Die ersten, einfachsten Grundbegriffe und Lehren der höheren Analysis und Curvenlehre.

Bearbeitet

von

D. C. L. Lehmus,
Dr. der Philosophie.

Berlin, 1819.
Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

Vorrede.

Der künftige Geschäftsmann, dem in der Folge seine Berufsarbeiten wenig Zeit übrig lassen, in der Wissenschaft fortzuschreiten, und der zugleich während der Dauer seines Studiums sich nicht vorzugsweise mit Mathematik beschäftigen kann, sich aber doch auch mit den höheren Theilen derselben bekannt machen will, wird oft vom Studium der höheren Analysis durch ihren ungemeinen Umfang, welchen das Volumen manches Lehrbuchs derselben gleich ausspricht, abgeschreckt und findet, wenn er sich in gedrängteren Schriften einen Ueberblick erwerben will, den Vortrag häufig so unbefriedigend, daß ihm die neue Rechnungsweise als eine Annäherung erscheinen und sein Interesse für den Gegenstand verschwinden muß. Auf Schulen wird bis jetzt diese Wissenschaft wenig oder gar nicht gelehrt, und wie selten trifft es sich, daß auf Universitäten ein Vortrag über höhere Mathematik zu Stande kommt. Der Verfasser, der in seinen Privatverhältnissen seit mehr als einem Jahrzehend alle Semester Gelegenheit hatte, die Grundbegriffe der höhern Analysis und Curvenlehre, größtentheils künftigen Baumeistern vorzutragen, übergiebt diese wenigen Bogen, vorzüglich zum Gebrauch für seine Vorlesungen, dem Druck, aber es wird ihm viele Freude machen, wenn er dadurch einen ausgebreiteteren Nutzen stiften, und Liebe für dies schöne Studium erwecken sollte. Bei seiner Hauptabsicht, die Grundbegriffe befriedigend und kurz darzustellen, läßt sich nichts Neues erwarten, doch wird §. 26. wohl ein vielleicht zuerst aufgestellter Satz seyn, der die Bestimmung der Ableitungen trigonometrischer und logarithmischer Functionen sehr erleichtert. Die Untersuchungen hier beschränken sich nur auf die Annahme einer ursprünglich veränderlichen Größe. In der Bezeichnung, so wie auch in der Begründung der Formeln für die Curvenlehre bin ich größtentheils der Ansicht Crelle's gefolgt. Wer übrigens höhere Analysis anwenden will, der bedarf wohl nothwendig der trefflichen Integraltafeln von

Meyer Hirsch, eines nicht genug zu würdigenden Geschenks, wodurch der Verfasser einem dringenden Bedürfniß abgeholfen hat. Wem diese Grundbegriffe Geschmack und Liebe zum Studium der höheren Mathematik einflößen, der wird in den Werken von la Grange und Euler unendlichen Stoff zu weiterem Fortschreiten finden.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

§. 1. Wenn x eine Größe bezeichnet, deren Quantität verschieden zu wählen ist, so ist jeder, dies x enthaltende Ausdruck, wie $a+bx$; x^m; $\log x$; $\tang x$; u. s. w. vom Werth des x abhängig, und heißt eine Funktion von x. Ist die Form der Abhängigkeit unbestimmt, so schreibt man um anzudeuten, daß von einer Größe die Rede ist, deren Werth von x abhängt, blos: Function von x und deutet dieß Wort Function durch einen der Buchstaben F; f; φ; ψ; an. So versteht man also unter Fx; fx; ψx; φx weiter nichts, als eine Verbindung welche x enthält, deren Werth also von der Annahme der Größe des x abhängig ist, unbekümmert, wie diese Verbindung beschaffen ist. Soll angedeutet werden, daß derjenige Werth der Funktion φx verstanden werden soll, den sie annimmt, wenn man für x den bestimmten Werth a setzt, so schreibt man φa; will man aber denjenigen Werth anzeigen, den φx für $x=0$ annimmt, so schreibt man blos φ.

In jeden solchen Ausdruck, wie $y = \varphi x$ nennt man x die ursprünglich veränderliche oder urveränderliche und y oder φx die abhängig veränderliche Größe. Die übrigen Größen, welche außerdem in der Gleichung $y = \varphi x$ vorkommen mögen, sind als festgesetzte, also unveränderliche oder constante Größen anzusehen. Eine Darstellung wie die $y = \varphi x, z, u, \ldots$ deutet eben so an, daß y eine von $x, z, u, \ldots$ abhängige Größe ausdrückt.

Beispiel 1. Ist $y = \varphi x = a + bx$;
so ist $\varphi c + a + bc$; $\varphi = a$;
2. Ist $\varphi x = \mathrm{Sec}\, x$, so ist
$\varphi 90^\circ = \infty$; $\varphi = 1$.
3. Ist $\varphi x = a^x$; so ist
$\varphi 1 = a$; $\varphi = 1$;
4. Ist $\varphi x = ax - x^2$; so ist
$\varphi x = 0$; $\varphi = 0$;
5. Ist $\varphi x = \sqrt{5a^2 - (x-3)^2}$; so ist
$\varphi(a+3) = \pm 2a$; $\varphi = \sqrt{5a^2 - 9}$

§. 2. Man theilt die Functionen ein, in algebraische, transcendente, entwickelte, unentwickelte, rationale, irrationale, ganze, gebrochene, ächt gebrochene, unächt gebrochene, und ähnliche.

Eine Function $y = \varphi x$ heißt algebraisch, wenn aus ihr x algebraisch entwickelt werden kann.

z. B. $y = \varphi x = ax - x^2$; hieraus ist

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4y}}{2}.$$

Eine Funktion $y = \varphi x$ heißt transcendent, wenn aus ihr x nicht algebraisch zu entwickeln ist.

z. B. $y = \varphi x = \operatorname{Sin} x$;

$y = \varphi x = x + \log x$.

Eine Function $y = \varphi x$ heißt entwickelt, wenn y abgesondert erscheint.

z. B. $y = \varphi x = \sqrt{ax - x^3}$

Eine Function $y = \varphi x$ heißt unentwickelt, wenn y in ihr noch nicht abgesondert enthalten ist.

z. B. $ax^2 - by = cy^3$

Hier ist y eine Function von x aber noch nicht entwickelt y durch x ausgedrückt.

Eine Function $y = \varphi x$ heißt rational, wenn in ihr x mit keinem gebrochenen Exponenten in Verbindung steht.

z. B. $y = \varphi x = ax + bx^2$

Eine Function $y = \varphi x$ heißt irrational, wenn in ihr x mit gebrochenen Exponenten in Verbindung steht.

z. B. $y = \varphi x = \sqrt{ax - x^2}$

$y = \varphi x = ax - b\sqrt[3]{x}$

Eine Function heißt ganz, wenn sie nicht in Bruchform, in Beziehung auf x, erscheint.

z. B. $y = \varphi x = \sqrt{ax + b}$

$y = \varphi x = a + \frac{b}{c} x^2$

Eine Function heißt gebrochen, wenn sie x im Nenner enthält, ächt, wenn der höchste Exponent von x im Zähler, kleiner ist als der im Nenner; unächt, wenn er größer ist.

z. B. $y = \varphi x = \frac{a}{b + cx}$ ist ächt gebrochen.

$y = \varphi x = \frac{x^3}{a + bx^2 + cx^4}$ ebenfalls.

$y = \varphi x = \frac{a + bx^3}{ax + cx^2}$ ist unächt gebrochen.

Functionen heißen ähnlich, wenn sie in der Form der Verbindung übereinstimmen. z. B.

$y = \varphi x = \frac{ax}{b + x^2}$; und $z = Fx = \frac{nx^3}{f + x^6}$

sind ähnlich.

§. 3. Lehrsatz. Bezeichnet x eine veränderliche Größe, so kann die Gleichung

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots = 0$$

nur unter der Bedingung bestehen, wenn jeder der Coefficienten a, b, c, u. s. w. einzeln = Null ist.

Beweis. In der Gleichung

$$a + bx + cx^2 + \ldots = 0$$

bezeichnet x eine Größe, der man verschiedene Werthe beilegen kann, und für jeden gewählten Werth des x soll die Summe $a + bx$ u. s. w. gleich Null werden. Es sind daher a, b, c, u. s. w. hier als die unbekannten Größen zu betrachten, welche der Bedingung entsprechen sollen, daß für jedes x, die Summe $a + bx + cx^2 + \ldots = 0$ wird. Sollen aber die Coefficienten a, b, c u. s. w. diese Bedingung für jedes x, so müßen sie dieselbe auch für $x = 0$ erfüllen. Für diesen Werth von x entsteht aber

$$a + b.0 + c.0 + \ldots = 0$$

und hieraus $a = 0$;

Es bleibt also blos

$$bx + cx^2 + \ldots = o$$

oder durch x dividirt

$$b + cx + dx^2 + \ldots = o.$$

Diese Summe $b + cx + dx^2 \ldots$ soll nur für jedes x, also auch für $x = o$; zu Null werden. Für $x = o$ wird sie aber $= b$; man hat also auch $b = o$. u. s. w.

§. 4. Aufgabe. Jede rationale gebrochene Function der veränderlichen Größe x in eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

Auflösung. Man setze, der Forderung gemäß, φx gleich $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ bringe diese Gleichung auf Null, und setze nach §. 3. jeden Coefficienten der entstehenden Reihe, gleich Null, so ergeben sich die erforderlichen Gleichungen, aus welchen die unbekannten Größen A, B, C u. s. w. zu entwickeln sind.

Beispiele 1; $\varphi x = \frac{a^3 - x^3}{a - x}$.

Aus $\frac{a^3 - x^3}{a - x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots$

entsteht die geordnete Gleichung

$$Aa - a^3 + (aB - A)x + (aC - B)x^2 + (aD - C + 1)x^3 + [aE - D]x^4 + (aF - E)x^5 + \ldots = o$$

und hieraus nach §. 3.

$$Aa - a^3 = o$$
$$aB - A = o$$
$$aC - B = o$$
$$aD - C + 1 o$$
$$aE - D = o$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$A = a^2$$
$$B = a$$
$$C = 1$$
$$D = E = F \text{ u. s. w.} = 0$$

Man hat also das (bekannte) Resultat

$$\varphi x = \frac{a^3 - x^3}{a - x} = a^2 + ax + x^2$$

Beispiel 2. $\varphi x = \dfrac{x}{1 + x}$.

Es entsteht $\dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots$

Beispiel 3. $\varphi x = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Hier kommt $\dfrac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \ldots$

Beispiel 4. $\varphi x = \dfrac{a+x}{b+x}$.

Es ergiebt sich

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{a-b}{b^4}x^3 \ldots$$

§. 5. Aufgabe. Aus der unentwickelten Function

$$ax + bx^2 + cx^3 + \ldots = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \ldots$$

soll man y durch eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe bestimmen, also die Coefficienten A, B, C u. s. w. der Bedingung gemäß entwickeln, daß

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \text{ wird.}$$

Auflösung. Man setze für y den Ausdruck

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \text{ in}$$

$$ax + bx^2 + cx^3 + \ldots = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \ldots$$

ordne diese Gleichung nach den Potenzen von x und setze jeden der entstehenden Coefficienten $= 0$; so ergeben sich die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der Größen A, B .... Es entsteht nehmlich

$$0 = (\alpha A - a)x + (\alpha B + \beta A^2 - b)x^2$$
$$+ (\alpha C + 2AB\beta + \gamma A^3 - c)x^3 + \ldots$$

und hieraus

$$\alpha A - a = 0$$
$$\alpha B + \beta A^2 - b = 0$$
$$\alpha C + 2AB\beta + \gamma A^3 - c = 0$$

u. s. w.

aus welchen Gleichungen sich

$$A = \frac{a}{\alpha}$$

$$B = \frac{\alpha^2 b - a^2 \beta}{\alpha^3} = \frac{b}{\alpha} - \frac{a^2}{\alpha^3}\beta$$

$$C = \frac{c}{\alpha} - \frac{2ab}{\alpha^3}\beta + \frac{2a^3}{\alpha^5}\beta^2 - \frac{a^3}{\alpha^5}\gamma$$ u. s. w. ergiebt.

Man hat also

$$y = \frac{a}{\alpha}x + \frac{\alpha^2 b - a^2\beta}{\alpha^3}x^2 + \ldots$$

Beispiele 1. Es sey

$$y = 10x + 2x^2 + \frac{2}{5}x^3 + \frac{2}{25}x^4 \ldots$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{1}{10}y - \frac{2}{10^3}y^2 + \frac{2^2}{10^5}y^3 - \frac{2^3}{10^7}y^4 \ldots$$

Man kann auch folgendergestalt verfahren:

Aus $y = 10x + 2x^2 + \frac{2}{5}x^3 + \ldots$

folgt nach der Lehre von den abnehmenden ins Unendliche fortlaufenden geometrischen Progressionen

$$y = \frac{50x}{5-x};$$ hieraus ist

$$x = \frac{5y}{50+y}$$

und behandelt man nun

$\varphi x = \frac{5y}{50+y}$ nach §. 4., so erhält man ebenfalls, so wie auch durch die gewöhnliche Division das oben angegebene Resultat.

Beisp. 2.

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$
$$= y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + y^7 \text{ u. s. w.}$$

Hieraus entspringt

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

und auch

$$x = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \ldots$$

§. 6. Aufgabe. Man hat zwei nach den Potenzen von x fortlaufenden endliche Reihen

$$Fx = a + bx + cx^2 + \ldots + px^m$$

und

$$fx = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \varrho x^n$$

und einen, eine ächtgebrochene rationale Funktion von x, darstellender Bruch, dessen Zähler $= \varphi x$ und dessen Nenner $= Fx.\,fx$ ist. Man soll diesen Bruch $\frac{\varphi x}{Fx.\,fx}$ in eine Summe zweier Brüche zerlegen, deren einer Fx; der andere fx zum Nenner hat. Die Zähler dieser Brüche zu bestimmen.

Auflösung. Wenn A, B, C, ... R und A'; B'; C'; ... Q' noch unbekannte Größen bedeuten, so setze man den Zähler des ersten Bruchs, der den Nenner Fx haben soll

$$= A + Bx + Cx^2 + \ldots + R.x^{m-1}$$

und den des 2ten

$$= A' + B'x + C'x^2 + \ldots + Q'x^{n-1}$$

so entsteht die Bedingungs-Gleichung

$$\frac{\varphi x}{(a + \ldots + px^m)(\alpha + \ldots + \varrho x^n)} = \frac{A + \ldots + Rx^{m-1}}{a + \ldots + px^m} + \frac{A' + \ldots + Q'x^{n-1}}{\alpha + \ldots + \varrho x^n}$$

aus welcher sich nach §. 3. die Werthe der $m + n$ unbekannten Größen A, B bis R und A', B' bis Q' entwickeln lassen, indem aus der Bedingungsgleichung, wenn man sie ordnet, eine Gleichung von der Form

$$A'' + B''x + C''x^2 + \ldots + W''x^{n+m-1} = 0$$

entsteht, welche nach §. 3. die erforderlichen $n + m$ Gleichungen liefert.

Beispiele 1.

$$\frac{1}{1-x^2} \text{ oder } \frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

Hier entsteht $\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{A'}{1-x}$;

daraus $A + A' - 1 + (A' - A)x = 0$

und nun $A + A' - 1 = 0$

$A' - A = 0$

folglich $A = A' = \frac{1}{2}$; man hat also

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right]$$

Beisp. 2. $\frac{x}{a^3 - x^3}$ oder $\frac{x}{(a-x)(a^2+ax+x^2)}$.

Hier hat man

$$\frac{x}{a^3 - x^3} = \frac{A}{a-x} + \frac{A' + B'x}{a^2+ax+x^2}$$

und es ergiebt sich

$$\frac{x}{a^3 - x^3} = \frac{1}{3a}\left[\frac{1}{a-x} - \frac{a-x}{a^2+ax+x^2}\right]$$

Beisp. 3.

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{x+1}$$

Beisp. 4.

$$\frac{4+3x}{x(x-1)(x^2+1)} = -\frac{4}{x} + \frac{7}{2(x-1)} + \frac{x-7}{2(x^2+1)}$$

Beisp. 5.

$$\frac{3+2x-5x^2}{[2+5x+3x^2][1-2x+x^2-4x^3]} =$$

$$\frac{1}{214}\left[\frac{124+231x}{2+5x+3x^2} + \frac{259-425x+308x^2}{1-2x+x^2-4x^3}\right]$$

§. 7. Lehrsatz. Für jede nach den Potenzen einer veränderlichen Größe x geordnete Reihe, wie $A + Bx + Cx^2 + \ldots + Nx^n + Mx^{n+1} + \ldots + Q.x^p + \ldots$ giebt es einen Werth für x, der die Eigenschaft hat, daß er ein bestimmtes Glied dieser Reihe größer macht als die absolute Summe aller übrigen Glieder.

Beweis. Setzt man die absolute Summe

$$Mx^{n+1} + \ldots + Q.x^p + \ldots$$

gleich a; so ist die Behauptung folgende: es giebt Werthe, die, dem x beigelegt,

$$N.x^n > a \text{ machen.}$$

Ist Q unter allen Coefficienten von M über Q fort bis zu Ende, der größte, oder wenigstens kein anderer größer wie Q; so ist gewiß

$$a < Q x^{n+1} + Q x^{n+2} + Q x^{n+3} + \ldots Q x^p + Q x^{p+1} + \ldots;$$

oder

$$a < Q x^{n+1} [1 + x + x^2 + \ldots]$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \text{ in inf.}$$

also gewiß

$$a < Q x^{n+1} \cdot \frac{1}{1-x}; \text{ folglich auch}$$

$$\frac{N x^n}{a} > \frac{N x^n}{Q x^{n+1} \cdot \frac{1}{1-x}}; \text{ oder}$$

$$\frac{N x^n}{a} > \frac{N(1-x)}{Q x}$$

Nun wird aber $\frac{N(1-x)}{Qx}$ gleich 1, wenn man

$$x = \frac{N}{N+Q} \text{ nimmt, und es ist daher, für}$$

$$x = \frac{N}{N+Q};$$

$$\frac{N x^n}{a} > 1: \text{ oder}$$

$$N x^n > a \text{ oder}$$

$$N x^n > M x^{n+1} + \ldots + Q x^p + \ldots$$

für $x = \frac{N}{N+Q}$ oder $x < \frac{N}{N+Q}$

wird also gewiß

$$N x^n > M x^{n+1} + \ldots + Q x^p + \ldots$$

Zweiter Abschnitt.

Die Differenzial- oder Ableitungs-Rechnung.

§. 8. Wenn $y = \varphi x$ ist, und es ändert x seinen Werth, so erleidet auch y eine Aenderung. Bezeichnet man die Aenderung von x durch Δx, die zugehörige von y durch Δy, so ist der Ausdruck für die Function nun; $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$; also $\Delta y = \varphi(x + \Delta x) - \varphi x$. Die zusammengehörigen Aenderungen Δx, Δy nennt man Differenzen und ihren Quotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi x}{\Delta x}$$

den Differenzen Quotienten, welcher allgemein durch P ausgedrückt werden soll, so daß also

$$P = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi x}{\Delta x} \text{ ist}$$

Je nachdem nun die ursprüngliche Funktion $y = \varphi x$ beschaffen ist, kann P als constante Größe, oder als abhängig von x, y, auch von Δx und Δy erscheinen, so so daß also allgemein P durch $F[x, y, \Delta x, \Delta y]$ auszudrücken ist. In den Fällen nun, wo P von Δx abhängig sich ergiebt, ist für jede Wahl des Δx auch P eine andere Größe, und man nennt denjenigen Werth, welchen

$$P = F(x, y, \Delta x, \Delta y)$$
$$= \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi x}{\Delta x}$$

für $\Delta x = 0$; also auch $\Delta y = 0$ annimmt, in Beziehung auf die Stamm-Function $y = \varphi y$; die erste abgeleitete Function, oder die erste Ableitung, und bezeichnet sie gewöhnlich durch $y' = \varphi' x$. Die erste Ableitung von $y' = \varphi' x$ bezeichnet man eben so durch $y'' = \varphi'' x$ und nennt sie in Beziehung auf die Stamm-Function, die zweite Ableitung. Es versteht sich nun von selbst, was unter 3ter, 4ter, . . ., nter Ableitung, d. h. unter $\varphi''' x$; $\varphi'''' x$; . . . $\varphi^n x$ zu denken ist. Erscheint P als beständig, oder als unabhängig von Δx und Δy, so ist P selbst ohne weiteres die erste Ableitung, und es können dann keine weiteren Ableitungen statt finden.

Die Differenzial- oder Ableitungs-Rechnung beschäftigt sich mit der Bestimmung der Ableitungen einer gegebenen Function und mit Aufsuchung allgemeiner Regeln für dieses Geschäft. Die Integral- oder Zurückleitungs-Rechnung aber mit der Bestimmung der ursprünglichen oder Stamm-Function zu einer gegebenen Ableitung.

§. 9. Der Ausdruck $P = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi x}{\Delta x}$ welcher, $\Delta x = 0$ gesetzt, in $\varphi' x$ übergeht, enthält schon eine allgemeine Vorschrift zur Bestimmung von $\varphi' x$ aus φx. Diese ist, wie in die Augen fällt, folgende:

man seze in $y = \varphi x$ für x, $x + \Delta x$ und für y, $y + \Delta y$, subtrahire nun φx voon $\varphi(x + \Delta x)$, dividire den Rest durch Δx und setze in den gefundenen Quotienten, wenn er Δx, Δy enthält, sowohl für Δx als für Δy, Null, so ist das entstehende Resultat die erste Ableitung oder $\varphi' x$.

Beispiel. 1. Es sei $y = \varphi x = x$;
so ist $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x) = x + \Delta x$;
folglich $\varphi(x + \Delta x) - \varphi x = \Delta x$;
daher $P = \dfrac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi x}{\Delta x} = 1$;
also auch $\varphi' x = 1$; Wenn also
$$\varphi x = x;$$
so ist $\varphi' x = 1$.
und $\varphi'' x = \varphi''' x =$ u. s. w. $= 0$.

Beispiel. 2.
$$\varphi x = y = a + bx + cx^2.$$ Es ist
$$\varphi(x + \Delta x) = y + \Delta y = a + b(x + \Delta x) + c(x + \Delta x)^2;$$
$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi x = b\Delta x + 2cx\Delta x + c\Delta x^2;$$
$$P = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi x}{\Delta x} = b + 2cx + c\Delta x$$
also für $\Delta x = 0$;
$$\varphi' x = b + 2cx$$
Ferner
$$\varphi'(x + \Delta x) = b + 2c(x + \Delta x);$$
$$\varphi'(x + \Delta x) - \varphi' x = 2c\Delta x;$$
$$P = \frac{\varphi'(x + \Delta x) - \varphi' x}{\Delta x} = 2c;$$
also $\varphi'' x = 2c$
und nun existiren keine weiteren Ableitungen, weil $\varphi'' x$ sich als eine unveränderliche Größe ergeben hat.

