zu veranstalten, mit welcher diejenige Berücksichtigung des Geburtstages Sr. Majestät des Königs zu verbinden ist, welche sonst durch das diesjährige Zusammentreffen des 22. März mit einem Sonntage in den Schulen beeinträchtigt werden würde. — 10. Febr. Der Director wird veranlasst, zutreffenden Falls die Bewilligung der Gratification für diejenigen Unterbeamten der Schule, welche die Freiheitskriege von 1813 bis 1815 mitgemacht haben, um welche das Königl. Prov.-Schul-Collegium den Magistrat ersucht hat, seinerseits gleichfalls zu befürworten. — 28. Febr. Auch die mathematischen Prüfungsaufgaben sollen in dem jährlichen Schulprogramme abgedruckt werden. — 13. März. Das Königl. Prov.-Schul-Coll. ist mit den vom Director wegen der hier ausgebrochenen Pockenepidemie getroffenen Massregeln einverstanden und hält dieselben für ausreichend. — 21. März. Die Zeitschrift des Königl. statistischen Bureau's wird empfohlen. — 27. März. Ein Abdruk der Urkunde über die Errichtung des Denkmals Sr. Majestät des Königs Friedrich Wilhelm III. wird übersandt, um solche im Archive der Anstalt aufzubewahren. — 31. März. Das von dem Maler, Prof. Hermann herausgegebene Werk „Geschichte des deutschen Volkes in 15 Bildern“ wird als ein brauchbares Hülfsmittel zur Veranschaulichung und Belebung des Geschichts-Unterrichts empfohlen. — 2. Mai. Der Ministerial-

Erlass vom 10. April wird mitgetheilt, wonach die Tabellen über die Personal-Veränderungen alljährlich im Decbr. einzureichen sind. — 16. Mai. Die Einführung des Lehrgangs der englischen Sprache von Plate wird genehmigt. — 29. Mai. Das evangelische Choralbuch von Heinrich wird empfohlen. — 16. Juni. Ein Epemplar der Festschrift zur Feier des Wohlthäterfestes im Berlinischen Gymnasium zum grauen Kloster wird für die Bibliothek zugefertigt. — 11. Juli. Die Ascension der Herren Dr. Wiederhold und Koch wird genehmigt. — 20. Juli. Das Königl. Prov.-Schul-Coll. übersendet dem Director mit der Aufforderung, sich seinerseits darüber zu äussern, eine Abschrift der an den Magistrat erlassenen Verfügung, in welcher diejenigen Vorschläge mitgetheilt werden, die das Königl. Prov.-Schul-Coll. über die Verwendung des dem Gymnasium bewilligten Staatszuschusses von 1500 Thaler und über die Einrichtung des Königl. Compatronats dem Herrn Minister einzureichen beabsichtigt. — 10. August. Abschrift der an den Magistrat erlassenen Verfügung, nach der der Hr. Minister der geistlichen etc. Angelegenheiten durch ~~Etat~~ vom 6. August die Anstellung des Predigts- und Schulamts-Kandidaten Henning als Religions- und achten ordentlichen Lehrer mit dem etatsmässigen Gehalte genehmigt hat.

b) Der Königlichen Regierung zu Gumbinnen.

3. Mai. Die Abänderungen des Regulativs für das Gewerbe-Institut werden mitgetheilt.

c) Des Magistrats.

22. September 1862. Die Vocation für den G.-L. Dr. Schaefer wird übersandt. — 2. März 1863. Der Magistrat bedauert, dass ihm keine Geldmittel zur Disposition stehen, um Unterbeamten eine Gratifikation zum 17. März zu bewilligen. — 7. Juli. Die Freischüler und Immunes sind von der Zahlung des Turngeldes befreit.

Lehrplan von Michael 1862 bis Michael 1863.

I. G. Ordinarius: O.-L. Dr. Schaper.

Religion. Kirchengesch. der ersten 4 Jahrh. Gelesen in der Ursprache Matth. 14—28 u. Ev. Joh. 1—15. — Deutsch. Literaturgesch.: Schiller u. Göthe. Logik nach Trendelenburg Elem. log. Arist. mit Benutzung von Hoffmanns Abriss. 4 wöch. freie Arbb. Metr. Uebb. u. Vorträge über Themata aus der Lit.-Gesch. — Latein. Tac. Ann. II. Cic. in Caecil. in Verrem or. IV. Hor. Odd. I. u. II. Einige Epoden u. Satiren mit Memorirübb., Metr. Uebb., wö. Ex. u. Extpp., Sprechübb., 4 wö. freie Arbb., mündl. Uebersetzen aus Seyfferts Palaestra. Privatim: Cic. Cato maj. Lael. p. Rosc. Amer. Phil. II. — Griechisch. Plato Apol. Crit. Euthyphr. Thuc. I, 66—146. Hom. II. XIII—XVIII. Soph. Antig. Alle 14 T. Ex. u. Extpp. Repetition der Grammatik. Privatim: Hom. II, I—III u. XIX—XXI. — Französisch. Mignet hist. de la rév. fr. chap 9 u. 10. Ponsard, Charlotte Corday. Corneille Horace. Wiederholung u. Erweiterung der Grammat. Alle 14 T. ein Ex. od. Extp. — Hebräisch. Josua 1—12, 21—24. Jesaias 5. Ps. 2, 6, 7, 8, 10, 13, 16—25. Wiederholung der Formlehre. Einübung des Verb. u. wom. mit suff. Repetition der Zahlwörter. Schriftl. Arbb. — Geschichte u. Geographie. Mittelalter bis zur Mitte des 16. Jahrh. Hist. u. geogr. Repet. — Mathematik. Permutatt. Combinatt. Variatt. Binom. Lehrs. (Methode d. unbestimmten Coefficienten). Recurrente Reihen. Entwickelung der gewöhnlichsten Functionen in Reihen. Uebb. in