Beisp. 3. $y = \varphi x = \frac{a}{b+x}$;

$$\varphi(x + \varDelta x) = \frac{a}{b+x+\varDelta x}$$

$$\varphi(x+\varDelta x) - \varphi x = \frac{a}{b+x+\varDelta x} - \frac{a}{b+x}$$

$$= \frac{-a\varDelta x}{(b+x)(b+x+\varDelta x)};$$

$$\frac{\varphi(x+\varDelta x) - \varphi x}{\varDelta x} = P = \frac{-a}{(b+x)(b+x+\varDelta x)};$$

also

$$\varphi' x = -\frac{a}{(b+x)^2}.$$

ferner

$$\varphi'(x+\varDelta x) = -\frac{a}{(b+x+\varDelta x)^2};$$

$$\varphi'(x+\varDelta x) - \varphi' x = -\frac{a}{(b+x+\varDelta x)^2} + \frac{a}{(b+x)^2}$$

$$= \frac{2a(b+x)\varDelta x + a\varDelta x^2}{(b+x)(b+x+\varDelta x)^2};$$

$$P = \frac{\varphi'(x+\varDelta x) - \varphi' x}{\varDelta x} = \frac{2a(b+x) + a\varDelta x}{(b+x)(b+x+\varDelta x)^2};$$

also

$$\varphi'' x = \frac{2a(b+x)}{(b+x)^4} \text{ oder}$$

$$\varphi'' x = \frac{2a}{(b+x)^3}$$

Ebenso ergiebt sich ferner

$$\varphi''' x = -\frac{2.\ 3.\ a}{(b+x)^4}$$

$$\varphi'''' x = +\frac{2.\ 3.\ 4.\ a}{(b+x)^5}$$

u. s. w.

Beisp. 4. $\varphi x = y = \sqrt{a + bx - cx^2}$.
Aus $y^2 = a + bx - cx^2$ folgt

$$(y + \Delta y)^2 = a + b(x + \Delta x) - c(x + \Delta x)^2;$$

ferner

$$2y\Delta y + \Delta y^2 = b\Delta x - 2cx\Delta x - c\Delta x^2$$

daher

$$P = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b - 2cx - c\Delta x}{2y + \Delta y}; \text{ also}$$

$$\varphi' x = \frac{b - 2cx}{2y} \text{ oder}$$

$$\varphi' x = \frac{b - 2cx}{2\sqrt{a + bx - cx^2}}$$

§. 10. Obgleich in dem §. 9. angegebenen Weg die Bestimmung der Ableitungen größtentheils ausführbar ist, so ist das Verfahren doch zu mühsam, und es sollen daher jetzt Regeln für die Bestimmung der Ableitungen und zwar zuförderst nur für algebraische Verbindungen hergeleitet werden. Diese sind bekanntlich: Summen, Differenzen, Producte, Quotienten und Dignitäten.

Herleitung der Regeln zu Bestimmung der abgeleiteten Functionen, wenn die ursprüngliche Function, die urveränderliche Größe x, blos in algebraischen Verbindungen enthält.

§. 11. Lehrsatz. Die Ableitung einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe oder

oder Differenz der Ableitungen der einzelnen Glieder, oder wenn

$$Fx = \varphi x \pm fx;\ \text{so ist auch}$$

$$F'x = \varphi' x \pm f'x.$$

Beweis. Ist $\varphi x = v$; $fx = w$; $Fx = y$ und gehören zu Δx die Aenderungen Δv; Δw; Δy; so wird aus $Fx = \varphi x \pm fx$ oder

$$y = v \pm w$$

wenn x in $x + \Delta x$ übergeht,

$$y + \Delta y = v + \Delta v \pm (w + \Delta w).$$

Hiervon $y = v \pm w$ subtrahirt, so entsteht

$$\Delta y = \Delta v \pm \Delta w;\ \text{also auch}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \frac{\Delta w}{\Delta x};$$ oder den Differenzen-Quotienten zu $y = Fx$ mit P, den zu $v = \varphi x$ mit p und den zu $w = fx$ mit π bezeichnet

$$P = p \pm \pi.$$

Für $\Delta y = o$; also auch Δv, Δw, $\Delta y = o$ wird hieraus

$$F'x = \varphi' x \pm f'x$$

§. 12. Zusatz. Ist einer der Summanden eine beständige Größe a, hat man etwa

$$Fx = a \pm fx;$$

so ergiebt sich blos

$$F'x = \pm f'x$$

§. 13. Lehrsatz. Die Ableitung eines Products zweier Faktoren, von welchen jeder eine Function des urveränderlichen x ist, ist gleich der Summe der Producte jedes Factors in die Ableitung des andern, oder wenn $Fx = \varphi x . fx$; so ist

$$F'x = \varphi x . f'x + fx . \varphi' x.$$

Beweis. Ist $\varphi x = v$; $fx = w$; $Fx = y$ so wird aus $Fx = \varphi x . fx$ oder

$$y = v . w$$

wenn x um Δx wächst, die Gleichung

$$y + \Delta y = (v + \Delta v)(w + \Delta w)$$

Subtrahirt man hievon $y = v . w$, so bleibt

$$\Delta y = v \Delta w + w \Delta v + \Delta v . \Delta w$$

und folglich ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v . \frac{\Delta w}{\Delta x} + w . \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v . \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

oder, den Differenzen-Quotienten zu $y = Fx$ mit P; den zu $v = \varphi x$ mit p und den zu $w = fx$ mit π bezeichnet

$$P = v . \pi + w . p + \Delta v . \pi$$

oder auch

$$P = v\pi + wp + \Delta w . p$$

Für $\Delta x = 0$; also auch $\Delta v = 0$; $\Delta w = 0$; $\Delta y = 0$; geht P in $F'x$; p in $\varphi' x$; und π in $f'x$ über und es entsteht, weil $\Delta w . p = 0 . p = 0$, oder auch

$\Delta v . \pi = 0 . \pi = 0$ wird

$F'x = v . f'x + w . \varphi' x$ oder

$$F'x = \varphi x . f'x + f'x . \varphi' x$$

§. 14. Zusatz. Ist einer der Factoren eine beständige Größe, hat man etwa

$Fx = afx$, so ergiebt sich blos

$$F'x = af'x.$$

§. 15. Zusatz. Setzt man $Fx = \varphi x \,.\, fx \,.\, \psi x$ so findet man, wenn man zuförderst das Product zweier dieser Functionen als eine Function behandelt, nach §. 13.

$$F'x = \varphi x \,.\, fx \,.\, \psi' x + \varphi x \,.\, \psi x f' x + fx \psi x \varphi' x$$

eben so für 4 und mehr veränderliche Factoren.

§. 16. Lehrsatz. Die Ableitung eines Quotienten d. h. einer gebrochenen Function von x ist gleich dem Nenner, multiplicirt mit der ersten Ableitung des Zählers weniger dem Zähler, multiplicirt mit der ersten Ableitung des Nenners, und diese Differenz dividirt durch das Quadrat des Nenners, oder wenn

$$Fx = \frac{\varphi x}{fx}; \text{ so ist}$$

$$F'x = \frac{fx \,.\, \varphi' x - \varphi x \,.\, f' x}{(fx)^2}$$

Beweis. Ist $\varphi x = v$; $fx = w$; $Fx = y$; so wird aus $Fx = \frac{\varphi x}{fx}$ oder $y = \frac{v}{w}$, wenn x um Δx wächst, und Δv, Δw, Δy die zugehörige Aenderungen von v, w, y ausdrücken:

$$y + \Delta y = \frac{v + \Delta v}{w + \Delta w}; \text{ also}$$

$$\Delta y = \frac{v + \Delta v}{w + \Delta w} - \frac{v}{w}; \text{ oder}$$

$$\Delta y = \frac{w \Delta v - v \Delta w}{w(w + \Delta w)}, \text{ also}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{w \,.\, \frac{\Delta v}{\Delta x} - v \,.\, \frac{\Delta w}{\Delta x}}{w(w + \Delta w)}, \text{ oder bei derselben}$$

Bezeichnung, wie im vor. §.

$$P = \frac{w.p - v.\pi}{w(w + \Delta w)}.$$

Für $\Delta x = 0$; also auch $\Delta v = 0$; $\Delta w = 0$; $\Delta y = 0$ geht P in $F'x$; p in $\varphi' x$ und π in $f'x$ über, und es entsteht

$$F'x = \frac{w\varphi' x - v f' x}{w^2}; \text{ oder}$$

$$F'x = \frac{fx.\varphi' x - \varphi x.f'x}{(fx)^2}$$

§. 17. Zusatz. Ist der Zähler eine beständige Größe, hat man etwa

$$Fx = \frac{a}{fx}; \text{ so entsteht blos}$$

$$F'x = \frac{-af'x}{(fx)^2}$$

ist der Nenner unveränderlich, so daß etwa

$$Fx = \frac{\varphi x}{a} = \frac{1}{a}\varphi x \text{ wäre, so ist}$$

$$F'x = \frac{1}{a}\varphi' x \text{ wie §. 14.}$$

§. 18. Lehrsatz. Die Ableitung einer Dignität, deren Wurzel irgend eine Function von x, deren Exponent aber beständig ist, ist gleich dem Product des Exponenten und derjenigen Dignität der erwähnten Wurzel, deren Exponent der um Eins verminderte Exponent dieser Wurzel in der ursprünglichen Funktion ist, multiplicirt mit der ersten Ableitung der Wurzel, oder, wenn

$$y = Fx = [\varphi x]^e \text{ ist}$$

so ist $y' = F'x = e.[\varphi x]^{e-1}.\varphi' x$

Beweis. Setzt man $\varphi x = v$; also $y = v^e$ und betrachtet

1stens den Exponenten e als eine ganze positive Zahl n, so wird, wenn x um Δx wächst, v die Aenderung Δv und y die Δy erleiden, und also

$y + \Delta y = [v + \Delta v]^n$ oder nach den für ganze positive Exponenten als richtig bekannten binomischen Satz

$$y + \Delta y = v^n + n \cdot v^{n-1} \cdot \Delta v + n_2 \cdot v^{n-2} \cdot \Delta v^2 \ldots,$$

werden. Subtrahirt man nun $y = v^n$, so entsteht

$$\Delta y = n\, v^{n-1} \Delta v + n_2\, v^{n-2} \Delta v^2 \ldots$$

und hieraus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = P = n \cdot v^{n-1} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + n_2 v^{n-2} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta v \ldots;$$

oder wenn der Differenzen-Quotient zu $v = \varphi x$ mit p bezeichnet wird

$$P = n\, v^{n-1} \cdot p + n_2\, v^{n-2} \cdot p \cdot \Delta v + n_3\, v^{n-3} p \cdot \Delta v^2 \ldots$$

Mit $\Delta x = 0$ wird auch $\Delta v = 0$; $\Delta y = 0$ und P geht in $F'x$; p in $\varphi' x$ über; es entsteht folglich

$$F'x = n\, v^{n-1} \cdot \varphi' x \text{ oder}$$

$$F'x = n [\varphi x]^{n-1} \cdot \varphi' x$$

Ist

2tens der Exponent e eine positive gebrochene Zahl, etwa $= \frac{n}{m}$; so hat man

$$y = v^{\frac{n}{m}} \text{ also}$$

$$y^m = v^n; \text{ daher}$$

$(y + \Delta y)^m = (v + \Delta v)^n$; oder nach Subtraction von

$$y^m = v^n:$$

$$m\, y^{m-1} \Delta y + m_2\, y^{m-2} \Delta y^2 + \ldots =$$

$$n\, v^{n-1} \Delta v + n_2\, v^{n-2} \Delta v^2 + \ldots$$

und hieraus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n v^{n-1} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + n_2 v^{n-2} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta v + \ldots}{m y^{m-1} + m_2 y^{m-2} \cdot \Delta y + \ldots}$$

oder

$$P = \frac{n v^{n-1} p + n_2 v^{n-2} p \cdot \Delta v + \ldots}{m y^{m-1} + m_2 y^{m-2} \Delta y + \ldots}$$

Setzt man nun Δx, also auch Δv und $\Delta y = 0$; so ergiebt sich

$$F' x = \frac{n v^{n-1} \varphi' x}{m \cdot y^{m-1}} \text{ oder}$$

$$= \frac{n v^{n-1} \varphi' x}{m \cdot \left(v^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}}$$

$$= \frac{n}{m} v^{\frac{n}{m}-1} \varphi' x; \text{ oder}$$

$$F' x = \frac{n}{m} (\varphi x)^{\frac{n}{m}-1} \varphi' x$$

Ist

3tens der Exponent e eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so kann dieselbe allgemein durch $-\frac{n}{m}$ angedeutet werden, und man hat

$$y = v^{-\frac{n}{m}}; \quad \text{also}$$

$$y^m = \frac{1}{v^n}; \quad \text{folglich}$$

$$(y + \Delta y)^m = \frac{1}{(v + \Delta v)^n}; \text{ oder}$$

$$y^m + m y^{m-1} \Delta y + \ldots = \frac{1}{v^n + n v^{n-1} \Delta v + \ldots}$$

daher

$$m y^{m-1} \Delta y + \ldots = \frac{1}{v^n + n v^{n-1} \Delta v + \ldots} - \frac{1}{v^n}$$

$$= - \frac{n v^{n-1} \Delta v + n_2 v^{n-2} \Delta v^2 + \ldots}{v^n (v^n + n v^{n-1} \Delta v + \ldots)}$$

also

$$m y^{m-1} \frac{\Delta y}{\Delta x} + m_2 y^{m-2} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta y + \ldots\ldots$$

$$= - \frac{n v^{n-1} \frac{\Delta v}{\Delta x} + n_2 v^{n-2} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta v + \ldots}{v^n \ (v^n + n v^{n-1} \Delta v + \ldots)}$$

folglich

P für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und p für $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ gesetzt;

$$P = - \frac{n v^{n-1} p + n_2 v^{n-2} p \cdot \Delta v + \ldots}{v^n [v^n + n v^{n-1} \Delta v + \ldots][m y^{m-1} + m_2 y^{m-2} \Delta y \ldots]}$$

daher

$$F'x = - \frac{n v^{n-1} \cdot \varphi' x}{v^n \cdot v^n \cdot m y^{m-1}}, \text{ oder } v^{-\frac{n}{m}}$$

für y gesetzt, und reducirt

$$F'x = - \frac{n}{m} \cdot v^{-\frac{n}{m} - 1} \cdot \varphi' x;$$

oder auch

$$F'x = - \frac{n}{m} [\varphi x]^{-\frac{n}{m} - 1} \cdot \varphi' x.$$

Es findet also für jeden Werth von e das im Lehrsatz behauptete und ausgesprochene Gesetz statt, d. h. es ist allgemein, wenn $F x = (\varphi x)^e$ ist:

$$F'x = e (\varphi x)^{e-1} \cdot \varphi' x.$$

§. 19. Zusatz. Ist $\varphi x = x$; also $\varphi' x = 1$; und $F x = x^e$; so hat man nach §. 18: $F'x = e x^{e-1}$.

§. 20. Zusatz. Die vier in §. 11, 13, 16 und 18 hergeleiteten Regeln

I. $F'x = \varphi'x \pm f'x$

für $Fx = \varphi x \pm fx$ §. 11.

II. $F'x = \varphi x . f'x + fx . \varphi'x$

für $Fx = \varphi x . fx$ §. 13.

III. $F'x = \frac{fx . \varphi'x - \varphi x . f'x}{(fx)^2}$

für $Fx = \frac{\varphi x}{fx}$ §. 16.

IV. $F'x = e(\varphi x)^{e-1} . \varphi'x$

für $Fx = (\varphi x)^e$. §. 18.

sind zu Bestimmung aller Ableitungen allgebraischer Functionen die Grund-Formen, und es ist nothwendig daß der Anfänger sich mit ihren Gebrauch recht vertraut mache, um sie mit Fertigkeit in Anwendung bringen zu können.

§. 21. Zu Vereinfachung der Sprache, soll von nun an häufig durch ein vor eine Function gesetztes d die erste Ableitung derselben angezeigt werden. Dieser, sehr verkürzenden Bezeichnung gemäß ist also nun $d\varphi x$ einerlei mit $\varphi'x$ also, wenn $\varphi x = x$ ist dx einerlei mit 1; ferner $d(a + bx^3)$ einerlei mit $\varphi'x$ wenn $a + bx^3$ unter φx verstanden wird. Eben so $d[d\varphi x]$ einerlei mit $d\varphi'x$ oder $\varphi''x$, wo man $d^2\varphi x$ für $d(d\varphi x)$ schreibt, dann $d[d^2\varphi x]$ oder $d^3\varphi x$ einerlei mit $d\varphi''x$, d. h. mit $\varphi'''x$ u. s. w. allgemein:

$$d^n\varphi x = \varphi^n x$$

§. 22. Drückt man die vier Grundformeln §. 20. nach der eben angegebenen Bezeichnungsweise aus, so hat man, $\varphi x = v$; $fx = w$ gesetzt

$$\text{I.}\quad d(v \pm w) = dv \pm dw$$

$$\text{II.}\quad d(v.w) = vdw + wdv$$

$$\text{III.}\quad d\left(\frac{v}{w}\right) = \frac{wdv - vdw}{w^2}$$

$$\text{IV.}\quad d(v^e) = ev^{e-1}.dv.$$

§. 23. Beispiele zur Uebung der vier Grund-Regeln.

1. $y = a + bx + cx^2$

Hier ist $dy = da + d(bx) + d(cx^2)$ nach I

aber $da =$ Null §. 12.

$d(bx) = bdx = b$; §. 14.

$d(cx^2) = cd(x^2)$ §. 14.

und $d(x^2) = 2xdx = 2x$ nach §. 19.

also $dy = bdx + 2cxdx$

oder, weil $dx = 1$ ist $dy = b + 2cx$

Statt dy kann man auch $d\varphi x$ oder $\varphi' x$ schreiben, hat also für $y = \varphi x = a + bx + cx^2$;

$dy = d\varphi x = \varphi' x = b + 2cx$ wie §. 9. 1.

Ferner $d\varphi' x = \varphi'' x = db + d(2cx) = 2c$.

oder $= 2c.\, dx$

2. $y = \varphi x = \dfrac{a}{b + x}$

Hier ist, nach §. 17.

$$dy = d\varphi x = \varphi' x = \frac{-a\,d(b+x)}{(b+x)^2}$$

$$= \frac{-a\,[db + dx]}{(b+x)^2}$$

$$= \frac{-a\,[o+1]}{(b+x)^2}$$

$$= -\frac{a}{(b+x)^2}$$

Ferner $d^2 y = d^2 \varphi x = d\varphi' x = \varphi'' x$

$$= -\frac{-a\,.\,d(b+x)^2}{(b+x)^4}$$

$$= +\frac{a\,.\,2(b+x)^1\,.\,d(b+x)}{(b+x)^4}$$

$$= +\frac{2a}{(b+x)^3}$$

Eben so $d^3 y = d^3 \varphi x = d^2 \varphi' x = d\varphi'' x = \varphi''' x$

$$= -\frac{2\,.\,3\,.\,a}{(b+x)^4}$$

u. s. w.

3. $y = \varphi x = \sqrt{a + bx - cx^2}$

Hier ist $dy = d\varphi x = \varphi' x$

$$= \tfrac{1}{2}(a + bx - cx^2)^{\frac{1}{2}-1}\, d(a + bx - cx^2); \text{ IV.}$$

$$= \frac{b - 2cx}{2\sqrt{a + bx - cx^2}}$$

Dann $d^2 y = d^2 \varphi x = d\varphi' x = \varphi'' x$

$$= \frac{2\sqrt{a + bx - cx^2}\,.\,d(b - 2cx) - (b - 2cx)\,d\,[2\sqrt{a + bx - x^2}]}{4(a + bx - cx^2)}$$

$$= -\frac{4ac + b^2}{4(a + bx - cx^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

u. s. w.

4. $y = \varphi x = x^n$

Hier ergiebt sich

$$d\varphi x = \varphi' x = n x^{n-1}$$
$$\varphi'' x = n(n-1)\, x^{n-2}$$
$$\varphi''' x = n(n-1)(n-2)\, x^{n-3}$$

u. s. w.

$$\varphi^m x = n.(n-1).(n-2)\ldots\ldots(n+1-m)\, x^{n-m}.$$

Herleitung allgemeiner Entwickelungs-Formeln und Gesetze.

§. 24. Aufgabe. Jede Function der urvariablen x in eine nach den Potenzen von x fortlaufenden Reihe $a x^0 + b x^1 + c x^2 + d x^3 + \ldots r x^n \ldots$ aufzulösen, in welcher die Coefficienten $a, b, c, \ldots$ unabhängig von x sind.

Auflösung. Bezeichnet $y = \varphi x$ die Function, so hat man als Bild der Aufgabe

$$y = \varphi x = a + b x + c x^2 + \ldots . r x^n \ldots$$

also

$$d y = \varphi' x = b + 2 c x + 3 d x^2 + \ldots + r n x^{n-1} \ldots$$
$$d^2 y = \varphi'' x = 2c + 6 dx + 12 ex^2 + \ldots + r n (n-1) x^{n-2} \ldots$$
$$d^3 y = \varphi''' x = 6d + 24 ex + \ldots + r.n.(n-1)(n-2) x^{n-3} \ldots$$

u. s. w.

$$d^n y = \varphi^n x = r.n.(n-1).(n-2) \ldots\ldots 3.2.1 + \ldots\ldots$$

Alle diese Gleichungen sollen für jeden Werth des x, also auch für $x = 0$ gültig seyn. Für $x = 0$ entsteht aber aus ihnen

$$\varphi = a$$
$$\varphi' = b$$
$$\varphi'' = 2c$$
$$\varphi''' = 2.3.d$$
$$\varphi'''' = 2.3.4.e$$
u. s. w.
$$\varphi^n = 2.3.4.\dots.(n-1).n.r$$

und aus diesen Gleichungen ergeben sich

$$a = \varphi$$
$$b = \varphi'$$
$$c = \frac{\varphi''}{2}$$
$$d = \frac{\varphi'''}{2.3}$$
$$e = \frac{\varphi''''}{2.3.4}$$
u. s. w.
$$r = \frac{\varphi^n}{2.3.4\dots n}$$

und man hat also

$$\varphi x = \varphi + \frac{x}{1}\varphi' + \frac{x^2}{1.2}\varphi'' + \frac{x^3}{1.2.3}\varphi''' + \dots$$
$$+ \frac{x^n}{1.2.3\dots n}\varphi^n + \dots$$

Anmerk. Diese Reihe heißt die Maclaurinsche.

Beisp. $\varphi x = y = (a+x)^n$.

Hier ist $\varphi' x = n(a+x)^{n-1}$

$$\varphi'' x = n(n-1)(a+x)^{n-2}$$
$$\varphi''' x = n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3}$$
u. s. w.

also

$$\varphi = a^n$$
$$\varphi' = n a^{n-1}$$
$$\varphi'' = n(n-1) a^{n-2}$$
$$\varphi''' x = n(n-1)(n-2) a^{n-3}$$
$$- \; - \; - \; - \; -$$

und man hat daher

$$\varphi x = (a+x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . a^{n-3} x^3 + \ldots$$

Durch dieses Beispiel ist die Allgemeingültigkeit des Binomischen Satzes (dessen Wahrheit in der Lehre von den Potenzen nur für positive ganze Exponenten bewiesen wurde) für jeden Werth des Exponenten n dargethan.

§. 25. Aufgabe. In einer gegebenen Function φx wird x als eine Summe zweier Summenden y und z betrachtet, man soll $\varphi x = \varphi(y+z)$ in eine nach den Potenzen des einen dieser Summenden fortlaufende Reihe auflösen, in welcher die Coefficienten blos von den andern Summenden abhängig seyn sollen

Auflösung. In sofern $\varphi(y+z)$ auch blos als eine Function von y oder blos als eine Function von z zu betrachten ist, so kann man also

$\varphi(y+z) = Fy = fz$ setzen.

Weil nun aber nach §. 24. immer

$$\varphi x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

gestellt werden kann, so hat man also, wenn $x = y+z$ genommen wird

$$\left.\begin{matrix} \varphi(y+z) \\ Fy \\ fz \end{matrix}\right\} = a + b(y+z) + c(y+z)^2 + d(y+z)^2 \ldots .$$

folglich

$$\left.\begin{array}{r}\varphi'(y+z)\\ F'y\\ f'z\end{array}\right\} = b + 2c(y+z) + 3d(y+z)^2 + \dots$$

ferner

$$\left.\begin{array}{r}\varphi''(y+z)\\ F''y\\ f''z\end{array}\right\} = 2c + 6d(y+z) + 12e(y+z)^2 \dots$$

dann

$$\left.\begin{array}{r}\varphi'''(y+z)\\ F'''y\\ f'''z\end{array}\right\} = 6d + 24e(y+z) + \dots$$

u. s. w.

und hieraus folgt

$$\begin{array}{ll}\varphi z = F; & \varphi y = f\\ \varphi' z = F'; & \varphi' y = f'\\ \varphi'' z = F''; & \varphi'' y = f''\\ \varphi''' z = F'''; & \varphi''' y = f'''\end{array}$$

u. s. w.

Nun ist aber nach §. 24.

$$\left\{\begin{array}{l} Fy = F + yF' + \frac{y^2}{2}F'' + \frac{y^3}{2.3}F''' \dots \\ fz = f + zf' + \frac{z^2}{2}f'' + \frac{z^3}{2.3}f''' \dots \end{array}\right\}$$

Setzt man nun in diese Reihen die gleichviel sagenden Zeichen, so entsteht

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi(y+z) = \varphi z + y\varphi' z + \frac{y^2}{2}\varphi'' z + \frac{y^3}{2.3}\varphi''' z + \dots \\ \text{oder} \\ \varphi(y+z) = \varphi y + z\varphi' y + \frac{z^2}{2}\varphi'' y + \frac{z^3}{2.3}\varphi''' y + \dots \end{array}\right\}$$

Jede der beiden Reihen löst die Aufgabe. Das nte oder allgemeine Glied der ersten ist

$$= \frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots.n-1} \cdot \varphi^{n-1} z$$

das der zweiten

$$= \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots.n-1} \cdot \varphi^{n-1} y.$$

Diese dargestellte Reihe

$$\varphi(x+k) = \varphi k + \frac{k}{1}\varphi' x + \frac{k^2}{1.2}\varphi x'' + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{k^n}{123\ldots n} \cdot \varphi x^n + \ldots$$

heißt die Taylorsche. Sie ist für die gesammte Analysis von der höchsten Wichtigkeit, und kann als das allgemeinste Grundprinzip aller Entwickelung angesehen werden.

Beispiele. 1. $\varphi(x+k) = (x+k)^n$.

Hier ist $\varphi'(x+k) = n(x+k)^{n-1}$

$\varphi''(x+k) = n.(n-1)(x+k)^{n-2}$

$\varphi'''(x+x) = n(n-1)(n-2)(x+k)^{n-3}$

u. s. w.

also $\varphi x = x^n$

$\varphi' x = n x^{n-1}$

$\varphi'' x = n(n-1) x^{n-2}$

$\varphi''' x = n(n-1)(n-2) x^{n-3}$

u. s. w.

folglich

$$(x+k)^n = x^n + n x^{n-1}. k + \frac{n.(n-1)}{1.2} x^{n-2}. k^2 + \ldots$$

wie Beisp. §. 24.

2. $\varphi(b+x) = \frac{a}{b+x}$

Hier ist $\varphi'(b+x) = -\frac{a}{(b+x)^2}$.

$$\varphi''(b+x) = +\frac{2a}{(b+x)^3}$$

$$\varphi'''(b+x) = -\frac{2.3.a}{(b+x)^4}$$

u. s. w.

also $\varphi b = \frac{a}{b}$ und $\varphi x = \frac{a}{x}$

$$\varphi' b = -\frac{a}{b^2}; \quad \varphi' x = -\frac{a}{x^2}$$

$$\varphi'' b = +\frac{2a}{b^3}; \quad \varphi'' x = +\frac{2a}{x^3}$$

$$\varphi''' b = -\frac{2.3.a}{b^4}; \varphi''' x = -\frac{2.3.a}{x^4}$$

u. s. w., folglich

$$\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b^2}x + \frac{a}{b^3}x^2 - \frac{a}{b^4}x^3 + \ldots$$

oder auch

$$\frac{a}{b+x} = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2}b + \frac{a}{x^3}b^2 - \frac{a}{x^4}b^3 + \ldots$$

§. 26. Lehrsatz. Wenn $\frac{F(nx)}{Fx} = \frac{\varphi(nx)}{\varphi x}$ ist, so ist $Fx : \varphi x$ eine unveränderliche Größe; oder, wenn p eine solche bezeichnet, so ist $Fx = p.\varphi x$.

Beweis. Es sey, nach §. 24

$$Fx = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

$$\varphi x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots$$

so hat man

$$F(nx) = a + bnx + cn^2x^2 + dn^3x^3 + \ldots$$

$$\varphi(nx) = \alpha + \beta nx + \gamma n^2x^2 + \delta n^3x^3 + \ldots$$

also nach der Voraussetzung

$$\frac{a + bnx + cn^2x^2 \ldots}{a + bx \;\; + cx^2 \ldots,} = \frac{\alpha + \beta nx + \gamma n^2x^2 \ldots.}{\alpha + \beta x \;\; + \gamma x^2 \ldots.}$$

und hieraus

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
a\alpha & x^0 + \alpha bn & x^1 + \alpha cn^2 & x^2 + \alpha dn^3 & x^3 \text{ u. s. w.} = 0 \\
-a\alpha & + a\beta & + b\beta n & + \beta cn^2 & \\
 & - a\beta n & + a\gamma & + b\gamma n & \\
 & - \alpha b & - a\gamma n^2 & + a\delta & \\
 & & - b\beta n & - a\delta n^3 & \\
 & & - \alpha c & - b\gamma n^2 & \\
 & & & - \beta cn & \\
 & & & - \alpha d &
\end{array}$$

also nach §. 3

1) $a\alpha - a\alpha = 0$; oder $a : \alpha = a : \alpha$

2) $\alpha bn + a\beta - a\beta n - \alpha b = 0$;
   oder $a : \alpha = b : \beta$;

3) $\alpha cn^2 + b\beta n + a\gamma = a\gamma n^2 + b\beta n + \alpha c$;
   oder $a : \alpha = c : \gamma$

4) $\alpha dn^3 + a\delta = a\delta n^3 + \alpha d$;
   oder $a : \alpha = d : \delta$

u. s. w.

daher

$$a : b : c : d \ldots. = \alpha : \beta : \gamma : \delta \ldots.$$

folglich

$$\frac{a}{\alpha} \varphi x = a + \frac{a\beta}{\alpha} x + \frac{a\gamma}{\alpha} x^2 + \frac{a\delta}{\alpha} x^3 \ldots.$$

oder

$$\frac{a}{\alpha} \varphi x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

daher

$$Fx = \frac{a}{\alpha} \varphi x$$

Es ist aber nach §. 24

$$a = F$$

$$\alpha = \varphi$$

folglich $\frac{a}{\alpha} = \frac{F}{\varphi}$ eine von x unabhängige Größe; bezeichnet man sie mit p, so hat man also

$$Fx = p\varphi x$$

wenn $\frac{F(nx)}{Fx} = \frac{\varphi(nx)}{\varphi x}$ ist.

§. 27. Aufgabe. Es sey $y = \varphi x$, und die Ableitungen dieser Function bekannt; wenn nun aber umgekehrt x als Function von y angesehen werden soll, wie findet man aus jenen Ableitungen die zu $x = Fy$.

Auflösung. Geht y in $y + r$ über, wenn $x + k$ aus x wird, so hat man nach §. 25

$$y + r = \varphi x + k\varphi' x + \frac{k^2}{2}\varphi'' x + \ldots$$

und $$x + k = Fy + rF'y + \frac{r^2}{2}F''y + \ldots$$

also $$r = k\varphi' x + \frac{k^2}{2}\varphi'' x + \frac{k^3}{6}\varphi''' x + \ldots$$

$$k = rF'y + \frac{r^2}{2}F''y + \frac{r^3}{6}F'''y + \ldots$$

oder, wenn man den Werth für k substituirt

$$o = [\varphi' x F'y - 1]\, r + [\varphi' x F''y + F'y^2 \varphi'' x].\frac{r^2}{2} + \ldots.$$

also, nach §. 3

$$\varphi' x F'y - 1 = o.$$

$$\varphi' x F''y + F'y^2.\varphi'' x = o$$

u. s. w.

und hieraus

$$F'y = \frac{1}{\varphi' x} \text{ oder } dFy = \frac{1}{d\varphi x};$$

$$F''y = -\frac{\varphi'' x}{(\varphi' x)^3}; \text{ oder } d^2 Fy = -\frac{d^2 \varphi x}{(d\varphi x)^3}$$

$$F'''y = \frac{3(\varphi'' x)^2 - \varphi' x \varphi''' x}{(\varphi' x)^5} \text{ oder } d^3 Fy = \frac{3(d^2\varphi x)^2 - d\varphi x . d^3 \varphi x}{(d\varphi x)^5}$$

u. s. w.

Beisp. $y = \varphi x = \frac{x-1}{x+1}$; also

$$dy = d\varphi x = \varphi' x = 2 . \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$d^2 y = d^2 \varphi x = \varphi'' x = -2 . \frac{2}{(1+x)^3}$$

u. s. w.

folglich $x = Fy$ gesetzt.

$$dx = dFy = F'y = \frac{(1+x)^2}{2} \text{ oder } = \frac{2}{(1-y)^2}$$

$$d^2 x = d^2 Fy = F''y = \frac{(1+x)^3}{2} \text{ oder } = \frac{4}{(1-y)^3}$$

u. s. w.

§. 28. Aufgabe. Es sey $y = \varphi x$ und seine Ableitungen gegeben; in Beziehung auf eine andere Größe v sey aber x abhängig variabel von der unabhängig oder urvariabeln v, nehmlich $x = Fv$, und hierzu sind die Ableitungen ebenfalls als bekannt anzusehen; man soll durch sie und die obigen die Ableitungen zu $y = fv$ bestimmen.

Auflösung. Wenn k, r, n zusammengehörige Aenderungen zu x, v, y bezeichnen, so hat man

$$y + n = \varphi x + k\varphi' x + \frac{k^2}{2}\varphi'' x \ldots$$

$$x + k = Fv + rF'v + \frac{r^2}{2}F''v \ldots.$$

$$y + n = fv + rf'v + \frac{r^2}{2} f''v \ldots$$

und aus dieser Verbindung ergiebt sich

$$o = (\varphi' x F'v - f'v) r + [\varphi' x F''v + F'v^2 \varphi'' x - f''v] \frac{r^2}{2} \ldots$$

und hieraus nach §. 3

$$f'v = \varphi' x F'v$$

$$f''v = \varphi' x F''v + \varphi'' x (F'v)^2$$

u. s. w.

Beispiel. Es sey $y = \varphi x = ax + x^2$

und $x = v + \sqrt{v} = Fv$

also $\varphi' x = a + 2x$; $\varphi'' x = 2$;

$$F'v = 1 + \frac{1}{2\sqrt{v}};\ F''v = -\frac{1}{4v\sqrt{v}};$$

u. s. w.

so hat man, für $y = fv$

$$dy = f'v = (a + 2x)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{v}}\right)$$

$$= (a + 2v + 2\sqrt{v}) \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{v}}\right)$$

$$d^2y = f''v = -(a + 2x) \frac{1}{4v\sqrt{v}} + 2\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{v}}\right)^2$$

u. s. w.

§. 29. Zusatz. Setzt man im vorigen §. $v = y$; so hat man $y = fy$; also $f'y = 1$; $f''y = 0$; daher

$$1 = \varphi' x F'y$$

$$0 = \varphi' x F''y + \varphi'' x (F'y)^2$$

u. s. w., wie in §. 27.

Ist aber $y = \varphi x$; $x = Fv$; $v = \psi z$; folglich auch $y = fz$; so hat man ganz aus §. 28.

$$f'z = \varphi' x . F'v . \psi' z.$$

u. s. w.

Von den transcendenten Funktionen.

Erstens. Von den trigonometrischen.

§. 30. **Aufgabe.** Es bezeichne x einen Kreisbogen für den Halbmesser = 1; man soll zu $\varphi x = \operatorname{Sin} x$ die erste Ableitung, also $\varphi' x$ oder $d \operatorname{Sin} x$ bestimmen.

Auflösung. Aus der allgemeinen trigonometrischen Formel

$$\operatorname{Sin}(\alpha + \beta) = \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta$$

folgt

$$\operatorname{Sin} 3x = \operatorname{Sin} 2x \operatorname{Cos} x + \operatorname{Cos} 2x \operatorname{Sin} x$$

Es ist aber $\operatorname{Sin} 2x = 2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x$

und $\operatorname{Cos} 2x = 1 - 2 \operatorname{Sin} x^2$;

also $\operatorname{Sin} 3x = 3 \operatorname{Sin} x - 4 \operatorname{Sin} x^3$

folglich $\operatorname{Sin} x = \varphi x$ gesetzt

$$\varphi 3x = 3\varphi x - 4(\varphi x)^3$$

daher auch

$$\varphi(3x + 3k) = 3\varphi(x + k) - 4\varphi(x + k)^3$$

oder nach §. 25.

$$\varphi 3x + 3k\varphi' 3x + \frac{9k^2}{2}\varphi'' 3x \ldots\ldots =$$

$$3\varphi x + 3k\varphi' x + \frac{3k^2}{2}\varphi'' x \ldots\ldots$$

$$-4\left[\varphi x + k\varphi' x + \frac{k^2}{2}\varphi'' x \ldots\right]^3$$

Subtrahirt man hiervon

$$\varphi 3x = 3\varphi x - 4(\varphi x)^3$$

und dividirt den Rest mit 3k, so bleibt

$$\varphi' 3x + \frac{3k}{2}\varphi'' 3x \ldots = \varphi' x + \frac{3k}{2}\varphi'' x - 4\varphi x^2 \varphi' x$$

$$- 4k\varphi x \varphi' x^2 - \ldots\ldots$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von k; also auch für $k = 0$. Für $k = 0$ entsteht aber aus ihr

$$\varphi' 3x = \varphi' x - 4 \varphi x^2 . \varphi' x;$$

folglich

$$\frac{\varphi' 3x}{\varphi' x} = 1 - 4 (\varphi x)^2$$

Es ist aber $1 - 4 (\varphi x)^2 = 1 - 4 \operatorname{Sin} x^2$

und
$$\frac{\operatorname{Cos} 3x}{\operatorname{Cos} x} = \frac{\operatorname{Cos} 2x \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} 2x \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}$$
$$= \operatorname{Cos} 2x - 2 \operatorname{Sin} x^2$$
$$= 1 - 4 \operatorname{Sin} x^2; \text{ also}$$
$$\frac{\varphi' 3x}{\varphi' x} = \frac{\operatorname{Cos} 3x}{\operatorname{Cos} x}$$

folglich nach §. 26.

$$\varphi' x \text{ oder } d \operatorname{Sin} x = p \operatorname{Cos} x$$

worinnen p unabhängig von x aber noch unbekannt ist.

§. 31. **Aufgabe.** Es sey $F x = \operatorname{Cos} x$; man soll $F' x = d \operatorname{Cos} x$ bestimmen.

Auflösung. Ist $\varphi x = \operatorname{Sin} x$; so hat man

$$(F x)^2 + (\varphi x)^2 = 1; \text{ also}$$
$$F x . F' x + \varphi x \varphi' x = 0; \text{ oder}$$
$$\operatorname{Cos} x . F' x + \operatorname{Sin} x . p \operatorname{Cos} x = 0;$$

daher

$$F' y = - p \operatorname{Sin} x$$

§. 32. **Aufgabe.** Man soll p (§. 30 und 31.) bestimmen.

Auflösung. Ist $\varphi x = \operatorname{Sin} x$; so hat man nach §. 30 und 31. $\varphi' x = p \operatorname{Cos} x$

$$\varphi'' x = - p^2 \operatorname{Sin} x$$
$$\varphi''' x = - p^3 \operatorname{Cos} x$$

$$\varphi''''x = + p^4 \operatorname{Sin} x$$
u. s. w.

also $\varphi = 0$

$\varphi' = + p$

$\varphi' = 0$

$\varphi''' = - p^3$

$\varphi'''' = 0$

$\varphi^{v} = + p^5$

u. s. w., daher nach §. 24.

$$\varphi x = \operatorname{Sin} x = p x - \frac{p^3 x^3}{6} + \frac{p^5 x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

folglich

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{x} = p.\left(1 - \frac{p^2 x^2}{6} \ldots\right)$$

Nun ist aber, für jeden noch so kleinen Werth von x ($x = 0$ ausgeschlossen)

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{x} < 1 \quad \text{und}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} > 1; \text{ oder}$$

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{x \operatorname{Cos} x} > 1; \text{ also}$$

$\frac{\operatorname{Sin} x}{x} > \operatorname{Cos} x$. Es fällt also $\frac{\operatorname{Sin} x}{x}$ immer zwischen $\operatorname{Cos} x$ und 1. Für $x = 0$ fallen aber diese Gränzen zusammen, und es ist also für $x = 0$

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{x} = 1.$$

Man hat also für $x = 0$

$$1 = p.(1 - 0 + 0 \ldots)$$

und hieraus

$$p = 1.$$

folglich vollständig

$$\text{I.} \quad d \operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos} x \quad \text{§. 30.}$$

und $$\text{II.} \quad d \operatorname{Cos} x = -\operatorname{Sin} x \quad \text{§ 31.}$$

§. 33. **Aufgabe.** Die Ableitungen der übrigen trigonometrischen Linien als Functionen des Bogens x für den Halbmesser = 1. zu bestimmen.

Auflösung. Es ist $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}$; also

$$d \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{Cos} x \,.\, d \operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} x \; d \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} x^2}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} x^2 + \operatorname{Sin} x^2}{\operatorname{Cos} x^2} = \frac{1}{\operatorname{Cos} x^2} \text{ oder}$$

$$\text{III.} \quad d \operatorname{tg} x = \operatorname{Sec} x^2$$

Auf ähnlichem Weg erhält man

$$\text{IV.} \quad d \operatorname{Cotg} x = -\operatorname{Cosec} x^2$$

$$\text{V.} \quad d \operatorname{Sec} x = \operatorname{tg} x \operatorname{Sec.} x$$

$$\text{VI.} \quad d \operatorname{Cosec} x = -\operatorname{Cotg} x \operatorname{Cosec} x$$

$$\text{VII.} \quad d \operatorname{Sinv} x = \operatorname{Sin} x$$

$$\text{VIII.} \quad d \operatorname{Cosinv} x = -\operatorname{Cos} x$$

Ist der Bogen nicht x selbst, sondern irgend eine Function von x, etwa = fx; so hat man nach §. 28, x für v geschrieben,

$$1. \quad d \operatorname{Sin} fx = \operatorname{Cos} fx \,.\, f'x$$

$$2. \quad d \operatorname{Cos} fx = -\operatorname{Sin} fx \,.\, f'x$$

$$3. \quad d \operatorname{tg} fx = (\operatorname{Sec} fx)^2 \,.\, f'x$$

$$4. \quad d \operatorname{Cotg} fx = -(\operatorname{Cosec} fx)^2 \, f'x$$

$$5. \quad d \sec fx = \operatorname{tg} fx \sec fx \,.\, f'x$$

$$6. \quad d \operatorname{Cosec} fx = -\operatorname{Cotg} fx \,.\, \operatorname{Cosec} fx \,.\, f'x$$

$$7. \quad d \operatorname{Sinv} fx = \operatorname{Sin} fx \,.\, f'x$$

$$8. \quad d \operatorname{Cosinv} fx = -\operatorname{Cos} fx \,.\, f'x$$

§. 34. Aufgabe. Es sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, welche sich ergeben, wenn man je eine der trigonometrischen Linien eines Kreisbogens für den Halbmesser = 1, als die urveränderliche, und den zugehörigen Bogen als die davon abhängige Größe betrachtet.

Auflösung. Der Ausdruck Arc Sin x bezeichne den Kreisbogen, dessen zugehöriger Sinus gleich x ist; eben so Arc tg x denjenigen, dessen zugehörige Tangente = x ist, u. s. w. Wenn nun der Sinus eines Bogens b mit x bezeichnet wird, und man setzt

$$b = Fx \text{ oder}$$

$$\text{Arc Sin } x = Fx;$$

so hat man nach §. 32, wenn x als Function von b angesehen, also $x = \varphi b = \text{Sin } b$ gesetzt wird

$$dx = d\varphi b = d \text{ Sin } b = \varphi' b = \text{Cos } b;$$

also hier, im umgekehrten Fall, nach §. 27.

$$db = d \text{ Arc Sin } x = dFx = F'x = \frac{1}{\varphi' b} = \frac{1}{\text{Cos } b}$$

Es ist aber $\text{Cos } b = \sqrt{1 - \text{Sin } b^2} = \sqrt{1 - x^2}$; folglich

$$\text{I.} \quad d \text{ Arc Sin } x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Eben so ergiebt sich

$$\text{II.} \quad d \text{ Arc Cos } x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{III.} \quad d \text{ Arc tg } x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\text{IV.} \quad d \text{ Arc Cotg } x = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$\text{V.} \quad d \text{ Arc Sec } x = \frac{1}{x . \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{VI.} \quad d\,\text{Arc Cosec}\,x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{VII.} \quad d\,\text{Arc Sinv}\,x = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\text{VIII.} \quad d\,\text{Arc Cosinv}\,x = -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Ist die trigonometr. Linie nicht selbst $= x$; sondern irgend eine Function von x, etwa $= fx$, so hat man nach §. 28.

$$1. \quad d\,\text{Arc Sin}\,fx = \frac{1}{\sqrt{1-(fx)^2}} \cdot f'x$$

$$2. \quad d\,\text{Arc Cos}\,fx = -\frac{1}{\sqrt{1-(fx)^2}} \cdot f'x$$

$$3. \quad d\,\text{Arc tg}\,fx = \frac{1}{1+(fx)^2} \cdot f'x$$

$$4. \quad d\,\text{Arc Cotg}\,fx = -\frac{1}{1+(fx)^2} \cdot f'x$$

$$5. \quad d\,\text{Arc Sec}\,fx = \frac{1}{fx\sqrt{(fx)^2-1}} \cdot f'x$$

$$6. \quad d\,\text{Arc Cosec}\,fx = -\frac{1}{fx\sqrt{(fx)^2-1}}\, f'x$$

$$7. \quad d\,\text{Arc Sinv}\,fx = \frac{1}{\sqrt{2fx-(fx)^2}}\, f'x$$

$$8. \quad d\,\text{Arc Cosinv}\,fx = -\frac{1}{\sqrt{2fx-(fx)^2}} \cdot f'x$$

§. 35. **Aufgabe.** Man soll die Länge einer trigonometrischen Linie durch die Länge ihres Bogens x ausdrücken.