I. R. Ordinarius: G.-L. Trosien.

Religion. Gesch. d. christl. Kirche bis auf Gregor d. Gr. Lectüre des Ev. Joh. u. der Augustana nebst Einl. in die symbol. BB. Wiederholung der Glaubenslehre. — Deutsch. Literaturgesch. bis 1500. Freie Vorträge. 4 wöch. schriftl. Arbb. nebst Uebb. im Disponiren. Gelesen Nathan der Weise, Emilia Galotti u. Minna v. Barnhelm. — Latein. Verg. Aen. I—III. Georg IV. Ecl. 1 und 2. Privatim, Sall. Iug. — Französisch. Wiederholung und Erweiterung der Grammat. u. franz. Spr. Monatlich 3 Ex. od. Extpp. u. ein Aufsatz. Gelesen: La France littéraire: Fénélon, Racine, Fléchier, Sévigné, La Rochefoucauld, La Bruyère. Privatim: Villemain, La Fontaine, Rollin, Fréderic II., Montesquieu, Béranger. Literar. Einll. u. Sprechübb. — Englisch. Wiederholung u. Erweiterung der Grammatik in engl. Sprache. Alle 14 T. ein Ex. u. Ext. 4 wöch. Aufs. Gelesen: Einiges aus Shakespeare, Macaulay; Byron Prisonner of Chillon u. Mazeppa. Literarische Einleitungen und Sprechübungen. — Gesch. u. Geogr. Mittelalter. Preuss. Gesch. von 1789—1815. Histor. u. geogr. Repett. mit besonderer Berücksichtigung der Colonial-, Industrie- u. Handelsverhältnisse. — Mathematik. Beschreibende Geometrie; sphär. Trigonom.; analyt. Geom.; Ellipse u. Hyperbel. Das Moivre'sche Gesetz; der irreducible Fall der Cardanischen Formel $x^n = a$; Diophantische Gleichgg.; Entwickelung der Zahl x nach Potenzen ihres Sinus. Wiederholung d. Reihen-

Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten u. die zusammengesetzte Zinsrechnung. 2 wöch. freie Arbeiten. — Physik Chemie. Wärmelehre. — Zeichnen. Facultativ I.—III. Singen. Erste Singkl., bestehend aus Schülern I.—IV. 4stimmige Choräle, Lieder, Motetten, Hymnen.

II. G. Ordinarius: G.-L. Dr. Rumpel.

Religion. Einl. in die BB. des A. T. mit ausführlicher Besprechung ihres Inhalts u. Lectüre ausgewählter Abschnitte. Der Brief an die Philipper u. Apostelgesch. I.—XV. in der Ursprache gelesen. — Deutsch. Uebersicht d. Literaturgesch. bis Luther. Aus dem Mittelhochdeutschen übersetzt. (Wackernagel's Edelsteine). Freie Vorträge. Gelesen Jungfr. v. Orleans u. Maria Stuart. Disponirübb. 4wöchentl. Arbb. — Latein. Verg. Aen. VIII.—X.: einige Eklogen. Liv. XXVI, XXVII, XXVIII incl. Privatim: Sall. Iug. XL bis zu Ende. Cic. Lael. Wiederholung und Ergänzung der Grammat. Wöch. Ex. aus Seyffert, mündl. Uebers. Sprachüb. Metr. Uebb. Alle Quartal ein Aufsatz in Obersekunda. — Griechisch. Xenoph. Cyrop. I. Isocr. Panegyr. Hom. Od. I—XVIII theils in der Klasse, theils privatim. Repet. der Forml. Syntax, wöchentl. Ex. — Hebr. Forml. nach Gesenius. Das Verbum mündl. und schriftl. eingeübt. Gelesen: Genesis I—III, VI—IX, XXII, XXXIX—XLIII. — Französisch. Plötz II, 24—50. Alle 14 T. ein Ex. u. Extpp. Vokabellernen. Gelesen: Michaud hist. de la prem. crois. I.—V. und Le diplomate. — Gesch. und Geogr. Oriental. und Griech. Gesch. bis 146 v. Chr. Geogr. von Mittel und Süd-Europa mit besonderer Berücksichtigung der orogr. und hydrogr. Verhältnisse. — Mathematik. Trigonom. Algebra nebst Uebungsaufg. Alle 2—3 Wochen eine häusl. Arbeit. — Physik. Statik u. Anwendung derselben auf die einfachen Maschienen. Magnetism. — Zeichnen und Singen s. I. G.

III. G. Ordinarius: G.-L. Dr. Meissner.

Religion. Die Apostelgesch. u. die Gleichnisse des N. T. gelesen u. erklärt. Erklärung des 4. und 5. Hauptstücks, Wiederholung der andern.

entwickelgg. — Naturwissenschaften. Wiederholung und Fortsetzung der Lehre vom Licht und von der Wellenbewegung überhaupt. Elektricität u. Magnetism. mit mathemat. Begründung. Die Metalloide u. leichteren Metalle in ihren wichtigsten Verbindungen. Wiederholung der schweren Metalle. Einige der hauptsächlichsten organ. Stoffe. Schriftl. Uebb. — Zeichnen. Perspektive u. Schattenkonstrukt. nach Hummel. Zeichnen nach ausgeführten Vorlagen. — Singen, s. I. G.

II. R. Ordinarius: O.-L. Fischer

Religion. Einl. in die BB. des A. T. mit ausführl. Besprechung ihres Inhalts u. Lectüre ausgewählter Stücke. Einzelne Psalmen memorirt. Wiederholung d. N. T. und des Katechism. — Deutsch. Die wichtigsten Fortschritte der Literaturgesch. der älteren Zeit. Das Nibelungenlied (Simrock), Wilhelm Tell, Schiller'sche und Klopstock'sche Gedichte. Disponir- und synonym. Uebb., 4 wöch. Arbb. — Latein. Caes. B. G. I. Ovid. II und III mit Auswahl. Synt. Wiederholung der Forml. wöchentl. Ex. — Französisch. Plötz II, 69—78. Repet. der übrr. Lectt., wöch. 3 Ex. oder Extpp. Die Obersekundaner lieferten auch Aufsätze. Vocabellernen. Gelesen: Michaud hist. de la prem. crois. ch. XIII—XIX. — Englisch. Lehre vom Artikel u. Subst. Wiederhol. des frühern Cursus. Alle 14 T. ein Ex. od. Extp. Die Obersekundaner lieferten auch Aufsätze. Gelesen: Life and voyages of Christophe Columbus by Wash. Irving, 25—31. — Gesch. u. Geogr. Oriental. Völker. Griech. Gesch. bis auf Alexander d. Gr. Preuss. Gesch. von 1749. bis 1815. Repet. der röm. und deutschen Gesch Geogr. der aussereurop. Erdth. und Deutschl. — Mathematik. Stereom. u. Wiederhol. der Trigon. Gleichgg des 2. Gr. Logarithmen u. logarithm. Gleichgg. Umwandelung irrationaler Brüche in period. Kettenbrüche u. period. Kettenbrüche in irrationale Brüche; Rechnung mit imaginären Grössen. Naturwissenschaften. Mineralogie. Botanik nach dem natürl System. Wiederholungen aus d. Zoologie. Mechanische Eigenschaften der Körper. Magnetism. Elektrostatik. Elektrodynamik, vorzugsw. experimentell. Die Nichtmetalle und ihre wichtigsten Verbindgg. — Zeichnen. Freies Handzeichnen nach Vorhängeblättern und ausgeführten Vorlagen. Anfang im geom. Zeichnen u. Perspektive. Singen s. I. G.