Auflösung.

Erstens, für $\text{Sin}\,x$. Es ist

$\varphi x = \text{Sin}\,x$ gesetzt;

$\varphi' x = \text{Cos}\,x$

$\varphi'' x = -\text{Sin}\,x$

u. s. w. wie §. 32;

also $\varphi = \varphi'' = \varphi'''' = \varphi^{VI} \ldots = 0$;

$\varphi' = +1$; $\varphi''' = -1$; $\varphi^{V} = +1$; $\varphi^{VII} = -1$ u. s. w.

folglich nach §. 24.

$$\mathrm{Sin}\, x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Zweitens, für den Cos x.

Nimmt man die erste Ableitung des eben gefundenen Resultats, so entsteht

$$\mathrm{Cos}\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

Aehnliche, wiewohl weniger einfache Reihen ergeben sich auch für die übrigen trigonometrischen Linien.

§. 36. Zusatz. Behandelt man die im vorigen §. für Sin x dargestellte Reihe nach §. 5. so entsteht

$$x = \mathrm{Sin}\, x + \frac{\mathrm{Sin}\, x^3}{2.3} + \frac{3\,\mathrm{Sin}\, x^5}{2.4.5} + \frac{3.5\,\mathrm{Sin}\, x^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.\mathrm{Sin}\, x^9}{2.4.6.8.9} \ldots$$

und hieraus ergiebt sich für Sin $x = \frac{1}{2}$; also

$$x = \tfrac{30}{360} . 2 . 1 . \pi = \tfrac{1}{6}\pi;$$

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} + \ldots\right)$$

$$= 3{,}14159 \ldots$$

§. 37. Zusatz. Setzt man

$$1 - \mathrm{Cos}\, x = \mathrm{Sinv}\, x = y^2;$$

so hat man nach §. 35. 2;

$$y^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2.3.4} \ldots$$

und hieraus nach §. 5.

$$x = \sqrt{2} . y + \frac{2 . \sqrt{2} . y^3}{2^2 . 2 . 3} + \frac{3 . \sqrt{2} . y^5}{2^3 . 4 . 5} \ldots$$

oder

$$x = \sqrt{2\,\mathrm{Sinv}\, x}\left(1 + \frac{2\,\mathrm{Sinv}\, x}{2^2 . 2 . 3} + \frac{3\,\mathrm{Sinv}\, x^2}{2^3 . 4 . 5} \ldots\right)$$

Für Sinv $x = \frac{1}{2}$; also $x = \frac{60}{360} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \pi$; entsteht hieraus

$$\pi = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{640} + \ldots\right)$$
$$= 3{,}14159 \ldots$$

Zweitens. Von den Exponential- und logarithmischen Functionen.

§. 38. Aufgabe. Es sey $y = \varphi x = a^x$; wobei a als constant zu betrachten ist; man soll die Ableitungen von φx bestimmen.

Auflösung. Es ist $a^{2x} = a^x \cdot a^x$; oder

$\varphi 2x = \varphi x \cdot \varphi x = (\varphi x)^2$; also auch

$\varphi(2x + 2k) = [\varphi(x + k)]^2$; oder

$$\varphi 2x + 2k\varphi' 2x + 2k^2 \varphi'' 2x + \frac{4k^3}{3} \varphi''' 2x \ldots$$
$$= \left(\varphi x + k\varphi' x + \frac{k^2}{2} \varphi'' x + \frac{k^3}{6} \varphi''' x \ldots\right)^2$$
$$= (\varphi x^2) + 2k\varphi x \varphi' x + k^2 (\varphi' x)^2 + k^2 \varphi x \varphi'' x + \ldots$$

also

$\varphi 2x = (\varphi x)^2$ subtrahirt,

$$(\varphi' 2x - \varphi x \varphi' x) 2k + [2\varphi'' 2x - (\varphi' x)^2 - \varphi x \varphi'' x] k^2 + \ldots = 0$$

folglich

$\varphi' 2x - \varphi x \varphi' x = 0$; also

$\frac{\varphi' 2x}{\varphi' x} = \varphi x$; aber

$\frac{a^{2x}}{a^x} = a^x = \varphi x$;

folglich nach §. 26.

$\varphi' x = p \cdot a^x$; oder

$da^x = p \cdot a^x$

§. 39. Aufgabe. Das p §. 38. zu bestimmen.

Auflösung. Betrachtet man a als Basis, so folgt aus $y = \varphi x = a^x$;

$$\mathrm{Log}\, y = x$$

Setzt man nun $x = Fy = \log y$; so ist

$$dx = dFy = F'y = d\log y = \frac{1}{\varphi' x}$$

$$= \frac{1}{p \cdot a^x} = \frac{1}{py};$$ s. §. 27 und 38.

oder $\frac{1}{p}$ durch m ausgedrückt

$$F'y = \frac{m}{y};$$ folglich

$$F''y = -\frac{m}{y^2}$$

$$F'''y = +\frac{2m}{y^3}$$

$$F^{iv}y = -\frac{2.3.m}{y^4}$$

$$F^{v}y = +\frac{2.3.4.m}{y^5}$$

- - - - - - -

also, nach §. 25.

$$F(y \pm k) = \log(y \pm k) = \log y \pm k\frac{m}{y} - \frac{k^2}{2}.\frac{m}{y^2} \pm \frac{k^3}{2.3}.\frac{2m}{y^3} \ldots$$

folglich $y = 1$ gesetzt

$$\log(1+k) = m[k - \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{3}k^3 - \tfrac{1}{4}k^4 \ldots]$$

$$\log(1-k) = m[-k - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{3}k^3 - \tfrac{1}{4}k^4 \ldots]$$

daher, weil $\log a - \log b = \log\frac{a}{b}$ ist;

$$\log\frac{1+k}{1-k} = 2m[k + \tfrac{1}{3}k^3 + \tfrac{1}{5}k^5 + \ldots]$$

oder $\frac{1+k}{1-k} = z$ gesetzt;

$$\log z = 2m \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots \right]$$

Nimmt man nun z als die Basis an, setzt also $z = a$; so entsteht aus der letzten Gleichung

$$1 = 2m \left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots \right]$$

also

$$p = \frac{1}{m} = 2 \left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots \right]$$

Für $a = 10$ wird hieraus

$$p = \frac{1}{m} = 2 \left[\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \ldots \right]$$
$$= 2{,}302585092994$$

und also

$$m = 0{,}434294481903$$

Man nennt m den Model des Log-Systems, dessen Basis a ist. Für das Briggischen System ist also der Model $= 0{,}43429\ldots\ldots$

Allgemein hat man nun also in §. 38.

$$d\,(a^x) = 2 \left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots \right] . a^x$$

oder

I. $d(a^x) = \frac{a^x}{m}$ und hier in §. 39.

II. $d\,(\log y) = \frac{m}{y}$ wobei die Log. aus dem System zu verstehen sind, dessen Model $= m$ ist.

Ist nicht x selbst der Exponent, sondern irgend eine Function von x, etwa φx, so entsteht

$$\text{I.}\quad d(a^{\varphi x}) = \frac{a^{\varphi x}}{m}\varphi' x$$

Eben so $\text{II.}\quad d(\log \varphi x) = \frac{m}{\varphi x}\varphi' x$

§. 40. Dasjenige System, dessen Model = 1 ist, heißt das natürliche, und man pflegt die log aus denselben durch logn oder ln (Logarithmus naturalis) anzudeuten. Die Basis dieses Systems wird gewöhnlich durch e ausgedrückt.

Für dieses System ist demnach

$$\text{I.}\quad d(e^x) = e^x$$

$$\text{II.}\quad d(\ln x) = \frac{1}{x}$$

oder auch

$$\text{I.}\quad d(e^{\varphi x}) = e^{\varphi x} \cdot \varphi' x$$

$$\text{II.}\quad d(\ln \varphi x) = \frac{\varphi' x}{\varphi x}$$

§. 41. **Aufgabe.** Die Basis e des natürlichen Logarithmensystems zu bestimmen.

Auflösung. Aus $y = \varphi x = e^x$ folgt nach §. 40.

$\varphi' x = \varphi'' x = \varphi''' x =$ u. s. w. $= e^x$; also

$\varphi = \varphi' = \varphi'' =$ u. s. w. $= 1$;

daher nach §. 24.

$$\varphi x = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

oder

$$y = 1 + \frac{\ln y}{1} + \frac{(\ln y)^2}{2} + \frac{(\ln y)^3}{2.3} + \ldots$$

also, für $y = e$,

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots$$

oder

$$e = 2{,}718281828459\ldots$$

§. 42. **Aufgabe.** Man kennt von der Zahl a den natürlichen Logarithmen, und soll daraus den Model m des Logarithmensystems bestimmen, dessen Basis $= a$ ist.

Auflösung. Nach §. 39. ist

$$1 = 2m\left[\frac{a-1}{a+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots\right]$$

und

$$\ln a = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots\right]$$

also, wenn man dividirt

$$m = 1 : \ln a$$

§. 43. **Zusatz.** Für die Formeln I. und II. in §. 39. kann man also nun nach §. 42. schreiben

$$\text{I.}\quad d(a^x) = \ln a \,.\, a^x$$

$$\text{II.}\quad d(\log x) = \frac{1}{x \ln a}$$

wobei log x für das System zu verstehen ist, dessen Basis $= a$ ist.

Allgemeiner sind beide Formeln so auszudrücken.

$$\text{I.}\quad d(a^{\varphi x}) = \ln a \,.\, a^{\varphi x} \,.\, \varphi' x$$

$$\text{II.}\quad d(\log \varphi x) = \frac{\varphi' x}{\ln a \,.\, \varphi x}$$

§. 44. **Aufgabe.** Man soll Reihen darstellen nach welchen sich die natürlichen Logarithmen gegebener Zahlen leicht berechnen lassen.

Auflösung. Nach §. 39. ist

$$\ln z = 2 \,.\left[\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3} \,.\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \ldots\right]$$

Setzt man hierein

Erstens $\frac{1+x}{x}$ für z; so entsteht

$$\ln(1+x) = \ln x + 2\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^3 + \ldots\right]$$

wonach sich der logn jeder Zahl aus dem, der um Eins geringern, desto schneller berechnen läßt, je größer die Zahl ist.

Setzt man aber

Zweitens $\frac{x^2}{x^2-1}$ für z; so entsteht

$$\ln(1+x) = 2\ln x - \ln(x-1) - 2\left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \ldots\right]$$

wonach sich der logn jeder ganzen Zahl aus denen der beiden nächst niedrigern ganzen Zahlen sehr schnell berechnen läßt.

Es kommt also nur darauf an, die natürlichen Logarithmen der beiden ersten ganzen Zahlen 2 und 3 bestimmen zu können. Aus der letzten Gleichung folgt aber für $x = 3$,

$$3\ln 2 = 2\ln 3 - 2\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{17^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{17^5}\ldots\right)$$

und für $x = 2$,

$$\ln 3 = 2\ln 2 - 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \ldots\right)$$

und aus beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\ln 2 = 4\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \ldots\right) + 2\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \ldots\right)$$

$$\ln 3 = 6\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \ldots\right) + 4\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \ldots\right)$$

Nun hat man ferner

$$\ln 4 = 2\ln 2$$

$$\ln 5 = 4\ln 2 - \ln 3 - 2\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \ldots\right)$$

$$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$$

$$\ln 7 = 2\ln 6 - \ln 5 - 2\left(\frac{1}{71} + \frac{1}{3.71^3} + \ldots\right)$$

$\ln 8 = 3 \ln 2$

$\ln 9 = 2 \ln 3$

$\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$

$\ln 11 = 2 \ln 10 - \ln 9 - 2\left(\frac{1}{199} + \frac{1}{3 \,.\, 199^3} + \ldots\right)$

u. s. w.

§. 45. Aufgabe. Aus den berechneten natürlichen Logarithmen die, jedes andern Systems, zu welchen die Basis gegeben ist, zu bestimmen.

Auflösung. Die gegebene Basis sey $= a$; der zugehörige Model $= m$; so hat man nach §. 42.

$$m = \frac{1}{\ln a}.$$

Ferner, für diese Basis a, nach §. 39.

$$\log z = \frac{2}{\ln a}\left[\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \ldots\right]$$

und

$$\ln z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \ldots\right]$$

also

$$\frac{\log z}{\ln z} = \frac{1}{\ln a};$$

folglich

$$\log z = \frac{1}{\ln a} \,.\, \ln z$$

Sind, umgekehrt, die log für die Basis a und $\ln a$ gegeben, so hat man

$$\ln z = \ln a \,.\, \log z$$

So hat man z. B.

$$\log \text{brigg } z = 0{,}43429\ldots \ln z$$

nnd umgekehrt

$$\ln z = 2{,}302585\ldots \log \text{brig } z$$

Bestimmung des Werths einer gebrochenen Function von x für $x = a$; wenn Zähler und Nenner für dieses $x = a$ zugleich verschwinden oder zu Null werden.

§. 46. Aufgabe. Man hat $Fx = \frac{\varphi x}{fx}$ und es wird $\varphi a = 0$ und auch $fa = 0$ also $\frac{\varphi a}{fa}$ unbestimmt. Wie groß ist $Fa = \frac{\varphi a}{fa}$?

Auflösung. Aus $Fx = \frac{\varphi x}{fx}$ folgt

$$F'x = \frac{fx\,\varphi' x - \varphi x\, f'x}{(fx)^2}$$

oder

$$F'x = \frac{\varphi' x}{fx} - Fx \, . \, \frac{f'x}{fx};$$

und hieraus ein zweiter Werth für Fx; nämlich

$$Fx = \frac{\varphi' x}{f'x} - fx \, . \, \frac{F'x}{f'x}$$

und dieser giebt für $x = a$; also $\varphi a = 0$ und $fa = 0$,

$$Fa = \frac{\varphi' a}{f'a} - 0 \, . \, \frac{F'a}{f'a}$$

oder

$$Fa = \frac{\varphi' a}{f'a} = \frac{d\varphi a}{dfa}$$

Hieraus fließt die Regel: der Quotient der ersten Ableitungen des Zählers und Nenners ist (für dasjenige $x = a$ welches den Zähler und Nenner zugleich $= 0$ macht) der gesuchte Werth des Quotienten für dieses $x = a$.

§. 47. Zusatz. Wird $\frac{\varphi' x}{f'x}$ ebenfalls $= \frac{0}{0}$ oder unbestimmt für $x = a$; so erfolgt die Beurtheilung des verlangten Werthes von $\frac{\varphi a}{f a}$ aus $\frac{\varphi'' x}{f'' x}$ für $x = a$ u. s. w.

Hat die Function $F x$ die Form einer Differenz zweier gebrochenen Functionen von x und wird für $x = a$ sowohl der Minuend als der Subtrahend unendlich groß, also der Werth $F a$ unbestimmt, so gebe man der gegebenen Differenz die Form $\frac{\varphi x}{f x}$ und verfahre ebenfalls nach §. 46.

Beispiele. 1. Es sey $F x = \frac{a^n - x^n}{a^m - x^m}$.
Wie groß ist $F a$?

Man hat $\frac{\varphi' x}{f' x} = \frac{- n x^{n-1}}{- m x^{m-1}}$; also

$$F a = \frac{n}{m} a^{n-m}$$

d. h. für $x = a$ wird $\frac{a^n - x^n}{a^m - x^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$.

2. Es sey $F x = \frac{\varphi x}{f x} = \frac{a^{1-x} - b^{1-x}}{\ln x}$.

Wie groß ist $F 1 = \frac{a^0 - b^0}{0} = \frac{0}{0}$?

Es ist $\frac{\varphi' x}{f' x} = \frac{a^{1-x} . \ln a - b^{1-x} . \ln b}{\frac{1}{x}}$

also $F 1 = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.

3. Man hat $F x = (a - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2 a}$ und will den Werth dieser Function für $x = a$ wissen.

Man setze $F x = \frac{\varphi x}{f x} = \frac{a - x}{\operatorname{Cotg} \frac{\pi x}{2 a}}$;

so ist $\frac{\varphi' x}{f' x} = \frac{d(a-x)}{d \operatorname{Cotg} \frac{\pi x}{2a}}$

$$= \frac{-1}{-\left(\operatorname{Cosec} \frac{\pi x}{2a}\right)^2 \cdot d \frac{\pi x}{2a}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{Cosec} \frac{\pi x}{2a}\right)^2}; \text{ also}$$

$$F a = \frac{1}{\frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{Cosec} \frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{2a}{\pi}$$

4. $F x = \frac{\varphi x}{f x} = \frac{\operatorname{Cotg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\operatorname{Cotg} 2x}$.

Man erhält $F \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

5. $F x = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$; für $x = 1$ zu bestimmen.

Es ist

$$F x = \frac{\varphi x}{f x} = \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x}; \text{ also}$$

$$\frac{\varphi' x}{f' x} = \frac{x-1}{x - 1 + x \ln x}$$

und, weil dieser Ausdruck für $x = 1$ noch unbestimmt bleibt

$$\frac{\varphi'' x}{f'' x} = \frac{1}{2 + \ln x}; \text{ also}$$

$$F 1 = \frac{\varphi 1}{f 1} = \frac{\varphi' 1}{f' 1} = \frac{\varphi'' 1}{f'' 1} = \frac{1}{2}.$$

Man hat daher

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2};$$

wenn $x = 1$ ist.

6. $\varphi x = \frac{\text{Sin}\,x - x\,\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x^3}$; für $x = 0$; also φ zu bestimmen.

Die erste Ableitung des Zählers ist

$$= \text{Cos}\,x - d\,(x\,\text{Cos}\,x)$$
$$= \text{Cos}\,x + x\,\text{Sin}\,x - \text{Cos}\,x \,.\, dx$$
$$= \text{Cos}\,x + x\,\text{Sin}\,x - \text{Cos}\,x \,.\, 1 = x\,\text{Sin}\,x.$$

Die, des Nenners $= 3\,\text{Sin}\,x^2\,\text{Cos}\,x$

also $\varphi = \frac{x}{3\,\text{Sin}\,x\;\text{Cos}\,x}$ für $x = 0$.

Dieser Quotient ist noch unbestimmt. Nimmt man also noch einmal die ersten Ableitungen dieses Zählers und dieses Nenners, so ergiebt sich

$$\varphi = \frac{1}{-3\,\text{Sin}\,x^2 + 3\,\text{Cos}\,x^2} \text{ für } x = 0;$$

d. h. $\varphi = \frac{1}{3}$.

7. $\varphi x = \frac{x + x\,\text{Cos}\,x^2 - \text{Sin}\,2x}{\text{Sin}\,x^3}$.

Man erhält $\varphi = \frac{1}{3}$.

Bestimmung desjenigen Werthes der urvariabeln x für welchen φx ein Größtes oder Kleinstes wird.

§. 48. Wenn in φx für x ein bestimmter Werth a gesetzt wird, und es wird für dieses $x = a$,

$\varphi(a + p) < \varphi a$ und zugleich auch
$\varphi(a - p) < \varphi a$ so ist

φx für $x = a$; d. h. φa ein größter Werth der Function, ein Größtes oder Maximum

Ist aber a ein solcher Werth für welchen

$\varphi(a + p) > \varphi a$ und zugleich auch
$\varphi(a - p) > \varphi a$ so ist

φx für $x = a$; d. h. φa ein kleinster Werth der Function, ein Kleinstes oder Minimum.

Im Allgemeinen soll ein solcher Werth der Function ein Ausgezeichnetes oder A heißen.

§. 49. Lehrsatz. Keiner der Werthe von x für welchen $\varphi' x$ einen endlichen positiven oder negativen Werth annimmt, ist $= a$; d. h. für keinen solchen Werth wird φx ein Ausgezeichnetes oder ein A.

Beweis. Es ist nach §. 25.

$$\varphi(x + p) = \varphi x + p\varphi' x + \frac{p^2}{2}\varphi'' x + \ldots \quad \text{und}$$

$$\varphi(x - p) = \varphi x - p\varphi' x + \frac{p^2}{2}\varphi'' x - \ldots$$

Da nun p immer so klein gewählt werden kann, daß $p\varphi x$ größer wird als die absolute Summe aller folgenden Glieder (§. 7.), so ist das positive oder negative Zeichen dieses Gliedes $p\varphi x$ auch zugleich die Bezeichnung der Summe S oder S′ dieses Gliedes und aller folgenden. Man hat also für ein solches x welches $\varphi' x = \pm$ irgend einer endlichen Größe macht

$$\varphi(x + p) = \varphi x \pm S$$
$$\varphi(x - p) = \varphi x \mp S'$$

d. h. $\varphi(x + p)$ größer oder kleiner wie φx
und $\varphi(x - p)$ kleiner oder größer wie φx.

Für ein solches x ist also φx weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

§. 50. Lehrsatz. Derjenige Werth a der veränderlichen Größe x für welchen die erste Ableitung der Function $= 0$ wird, kann die Function selbst zu einem Ausgezeichneten oder A machen.

Beweis. Für $\varphi' a = 0$; ist

$$\varphi(a+p) = \varphi a + \frac{p^2}{2}\varphi'' a + \ldots \quad \text{und}$$

$$\varphi(a-p) = \varphi a + \frac{p^2}{2}\varphi'' a - \ldots$$

Setzt man nun die Summe $\frac{p^2}{2}\varphi'' a + \ldots = S$ und die $\frac{p^2}{2}\varphi'' a - \ldots = S'$ und denkt sich p so klein, daß das erste Glied jeder dieser beiden Summen größer wird als die absolute Summe aller übrigen Glieder, so hat man, wenn $\varphi'' a$ einen positiven endlichen Werth erhält

$$\varphi(a+p) = \varphi a + S \quad \text{und}$$
$$\varphi(a-p) = \varphi a + S'.$$

Erhält aber $\varphi'' a$ einen negativen endlichen Werth, so ist

$$\varphi(a+p) = \varphi a - S \quad \text{und}$$
$$\varphi(a-p) = \varphi a - S'.$$

Im ersten Fall ist dann also

$$\varphi(a+p) > \varphi a \quad \text{und zugleich}$$
$$\varphi(a-p) > \varphi a$$

Im zweiten aber

$$\varphi(a+p) < \varphi a \quad \text{und zugleich}$$
$$\varphi(a-p) < \varphi a.$$

Im ersten Fall ist also φa ein Minimum.
Im zweiten aber ist φa ein Maximum.

§. 51. Aus dem vorigen §. entspringt daher folgende Regel:

Man setze um dasjenige x zu finden, für welches $\varphi x = A$ werden kann, $\varphi' x = 0$. Ergiebt sich hieraus $x = a$ und wird zugleich $\varphi'' a =$ einem positiven endlichen Werth, so ist φa ein Minimum; wird aber $\varphi'' a =$ einem negativen endlichen Werth, so ist φa ein Maximum. Wird aber $\varphi'' a$ gleich Null oder unendlich groß, so bleibt es noch unbestimmt, ob φa ein Ausgezeichnetes und was für eines es im Bejahungsfalle ist.

§. 52. Lehrsatz. Wenn aus $\varphi' x = 0$, für x sich der Werth a ergeben hat, und es ist nun $\varphi'' a = 0$; so ist nur dann $\varphi a = A$, wenn $\varphi''' a = 0$ und $\varphi'''' a =$ einem positiven oder einem negativen endlichen Werth wird.

Beweis. Es ergiebt sich hier

$$\varphi (a + p) = \varphi a + \frac{p^3}{2.3} \varphi''' a + \frac{p^4}{2.3.4} . \varphi'''' a + \ldots$$

$$\varphi (a - p) = \varphi a - \frac{p^3}{2.3} . \varphi''' a + \frac{p^4}{2.3.4} . \varphi'''' a - \ldots$$

und es erhellet wie in §§. 49. und 50., daß wenn $\varphi''' a = 0$ ist, $\varphi a = A$ seyn kann und zwar $\varphi a =$ Min. wenn $\varphi'''' a = +$ und $\varphi a =$ Max. wenn $\varphi'''' a = -$ wird. Ist aber $\varphi''' a =$ einem endlichen positiven oder negativen Werth so findet kein Ausgezeichnetes statt.

§. 53. Wird $\varphi'''' a = 0$, so hängt die Beurtheilung eben wie §. 52. von $\varphi^{v} a$ und $\varphi^{vi} a$ ab u. s. w.

§. 54. Wird $\varphi'' a = \infty$, so kann die Bestimmung, ob $\varphi a = A$ und ob $\varphi a =$ Max. oder $=$ Min. ist, nur dadurch erfolgen, daß man speciell untersucht, ob $\varphi (a + p)$ und $\varphi (a - p)$ beide kleiner oder beide größer sind, wie φa. Derselbe Fall tritt ein, für diejenigen Werthe von x, welche sich aus $\varphi' x = \infty$ ergeben, denn auch solche können nach §. 49. die Function zu einem Ausgezeichneten machen.

§. 58. Uebungs-Beispiele.

1) $\varphi x = bx - x^2;$

$\varphi' x = b - 2x$

$\varphi'' x = -2;$

$\varphi' a = b - 2a = 0$. giebt $a = \frac{b}{2}$ und es ist

$\varphi \frac{b}{2} = \frac{b^2}{4}$ ein Max.

2) $\varphi x = \frac{x-1}{x^2+1}$

$\varphi' x = \frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2}$

$\varphi'' x = 2\,\frac{1-3x-3x^2+x^3}{(1+x^2)^3}$

$\varphi' a = \frac{1+2a-a^2}{(1+a^2)^2} = 0$, giebt $a = 1 \pm \sqrt{2}$

und $\varphi''(1+\sqrt{2}) = -\frac{3\sqrt{2}-4}{4}$

$\varphi''(1-\sqrt{2}) = +\frac{3\sqrt{2}+4}{4}$

daher $\varphi(1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \text{Max.}$

und $\varphi(1-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}+1}{2} = \text{Min.}$

3) $\varphi x = \frac{3x-5}{x^2-1};$

$\varphi' x = \frac{10x-3x^2-3}{(x^2-1)^2}$

$\varphi'' x = 2.\,\frac{3x^3-15x^2+9x-5}{(x^2-1)^3};$

$\varphi' a = 0$ giebt $a = 3$ oder $\frac{1}{3}$ und $\varphi'' 3 = -\frac{1}{8};$

$\varphi'' \frac{1}{3} = +\frac{81}{8}$; daher

$\varphi 3 = \frac{1}{2}$ ein Max. und

$$\varphi \tfrac{1}{3} = \tfrac{9}{2} \text{ ein Min.}$$

Das Min. ist hier größer wie das Max. Das vielleicht Auffallende dieser Erscheinung verschwindet, wenn man folgende Zusammenstellung betrachtet:

$$x = \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots$$

$$\varphi x = \tfrac{55}{12},\ \tfrac{54}{12},\ \tfrac{56}{12};\ \infty;\ \tfrac{10}{30},\ \tfrac{15}{30},\ \tfrac{14}{30}, \ldots\ldots$$

4) $\varphi x = \frac{x}{b^x}$

$$\varphi' x = \frac{b^x - x \,.\, b^x \,.\, \ln b}{b^{2x}} = \frac{1 - x \ln b}{b^x};$$

$$\varphi'' x = \ln b \,.\, \frac{x \ln b - 2}{b^x};$$

$$\varphi' a = \frac{1 - a \ln b}{b^a} = 0;$$

giebt $a = \frac{1}{\ln b}$; und nun ist

$$\varphi'' \left(\frac{1}{\ln b}\right) = \ln b \,.\, \frac{-1}{\sqrt[\ln b]{b}}$$

$$= \frac{-\ln b}{e} \text{ s. §. 40.}$$

also $\varphi \frac{1}{\ln b} = \frac{1}{\ln b \,.\, e}$ ein Max.

Wenn $b = e$ (§. 40.) ist, so wird also $\varphi x = \frac{x}{e^x}$ ein Größtes für $x = 1$, und es ist $\varphi 1 = \frac{1}{e}$

Anmerk. Daß $\sqrt[\ln b]{b} = e$ ist, ergiebt sich leicht auf folgende Art: man setze $\sqrt[\ln b]{b} = x$; so folgt $b = x^{\ln b}$ und hieraus $\ln b = \ln b \,.\, \ln x$; also

$1 = \ln x$; aber

$\ln e = 1$; also

$x = e$; oder

$$\sqrt[\ln b]{b} = e$$

5) Innerhalb eines Winkels α ist ein Punkt p gegeben; man soll durch p eine gerade Linie ziehen, welche mit den Schenkeln des Winkels α das kleinste Dreieck von allen denen, deren 3te Seite durch p geht, abschneidet.

Der eine Schenkel des Winkels α heiße r, der andere q; die Seite des verlangten Dreiecks, auf r sey $= x$; das Dreieck selbst $= \varphi x$; die Normale von p auf $r = h$; der Abstand von p bis q, parallel mit r gemessen $= b$; so hat man

$$\frac{(x-b)h}{2} : \varphi x = (x-b)^2 : x^2;$$

also $$\varphi x = \frac{h}{2} \cdot \frac{x^2}{x-b};$$

$$\varphi' x = \frac{h}{2} \cdot \frac{x^2 - 2bx}{(x-b)^2}$$

$$\varphi'' x = \frac{b^2 h}{(x-b)^3}$$

Aus $$\varphi' a = \frac{h}{2} \cdot \frac{a^2 - 2ba}{(a-b)^2} = 0$$

folgt $a = 0$; oder $a = 2b$.

Aus $\varphi' a = \frac{h}{2} \cdot \frac{a^2 - 2ba}{(a-b)^2} = \infty$

folgt aber $a = b$

Nun giebt $x = 0$ gar kein Dreieck von der verlangten Eigenschaft; $x = b$ giebt einen unendlichen Raum zwischen zwei Parallellinien; daher kann nur $x = 2b$ der Forderung entsprechen, und weil

$\varphi'' 2b = +\frac{h}{b}$ wird, so ist also

$\varphi 2b = 2bh$ ein Minimum.

6) Es sind in einer Ebene zwei Punkte p und q auf einer Seite einer geraden Linie v w gegeben; man soll in v w denjenigen Punkt r bestimmen, für welchen $pr + qr$ ein Minimum wird.

Die Normale pk von p auf v w sey $= a$; die qt von q auf v w $= b$; $kt = c$; $kr = x$ also $rt = c - x$; so ist

$$pr = \sqrt{a^2 + x^2};$$

$$qr = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}; \text{ folglich}$$

$$pr + qr = \varphi x = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2};$$

daher $\varphi' x = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$ und

$$\varphi'' x = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{[b^2 + (c-x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Setzt man nun die erste Ableitung gleich Null, so entsteht aus dieser Gleichung $x = \frac{ac}{a+b}$; und es ist

$$\varphi'' \frac{ac}{a+b} = \frac{(a+b)^4}{ab[(a+b)^2 + c^2]^{\frac{3}{2}}}; \text{ folglich}$$

$$\varphi \frac{ac}{a+b} = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \text{ ein Minimum.}$$

Aus der Gleichung $\varphi' x = 0$ erhellet übrigens sogleich, daß $\Delta pkr \sim \Delta qrt$; also auch der Neigungswinkel prk dem qrt gleich seyn muß.

Dritter Abschnitt.

Die Integral- oder Zurückleitungs-Rechnung.

§. 56. Soll zu einer gegebenen Ableitung $\varphi^{n}x$ die vorhergehende $\varphi^{n-1}x$, also etwa zur ersten Ableitung $\varphi' x$ die ursprüngliche Function φx bestimmt werden, so zeigt man dies durch ein vor die Ableitung gesetztes $\int$ an. Soll zur gegebenen nten Ableitung $\varphi^{n}x$ die n—mte aufgesucht werden, so bedient man sich eben so wie in der Ableitungs-Rechnung der Wiederholungs-Exponenten, und zeigt diese Forderung durch ein vor $\varphi^{n}x$ gesetztes $\int^{m}$ an. Hiernach ist also, wenn x die urvariable Größe bezeichnet, $\int 1 = \int dx = x$

$$\int \varphi' x = \varphi x \text{ oder } \int d\varphi x = \varphi x$$

$$\int \varphi^{n} x = \varphi^{n-1} x \text{ oder } \int d^{n} \varphi x = d^{n-1} \varphi x$$

$$\int^{m} \varphi^{n} x = \varphi^{n-m} x \text{ oder } \int^{m} d^{n} \varphi x = d^{n-m} \varphi x.$$

Soll, nachdem zu $\varphi^{n}x$ die vorhergehende Ableitung $\varphi^{n-m}x$ bestimmt ist, dann $Fx + \varphi^{n-m}x$ als eine pte Ableitung angesehen und die zugehörige Stammfunction gesucht werden, so ist die Anzeige folgende:

$$\int^{p}[Fx + \int^{m}\varphi^{n}x]$$

u. s. w.

§. 57. Das Geschäft des Integrirens oder Zurückleitens ist bis jetzt noch nicht auf so einfache Regeln zurückgeführt, wie das der Bestimmung der Ableitungen zu einer gegebenen Stammfunction (siehe §. 20.). Der gewöhnliche Weg zu Auffindung eines Integrals, d. h. einer vorhergehenden Ableitung zu einer folgenden, ist der: man suche der gegebenen Ableitung durch algebraische Umformung eine solche Gestalt zu geben, daß die ihr zugehörige, zunächst vorhergehende Ableitung nach den in der Differential-Rechnung dargestellten Formeln, unmittelbar als bekannt erscheint.

Z. B. Es ist $\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,x$ als erste Ableitung gegeben; man soll die ursprüngliche Function φx angeben. Das Bild der Aufgabe ist hier

$$\varphi x = \int\varphi' x = \int \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,x.$$

Es ist nun $\varphi' x = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,x$
$= \mathrm{Cos}\,(\alpha + x)$

und $\mathrm{Cos}\,(\alpha + x)$ ist die erste Ableitung zu $\mathrm{Sin}\,(\alpha + x)$ §. 32. I. Man hat also, wenn

$$\varphi' x = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,x \text{ ist,}$$

dann $\varphi x = \mathrm{Sin}\,(\alpha + x)$

§. 58. Da, wenn eine gegebene Function beständige Summanden enthält, diese in der ersten Ableitung wegfallen (§. 12.), so kann man also nicht mit Sicherheit schließen, daß, wenn

$$\varphi' x = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,x - \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,x$$

ist, daß dann $\varphi x = \text{Sin}\,(\alpha + x)$ sey, sondern es kann eben sowohl $\varphi x = \text{Sin}\,(\alpha + x) + C$ seyn, wenn C irgend eine beständige Größe bezeichnet. Diese beständige Größe, deren Bestimmung in jedem besondern Falle nach Anleitung des folgenden §. erfolgen muß, soll durchaus durch C angedeutet werden.

§. 59. Aufgabe. Einen Weg anzugeben, nach welchem sich, in jedem besondern Fall, wenn aus der gegebenen Ableitung, das Integral, d. h. die vorhergehende Ableitung gefunden ist, die etwa noch zuzufügende Constante C bestimmen läßt.

Auflösung. Gesetzt, man hat

$$I = \int \varphi' x = \varphi x + C$$

gefunden, und weiß aus der Natur der zum Grunde liegenden Aufgabe, daß $I = B$ wird, wenn x den Werth a hat, so muß C so groß seyn, daß $B = \varphi a + C$ wird. Hieraus ergiebt sich $C = B - \varphi a$, und also ist nun vollständig

$$I = \int \varphi' x = \varphi x + B - \varphi a$$

Gewöhnlich kennt man den Werth von x, für welchen das Integral, d. h. I verschwindet, heißt dieser b, so ist $o = \varphi b + C$; also $C = - \varphi b$; folglich vollständig

$$I = \varphi x - \varphi b$$

§. 60. Zusammenstellung der Elementar-Integral-Formel, welche sich unmittelbar, oder durch eine höchst einfache Umformung aus der Ableitungs-Rechnung ergeben. Durchaus bezeichne x die unabhängig oder urveränderliche Größe, andere etwa noch vorkommende Buchstaben sollen beständige Größen andeuten.

I.

I. $\int a = a\int 1 = a\int dx = ax + C.$ §. 14.

II. $\int(\varphi' x \pm f' x) = \int \varphi' x \pm \int f' x = \varphi x \pm fx + C.$ §. 11.

III. $\int \varphi x . fx + \int fx . \varphi' x =$
$\int [\varphi x f' x + fx \varphi' x] = \varphi x . fx + C.$ §. 13.

IV. $\int \varphi x f' x = \varphi x fx - \int fx \varphi' x + C$ aus III.

V. $\int \frac{fx \varphi' x - \varphi x f' x}{(fx)^2} = \frac{\varphi x}{fx} + C.$ §. 16.

VI. $\int (\varphi x)^n . \varphi' x = \frac{(\varphi x)^{n+1}}{n+1} + C.$ §. 18.

VII. $\int \mathrm{Cos}\, \varphi x . \varphi' x = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Sin}\, \varphi x \\ -\mathrm{Cosinv}\, \varphi x \end{array} \right\} + C.$ §. 33.

VIII. $\int \mathrm{Sin}\, \varphi x . \varphi' x = \left\{ \begin{array}{c} -\mathrm{Cos}\, \varphi x \\ +\mathrm{Sinv}\, \varphi x \end{array} \right\} + C.$ §. 33.

IX. $\left\{ \begin{array}{c} \int (\mathrm{Sec}\, \varphi x)^2 . \varphi' x \\ \int \frac{\varphi' x}{(\mathrm{Cos}\, \varphi x)^2} \end{array} \right\} = \mathrm{tg}\, \varphi x + C.$ §. 33.

X. $\left\{ \begin{array}{c} \int (\mathrm{Cosec}\, \varphi x)^2\, \varphi' x \\ \int \frac{\varphi' x}{(\mathrm{Sin}\, \varphi x)^2} \end{array} \right\} = - \mathrm{Cotg}\, \varphi x + C.$ §. 33.

XI. $\left\{ \begin{array}{c} \int \mathrm{tg}\, \varphi x\, \mathrm{Sec.}\, \varphi x . \varphi' x \\ \int \frac{\mathrm{Sin}\, \varphi x . \varphi' x}{(\mathrm{Cos}\, \varphi x)^2} \end{array} \right\} = \mathrm{Sec}\, \varphi x + C.$ §. 33.

XII. $\left\{ \begin{array}{c} \int \mathrm{Cotg}\, \varphi x\, \mathrm{Cosec.}\, \varphi x . \varphi' x \\ \int \frac{\mathrm{Cos}\, \varphi x\, \varphi' x}{(\mathrm{Sin}\, \varphi x)^2} \end{array} \right\} = - \mathrm{Cosec}\, \varphi x + C.$ §. 33.

XIII. $\int \frac{\varphi' x}{\sqrt{1 - (\varphi x)^2}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Arc\, Sin}\, \varphi x + C \\ -\mathrm{Arc\, Cos}\, \varphi x + C \end{array} \right\}$ §. 34.

XIV. $\int \frac{\varphi' x}{1 + (\varphi x)^2} = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Arc\, tg}\, \varphi x + C \\ -\mathrm{Arc\, Cotg}\, \varphi x + C \end{array} \right\}$ §. 34.

XV. $\int \frac{\varphi' x}{\varphi x \sqrt{(\varphi x)^2 - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Arc Sec}\, \varphi x + C \\ - \text{Axc Cosec}\, \varphi x + C \end{array} \right\}$ §. 34.

XVI. $\int \frac{\varphi' x}{\sqrt{2\varphi x - (\varphi x)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Arc Sinv}\, \varphi x + C \\ - \text{Arc Co inv}\, \varphi x + C \end{array} \right\}$ §. 34.

XVII. $\int a^{\varphi x} . \varphi' x = \frac{a^{\varphi x}}{\ln a} + C.$ §. 43.

XVIII. $\int e^{\varphi x} \varphi' x = e^{\varphi x} + C.$ §. 40.

XIX. $\int \frac{\varphi' x}{\varphi x} = \ln \varphi x + C.$ §. 40.

oder allgemeiner

XX. $\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{\varphi' x}{a + \varphi x} = \ln (a + \varphi x) + C \\ \int \frac{\varphi' x}{a - \varphi x} = - \ln (a - \varphi x) + C \end{array} \right\}$

§. 61. Uebungs-Beispiele zu diesen 20 Formeln.

1) $\int (a + b\sqrt{x}) = ax + \frac{2}{3} b x^{\frac{3}{2}} + C.$ zu I. II und VI.

2) $\int (\text{Cos}\, x^2 - \text{Sin}\, x^2) = \int (\text{Cos}\, x d \,\text{Sin}\, x + \text{Sin}\, x d\, \text{Cos}\, x)$
$= \text{Sin}\, x\, \text{Cos}\, x + C$ zu III.; oder auch, weil
$\text{Cos}\, x^2 - \text{Sin}\, x^2 = \text{Cos}\, 2x$ ist,
$\int (\text{Cos}\, x^2 - \text{Sin}\, x^2) = \int \text{Cos}\, 2x = \frac{1}{2} \int \text{Cos}\, 2x . 2$
$= \frac{1}{2} \text{Sin}\, 2x + C$ zu VII.

3) $\int x\, \text{Cos}\, x = \int x . d\, \text{Sin}\, x = x\, \text{Sin}\, x - \int \text{Sin}\, x$
$= x\, \text{Sin}\, x + \text{Cos}\, x + C$ zu IV. und VIII.

4) $\int (\text{Cosec}\, x - x\, \text{Cotg}\, x\, \text{Cosec}\, x) =$
$\int \left(\frac{1}{\text{Sin}\, x} - \frac{x\, \text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, x^2} \right) = \int \frac{\text{Sin}\, x - x\, \text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, x^2}$
$= \frac{x}{\text{Sin}\, x} + C$ zu V.

5) $\int (a \pm b x^m)^{\nu} . x^{n-1}$

$$= \pm \frac{1}{mb} \int (a \pm b x^m)^p . (\pm m b x^{m-1})$$

$$= \pm \frac{1}{mb(p+1)} (a \pm b x^m)^{p+1} + C \text{ zu VI.}$$

6) $\int (a \pm b \operatorname{Sin} x^2)^p . \operatorname{Sin} 2x =$

$$\pm \frac{1}{b} \int (a \pm b \operatorname{Sin} x^2)^p . (\pm 2b \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x)$$

$$= + \frac{(a \pm b \operatorname{Sin} x^2)^{p+1}}{b(p+1)} + C \text{ zu VI.}$$

7) $\int \frac{x^{m-1}}{(\operatorname{Cos} n x^m)^2} = \frac{1}{nm} \int \frac{n m x^{m-1}}{(\operatorname{Cos} n x^m)^2}$

$$= \frac{1}{nm} \operatorname{tg} n x^m + C \text{ zu IX.}$$

8) $\int \frac{1}{1 - \operatorname{Cos} x} = 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{2 (\operatorname{Sin} \frac{1}{2} x)^2} = - \operatorname{Cotg} \frac{1}{2} x + C \text{ zu X.}$

9) $\int \frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x}{[1 - 2 \operatorname{Sin} x^2]^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{Sin} 2x}{(\operatorname{Cos} 2x)^2}$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int \frac{\operatorname{Sin} 2x}{(\operatorname{Cos} 2x)^2} . 2 = \frac{1}{4} \operatorname{Sec} 2x + C \text{ zu XI.}$$

10) $\int \frac{\operatorname{Cos} x}{1 - \operatorname{Cos} x^2} = \int \frac{\operatorname{Cos} x}{(\operatorname{Sin} x)^2} = - \operatorname{Cosec} x + C \text{ zu XII.}$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(x \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1 - \left(x \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{x \sqrt{b}}{\sqrt{a}} + C \text{ zu XIII.}$$

12) $\int \frac{1}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \left(x \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ Arc tg } \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + C$$ zu XIV.

13) $\int \frac{1}{a + b \operatorname{Sin} x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \frac{b}{a} \operatorname{Sin} x^2}$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\operatorname{Cos} x^2 + \left(1 + \frac{b}{a}\right) \operatorname{Sin} x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{Sec} x^2}{1 + \left(\operatorname{tg} x . \sqrt{1 + \frac{b}{a}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + ab}} \int \frac{d\left[\operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{b}{a}}\right]}{1 + \left(\operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{b}{a}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + ab}} \text{ Arc tg} \left[\operatorname{tg} x . \sqrt{1 + \frac{b}{a}}\right] + C.$$ zu XIV.

14) $\int \frac{1}{x . \sqrt{a^2 x^2 - 1}} = \int \frac{a}{a x \sqrt{(a x)^2 - 1}}$
$= \text{Arc Sec}(a x) + C$ zu XV.

15) $\int \frac{1}{\sqrt{a(2-a) + 2b(1-a)x - b^2 x^2}} =$

$\frac{1}{b} \int \frac{b}{\sqrt{2(a + bx) - (a + bx)^2}} = \frac{1}{b} \text{ Arc Sinv } (a + bx) + C$ zu XVI.

16) $\int a^{\operatorname{Sin} x} . \operatorname{Cos} x = \frac{a^{\operatorname{Sin} x}}{\ln a} + C$ zu XVII.

17) $\int \operatorname{tg} x = \int \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} = - \int \frac{- \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}$
$= - \ln \operatorname{Cos} x + C$ zu XIX.

18) $\int \frac{1}{x} = \ln x + C$ zu XIX.

19) $\int \frac{1}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \ln (\ln x) + C$ zu XIX.