III. R. Ordinarius: O.-L. Preuss.

Religion. Die 5 Hauptst. Parabeln Jesu. Apostelgesch. I—XIV. Reformationsgesch. Bibelsprüche u. Lieder. — Deutsch. Uebb. im Dispo-

Abriss der Reformationsgesch. 8 Kirchenlieder. — Deutsch. Decl., Disponir- u. metr. Uebb. Aufsätze. Gelesen Auras u. Gnerlich, Wilh. Tell, Hermann u. Dorothea. — Latein. Caes. B. G. II. u. III. B. C. I—II, 25. Ovid XI—XIII mit Auswahl. Einzelnes memorirt. Privatim: Corn. Nep. Wiederholung der Formlehre, synt. casuum, tpp. et modd., Extpp., wö. Ex. Aus Süpfle Th. I. mündl. u. schriftl. übers. Vokabl. u. Phrasen gelernt. — Griechisch Xenoph. Anab. IV, 4—V, 7. 8. Hom. Od. IV., 241 bis zum Schluss u. IX. Einzelnes memorirt. Wiederholung u. Vervollständigung der Formenlehre. Exerc. — Französisch. Plötz II, 1—23. 2wö. Exercitt. u. Extpp. Lectures choisies die leichtern Stücke. Vokabeln u. Phrasen. — Geschichte. u. Geogr. Deutsche Gesch. bis zum 30jähr. Kriege. Geogr. v. Amerika. Repet. d. Geogr. v. Deutschland. — Mathematik. Planimetrie bis zur Kreismessung. Decimalbr Quadratwurzeln. Gleichgg. Für Obertertia 2wö. schriftl. Arbb. — Naturkunde. Botanik. Anfangsgründe d. Physik. Zeichnen und Singen s. I. G.

IV. G. Ordinarius: G. L. Koch.

Religion. Wiederholung d. bibl. Gesch A. u. N. T. Hauptstücke theils wiederholt, theils neu erlernt. 8 Kirchenlieder u. Sprüche. — Deutsch. Auras u. Gnerlich Th. 2. Einzelnes a. d. Gramm. wiederholt und an die Lecture und den 2wöch. Aufs. angeknüpft. Declamat. — Latein. Wiederholung und Vervollständigung der Formenlehre, das Wichtigste aus d. Synt., Vocabellernen, wöch. Ex. u. Extpp., wiederh. Nep. XIII. bis zu Ende. Phaedrus mit Auswahl. Grotefend Cur. I. Heft 1. — Griech. Grammat. bis zu den verbb. contr. incl., dazu die entsprechenden Stücke aus. d. Leseb. Exercitt. — Französisch. Plötz I.. wöch. Exercitt. u. Extpp. Vokabellernen u. Memorirübb. — Gesch. und Geogr. Griech. Gesch. bis auf Alexander d. Gr. Röm. Gesch. bis Augustus. Geogr. von Europa, besonders Preussen u. Deutschland. — Mathematik und Rechnen. Planimetrie zur Ausmessung der Figuren. Anfangsgründe der Decimalbrr., des Quadratwurzelausziehens u. der Buchstabenrechnung mit Anwendung auf prakt. Rechnungen. — Zeichnen. Ornamentenzeichnen nach Vorhängetafeln. Leicht ausgeführte Gegenstände aus niren u. Definiren, angeknüpft besonders an die Lectüre u. Erklärung des Lesebuchs u. Hebels Schatzkästlein. Erkl. u. Memoriren poet. Stücke. Einige Abschnitte aus der Satzlehre. Alle 2—3 Wochen ein Aufsatz. — Latein. Corn. Nep. Milt.-Dion. Wiederhol. der Formlehre. Synt. casuum. Vokabellernen. Wö. Ex. — Französisch. Plötz II, 1—35. Wöch. Exercitt. u. Extpp. Wiederholgg. u. Vokabellernen. Plötz Lectures II, 9—12. IV, 1—3. Poésie lyr. 5, 8, 9. Einzelnes memorirt. — Englisch. Grammatik u. Lectüre nach Brennecke. Memorirübb. Orthogr.-Uebb. 2wö. Exercitt, wö. Extpp. — Geschichte und Geogr. Deutsche Gesch. bis zur Reformation. Geogr. der ausserdeutschen Länder Europas. Repetit. von Deutschl. — Mathematik und Rechnen. Geometrie: Cambly Abschn. IV. bis VII. Die Quadratwurzeln aus Buchstabenpolynomien; die Kuben und Kubikwurzeln aus dekadischen Zahlen und Buchstabenpolynomien; die Rechnung mit irrationalen und imaginären Grössen; die Gleichgg. d. 1. u. 2. Gr., die arithm. u. geom. Progr., Regula de tri, d. Zins-Rabatt- u. Discontorechnung, die zusammengesetzte Gesellschafts- und Mischungsrechn. — Naturgeschichte. Phänomenologie. Einl. in die Mineralogie. Wirbellose Thiere, besonders Insekten. — Zeichnen. Freihandzeichnen und perspektiv. Linearzeichnen. — Singen s. I. G.

IV. R. Ordinarius: O.-L. Bachmann.

Religion. Wiederholung d. bibl. Gesch. A. u. N. T. Die fünf Hauptstücke. 8 Kirchenlieder und Sprüche. Das Evangelium Lucä gelesen. — Deutsch. Schriftliches und mündliches Nacherzählen des im Lesebuche Gelesenen. Declination. Orthogr. u. Interp. — Latein. Wiederholung u. Vervollständigung d. Formlehre. Einiges aus d. Synt. Vocabellernen, wöch. Exercitt. Gelesen Moiszisstzig Fabel 1—32. Erz. 1—60. Lattmann, Abschn. V. Res graecae 9—48. — Französisch. Nach einer Wiederholung des Pensums von Quinta. Plötz I, 51—86. Memor. v. Vocalb. u. Phrasen. Uebb. im mündl. u. schriftl. Uebers., wöch. Ex. auch Extpp. — Gesch. u. Geogr. Griech. u röm. Gesch. Aussereurop. Erdtheile. Wiederholung v. Preussen und Deutschl. — Mathematik u. Rechnen. Geometrie; Cambly, Abschn. I.—IV. Rechnen mit entgegengesetzten Grössen; die ganzen Potenzen, Decimalbrr., Kettenbrr., die Quadrate der dekadischen Zahlen u. Buchstabenpolynomien, die Quadratwurzeln aus dekadischen Zahlen. Die Proportionen u. einfache Regeldetri mit gradem Verhältniss. Theilungs u. Durchschnittsrechnung. Die Berechnung der Berl. Zeichenschule. — Singen. 2- u. 3stimmige Lieder. Choralmelodd.

der Zinsen u. des Kapitals. — Naturgeschichte. Amphibien, Fische. Botanik nach dem Linné'schen System. — Schreiben nach Vorschriften. — Zeichnen. Freies Handzeichnen nach Vorhängetafeln als Vorübung zum Zeichnen nach d. Natur. Zeichnen nach einfachen Modellen. — Singen comb. m. IV. G.

V. Ordinarius: G.-L. Dr. Schaefer.

Religion. Bibl. Gesch. d. N. T. Die ersten 3 Hauptst. und 10 Kirchenlieder. — Deutsch. Gramm. u. sachl. Erkl. des im Lesebuch Gelesenen. Deklamirübb. Alle 14 Tage eine schriftl. Arbeit. — Latein. Wiederholung u. Vervollständigung der Formenlehre, unregelm. Verba, Einübung des acc. c. inf. und des abl. abs. Uebers. a. d. Lehrbuch mit Auswahl. Vocabellernen, wö. Ex. u. Extpp. — Französisch. Plötz I, 1—59 mit wö. Ex. u. Extpp. — Geographie. Afrika, Asien, Amerika. Wiederhol. v. Europa. — Rechnen. Bruchrechnung und deren Anwendung in leichten Aufgaben der Verhältniss- und Zinsrechnung. Rechn. mit Decimalbrr. Geom. Anschauungen. — Naturgeschichte. Säugethiere, Botanik. — Schreiben nach Vorschriften. — Zeichnen. Freies Handzeichnen grad- und krummliniger Figg. nach Vorhängetafeln. — Singen. 2stimm. Lieder u. Choralmelodien.

VI. Ordinarius G.-L. Dr. Wiederhold.

Religion. Bibl. Gesch. d. A. T. 1. u. 3. Hauptst., Sprüche, 10 Lieder. — Deutsch. Lese- Deklam.- u. orthogr. Uebb., wöch. eine Arbeit oder ein Dictat, Auras u. Gnerlich Th. 1. gel. u. erkl. —. Latein. Die regelm. Formlehre, Uebb. im Uebers. a. d. Leseb., Vokabellernen, Exercitt. — Rechnen. Die 4 Species mit ganzen Zahlen und Brüchen, einfache Anwendungen, Kopfrechnen. — Geographie. Allgemeine Uebersicht. Europa. — Naturgeschichte. Säugethiere. Vögel. Betrachtung einzelner Pflanzentheile zur Einübung der Terminologie. — Schreiben nach gestochenen Vorschrr. — Zeichnen. Vorübb. — Singen. Vorbereitende Gehör- u. Stimmübb. 1stimmige Lieder u. Choralmelodien.

Neu eingeführte Schulbb. Lehrg. d. engl. Spr. von Plate I—III R. Lattmann lat. Uebungsbuch IV R. — Der Lehrplan der Vorschule ist unverändert derselbe geblieben, wie er im Progr. von 1861 S. 30 mitgetheilt ist. — Die Primaner und Secundaner des Gymn. erhielten, wie in dem vorigen Jahre, Gelegenheit, am englischen Privatunterricht, den Herr Koch ertheilte, Theil zu nehmen. Derselbe wird in 2 Abtheill. ertheilt und bringt die Schüler bis zu einer sichern Aussprache, zum richtigen Verständniss eines engl. Prosaikers und Dichters und zur Kenntniss der Grammatik. Leider war die Theilnahme an diesem Unterrichte nicht mehr so lebhaft als in den ersten beiden Jahren.

Themata zu den deutschen, lateinischen, französischen und englischen Aufsätzen in I. u. II.

---

1) Deutsche Themata.

I. G. Auf welchem Vorzuge beruht die Kraft der Demosthenischen (Ciceronianischen) Rede? Aus welchem Gesichtspunkte betrachtet ist die Weltgeschichte ein erhabenes Objekt? Sokrates, seine Ankläger und seine Richter. Die Welt macht Leute. Alles sei Recht, was du thust, doch dabei lass es bewenden, Freund, und enthalte dich ja, alles, was recht ist, zu thun. Wahrem Eifer genügt, dass das Vorhandene vollkommen sei, der falsche will stets, dass das Vollkommene sei (Schiller). Wer früh erwirbt, lernt früh den hohen Werth Der holden Güter dieses Lebens schätzen (Göthe). Welche Stellen aus dem 1. Buch der Oden des Horaz enthalten einen vortheilhaften Vorwurf für die Malerei? Τὸ παρὸν ἀεὶ βαρὺ τοῖς ὑπηκόοις (Thucydides). Ein schönes Streben ist's, den Guten ähnlich werden, Die hier vom höchsten Gut Abbilder sind auf Erden; Doch immer wird das nur ein Bild vom Bilde sein: Du bilde deinem Geist das Urbild selber ein (Rückert). Welche Vortheile gewährt die griechische Weltanschauung dem Dichter? (Klassenarbeit). Ueber den Gegensatz des athenischen und spartanischen Volkscharakters (Klassenarbeit).

I. R. Hagen und Rüdiger, oder: Nisus und Euryalus. Der Krieg als Feind und Freund der Literatur. Ferro nocentius aurum (Chrie). Vorfabel zu Nathan dem Weisen. Das Leben ist der Güter höchstes nicht, Der Uebel grösstes aber ist die Schuld. Charakteristik Saladins in Lessing's Nathan. Wie wirkt die Betrachtung der Natur auf den Menschen? oder: Entstehung und Charakter der englischen Kirche (nach Macaulay). Gebt mir zu thun Das sind edle Gaben, Das Herz kann nicht ruhn, Will zu schaffen haben (Klassenarbeit). Siegfrieds Tod in Hexametern. Weshalb fand das Christenthum leichter bei den Griechen und Römern als bei den Juden Eingang? Verschiedene Auffassung des Soldatenstandes in Wallensteins Lager.

II. G. Hoffnung, eine Quelle der Freude, aber auch des Leides. Der Schild des Aeneas verglichen mit dem Schilde des Achilles. Die Elemente hassen das Gebild der Menschenhand (Klassenarb.). Die Macht der Poesie. Kleine Leiden des menschlichen Lebens. Nisus und Euryalus, frei nach Verg. IX, 175—450. Schuld und Sühne der Johanna in der Jungfrau von Orleans von Schiller. Trostrede des Julus an die klagende Mutter des Euryalus, in Hexametern (vgl. Verg. X, 148—153). Durch welche Gegensätze wird der Tod Siegfrieds ergreifender? Das Glück eine Klippe, das Unglück eine Schule (Klassenarbeit). O, schwer ist's, in der Fremde sterben, unbeweint (Jungfr. v. Orl. II, 7) Chrie. Charakter des Ritters Amias Paulet in Schillers Maria Stuart.