20) $\int \frac{1}{a-bx}$ ist, $a = c^2$, $b = n^2$ gesetzt

$$= \int \frac{1}{(c+nx)(c-nx)} = \frac{1}{2c} \int \left(\frac{1}{c+nx} + \frac{1}{c-nx} \right)$$

§. 6.

$$= \frac{1}{2cn} \left[\int \frac{n}{c+nx} - \int \frac{-n}{c-nx} \right]$$

$$= \frac{1}{2cn} [\ln(c+nx) - \ln(c-nx)] + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + C \quad \text{zu XX.}$$

§. 62. Zusatz. Die allgemeine, so häufig in Anwendung kommende Integralformel §. 60. VI.

$$\int (\varphi x)^n . \varphi' x = \frac{(\varphi x)^{n+1}}{n+1} + C$$

scheint beim ersten Anblick ihre Brauchbarkeit für $n = -1$ zu verlieren; denn für $n = -1$ liefert sie

$$\int (\varphi x)^{-1} . \varphi' x = \frac{(\varphi x)^0}{0} + C.$$

Bezeichnet man indessen den Werth des x, für welchen das Integral verschwindet, mit a; so hat man

$$0 = \frac{(\varphi a)^0}{0} + C; \quad \text{also}$$

$$C = -\frac{(\varphi a)^0}{0}; \quad \text{daher vollständig}$$

$$\int (\varphi x)^{-1} . \varphi' x = \frac{(\varphi x)^0 - (\varphi a)^0}{0};$$

Es ist aber nach §. 47. Beisp. 2. $\frac{a^0 - b^0}{0} = \ln \frac{a}{b}$;

folglich $\int (\varphi x)^{-1} \varphi' x = \ln \frac{\varphi x}{\varphi a} = \ln \varphi x - \ln \varphi a$

oder $\int (\varphi x)^{-1} \varphi' x = \ln \varphi x + C$ s. §. 60. XIX.

Diese Auseinandersetzung wurde mir vom Ober-Baurath Herrn Crelle mitgetheilt.

§. 63. Aufgabe. Man soll zu den ersten Ableitungen

$$\text{I.}\quad \frac{\varphi' x}{1-(\varphi x)^2}$$

$$\text{II.}\quad \frac{\varphi' x}{\sqrt{(\varphi x)^2+1}}$$

$$\text{III.}\quad \frac{\varphi' x}{\sqrt{(\varphi x)^2-1}}$$

die zugehörigen ursprünglichen Functionen bestimmen.

Auflösung zu I.

Es ist $\frac{1}{1-(\varphi x)^2} = \frac{1}{(1+\varphi x)(1-\varphi x)}$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\varphi x} + \frac{1}{1-\varphi x}\right] \text{ §. 6.} \quad \text{also}$$

$$\frac{\varphi' x}{1-(\varphi x)^2} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\varphi' x}{1+\varphi x} + \frac{\varphi' x}{1-\varphi x}\right] \quad \text{daher}$$

$$\int\frac{\varphi' x}{1-(\varphi x)^2} = \tfrac{1}{2}\left[\int\frac{d(1+\varphi x)}{1+\varphi x} - \int\frac{d(1-\varphi x)}{1-\varphi x}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\ln(1+\varphi x) - \ln(1-\varphi x)\right] + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+\varphi x}{1-\varphi x} + C; \quad \text{oder}$$

$$\text{I.}\quad \int\frac{\varphi' x}{1-(\varphi x)^2} = \ln\sqrt{\frac{1+\varphi x}{1-\varphi x}} + C$$

Auflösung zu II.

Setzt man $\sqrt{(\varphi x)^2+1} = Fx$; so ist

$$\varphi x\, \varphi' x = Fx\, F'x$$

und $\varphi x = \sqrt{(Fx)^2-1}$; also

$$\varphi x + Fx = \sqrt{(\varphi x)^2+1} + \sqrt{(Fx)^2-1}; \quad \text{daher}$$

$$d(\varphi x + Fx) = \frac{\varphi x\, \varphi' x}{Fx} + \frac{Fx\, F'x}{\varphi x}$$

$$= \frac{\varphi x \, \varphi' x}{F x} + \frac{\varphi x \, \varphi' x}{\varphi x}$$

$$= \varphi x \, \varphi' x \, \frac{\varphi x + F x}{\varphi x \, F x}; \text{ also}$$

$$\frac{\varphi' x}{F x} = \frac{d[\varphi x + F x]}{\varphi x + F x}; \text{ folglich}$$

$$\int \frac{\varphi' x}{F x} = \ln(\varphi x + F x) + C \quad \text{oder}$$

II. $\int \frac{\varphi' x}{\sqrt{(\varphi x)^2 + 1}} = \ln[\varphi x + \sqrt{(\varphi x)^2 + 1}] + C.$

Auflösung zu III.

Eben so wie II. ergiebt sich

III. $\int \frac{\varphi' x}{\sqrt{(\varphi x)^2 - 1}} = \ln[\varphi x + \sqrt{(\varphi x)^2 - 1}] + C$

Beispiele.

1) $\int \mathrm{Sec}\, x = \int \frac{\mathrm{Cos}\, x}{\mathrm{Cos}\, x^2} = \frac{d\, \mathrm{Sin}\, x}{1 - \mathrm{Sin}\, x^2}$

$$= \ln \sqrt{\frac{1 + \mathrm{Sin}\, x}{1 - \mathrm{Sin}\, x}} + C$$

$$= \ln \frac{1 + \mathrm{Sin}\, x}{\mathrm{Cos}\, x} + C \quad \text{oder}$$

$$= \ln[\mathrm{tg}\, x + \mathrm{Sec}\, x] + C \quad \text{zu I;}$$

oder auch

$$\int \mathrm{Sec}\, x = \int \frac{d\, \mathrm{Sec}\, x}{\mathrm{tg}\, x} = \int \frac{d\, \mathrm{Sec}\, x}{\sqrt{\mathrm{Sec}\, x^2 - 1}}$$

$$= \ln[\mathrm{Sec}\, x + \sqrt{\mathrm{Sec}\, x^2 - 1}] + C$$

$$= \ln[\mathrm{Sec}\, x + \mathrm{tg}\, x] + C \quad \text{zu III.}$$

2) $\int \frac{\varphi' x}{\sqrt{(\varphi x)^2 \pm \varphi x}} = \int \frac{2 \varphi' x}{\sqrt{[2\varphi x \pm 1]^2 - 1}}$

$= \int \frac{F' x}{\sqrt{(F x)^2 - 1}}$; $2 \varphi x \pm 1$ mit $F x$ bezeichnet,

$$= \ln[F x + \sqrt{(F x)^2 - 1}] + C$$

$$= \ln[2 \varphi x \pm 1 + 2\sqrt{(\varphi x)^2 \pm \varphi x}] + C \quad \text{zu III.}$$

Ist etwa $\varphi x = x$; so hat man also hiernach

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm x}} = \ln\left[2x \pm 1 + 2\sqrt{x^2 \pm x}\right] + C$$

3) $$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 \pm b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(x\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 \pm 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\left(x\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 \pm 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left[x\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}x^2 \pm 1}\right] + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{x\sqrt{a} + \sqrt{ax^2 \pm b}}{\sqrt{b}} + C$$ zu II. III.

§. 64. Aufgabe. Man soll $\int \varphi x . (fx)^n$ unter der Voraussetzung bestimmen, daß $\frac{f'x}{\varphi x}$ gleich einer beständigen Größe a ist

Auflösung. Es ist

$$\int \varphi x (fx)^n = \int \frac{\varphi x}{f'x} . f'x . (fx)^n$$

$$= \frac{1}{a} \int (fx)^n . f'x$$

$$= \frac{1}{a} . \frac{(fx)^{n+1}}{n+1} + C.$$ s. VI. §. 60.

Beispiele.

1) $\int x^{m-1} . (a \pm bx^m)^n$ anzugeben.

Hier ist $\varphi x = x^{m-1}$

und $fx = a \pm bx^m$

also $f'x = \pm bmx^{m-1}$

daher $\frac{f'x}{\varphi x} = \pm bm$; also

$$\int x^{m-1}(a \pm b x^m)^n = \frac{1}{\pm bm} \frac{(a \pm bx^m)^{n+1}}{n+1} + C$$

s. §. 61. Beisp. 5.

2) $\int \frac{x \pm 1}{x} [x \pm \ln x]^n$ anzugeben.

Hier ist $\varphi x = 1 \pm \frac{1}{x}$ und

$fx = x \pm \ln x$ also

$f'x = 1 \pm \frac{1}{x}$ daher

$\frac{f'x}{\varphi x} = 1$; folglich

$$\int \frac{x \pm 1}{x} [x \pm \ln x]^n = \frac{[x \pm \ln x]^{n+1}}{n+1} + C$$

§. 65. Aufgabe. Man soll zu Bestimmung von $\int fx\, \varphi x$ eine Reductionsformel herleiten.

Auflösung. Man betrachte φx als erste Ableitung einer andern Function von x, sage also $\varphi x = F'x$; so hat man nach §. 60. IV.

$$\int fx\, F'x = fx\, Fx - \int Fx \,.\, f'x$$

Es ist aber $F'x = \varphi x$

also $Fx = \int \varphi x$ daher

$$\int fx \,.\, \varphi x = fx \int \varphi x - \int [f'x \int \varphi x]$$

Beisp. Es sey n eine ganze positive Zahl; man soll $\int x^n \operatorname{Sin} x$ bestimmen.

Es ist $\int x^n \operatorname{Sin} x = x^n \int \operatorname{Sin} x - \int [n x^{n-1} \int \operatorname{Sin} x]$

$= - x^n \operatorname{Cos} x + n \int x^{n-1} \operatorname{Cos} x$

aber $\int x^{n-1} \operatorname{Cos} x = x^{n-1} \int \operatorname{Cos} x - \int [(n-1) x^{n-2} \int \operatorname{Cos} x]$

$= x^{n-1} \operatorname{Sin} x - (n-1) \int x^{n-2} \operatorname{Sin} x$

u. s. w. Zuletzt kommt man, je nachdem n gerade oder ungerade ist, auf $\int \operatorname{Sin} x$ oder auf $\int \operatorname{Cos} x$, und beide sind bekannt. Ist etwa $n = 3$, so ergiebt sich

$$\int x^3 \operatorname{Sin} x = 3(x^2 - 2) \operatorname{Sin} x + x(6 - x^2) \operatorname{Cos} x + C.$$

§. 66. Aufgabe. Man soll

$$Q = \int \frac{\varphi' x}{a + b\varphi x + c(\varphi x)^2} \quad \text{bestimmen.}$$

Auflösung. 1. Setzt man $\varphi x + \frac{b}{2c} = Fx$, so entsteht

$$Q = \int \frac{F'x}{\frac{4ac - b^2}{4c} + c(Fx)^2}$$

$$= \frac{4c}{4ac - b^2} \int \frac{F'x}{1 + \frac{4c^2}{4ac - b^2}(Fx)^2}$$

oder $\quad \frac{2c}{\sqrt{4ac - b^2}} Fx = fx \quad$ gesetzt,

$$Q = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \int \frac{f'x}{1 + (fx)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{Arc\,tg} fx + C \quad \text{§. 60. XIV.}$$

oder, nach Substit. der Werthe

$$\text{I.} \int \frac{\varphi' x}{a + b\varphi x + c(\varphi x)^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{b + 2c\varphi x}{\sqrt{4ac - b^2}} + C$$

welche Formel nur brauchbar ist, wenn $4ac > b^2$.

2. Ist $4ac = b^2$; so wird

$$Q = 4a \int \frac{\varphi' x}{(2a + b\varphi x)^2};$$

oder $\quad 2a + b\varphi x = Fx \quad$ gesetzt

$$Q = 4a \int \frac{\frac{1}{b} F'x}{(Fx)^2}$$

$$= \frac{4a}{b} \int (Fx)^{-2} . F'x$$

$$= \frac{4a}{b} . \frac{(Fx)^{-1}}{-1}, \quad \text{oder}$$

II. $\int \frac{\varphi' x}{a + b\varphi x + c(\varphi x)^2} = - \frac{4a}{b(2a + b\varphi x)} + C$

welche Formel nur gilt, wenn $4ac = b^2$ ist

3. Ist $4ac < b^2$, so zerlege man $a + b\varphi x + c(\varphi x)^2$ in die Factoren $c(n + \varphi x)(m + \varphi x)$ wo

$$n = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c};$$

$$m = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \text{ ist,}$$

so entsteht

$$Q = \frac{1}{c} \int \frac{\varphi' x}{(n + \varphi x)(m + \varphi x)}$$

$$= \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{m - n} \left(\int \frac{\varphi' x}{n + \varphi x} - \int \frac{\varphi' x}{m + \varphi x} \right)$$

$$= \frac{1}{c(m - n)} \cdot \ln \frac{n + \varphi x}{m + \varphi x} + C$$

oder

III. $\int \frac{\varphi' x}{a + b\varphi x + c(\varphi x)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{b + 2c\varphi x - \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + 2c\varphi x + \sqrt{b^2 - 4ac}} + C$$

welche Formel nur für $b^2 > 4ac$ brauchbar ist.

Beispiele.

1. $\int \frac{1}{1 + x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ Arc tg } \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$

2. $\int \frac{1}{1 + x - x^2} = - \int \frac{1}{-1 - x + x^2}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{5}} \ln \frac{-1 + 2x - \sqrt{5}}{-1 + 2x + \sqrt{5}} + C$$

3. $\int \frac{1}{1 - 2x + x^2} = \frac{1}{1 - x} + C$

Anmerk. Findet sich bei speciellen Anwendungen der log einer negativen Größe in der Formel z. B. $\ln(-a)$; so hat man, weil

$$\ln(-a) = \tfrac{1}{2}\ln(-a)^2 = \tfrac{1}{2}\ln a^2 = \ln a$$

ist, in dieser an und für sich widersinnigen Folgerung $\ln -a = \ln a$ die Ueberzeugung, daß wenn die zum Grunde liegende Aufgabe nicht Unmöglichkeiten enthält, das Resultat $\ln(-a)$ nur durch die zusammengesetzte Verwandlungsweise in diese Form gekommen, $\ln a$ aber das verlangte Resultat ist.

§. 67. Das ergiebigste Feld der Umformungen ist das der trigonometrischen Functionen. Es sollen deswegen jetzt die hiehergehörigen vorzüglichsten Zurückleitungs- oder Integralformeln hergeleitet werden.

§. 68. Aufgabe. Die ursprünglichen Functionen zu den ersten Ableitungen $\operatorname{Sin}\varphi x . \varphi' x$; $\operatorname{Cos}\varphi x . \varphi' x$; $\frac{\varphi' x}{\operatorname{Cos}\varphi x}$; $\frac{\varphi' x}{\operatorname{Sin}\varphi x}$; $\frac{\operatorname{Sin}\varphi x . \varphi' x}{\operatorname{Cos}\varphi x}$; $\frac{\operatorname{Cos}\varphi x . \varphi' x}{\operatorname{Sin}\varphi x}$; $\operatorname{Sin}\varphi x \operatorname{Cos}\varphi x . \varphi' x$; $\frac{\varphi' x}{\operatorname{Sin}\varphi x \operatorname{Cos}\varphi x}$ zu bestimmen.

Auflösung.

1. Es ist nach §. 60. VIII.

I. $\int \operatorname{Sin}\varphi x . \varphi' x = -\operatorname{Cos}\varphi x + C.$

2. Es ist nach §. 60. VII.

II. $\int \operatorname{Cos}\varphi x . \varphi' x = \operatorname{Sin}\varphi x + C.$

3. Es ist $\frac{\varphi' x}{\operatorname{Cos}\varphi x} = \operatorname{Sec}\varphi x \, \varphi' x = \frac{\operatorname{tg}\varphi x \operatorname{Sec}\varphi x \, \varphi' x}{\operatorname{tg}\varphi x}$

$$= \frac{d \operatorname{Sec}\varphi x}{\sqrt{\operatorname{Sec}\varphi x^2 - 1}}$$

folglich nach §. 63. III.

$$\text{III.} \quad \int \frac{\varphi' \varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi x} = \ln(\mathrm{Sec}\,\varphi x + \mathrm{tg}\,\varphi x) + C$$

$$= \ln \mathrm{Cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi x}{2}\right) + C$$

4. Es ist $\frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x} = \mathrm{Cosec}\,\varphi x\,\varphi' x$

$$= - \frac{-\mathrm{Cosec}\,\varphi x\,\mathrm{Cotg}\,\varphi x\,\varphi' x}{\mathrm{Cotg}\,\varphi x} = - \frac{d\,\mathrm{Cosec}\,\varphi x}{\sqrt{\mathrm{Cosec}\,\varphi x^2 - 1}}$$

also nach §. 63. III.

$$\text{IV.} \quad \int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x} = -\ln(\mathrm{Cosec}\,\varphi x + \mathrm{Cotg}\,\varphi x) + C$$

$$= -\ln \mathrm{Cotg}\frac{\varphi x}{2} + C$$

oder auch $= \ln \mathrm{tg}\frac{\varphi x}{2} + C$

5. Es ist $\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x\,.\,\varphi' x}{\mathrm{Cos}\,\varphi x} = - \frac{d\,\mathrm{Cos}\,\varphi x}{\mathrm{Cos}\,\varphi x}$;

also nach §. 60. XIX.

$$\text{V.} \quad \int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x\,\varphi' x}{\mathrm{Cos}\,\varphi x} = -\ln \mathrm{Cos}\,\varphi x + C$$

6. Eben so ergiebt sich

$$\text{VI.} \quad \int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi x\,\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x} = \ln \mathrm{Sin}\,\varphi x + C$$

7. Es ist $\mathrm{Sin}\,\varphi x\,\mathrm{Cos}\,\varphi x = \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,2\varphi x$ oder $2\varphi x = fx$ gesetzt

$$\mathrm{Sin}\,\varphi x\,\mathrm{Cos}\,\varphi x\,.\,\varphi' x = \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,fx\,.\,\tfrac{1}{2}f' x$$

also

$$\int \mathrm{Sin}\,\varphi x\,\mathrm{Cos}\,\varphi x\,.\,\varphi' x = -\tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,fx + C$$

nach §. 60. VIII. oder

$$\text{VII.} \quad \int \mathrm{Sin}\,\varphi x\,\mathrm{Cos}\,\varphi x\,.\,\varphi' x = -\tfrac{1}{4}\mathrm{Cos}\,2\varphi x + C$$

8. Bei der Bezeichnung wie in 7, ist

$$\int \frac{\varphi' x}{\operatorname{Sin} \varphi x \operatorname{Cos} \varphi x} = \int \frac{\frac{1}{2} f' x}{\frac{1}{2} \operatorname{Sin} f x} \text{ also wie in IV.}$$

VIII. $\int \frac{\varphi' x}{\operatorname{Sin} \varphi x \operatorname{Cos} \varphi x} = -\ln(\operatorname{Cosec} 2\varphi x + \operatorname{Cotg} 2\varphi x) + C$

$= \ln \operatorname{tg} \varphi x + C.$

Beispiele.

1. $\int \operatorname{Sin} 2x = \frac{1}{2} \int \operatorname{Sin} 2x \,.\, 2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Cos} 2x + C$
2. $\int \operatorname{Cos}(a + bx) = \frac{1}{b} \operatorname{Sin}(a + bx) + C$
3. $\int \operatorname{Sec}(a - bx) = -\frac{1}{b} \int \frac{-b}{\operatorname{Cos}(a - bx)} =$
   $= -\frac{1}{b} \ln [\operatorname{Sec}(a - bx) + \operatorname{tg}(a - bx)] + C$
4. $\int \operatorname{Cosec} x = -\ln(\operatorname{Cosec} x + \operatorname{Cotg} x) + C$
   $= -\ln \operatorname{Cotg} \frac{x}{2} + C$
5. $\int \operatorname{tg} 3x = \frac{1}{3} \int \frac{\operatorname{Sin} 3x}{\operatorname{Cos} 3x} \,.\, 3 = -\frac{1}{3} \ln \operatorname{Cos} 3x + C$
6. $\int \operatorname{Cotg} \frac{1}{2} x = 2 \,.\, \int \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} x}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2} x} \cdot \frac{1}{2} = 2 \ln \operatorname{Sin} \frac{1}{2} x + C$
7. $\int \operatorname{Sin} \frac{1}{4} x \operatorname{Cos} \frac{1}{4} x = -\operatorname{Cos} \frac{1}{2} x + C$
8. $\int \frac{1}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = -\ln(\operatorname{Cosec} 2x + \operatorname{Cotg} 2x) + C$
   $= -\ln \operatorname{Cotg} x + C$

§. 69. Aufgabe. Es bedeute n eine ganze positive Zahl; man soll Reductionsformeln für

$\int \operatorname{Sin} \varphi x^n . \varphi' x$; $\int \operatorname{Cos} \varphi x^n \varphi' x$; $\int \frac{\varphi' x}{\operatorname{Sin} \varphi x^n}$; $\int \frac{\operatorname{Cos} \varphi x^n}{\varphi' x}$;

$\int \operatorname{tg} \varphi x^n \varphi' x$; $\int \operatorname{Cotg} \varphi x^n \varphi' x$ herleiten.

Auflösung.

1. Es ist $\int \operatorname{Sin} \varphi x^n \varphi' x = \int \operatorname{Sin} \varphi x^{n-1} \operatorname{Sin} \varphi x \,.\, \varphi' x$

$= -\int \operatorname{Sin} \varphi x^{n-1} . d \operatorname{Cos} \varphi x =$

$-\operatorname{Sin} \varphi x^{n-1} \operatorname{Cos} \varphi x + \int \operatorname{Cos} \varphi x \, d \operatorname{Sin} \varphi x^{n-1}$

$= -\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n-1}\,\mathrm{Cos}\,\varphi x + (n-1)\int \mathrm{Cos}\,\varphi x^2\,\mathrm{Sin}\varphi x^{n-2}\varphi' x$

$= -\mathrm{Sin}\varphi x^{n-1}\mathrm{Cos}\varphi x + (n-1)\int \mathrm{Sin}\varphi x^{n-2}\varphi' x - (n-1)\int \mathrm{Sin}\varphi x^n \varphi' x$

und hieraus

$$\text{I. } \int \mathrm{Sin}\varphi x^n . \varphi' x = -\frac{\mathrm{Sin}\varphi x^{n-1}\,\mathrm{Cos}\varphi x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{Sin}\varphi x^{n-2}\varphi' x$$

Bei dem Gebrauch dieser Formel kommt man, wenn n ungerade ist, zuletzt auf $\int \mathrm{Sin}\,\varphi x . \varphi' x = -\mathrm{Cos}\,\varphi x$; und ist n gerade, so hat man zuletzt $\int \varphi' x = \varphi x$.

2. Es ist $\int \mathrm{Cos}\,\varphi x^n\, d\varphi x = \int \mathrm{Cos}\,\varphi x^{n-1}\, d\,\mathrm{Sin}\,\varphi x$

$= \mathrm{Cos}\,\varphi x^{n-1}\,\mathrm{Sin}\,\varphi x - \int \mathrm{Sin}\,\varphi x\, d\,\mathrm{Cos}\,\varphi x^{n-1}$

$= \mathrm{Cos}\,\varphi x^{n-1}\,\mathrm{Sin}\,\varphi x + (n-1)\int \mathrm{Sin}\,\varphi x^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi x^{n-2} . \varphi' x$

u. s. w. wie in 1.; endlich

$$\text{II. } \int \mathrm{Cos}\varphi x^n \varphi' x = \frac{\mathrm{Cos}\varphi x^{n-1}\,\mathrm{Sin}\varphi x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{Cos}\,\varphi x^{n-2}\,\varphi' x$$

Bei dem Gebrauch dieser Formel kommt man zuletzt entweder auf $\int \mathrm{Cos}\,\varphi x\, \varphi' x = \mathrm{Sin}\,\varphi x$ oder auf $\int \varphi' x = \varphi x$.