II. R. Monolog des Römers Curtius. Ueber den Patriotismus der alten Römer ~~als~~ Gemälde des häuslichen Lebens in Schillers Lied von der Glocke. Phaëthon nach Ovid. Worauf beruhte das grosse Ansehn der Geistl. im Mittelalter? Argentum et aurum propitii an irati dii negaverint, dubito (Tac. Germ.). Ueber die Nacheiferung als Bildungsmittel. Schutzrede auf unser Klima. Welche Wirkungen äussert Kolonial-Besitz auf einen Staat? (Klassenarb.). Ueber den Nachruhm nach Klopstock's Ode. Johann Parricida's und Tell's That vergl. Wodurch begründete Themistokles die Macht Athens? Die Vortheile der geographischen Verhältnisse Europa's (Ascensionsarbeit).

2) Lateinische Themata.

I. G. Virtutis quam aetatis cursum celeriorem esse. Vis consili expers mole ruit sua, Vim temperatam di quoque provehunt In majus. Trojam non minus hostium discordiis quam civium fortitudine defensam esse. Homo sum, humani nihil a me alienum puto (Terent.) Tempora anni ab Horatio elegantissime esse adumbrata. De argumento et personis Captivorum, fabulae Plautinae. Epistola ad amicum data enarrentur quae superiore hieme acciderint; tota rerum natura verno tempore quasi renascens verbis depingatur; quid per aestivos menses agendum sit, exponatur. Quaeritur, utrum Ismene justis causis permota an vano timore impulsa sororem a fratre sepeliendo retinuerit. Oratio Friderici regis habita ad legatos Romanorum 1154 p. Chr. n. Nulla salus reip. major est quam eos qui alterum accusant non minus de laude, de honore, de fama sua, quam illos qui accusantur de capite ac fortunis suis pertimescere (Cic). Socratem injustissime esse condemnatum (Klassenarb.) Athenienses bene de patria, de universa Graecia melius, optime de genere humano meruisse (Klassenarb.)

II. G. De C. Marcio Coriolano. Alexander et virtute et vitiis patre major. Qua ratione Marius bellum confecerit Iugurthinum. Virtus Nisi et Euryali memoria dignissima.

3. Französische Themata.

I. R. Fin de l'empire d'Occident. Etablissement des barbares dans la Gaule et en particulier des Francs sous Clovis. Origine du théâtre français. Le saint-empire, fondé sous la maison de Saxe. Lutte de Grégoire VII. et de Henri IV. Conradin le dernier rejeton de la race de Hohenstaufen (Klassenarbeit) Hugues Capet. Conquêtes de Philippe-Auguste, roi de France. Lutte de Philippe-le-Bel contre l'Eglise et la féodalité.

II. R. Amasis, roi d'Egypte. Commerce des Phéniciens. L'expédition des Argonautes. Entreprise de Schill. Guerre contre les Messéniens. Bataille de Salamine.

5. Englische Themata.

I. R. Alboin, king of the Lombards. Settlement of the Moors in Spain. Germany delivred from the predatory excursions of the Hungarians by the emperors Henry I. and Otto I. Fall of the Prussian state in 1806. Invasion of England by the Danes. Accession of Rodolph of Habsburg (Klassenarb.) Reign of Henry, emperor of Germany. Immigration of the Saltsburghers into Lithuania (Abitur-Arb.) Establishment of the Swiss Confederacy. Lewis of Bavaria and Frederic of Austria.

II. R. King Psammetichus. Expedition of Darius against the Scythians. The story of King Oedipus. Retreat of Napoleon from Russia. Which measures were taken for the gratification of Columbus after the return from his third voyage? (Nach Washington Irving).

Aufgaben zu den Prüfungs-Arbeiten für die Abiturienten.

A. Im Gymnasium.

Ostern. 1) Im Deutschen: Der kann sich manchen Wunsch gewähren, der kalt sich selbst und seinem Willen lebt: Allein wer And're wohl zu leiten strebt, Muss fähig sein viel zu entbehren. Göthe. 2) Im Lateinischen: Romanos „judices justissimos Domi duellique duellatores optumos fuisse". Plaut. Capt. Prol. 67 seq. 3) Lat. Ex. nach Muret. de laud. litt. II. 4) Griech. Ex. nach Thucyd. I. Plat. Gorg. und Apol. und Demosth. Phil. I. frei zusammengestellt. 5) Französ. Ex. nach Michaud hist. de la première croisade. 6) In der Mathematik: a) Wie gross sind die Radien der Kreise, welche durch 2 Ecken eines Dreiecks und den Punkt gehen, in dem sich die drei Höhen schneiden? b) Für welches Dreieck ist $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = c^2$ und sin. A. sin. B $=$ sin ^{2} C? c) Zwei sich von aussen berührende Kugeln mit den Radien a und b werden von einer Kegelfläche berührt. Wie gross ist der Raum, der von den 3 krummen Flächen begrenzt wird? d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit 4 Würfeln unter 3 Würfen mindestens einmal die Zahl 7 zu werfen?

Michael. 1) Im Deutschen: Wer mit dem Leben spielt, Kommt nie zurecht; Wer sich nicht selbst befiehlt, Bleibt immer nur ein Knecht. Göthe. 2) Im Lateinischen: *Εἴ τις ξυνελὼν φαίη τοὺς Ἀθηναίους πεφυκέναι ἐπὶ τῷ μήτε αὐτοὺς ἔχειν ἡσυχίαν μήτε τοὺς ἄλλους ἀνθρώπους ἐᾶν, ὀρθῶς ἂν εἴποι* Thuc. I, 70, 5. 3) Lat. Ex. nach Macrob. Saturn. I, 1. 4) Griech. Ex. nach Plat. Euthyph. und Thuc. 5) Franz. Ex. nach Borel Gr. 6) Im Hebräischen: I. Könige 3, 5–14. 7) In der Mathematik: a) Ein Winkel eines Dreiecks ist durch eine grade Linie nach dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite in 2 Theile getheilt. Es soll der Unterschied dieser Theile durch die Winkel des Dreiecks ausgedrückt werden. b) Durch eine Ecke eines regulären Tetraeders ist eine Ebene gelegt, welche von der gegenüberliegenden Fläche ein gleichseitiges Dreieck abschneidet, das zur ganzen Fläche in einem gegebenen Verhältniss steht. Welches ist der Inhalt der schneidenden Fläche? c) Durch den Scheitelpunkt eines rechten Winkels, dessen Schenkel von gegebener Länge sind, soll eine gerade Linie so gezogen werden, dass die Summe der Projectionen der Schenkel auf dieser Linie so gross als möglich wird. d) x und y aus den Gleichungen zu bestimmen $x + y = 3$

$$(x^2 + y^2)\ (x^3 + y^3) = 45.$$

B. In der Realschule.

Michael. 1) Im Deutschen: Wo rohe Kräfte sinnlos walten, da kann sich kein Gebild gestalten. 2) Im Französischen ein Exercitium nach Voltaire Siècle de Louis XIV. 3) Im Englischen: Immigration of the Saltsburghers into Lithuania. 4) In den Naturwissenschaften. a) Wie gross ist der Luftdruck gegen Magdeburger Halbkugeln mit einem Durchmesser von 400mm, wenn in ihnen die Luft so weit verdünnt ist, dass ihre Flüssigkeit einem Barometerstande von 60mm bei einer Temperatur von 15° Celsius entspricht, den Druck einer Atmosphäre zu 1033,6gr. auf 1 Quadratcentimeter angenommen. b) Der brechende Winkel eines Prismas von kieselsaurem Bleioxyd betrage 21° 12′; man findet durch die Messung den kleinsten Ablenkungswinkel desselben für einen Strahl vom rothen Lichte $=$ 24° 46′; wie gross ist das Brechungsverhältniss n für diesen Strahl? c) Wieviel Kochsalz, englische Schwefelsäure und Braunstein gebraucht man, um 10 Kubikfuss Chlor bei einer Temperatur von 10° Celsius und normalem Barometerstande darzustellen, wenn das specifische Gewicht des Chlors 2,443 beträgt? (Na = 23; Mn = 27,6). 5) In der Mathematik: a) Zur Zeichnung eines Dreiecks ABC ist ein Winkel A, das Verhältniss der einschliessenden Seiten b : c = 3 : 4 und der Radius R des umbeschriebenen Kreises gegeben. b) $\frac{6x-5}{8x+3} - \frac{4x+1}{10x-5} = \frac{7x+4}{20x-3}$. c) Zur Berechnung eines Dreiecks ist das Verhältniss der Seiten a : b : c = 217 : 231 : 243 und der Radius des umbeschriebenen Kreises R = 76′ gegeben. d) Die Oberfläche eines Würfels beträgt 384 Quadratfuss; man soll von der umbeschriebenen Kugel den Inhalt und die Oberfläche, auch den Inhalt des Kugelsegments berechnen, welches durch eine fortgesetzte Seitenfläche des Würfels abgeschnitten wird.

Das Abiturienten-Examen bestand am 21. Febr. unter dem Vorsitze des Provinzial-Schulraths Herrn Dr. Schrader im Gymnasium 7. Hugo Thoma, 20 J. alt, geb. in Uszpiaunen, Sohn des bereits verstorbenen Oberamtmanns gl. N., der das hiesige Gymnasium 2 Jahr als Primaner besucht hat und in Heidelberg Cameralia zu studiren gedenkt; ferner am 24. August 8. Max Engelhardt, 20½ J. alt, geb. in Königsberg, Sohn des bereits verstorbenen Musiklehrers gl. N., der das hiesige Gymnasium 3 Jahre, und zwar 2 Jahre als Primaner, besucht hat und in Königsberg Philologie zu studiren beabsichtigt.

In der Realschule bestanden an demselben Tage folgende 5 Primaner die Prüfung:

Seit 1836 fortlauf. №	Namen.	Geburtsort.	Stand und Wohnort des Vaters.	Lebensalter.	Aufenthalt in der Anstalt überhaupt Jahre.	Aufenthalt in Prima Jahre.	Gewählter Beruf.	Prädikat, das ihnen ertheilt ist.
144.	Friedrich Knapke	Stallupönen	Schneiderm. in Stallupönen	17	2½	1½	Postfach	Gut
145.	Franz Röder	Kaukern	Gutsbesitzer in Kaukern†	17½	6½	2	Baufach	Genügend
146.	Rudolph Röder	Kaukern	Gutsbesitzer in Kaukern†	16	6½	2½	Kaufmannstand	Gut
147.	Hermann Schon	Stannaitschen	Tischlerm. in Stannaitschen	18½	5	2	Postfach	Gut
148.	Friedrich Steiner	Stallupönen	Färberm. in Stallupönen	18	3½	2	Pharmacie	Gut.

Engelhardt, Knapke, Rud. Röder, Schon und Steiner wurden von der mündlichen Prüfung dispensirt.

Vertheilung der Stunden unter alle Lehrer, wie sie gegenwärtig besteht.