3. Es ist $\int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^n} = \int \mathrm{Cosec}\,\varphi x^n\, \varphi' x$

$= \int \mathrm{Cosec}\,\varphi x^{n-2}\,\mathrm{Cosec}\,\varphi x^2 . \varphi' x$

$= -\int \mathrm{Cosec}\,\varphi x^{n-2}\, d\,\mathrm{Cotg}\,\varphi x$

$= -\mathrm{Cosec}\,\varphi x^{n-2}\,\mathrm{Cotg}\,\varphi x + \int \mathrm{Cotg}\,\varphi x\, d\,\mathrm{Cosec}\,\varphi x^{n-2}$

$= -\mathrm{Cosec}\,\varphi x^{n-2} . \mathrm{Cotg}\,\varphi x$

$\quad - (n-2)\int \mathrm{Cotg}\,\varphi x^2\,\mathrm{Cosec}\,\varphi x^{n-2} . \varphi' x$

$= -\mathrm{Cosec}\,\varphi x^{n-2}\,\mathrm{Cotg}\,\varphi x - (n-2)\int \mathrm{Cosec}\,\varphi x^n \varphi' x$

$\quad + (n-2)\int \mathrm{Cosec}\,\varphi x^{n-2}\,\varphi' x$

$$= -\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n-1}} - (n-2)\int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^n} + (n-2)\int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n-2}}$$

also

$$\text{III. } \int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^n} = -\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi x}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n-2}}$$

Bei fortgesetzter Anwendung dieser Formel kommt man zuletzt auf

$$\int\frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x} = -\ln(\mathrm{Cosec}\,\varphi x + \mathrm{Cotg}\,\varphi x) + C.$$

4. Eben so wie in 3. ergiebt sich

$$\text{IV.}\quad \int\frac{\varphi' x}{\mathrm{Cos}\varphi x^n} = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x}{(n-1)\mathrm{Cos}\varphi x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{\varphi' x}{\mathrm{Cos}\varphi x^{n-2}} + C$$

Bei fortgesetzter Anwendung dieser Formel kommt man zuletzt auf

$$\int\frac{\varphi' x}{\mathrm{Cos}\,\varphi x} = \ln(\mathrm{Sec}\,\varphi x + \mathrm{tg}\,\varphi x) + C.$$

5. Aus $d\,\mathrm{tg}\,\varphi x^{n-1} = (n-1)\,\mathrm{tg}\,\varphi x^{n-2}\,\mathrm{Sec}\,\varphi x^2 . \varphi' x$ folgt leicht

$$\text{V.}\quad \int\mathrm{tg}\,\varphi x^n\,\varphi' x = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi x^{n-1}}{n-1} - \int\mathrm{tg}\,\varphi x^{n-2}\,\varphi' x.$$

Hier kommt man zuletzt auf

$$\int\mathrm{tg}\,\varphi x\,\varphi' x = -\ln\mathrm{Cos}\,\varphi x + C$$

oder auf $\int\varphi' x = \varphi x + C.$

6. Aus $d\,(\mathrm{Cotg}\,\varphi x^{n-1})$ ergiebt sich eben so

$$\text{VI.}\quad \int\mathrm{Cotg}\,\varphi x^n\,\varphi' x = -\frac{\mathrm{Cotg}\,\varphi x^{n-1}}{n-1} - \int\mathrm{Cotg}\,\varphi x^{n-2}\,\varphi' x$$

und hier kommt man zuletzt entweder auf

$$\int\mathrm{Cotg}\,\varphi x\,.\,\varphi' x = \ln\,\mathrm{Sin}\,\varphi x + C$$

oder auf $\int\varphi' x = \varphi x + C.$

Beispiele.

1. $\int\mathrm{Sin}\,x^2 = \frac{1}{2}(x - \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x) + C$
2. $\int\mathrm{Sin}\,x^3 = -\frac{1}{3}\mathrm{Cos}\,x\,(2 + \mathrm{Sin}\,x^2) + C$
3. $\int\mathrm{Cos}\,x^2 = \frac{1}{2}(x + \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x) + C$
4. $\int\frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^4} = -\frac{\mathrm{Cos}\,x}{3\,\mathrm{Sin}\,x^3}(1 + 2\,\mathrm{Sin}\,x^2) + C$

5. $\int \frac{1}{\operatorname{Cos} x^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x^2} + \ln(\operatorname{Sec} x + \operatorname{tg} x)\right] + C$

6. $\int \operatorname{tg} x^3 = \frac{\operatorname{tg} x^2}{2} + \ln \operatorname{Cos} x + C$

7. $\int \operatorname{Cotg} x^4 = x + \operatorname{Cotg} x - \frac{\operatorname{Cotg} x^3}{3} + C.$

§. 70. Aufgabe. Es sollen Reductionsformeln zur Bestimmung der Integrale

$$\int \operatorname{Sin} \varphi x^n \operatorname{Cos} \varphi x^m . \varphi' x;\ \int \frac{\operatorname{Sin} \varphi x^n}{\operatorname{Cos} \varphi x^m} \varphi' x;$$

$$\int \frac{\operatorname{Cos} \varphi x^m}{\operatorname{Sin} \varphi x^n} \varphi' x;\ \int \frac{\varphi' x}{\operatorname{Sin} \varphi x^n \operatorname{Cos} \varphi x^m};$$

hergeleitet werden.

Auflösung.

1. Es ist $\int \operatorname{Sin} \varphi x^n \operatorname{Cos} \varphi x^m \varphi' x$

$= \int \operatorname{Cos} \varphi x^{m-1} \operatorname{Sin} \varphi x^n \, d \operatorname{Sin} \varphi x$

$= \int \operatorname{Cos} \varphi x^{m-1} \, d \frac{\operatorname{Sin} \varphi x^{n+1}}{n+1}$

$= \frac{\operatorname{Sin} \varphi x^{n+1} \operatorname{Cos} \varphi x^{m-1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \operatorname{Sin} \varphi x^{n+1} . d \operatorname{Cos} \varphi x^{m-1}$

$= \frac{\operatorname{Sin} \varphi x^{n+1} \operatorname{Cos} \varphi x^{m-1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \operatorname{Sin} \varphi x^{n+2} . \operatorname{Cos} \varphi x^{m-2} \varphi' x$

$= \frac{\operatorname{Sin} \varphi x^{n+1} \operatorname{Cos} \varphi x^{m-1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \operatorname{Sin} \varphi x^n \operatorname{Cos} \varphi x^{m-2} \varphi' x$

$\quad - \frac{m-1}{n+1} \int \operatorname{Sin} \varphi x^n \operatorname{Cos} \varphi x^m \varphi' x$

und entwickelt man hieraus

$\int \operatorname{Sin} \varphi x^n \operatorname{Cos} \varphi x^m \varphi' x$, so entsteht

I. $\int \operatorname{Sin} \varphi x^n \operatorname{Cos} \varphi x^m \varphi' x = \frac{\operatorname{Sin} \varphi x^{n+1} \operatorname{Cos} \varphi x^{m-1}}{n+m}$

$\quad + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{Sin} \varphi x^n \operatorname{Cos} \varphi x^{m-2} \varphi' x$

Bei fortgesetzter Anwendung dieser Formel kommt man, wenn m eine ganze Zahl ist, zuletzt entweder auf
$$\int \mathrm{Sin}\,\varphi x^n \,\mathrm{Cos}\,\varphi x\,\varphi' x = \int \mathrm{Sin}\,\varphi x^n \,d\,\mathrm{Sin}\,\varphi x = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n+1}}{n+1} + C$$
oder auf $\int \mathrm{Sin}\,\varphi x^n\,\varphi' x$; welches Integral nach vor. §. I. bestimmbar ist, wenn n eine ganze Zahl ausdrückt.

Vollkommen auf denselben Weg ergiebt sich auch

$$\text{II.}\quad \int \mathrm{Sin}\,\varphi x^n \,\mathrm{Cos}\,\varphi x^m\,\varphi' x = -\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n-1}\,\mathrm{Cos}\,\varphi x^{m+1}}{n+m}$$
$$+\frac{n-1}{n+m}\int \mathrm{Sin}\,\varphi x^{n-2}\,\mathrm{Cos}\,\varphi x^m\,\varphi' x$$

und bei fortgesetztem Gebrauch dieser Formel kommt man, wenn n eine ganze Zahl ist, zuletzt entweder auf
$$\int \mathrm{Sin}\,\varphi x\,\mathrm{Cos}\,\varphi x^m\,\varphi' x = -\int \mathrm{Cos}\,\varphi x^m \,.\, d\,\mathrm{Cos}\,\varphi x$$
$$= -\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi x^{m+1}}{m+1} + C$$
oder auf $\int \mathrm{Cos}\,\varphi x^m\,\varphi' x$, welches Integral nach vorigem §. II. aufzusuchen ist, wenn m eine ganze Zahl ausdrückt.

2. Es ist
$$\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x^n}{\mathrm{Cos}\,\varphi x^m}\varphi' x = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x^n\,(\mathrm{Sin}\,\varphi x^2 + \mathrm{Cos}\,\varphi x^2)}{\mathrm{Cos}\,\varphi x^m}\varphi' x$$
$$= -\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n+1}\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi x^{-m}\,d\,\mathrm{Cos}\,\varphi x$$
$$+ \mathrm{Sin}\,\varphi x^n\,\mathrm{Cos}\,\varphi x^{-m+1}\,d\,\mathrm{Sin}\,\varphi x;$$
und also
$$\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x^n}{\mathrm{Cos}\,\varphi x^m}\varphi' x = -\int \mathrm{Sin}\,\varphi x^{n+1}\,d\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi x^{-m+1}}{-m+1}$$
$$+\int \mathrm{Cos}\,\varphi x^{-m+1}\,.\,d\,\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n+1}}{n+1}$$

Nun ist aber

$$-\int \text{Sin}\,\varphi x^{n+1}\, d\,\frac{\text{Cos}\,\varphi x^{-m+1}}{-m+1}$$

$$= \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n+1}}{(m-1)\,\text{Cos}\,\varphi x^{m-1}} - \frac{n+1}{m-1}\int \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n}}{\text{Cos}\,\varphi x^{m-2}} \cdot \varphi' x$$

und

$$\int \text{Cos}\,\varphi x^{-m+1}\, d\,\frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n+1}}{(n+1)\,\text{Cos}\,\varphi x^{m-1}} - \frac{m-1}{n+1}\int \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n}\,(1-\text{Cos}\,\varphi x^{2})}{\text{Cos}\,\varphi x^{m}}\, \varphi' x$$

$$= \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n+1}}{(n+1)\,\text{Cos}\,\varphi x^{m-1}} - \frac{m-1}{n+1}\int \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n}}{\text{Cos}\,\varphi x^{m}}\, \varphi' x$$

$$+ \frac{m-1}{n+1}\int \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n}}{\text{Cos}\,\varphi x^{m-2}}\, \varphi' x$$

folglich, wenn man diese Werthe substituirt, und $\int \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n}}{\text{Cos}\,\varphi x^{m}}\, \varphi' x$ entwickelt,

III. $$\int \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n}}{\text{Cos}\,\varphi x^{m}}\, \varphi' x = \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n+1}}{(m-1)\,\text{Cos}\,\varphi x^{m-1}}$$

$$+ \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n}}{\text{Cos}\,\varphi x^{m-2}}\, \varphi' x.$$

Bei fortgesetzter Anwendung dieser Reductionsformel kommt man, wenn m eine ganze Zahl ist, zuletzt entweder auf

$$\int \frac{\text{Sin}\,\varphi x^{n}}{\text{Cos}\,\varphi x}\, \varphi' x = \int \text{Sin}\,\varphi x^{n}\, \text{Cos}\,\varphi x^{-1}\, \varphi' x$$

welche, wenn auch n eine ganze Zahl bezeichnet, nach II. behandelt, zuletzt entweder auf

$$\int \frac{\text{Sin}\,\varphi x}{\text{Cos}\,\varphi x}\, \varphi' x = -\ln \text{Cos}\,\varphi x + C \quad (\text{s. §. 68. V.})$$

oder auf

$$\int \frac{\varphi' x}{\operatorname{Cos} \varphi x} = \ln (\operatorname{Sec} \varphi x + \operatorname{tg} \varphi x) + C \quad (\text{s. §. 68. III.})$$

führt; oder man stößt auf

$$\int \operatorname{Sin} \varphi x^n \, \varphi' x$$

welches nach §. 69. I. bestimmt werden kann, wenn n eine ganze Zahl ist.

3. Wie in 2. ergiebt sich

$$\text{IV.} \quad \int \frac{\operatorname{Cos} \varphi x^m}{\operatorname{Sin} \varphi x^n} \varphi' x = - \frac{\operatorname{Cos} \varphi x^{m+1}}{(n-1) \operatorname{Sin} \varphi x^{n-1}}$$

$$+ \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{\operatorname{Cos} \varphi x^m}{\operatorname{Sin} \varphi x^{n-2}} \varphi' x$$

Bei fortgesetzter Anwendung dieser Formel kommt man zuletzt entweder auf $\int \frac{\operatorname{Cos} \varphi x^m}{\operatorname{Sin} \varphi x} \varphi' x$, welches nach I. und dann nach §. 68. IV. oder VI., oder auf $\int \operatorname{Cos} \varphi x^m \varphi' x$, welches nach §. 69. II. zu reduciren ist, vorausgesetzt, daß n und m ganze Zahlen sind.

Anmerk. Die Herleitung von IV. kann augenblicklich aus III. erfolgen, wenn man $\varphi x + F x = \frac{1}{2}\pi$ setzt u. s. w.

Aehnliche Erleichterungen lassen sich auch in §. 68. und §. 69. anbringen.

4. Es ist $\int \frac{\varphi' x}{\operatorname{Sin} \varphi x^n \operatorname{Cos} \varphi x^m}$

$$= \int \operatorname{Cos} \varphi x^{-m-1} d \, \frac{\operatorname{Sin} \varphi x^{-n+1}}{-n+1}$$

$$= - \frac{1}{(n-1) \operatorname{Sin} \varphi x^{n-1} \operatorname{Cos} \varphi x^{m+1}}$$

$$+ \frac{1}{n-1} \int \operatorname{Sin} \varphi x^{-n+1} . \, d \operatorname{Cos} \varphi x^{-m-1}$$

oder

V. $\int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^n \;\mathrm{Cos}\,\varphi x^m} = - \frac{1}{(n-1)\,\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n-1}\;\mathrm{Cos}\,\varphi x^{m+1}}$

$$+ \frac{m+1}{n-1} \int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n-2}\;\mathrm{Cos}\,\varphi x^{m+2}}$$

Bei fortgesetzter Anwendung dieser Formel kommt man zuletzt entweder auf

$$\int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x\;\mathrm{Cos}\,\varphi x^r} = \int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi x^{-1}\;\varphi' x}{\mathrm{Cos}\,\varphi x^r}$$

welches nach III. auf

$$\int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x\;\mathrm{Cos}\,\varphi x} \quad \text{oder auf} \quad \int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x}$$

führt (siehe §. 68.); oder man stößt auf

$$\int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Cos}\,\varphi x^r}$$

welches nach §. 69. zu finden ist, vorausgesetzt, daß n und m ganze Zahlen sind.

Vollkommen wie V. findet man auch

VI. $\int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^n\;\mathrm{Cos}\,\varphi x^m} = \frac{1}{(m-1)\,\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n+1}\;\mathrm{Cos}\,\varphi x^{m-1}}$

$$+ \frac{n+1}{m-1} \int \frac{\varphi' x}{\mathrm{Sin}\,\varphi x^{n+2}\;\mathrm{Cos}\,\varphi x^{m-2}}.$$

Der Gebrauch ist wie in V.

Beispiele.

1. $\int \mathrm{Sin}\,2x^2 \,.\, \mathrm{Cos}\,2x^3 = \mathrm{Sin}\,2x^3 \,.\, \frac{3\,\mathrm{Cos}\,2x^2 + 2}{30} + C$

bequemer aus I. als aus II.

2. $\int \frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,x^2} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,x} + C$

3. $\int \frac{\mathrm{Cos}\,x^4}{\mathrm{Sin}\,x^5} = \frac{5\,.\,\mathrm{Sin}\,x^2 - 2}{8\,\mathrm{Sin}\,x^4}\,\mathrm{Cos}\,x + \frac{3}{8}\ln \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + C$

4. $\int \frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^3\;\mathrm{Cos}\,x^5} = \frac{1 - 3\,\mathrm{Cos}\,x^2\;\mathrm{Cos}\,2x}{4\,\mathrm{Sin}\,x^2\;\mathrm{Cos}\,x^4} + 3\ln \mathrm{tg}\,x + C$

§. 71. Zusatz. Folgende bekannten Eigenschaften trigonometrischer Functionen:

die Tangente durchläuft alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$;

die Secante alle von $+1$ bis $+\infty$ und von -1 bis $-\infty$;

der Sinus alle von -1 über 0 bis $+1$;

können leicht benutzt werden um einen zweigliedrigen Ausdruck von der Form $\pm a \pm b x^n$ zu einem Gliede zu vereinen. Sind nämlich beide Glieder positiv, hat man also $a + b x^n$ so giebt es gewiß, welche Werthe auch die veränderliche Größe x annehmen mag, einen Kreisbogen β (für den Halbmesser 1) dessen Tangente so groß ist, daß $b x^n = a \, tg \beta^2$, also

$$x = F\beta = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot tg \beta^{\frac{2}{n}}$$

gesetzt werden kann. Dann hat man

$$a + b x^n = a + a \, tg \beta^2 = a \, Sec \beta^2.$$

Ist a negativ, b positiv, hat man also $b x^n - a$, so kann man für alle Werthe des x, für welche $b x^n > a$ oder mindestens $= a$ ist, $b x^n = a \, Sec \beta^2$ also

$$x = F\beta = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot Sec \beta^{\frac{2}{n}}$$

setzen; dann wird

$$b x^n - a = a \, Sec \beta^2 - a = a \, tg \beta^2.$$

Ist $b x^n < a$ oder hat man $a - b x^n$, so setze man

$$b x^n = a \, Sin \beta^2;$$

also

$$x = F\beta = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot Sin \beta^{\frac{2}{n}};$$

dann wird

$$a - b x^n = a - a \operatorname{Sin} \beta^2 = a \operatorname{Cos} \beta^2.$$

§. 72. Aufgabe. Es bezeichne $2 \cdot \frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl; man soll

$$\int \frac{(\varphi x)^m \varphi' x}{a + b (\varphi x)^n}; \int \frac{(\varphi x)^m \varphi' x}{a - b (\varphi x)^n}; \int \frac{(\varphi x)^m \varphi' x}{b (\varphi x)^n - a}$$

bestimmen.

Auflösung zu 1. Man setze $b (\varphi x)^n = a \operatorname{tg} \beta^2$ so wird

$$\int \frac{(\varphi x)^m \varphi' x}{a + b (\varphi x)^n} = \frac{2}{n a} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \int \operatorname{tg} \beta^{2 \cdot \frac{m+1}{n} - 1}$$

und nun kann die Bestimmung nach §. 69. erfolgen.

Auflösung zu 2.

Für alle Werthe des x, für welche $b (\varphi x)^n$ kleiner oder höchstens $= a$ wird, kann man

$$b (\varphi x)^n = a \operatorname{Sin} \beta^2$$

setzen; dann entsteht

$$\int \frac{(\varphi x)^m \varphi' x}{a - b (\varphi x)^n} = \frac{2}{n a} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \int \frac{\operatorname{Sin} \beta^{\frac{m+1}{n} \cdot 2 - 1}}{\operatorname{Cos} \beta}$$

und nun kann die Bestimmung ebenfalls nach §. 69. erfolgen. Für die Fälle wo $b (\varphi x)^n > a$ wird, siehe die folgende Auflösung.

Auflösung zu 3.

Für alle Werthe des x, die $b (\varphi x)^n > a$ oder $= a$ machen, kann man $b (\varphi x)^n = a \operatorname{Sec} \beta^2$ setzen, und dann entsteht

$$\int \frac{(\varphi x)^m \varphi' x}{b (\varphi x)^n - a} = \frac{2}{n a} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{2}} \int \frac{1}{\operatorname{Sin} \beta \operatorname{Cos} \beta^{\frac{m+1}{n} \cdot 2 - 1}}$$

und dies Integral ist auch nach §. 69. zu bestimmen.

Beispiel. Man soll $\int \frac{1}{x(a \pm bx^2)}$ angeben. Es ergiebt sich

$$\int \frac{1}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{a} \ln \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a+bx^2}} + C$$

$$= \frac{1}{a} \ln \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} + \frac{1}{a} \ln \sqrt{b} + C$$

$$= \frac{1}{a} \ln \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} + C$$

Ferner

$$\int \frac{1}{x(a-bx^2)} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{\sqrt{a-bx^2}} + C$$

oder, was dasselbe ist,

$$-\int \frac{1}{x(bx^2-a)} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{\sqrt{bx^2-a}} + C$$

§. 73. Aufgabe. Die vorzüglichsten der Fälle anzugeben, für welche

$$\int (\varphi x)^m [a + b(\varphi x)^n]^p \varphi' x$$

zu bestimmen ist.

Auflösung.

1. Wenn $m = n - 1$ ist, p mag dann jede Größe seyn.

Beweis. Für $m = n - 1$ ist

$$(\varphi x)^m \varphi' x = (\varphi x)^{n-1} \varphi' x = \frac{d(\varphi x)^n}{n}$$

also, wie §. 64.

$$\int (\varphi x)^m [a + b(\varphi x)^n]^p \varphi' x$$

$$= \frac{1}{nb} \int [a + b(\varphi x)^n]^p b\, d(\varphi x)^n$$

$$= \frac{1}{nb} \int (Fx)^p . F' x$$

$$=\frac{1}{nb}\,\frac{[a+b(\varphi x)^n]^{p+1}}{p+1}+C$$

und, wenn $p=-1$ ist;

$$=\frac{1}{nb}\ln[a+b(\varphi x)^n]+C$$

2. Wenn p eine ganze positive Zahl ist, m und n können dann jede beliebige Größe bezeichnen.

Beweis. Ist p eine ganze positive Zahl, so läßt sich $[a+b(\varphi x^n)]^p$ nach dem binomischen Satz in eine endliche Anzahl Glieder entwickeln und man erhält eben so viele leicht zu integrirende Glieder.

3. Wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl ist, p mag dann jede Größe seyn.

Beweis. Man setze $a+b(\varphi x)^n = Fx$ so entsteht

$$\int(\varphi x)^m[a+b(\varphi x)^n]^p\varphi'x$$

$$=\frac{1}{n.b^{\frac{m+1}{n}}}\int(Fx)^p(Fx-a)^{\frac{m+1}{n}-1}.F'x$$

und die Richtigkeit der Behauptung erhellet wie in 2.