Lehrer.	I. G.	I. R.	II. G.	II. R.	III. G.	III. R.	IV. G.	IV. R.	V.	VI.	Vorkl. 1.	Vorkl. 2.	Vorkl. 3.	Sa.
1. Dr. Krah, Director.	2 Rel. 3 Lat. Hor. u. Privtl.	3 Lat.		4 Lat.	2 Ovid 2 Homer									16
2. Dr. Schaper, 1. Oberlehrer, Ordinarius I. G.	3 Deut. u. Phil. Prop. 5 Lat. 6 Grch.				4 Grch.									18
3. Fischer, 2. Oberl., Ordinarius II. R.		5 Math.		5 Math.		6 Math.		6 Math.						22
4. Dr. Lange, 3. Oberlehrer.	4 Math. 2 Physik.		4 Math. 1 Phys.		4 Math. 2 Naturkde.		3 Math.							20
5. Bachmann, Conr. 4. Oberl., Ord. IV. R.				2 Naturgesch.		2 Naturgesch.		4 Gsch. u. Geog 2 Nat.	9 Lat. 2 Nat.					21
6. Preuss, 5. Oberlehrer. Ord. III. R.	3 Gsch.		3 Gsch. und Geogr.		3 Gsch. u. Geogr.	3 Deut. 5 Lat.	3 Gsch. u. Geogr.							20
7. Dr. Rumpel. 1. ordent. Lehrer, Ord. II. G.			8 Lat. 6 Grch.				6 Grch.							20
8. Dr. Schwarzlose, 2. ordent. Lehrer.		4 Französisch		4 Französisch		4 Französisch		5 Französisch	5 Französisch					22
9. Dr. Friedrich, 3. ordent. Lehrer.					3 Deut.		2 Deut.	3 Deut. 2 Schr.	3 Deut. 2 Schr.	3 Deut. 2 Schr.				20
10. Dr. Meissner, 4. ordent. Lehrer, Ord. III. G.			2 Deut. 2 Virgil		8 Lat.		10 Lat.							22
11. Dr. Schaefer, 5. ordent. Lehrer, Ord. V.		5 Naturwissensch.		4 Phys. und Chem.					4 Rech. 2 Geogr.	5 Rech. 3 Geogr.				23
12. P.-A.-C. Trosien. 6. ordent. Lehrer, Ord. I. R.	2 Hebr.	2 Rel. 3 Deut.	2 Rel. 2 Hebr.	2 Rel.	2 Rel.			6 Lat.						21
13. Dr. Wiederhold, 7. ordent. Lehrer, Ord. VI.		4 Gsch. u. Geogr.		3 Deut. 3 Gsch. u. Geog		4 Gsch. u. Geogr.				9 Lat.				23
14. Koch, 8. ordent. Lehrer, Ord. IV. G.	2 Französisch	3 Engl.	2 Französisch	3 Engl.	2 Französisch	2 Rel. 4 Engl.	2 Rel. 2 Französisch							22
15. Kislatis, Elementar- und Zeichenlehrer.		3 Zeich.		2 Zeich.		2 Zeich.	2 Zeich.	2 Rel. 2 Zeich.	3 Rel. 2 Zeich.	3 Rel. 2 Nat.-gesch. 2 Zeich.				25
16. Metz, Gesanglehrer.	2 Singen						2 Singen		2 Sing.	2 Sing.				8
17. Sackersdorff, 1. Lehrer der Vorschule, Ord. d. 1. u. 2. Vorkl.											6 Deut. 4 Rech.	2 Deut. 4 Rech.	6 Deut. 4 Rech. 4 Schr.	30
18. Eggert, 2. Lehrer der Vorschule, Ord. der 3. Vorkl.											3 Rel. 6 Deut. 4 Schr. 1 Sing.	3 Rel. 7 Deut. 4 Schr.	2 Rel.	30
													Summa	383

Klassen und wöchentliche Stunden.

Fächer.	I G	I R	II G	II R	III G	III R	IV G	IV R	V.	VI.	I. Vorkl.	II. Vorkl.	III. Vorkl.	Summa
1. Religion	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	2	30
2. Deutsch	3	3	2	3	2	3	2	3	3	3	12	9	6	54
3. Latein	8	3	10	4	10	5	10	6	9	9	—	—	—	74
4. Griechisch	6	—	6	—	6	—	6	—	—	—	—	—	—	24
5. Hebräisch	2	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
6. Französisch	2	4	2	4	2	4	2	5	5	—	—	—	—	30
7. Englisch	—	3	—	3	—	4	—	—	—	—	—	—	—	10
8. Geschichte u. Geographie	3	4	3	3	3	4	3	4	2	3	—	—	—	32
9. Naturwissenschaften.	2	5	1	6	2	2	—	2	2	2	—	—	—	24
10. Mathematik Rechnen	4	5	4	5	4	6	3	6	4	5	4	4	4	58
11. Schreiben	—	—	—	—	—	—	—	2	2	3	4	4	4	19
12. Zeichnen	—	3	—	2	—	2	2	2	2	2	—	—	—	15
13. Singen	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	—	—	21
Wö. Stundenzahl	34	34	34	34	33	34	32	34	34	32	24	20	16	395

Durch Combination ab: 12

Wurden wirklich gegeben 383

Dazu kommen im Sommer 4 Turnstunden wöchentlich, welche die Herren Koch und Kislatis ertheilten.

Vermehrung des Lehrapparats.

1) Gymnasial-Bibliothek: Geschenkt wurden ausser 444 Programmen — von Hrn. Superint. Weber: J. G. Jacobi Sämmtl. Werke, Gottsched, Schacht Geogr., Baczko Gesch. Preussens; von Herrn App.-Ger.-Rath Barnheim: Döderlein Synon. und Etym., Falkenstein Gesch. der Buchdruckerkunst; von Herrn Kreisphysikus Dr. Pincus: Schwarz Aeneis; von Herrn Gerichtsrath Sprunck in Gumbinnen: Horatii Carmina cur. Oberlinus; von Herrn Buchhändler Stadtrath Hopf: Monatsberichte der Akadem. der Wissensch. zu Berlin 1859; Rabbinatsverweser Kuttner: Ulmann Koran nebst Weyl Einl. in dens.; vom Unterzeichneten: Bolze Leitfaden z. Unterr. in der Math., Wagner Chemie; von Herrn Universitäts-Buchhändler F. Hirt in Breslau: Seltzsam Leseb. v. Seydlitz Schulgeogr.; vom hiesigen histor.-liter. Leseverein: Aus Schleiermachers Leben, 3 Bde., Blätter zur Erinnerung an Humboldt, Herz Briefe Börne's, Vischer Erinnerungen aus Griechenl., Blum Ein russ. Staatsmann, Herbst Matth. Claudius, Oerstedt Geist in d. Natur, Carlyle Th. 4. 5. 6. und Friedrich d. Gr. 1. 2. Busch, Schlesw.-Holst. Briefe, Goltz Land u. Leute, Herzen Memoiren Katharina's II., Briefwechsel A. v. Humboldt's, Reuchlin Gesch. Ital., Gregorius Geschichte der Stadt Rom, Curtius Griech. Gesch. 1., Prutz Deutsche Liter. der Gegenwart 1. u. 2. — Aus eigenem Fond: Fortsetzungen: Petermann Mitthl., v. Leutsch Philol., Zarncke Centralbl., Crelle Journal, Poggendorff Annalen, Stiehl Centralbl., Schmidt Encykl., Grimm Deutsches Wörterbuch, Kindergarten, Väter der luther. Kirche, Karsten Encykl., Pertz Geschichtsschr. der Vorzeit, Langbein Archiv, Bunsen Bibelwerk, Müller und Zarncke Wörterbuch, Koberstein Grundr., Arnoldt F. A. Wolf Th. 2, Rossbach und Westphal Metr. Th. 2, Scriptt. rer. Pruss. Neu: Goltz Buch der Kindheit. Brieger Erkl. des luth. Kat., Curtmann Leseb. d. Erz. u. d. Unterr., Fiedler Verskunst d. lat. Spr., Völter Wandkarte von Palästina, Schulbilder des A. und N. T., Inductionsglobus v. Brandegger, Angerstein Turnanstalten, Beneke und Lachmann Iwein, Beneke's Wörterbuch dazu, Gödeke Grundriss u. deutsche Dichtungen im Mittelalter, Isaei oratt. ed. Schoemann, Aeschyli tragg. ed Hermann, Blomfieldii Comm. in Aesch. tragg., Cicero de fin. rec. Madvig, Lucretius ed. Lachmann, Viger v. Hermann, Lobeck Parall., Phryn., Pathol., Reliefkarte von Deutschland, Gauss Werke 1., Wüllner Experimentalphys., Engel Zeitschrift, Tischendorf Nov. test. sinait., Henneberger Landtafel von Preussen, Nissen Untersuchgg. über die Quellen des Livius.

2) Schulbücher-Bibliothek: Es schenkten: Hr. Universit.-Buchh. Hirt in Breslau: Schilling Naturg., Seydlitz Schulgeogr., Cambly Math., Auras Leseb.; Hr. Superint. Weber: Rost und Buttmann Griech. Gr., Zumpt Lat. Gr., Mannert Alte Geogr., Schmidt Grundr. der Gesch., Heinel Vaterl. Gesch.; Hr. Stadtr. Buchh. Hopf: Schulgesangb. 4 Exempl.; Hr. G.-L. Koch: Michaud Croisades; Hr. O.-L. Bachmann: Thucyd.; Dir. Krah: Homer Od. ed. Ameis, Hor. Odd. ed. Nauck, satt. et epistt. ed. Krüger; der Primaner R. Kalau: Bonnell Vocabul.; der Sekundaner R. Lottermoser: Schulgesgb. Vega Logar.; der Quartaner R. Cramer: Auras; die Realsekdd.: 2 Ex. von Ovid. Met. Ausserdem wurde eine grosse Anzahl Schulb. angekauft.

3) Schüler-Lesebibliothek (zählt jetzt 1563 Nummern). Geschenkt wurden: Vom hiesigen hist.-liter. Leseverein: König Forsters Leben, Heine Expedit. nach China und Japan, Taylor Centralafrika, Bartel Nationallit., Livingstone Erforschungsreisen, Dufferin Briefe aus den hohen Breitegr., Löher Land und Leute, Carlyle 1. 2. 3.; Wissensch. Vortr. geh. zu München, Heine Japan und seine Bewohner, Andrée Buenos Ayres etc., Müller Aus Jacobi's Garten, Freytag Bilder aus der deutschen Vergangenheit, Kohl Reisen im N.-W. der Ver. Staaten, Männer der Zeit, Beitzke Freiheitskr., Fischer Griech. Staatsmänner, Wolf Ital. Nationallit.; von Hrn. O.-L. Preuss: Grashof Leitf. d. allg. Weltgesch.; von Hrn. Dr. Friedrich: Irving the sketchbook; vom Sekundaner R. Mohr: Schillerbuch; vom Sekund. R. Herzfeld: Dielitz, Hellas und Rom. Aus eigenen Mitteln wurden angeschafft: Forts. von Jean Paul, Jugendfreund, Jugendzeitung, Schmidt Gesch. Preussens 1., dessen Geschichtsbilder aus der deutschen Vorzeit, Müller Blücher, Stolle Sagen des klass. Alterthums, Spiess und Berlet Weltgesch. in Biogr., Thomas Entdeck., v. Horn Biogr., Eckstein Jugendbiblioth. 13. 14., Becker Gallus, Charikles, Kutzen Aus der Zeit des 7jähr. Kriegs, Freudenfeldt u. Pfeffer Preussen unter den Hohenzollern, Voigt Grundr. der pr. brandenb. Gesch., Lossius und Schulze Hist. Bildersaal 5 Bde., Krieg vor 50 Jahren, Haker Nettelbeck, Grosse und Otto Vor 50 Jahren.

4) Die naturhistor. Sammlungen wurden durch ein sehr schönes Exemplar von Pavo cristatus L. (Pfauhahn), ein Geschenk des Herrn Rendanten Wandersleben in Tarputschen, vermehrt.

5) Das physikalische und chemische Kabinet. Aus dem etatsmässigen Fond wurden angeschafft: Platinafeuerzeug, Barometer, Thermometer von 100°—220°, zwei messingene Hohlspiegel von 20" Durchmesser, Plan- und Concavspiegel, Berzelius-Lampe, Kugel nebst Ring, um die Ausdehnung durch Wärme zu zeigen, Mikroskop mit 500facher Vergrösserung nach Oberhäuser, Porcellanschalen, Bechergläser, Retorten und Materialien.

6) Für den Gesang-Unterricht: Strauss liturg. Männerchöre, Möhring 6 Motetten, Mendelssohn-Bartholdy Antigone, Klavierauszug und Stimmen.

Den Hohen Königl. und städtischen Behörden, so wie Allen, die unsere Sammlungen durch Geschenke bereichert haben, sage ich im Namen der Anstalt den wärmsten Dank.

Unterstützungs-Fond für hülfsbedürftige Schüler.

Einnahme seit Michael 1862:

I. Monatliche Beiträge von Schülern der Anstalt:

1) Aus Sexta	12	Thlr.	12	Sgr.	6	Pf.
2) Aus Quinta	17	„	5	„	7	„
3) Aus Quarta R.	8	„	8	„	—	„
4) Aus Quarta G.	7	„	5	„	—	„
5) Aus Tertia R.	8	„	3	„	5	„
6) Aus Tertia G.	7	„	28	„	—	„
7) Aus Secunda R.	6	„	6	„	10	„
8) Aus Secunda G.	7	„	12	„	—	„
9) Aus Prima R,	2	„	7	„	6	„
10) Aus Prima G.	5	„	22	„	—	„
Summa	82	Thlr.	20	Sgr.	10	Pf.
II. Ueberschuss von einer Sammlung	—	„	10	„	—	„
III. Von einem Ungenannten . . .	3	„	—	„	—	„
IV. Zinsen von der Sparkasse . . .	2	„	1	„	1	„
	88	Thlr.	1	Sgr.	11	Pf.
Dazu Bestand vom vorigen Jahre	71	„	18	„	10	„
	159	Thlr.	20	Sgr.	9	Pf.
Ausgabe	72	„	12	„	—	„
Es bleibt Bestand	87	Thlr.	8	Sgr.	9	Pf.

Allen edlen Gebern für die zum Wohlthun reichlich gespendeten Gaben den herzlichsten Dank!

Das nächste Schuljahr wird am Donnerstag, 15. October, Morgens 8 Uhr, eröffnet. Die Aufnahmeprüfungen werden vom 12.—14. October in den Vormittagsstunden in meiner Wohnung stattfinden.

Dr. Krah.