4. Wenn p eine negative ganze Zahl und $2.\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Beweis. Es ist

$$\int(\varphi x)^m[a+b(\varphi x)^n]^p\varphi'x$$

$$=\frac{1}{nb(p+1)}\int(\varphi x)^{m+1-n}d[a+b(\varphi x)^n]^{p+1}.$$

$$=\frac{1}{nb(p+1)}\left[(\varphi x)^{m+1-n}\cdot[a+b(\varphi x)^n]^{p+1} - \int[a+b(\varphi x)^n]^{p+1} d(\varphi x)^{m+1-n}\right]$$

oder

$$\int(\varphi x)^m[a+b(\varphi x)^n]^p\varphi' x$$

$$=\frac{(\varphi x)^{m+1-n}\cdot[a+b(\varphi x)^n]^{p+1}}{nb(p+1)}-\frac{m+1-n}{nb(p+1)}\int(\varphi x)^{m-n}[a+b(\varphi x)^n]^{p+1}\varphi' x$$

und die wiederholte Anwendung dieser Reductionsformel führt zuletzt auf §. 72.

5. Wenn $2p$ und $2\frac{m+1}{n}$ ganze Zahlen sind.

Beweis. Ist b positiv, so setze man

$$b(\varphi x)^n = a\,tg\,\beta^2$$

und es entsteht

$$\int(\varphi x)^m[a+b(\varphi x)^n]^p\varphi' x$$

$$=\frac{2a^p}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int\frac{\operatorname{Sin}\beta^{2\frac{m+1}{n}-1}}{\operatorname{Cos}\beta^{2p+2\frac{m+1}{n}+1}}$$

Ist b negativ, so setze man

$$b(\varphi x)^n = a\operatorname{Sin}\beta^2$$

und es entsteht

$$\int(\varphi x)^m[a-b(\varphi x)^n]^p\varphi' x$$

$$=\frac{2a^p}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int\operatorname{Sin}\beta^{2\frac{m+1}{n}-1}\cdot\operatorname{Cos}\beta^{2p+1}$$

Ist a negativ, so setze man

$$b(\varphi x)^n = a\operatorname{Sec}\beta^2$$

und es entsteht

$$\int (\varphi x)^m [b(\varphi x)^n - a]^p \varphi' x$$

$$= \frac{2a^p}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \int \frac{\operatorname{Sin}\beta^{2p+1}}{\operatorname{Cos}\beta^{2p+2\frac{m+1}{n}+1}}$$

aus welchen drei Darstellungen die Wahrheit obiger Behauptung nach §. 70. erhellet.

Beisp. 1. $\int \frac{1}{\sqrt{ax - bx^2}}$ oder $\int x^{-\frac{1}{2}}(a - bx)^{-\frac{1}{2}}$. Hier ist $m = -\frac{1}{2}$; $n = 1$; $p = -\frac{1}{2}$; $\varphi x = x$; also $\varphi' x = 1$; daher $2.\frac{m+1}{n} = 1$ und $2p = -1$; folglich nach 5, $bx = a \operatorname{Sin}\beta^2$ gesetzt

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax - bx^2}} = 2 . a^{-\frac{1}{2}} . \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \int \operatorname{Sin}\beta^0 \operatorname{Cos}\beta^0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b}} \int 1 = \frac{2}{\sqrt{b}} . \beta + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{Arc\,Sin} \sqrt{\frac{bx}{a}} + C$$

oder auch $= \sqrt{\frac{1}{b}} \operatorname{Arc\,Cos} \frac{a - 2bx}{a} + C$

2. $\int x^2 (1 + x)^{-3} = \frac{-x^2}{2(1+x)^2} + \frac{-x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}$

nach 4;

$$= -\frac{3x^2 + 2x}{2(1+x)^2} + \ln(1 + x) + C$$

3. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}\,(1 + \sqrt[6]{x})^{\frac{3}{5}}} = \int x^{-\frac{1}{3}} (1 + x^{\frac{1}{6}})^{-\frac{3}{5}}$

Hier ist $\varphi x = x$; $m = -\frac{1}{3}$; $n = \frac{1}{6}$; $a = 1$; $b = 1$; $p = -\frac{3}{5}$; also $\frac{m+1}{n} = 4$; daher nach 3; $1 + \sqrt[6]{x}$ mit z bezeichnet

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}\,(1+\sqrt[6]{x})^{\frac{3}{5}}} = 6 \cdot z^{\frac{2}{5}} \left(\frac{5z^3}{17} - \frac{5z^2}{4} + \frac{15z}{7} - \frac{5}{2} \right) + C$$

§. 74. Aufgabe. Man soll

$$P = \int \frac{\varphi' x}{[a + b\varphi x + c(\varphi x)^2]^n}$$

bestimmen, vorausgesetzt, daß n eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Auflösung. Setzt man wie §. 66.

$$\varphi x + \frac{b}{2c} = Fx$$

und versteht unter k^2 den Ausdruck $4ac - b^2$, so hat man

$$P = (4c)^n \int \frac{F'x}{(k^2 + 4c^2 Fx^2)^n} \quad \text{oder}$$

$$2cFx = k\,\mathrm{tg}\,\beta \quad \text{gesetzt}$$

$$P = \frac{k}{2c} \cdot \left(\frac{4c}{k^2}\right)^n \int \frac{\mathrm{Sec}\,\beta^2}{\mathrm{Sec}\,\beta^{2n}}$$

$$= \frac{k}{2c} \left(\frac{4c}{k^2}\right)^n \int \mathrm{Cos}\,\beta^{2n-2}$$

also nach §. 69.

$$P = \frac{k}{4c(n-1)} \cdot \left(\frac{4c}{k^2}\right)^n \left(\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{(\mathrm{Sec}\,\beta^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{\mathrm{Sec}\,\beta^2}{(\mathrm{Sec}\,\beta^2)^{n-1}} \right)$$

oder $2cFx$ für $k\,\mathrm{tg}\,\beta$; $d\,\mathrm{tg}\,\beta$ im Zähler für $\mathrm{Sec}\,\beta^2$ und $2cF'x$ für $k\,d\,\mathrm{tg}\,\beta$ gesetzt

$$P = \frac{1}{4c(n-1)} \left(\frac{4c}{k^2}\right)^n \left(\frac{2cFx}{(\mathrm{Sec}\,\beta^2)^{n-1}} + (2n-3)2c \int \frac{F'x}{(\mathrm{Sec}\,\beta^2)^{n-1}} \right)$$

Wird nun ferner, $2cFx = k \operatorname{tg}\beta$ quadrirt, und daraus $\operatorname{Sec}\beta^2$ entwickelt, so entsteht

$$\operatorname{Sec}\beta^2 = \frac{4c^2Fx^2 + k^2}{k^2} = \frac{4c}{k^2}(a + b\varphi x + c\varphi x^2).$$

Setzt man diesen Werth, schreibt $\varphi' x$ für $F'x$ und bezeichnet $a + b\varphi x + c\varphi x^2$ mit R, so hat man die Reductionsformel

$$\int \frac{\varphi' x}{R^n} = \frac{1}{(n-1)k^2}\left(\frac{b + 2c\varphi x}{R^{n-1}} + 2c(2n-3)\int \frac{\varphi' x}{R^{n-1}}\right).$$

Beim Gebrauch derselben kommt man zuletzt auf $\int \frac{\varphi' x}{R}$ und dies Integral ist nach §. 66. bekannt.

Beispiel.

$$\int \frac{1}{(1+x+x^2)^3} = \frac{1}{6}\left(\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} + 6\int \frac{1}{(1+x+x^2)^2}\right)$$

$$= \frac{1+2x}{6(1+x+x^2)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1+2x}{1+x+x^2} + 2\int \frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

oder, nach §. 66. Beisp. 1.

$$= \frac{1+2x}{6(1+x+x^2)^2} + \frac{1+2x}{3(1+x+x^2)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{(1+2x)(3+x+x^2)}{6(1+x+x^2)^2} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{Arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

§. 75. Aufgabe. Es bezeichnen n, m ganze positive Zahlen; man soll

$$P = \int \frac{(\varphi x)^m \varphi' x}{[a + b\varphi x + c(\varphi x)^2]^n} \text{ bestimmen.}$$

Auflösung. Wird wieder $a + b\varphi x + c(\varphi x)^2$ mit R bezeichnet, so hat man

$$P = \int \frac{(\varphi x)^m \varphi' x}{R^n}.$$

Es ist aber

$$d\,[(\varphi x)^{m-1}.\,R^{-n+1}] =$$

$$\frac{(m-1)(\varphi x)^{m-2}\varphi' x R}{R^n} - \frac{(n-1)b(\varphi x)^{m-1}\varphi' x}{R^n} - \frac{2c(n-1)(\varphi x)^m \varphi' x}{R^n}$$

oder im Zähler des ersten Gliedes für R seinen Werth gesetzt, und reducirt

$$d\,[(\varphi x)^{m-1}.\,R^{-n+1}] =$$

$$\frac{a(m-1)(\varphi x)^{m-2}\varphi' x}{R^n} + \frac{b(m-n)(\varphi x)^{m-1}\varphi' x}{R^n} + \frac{c(m-2n+1)(\varphi x)^m \varphi' x}{R^n}$$

und hieraus

$$\int \frac{(\varphi x)^m\,\varphi' x}{R^n} = \frac{(\varphi x)^{m-1}}{c\,(m-2n+1)\,R^{n-1}}$$

$$-\frac{b\,(m-n)}{c\,(m-2n+1)}\int \frac{(\varphi x)^{m-1}\varphi' x}{R^n} - \frac{a\,(m-1)}{c(m-2n+1)}\int \frac{(\varphi x)^{m-2}\varphi' x}{R^n}$$

Beim Gebrauch dieser Reductionsformel kommt man zuletzt auf $\int \frac{\varphi' x}{R^n}$, welches Integral nach dem vorigen §. bekannt ist.

Beispiel.

$$\int \frac{x^2}{(4+5x+x^2)^2} = -\tfrac{1}{9}\left(\frac{17x+20}{4+5x+x^2} + \tfrac{8}{3}\ln \frac{5+2x-3}{5+2x+3}\right) + C$$

§. 76. **Aufgabe.** Es bezeichne n eine ganze, positive oder negative Zahl, man soll

$$P = \int [a + b\varphi x + c\,(\varphi x)^2]^{\frac{n}{2}}\,.\,\varphi' x$$

bestimmen.

Auflösung. 1. Wenn $4ac > b^2$ ist. Setzt man wieder $\varphi x + \frac{b}{2c} = Fx$ so entsteht

$$P = \frac{1}{(4\,c)^{\frac{n}{2}}}\int [4ac - b^2 + 4c^2(Fx)^2]^{\frac{n}{2}}\,F' x$$

oder $\quad 2cFx = \sqrt{4ac - b^2} \,.\, \mathrm{tg}\,\beta \quad$ gesetzt

$$P = \sqrt{\frac{1}{c}} \cdot \left(\frac{4ac - b^2}{4c}\right)^{\frac{n}{2}} \int \mathrm{Sec}\,\beta^{n+2}$$

und dies Integral ist nach §. 69. immer anzugeben, n mag positiv oder negativ seyn.

2. Wenn $4ac < b^2$ ist.

Hier hat man

$$P = \frac{1}{(4c)^{\frac{n}{2}}} \int [4c^2 (Fx)^2 - (b^2 - 4ac)]^{\frac{n}{2}} F'x$$

oder $\quad 2cFx = \sqrt{b^2 - 4ac}\, \mathrm{Sec}\,\beta \quad$ gesetzt

$$P = \sqrt{\frac{1}{c}} \left(\frac{b^2 - 4ac}{4c}\right)^{\frac{n}{2}} \int \mathrm{Sec}\,\beta \,.\, \mathrm{tg}\,\beta^{n+1}$$

und dies Integral ist ebenfalls nach §. 69. immer bestimmbar.

Mit Hülfe der Reductionsformel im vorigen §. kann nun auch

$$\int (\varphi x)^m [a + b\varphi x + c(\varphi x)^2]^{\frac{n}{2}} \varphi' x$$

bestimmt werden.

Beispiel.

$$\int \frac{x^3}{(1 + x\sqrt{3} + x^2)^{\frac{5}{2}}} = -\tfrac{2}{3} \cdot \frac{16 + 24x\sqrt{3} + 42x^2 + 9x^3\sqrt{3}}{(1 + x\sqrt{3} + x^2)^{\frac{3}{2}}} + C$$

§. 77. Aufgabe. Man soll, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet $\int a^{\varphi x} . (\varphi x)^n . \varphi' x$ bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$\int a^{\varphi x} . (\varphi x)^n . \varphi' x = \int (\varphi x)^n . d\left(\frac{a^{\varphi x}}{\ln a}\right)$$

siehe §. 60. XVII.

$$= (\varphi x)^n \frac{a^{\varphi x}}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int a^{\varphi x} (\varphi x)^{n-1} \varphi' x$$

Beim wiederholten Gebrauch dieser Reductionsformel stößt man zuletzt auf

$$\int a^{\varphi x} . \varphi' x = \frac{a^{\varphi x}}{\ln a} + C$$

siehe §. 60. XVII.

Ist a = e = der Basis der natürlichen Logarithmen, so hat man

$$\int e^{\varphi x} (\varphi x)^n \varphi' x = e^{\varphi x} (\varphi x)^n - n \int e^{\varphi x} (\varphi x)^{n-1} \varphi' x$$

Beispiel.

$$\int e^x . x^3 = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C.$$

§. 78. Aufgabe. Man soll $\int \varphi' x . \ln \varphi x$ bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$\int \varphi' x . \ln \varphi x = \int \ln \varphi x \, d\varphi x = \varphi x \ln \varphi x - \int \varphi x \, d \ln \varphi x$$

$$= \varphi x \ln \varphi x - \int \varphi x . \frac{\varphi' x}{\varphi x}; \text{ also}$$

$$\int \varphi' x . \ln \varphi x = \varphi x (\ln \varphi x - 1) + C$$

Beispiel. $\int \ln x = x (\ln x - 1) + C$

§. 79. Aufgabe. Man soll eine Reductionsformel für $\int (\ln \varphi x)^n \varphi' x$ herleiten.

Auflösung. Es ist

$$\int (\ln \varphi x)^n \varphi' x = \int (\ln \varphi x)^{n-1} . \ln \varphi x \, \varphi' x$$

$$= \int (\ln \varphi x)^{n-1} d (\varphi x \ln \varphi x - \varphi x)$$

$$= \varphi x (\ln \varphi x - 1) (\ln \varphi x)^{n-1}$$

$$- \int (\varphi x \ln \varphi x - \varphi x) . (n - 1) (\ln \varphi x)^{n-2} \frac{\varphi' x}{\varphi x};$$

also

$$\int (\ln \varphi x)^n \varphi' x = \varphi x (\ln \varphi x - 1) (\ln \varphi x)^{n-1}$$

$$- (n - 1) \int (\ln \varphi x)^{n-1} \varphi' x + (n - 1) \int (\ln \varphi x)^{n-2} \varphi' x.$$

Beispiel. $\int (\ln \operatorname{Sin} x)^3 \operatorname{Cos} x =$

$$\operatorname{Sin} x [(\ln \operatorname{Sin} x)^3 - 3 (\ln \operatorname{Sin} x)^2 + 6 \ln \operatorname{Sin} x - 6] + C.$$

§. 80. Zusatz. Wird $\ln(\ln\varphi x)$ mit $\ln^2\varphi x$; $\ln(\ln^2\varphi x)$ mit $\ln^3\varphi x$ u. s. w. bezeichnet, so hat man

$$d(\ln^m\varphi x) = \frac{\varphi' x}{\varphi x \ln\varphi x \ln^2\varphi x \ldots \ln^{m-1}\varphi x} \text{ und}$$

$$d\left(-\frac{1}{\ln^m\varphi x}\right) = \frac{\varphi' x}{\varphi x \ln\varphi x \ln^2\varphi x \ldots \ln^{m-1}\varphi x\,(\ln^m\varphi x)^2}$$

folglich

I. $$\int\frac{\varphi' x}{\varphi x \ln\varphi x \ln^2\varphi x \ldots \ln^m\varphi x} = \ln^{m+1}\varphi x + C$$

II. $$\int\frac{\varphi' x}{\varphi x \ln\varphi x \ln^2\varphi x \ldots \ln^{m-1}\varphi x\,(\ln^m\varphi x)^2} = -\frac{1}{\ln^m\varphi x} + C$$

Beispiel. 1. $$\int\frac{\varphi' x}{\varphi x \ln\varphi x} = \ln^2\varphi x + C.$$

2. $$\int\frac{\varphi' x}{\varphi x \ln\varphi x\,(\ln^2\varphi x)^2} = \frac{1}{\ln^2\varphi x} + C$$

§. 81. Zusatz. Wenn eine gegebene Ableitung auf keine Form, deren Stammfunction bekannt ist, zurückgeführt werden kann, so bleibt nichts anderes übrig, als das Integral näherungsweise durch Reihen zu bestimmen. In den gewöhnlichen Fällen ist hierzu der binomische Satz hinreichend, z. B.

$$\int x^{\frac{1}{3}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hier ist

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \ldots \\ x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{16}x^{-\frac{7}{2}} + \frac{35}{128}x^{-\frac{9}{2}} \ldots \end{array}\right\}$$

Multiplicirt man nun jedes Glied der einen oder der andern Reihe mit $x^{\frac{1}{3}}$ und integrirt, so entsteht

$$\int x^{\frac{1}{3}}(1+x)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{x}\left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{14}x^2 + \frac{9}{80}x^3 - \frac{15}{208}x^4 + \frac{105}{2048}x^5 \ldots\right) \\ \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\left(\frac{6}{5}x + 3 - \frac{9}{28x} + \frac{15}{108x^2} - \frac{105}{1216x^3} \ldots\right) \end{array}\right.$$

Das erste Resultat wird brauchbar seyn, wenn x einen ächten Bruch, das zweite wenn x einen unächten Bruch oder eine ganze Zahl ausdrückt. Der folgende §. giebt noch zwei Methoden an, näherungsweise durch Reihen zu integriren.

§. 82. **Aufgabe.** Man soll $\int\varphi x$ durch eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe bestimmen.

Auflösung 1. Es ist

$$\int\varphi x = \int\varphi x\,.\,dx = x\varphi x - \int x\varphi' x$$
$$= x\varphi x - \tfrac{1}{2}\int\varphi' x\, d(x^2)$$
$$= x\varphi x - \tfrac{1}{2}(x^2\varphi' x - \int x^2\varphi'' x)$$
$$= x\varphi x - \frac{x^2}{2}\varphi' x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\int\varphi'' x\,.\,d(x^3)$$
$$= x\varphi x - \frac{x^2}{2}\varphi' x + \tfrac{1}{6}(x^3\varphi'' x - \int x^3\varphi''' x)$$
$$= x\varphi x - \frac{x^2}{2}\varphi' x + \frac{x^3}{2.3}\varphi'' x - \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{4}\int\varphi''' x\,.\,d(x^4)$$
$$= x\varphi x - \frac{x^2}{2}\varphi' x + \frac{x^3}{2.3}\varphi'' x - \frac{x^4}{2.3.4}\varphi''' x + \frac{1}{2.3.4}\int x^4\varphi'''' x$$

u. s. w.;

also $\int\varphi x$

$$= x\varphi x - \frac{x^2}{2}\varphi' x + \frac{x^3}{2.3}\varphi'' x - \frac{x^4}{2.3.4}\varphi''' x + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi'''' x \ldots$$

Diese Reihe heißt die **Bernoullische**.

Auflösung 2. Nach **Maclaurins** Reihe, §. 24., ist

$$\varphi x = \varphi + x\varphi' + \frac{x^2}{2}\varphi'' + \frac{x^3}{2.3}\varphi''' + \ldots$$

also

$$\int\varphi x = \int\varphi + \int x\varphi' + \int\frac{x^2}{2}\varphi'' + \int\frac{x^3}{2.3}\varphi''' + \ldots$$

oder

$$\int\varphi x = x\varphi + \frac{x^2}{2}\varphi' + \frac{x^3}{2.3}\varphi'' + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi''' + \ldots$$

Beispiel. Man soll $\int \frac{1-x}{1+x}$ bestimmen.

Hier giebt 1. $\int \frac{1-x}{1+x} = x \frac{1-x}{1+x}$

$$+ 2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{x}{1+x} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \dots\right] + C$$

und 2. liefert

$$\int \frac{1-x}{1+x} = x - x^2 + 2x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{7}x^4 \dots\right) + C.$$

Vollständig ergiebt sich

$$\int \frac{1-x}{1+x} = \int \frac{1}{1+x} - \int \frac{x}{1+x} = \ln(1+x) - \left(\int \frac{1+x}{1+x} - \int \frac{1}{1+x}\right)$$
$$= \ln(1+x) - x + \ln(1+x)$$
$$= 2\ln(1+x) - x + C$$

Verschwindet nun etwa das Integral für $x = 0$; so werden die Constanten der drei Resultate $= 0$; und jedes liefert für $x = \frac{1}{2}$ den Werth $0{,}31 \dots$

Vierter Abschnitt.

Die Curvenlehre.

Herleitung allgemeiner Formeln.

§. 83. 1. Wenn die Lage einer geraden Linie l gegeben ist, so ist auch die Lage und Form einer andern Linie c dadurch bestimmt, wenn man angiebt, in welchen Richtungen Punkte von c mit denen von l zusammenhängen, und wie groß diese Abstände sind. Ein allgemeiner Ausdruck, der diese Abhängigkeit darstellt, heißt eine Gleichung für die Linie c in Beziehung auf l.

2. Jedes Stück der Linie l von einem beliebigen Punkt n in ihr, aus, gemessen, heißt eine Abscisse.

3. Der Punkt n heißt Anfangspunkt der Abscissen.

4. Die gerade Linie vom Endpunkt einer Abscisse bis zu irgend einem Punkt von c, heißt die zu dieser Abscisse gehörige Ordinate.

5. Abscissen und Ordinaten zusammengenommen heißen Coordinaten. Man nimmt sie gewöhnlich normal auf einander, und dies soll hier, wenn nichts weiter erwähnt ist, allemal der Fall seyn.

6. Bezeichnet x die Länge irgend einer Abscisse; y die der zugehörigen Ordinate, so heißt die Gleichung $y = \varphi x$ eine Coordinaten-Gleichung.

7. Bezeichnet in Beziehung auf irgend einen Punkt n der Linie l, y die Länge einer von n ausgehenden Ordinate; x ihren Neigungswinkel gegen l, so heißt die Gleichung $y = \varphi x$ eine Polargleichung der geraden oder krummen Linie c.

8. Die in einer solchen Gleichung $y = \varphi x$ vorkommenden unveränderlichen oder beständigen Größen, welche also für jedes x dieselben bleiben, heißen die Parameter der Linie c.

9. Eine Linie c heißt algebraisch oder transcendent, je nachdem $y = \varphi x$ algebraisch oder transcendent ist.

10. Eine Linie heißt von der ersten, zweiten, dritten ... nten Ordnung, sobald in einem Gliede ihrer geordneten Coordinatengleichung das Produkt von 1, 2, 3 u. s. w. n Coordinaten vorkommt.

11. Eine Linie heißt eine Curve von einfacher Krümmung wenn sie in einer Ebene liegt, von doppelter, wenn dies nicht der Fall ist. Hier ist nur von Linien einfacher Krümmung die Rede.

12. Diejenige Abscissenlinie l einer Curve, zu welcher zu beiden Seiten nach entgegengesetzten Richtungen, gleiche Ordinaten gehören, heißt ein Durch-

messer der Curve, und sind die Ordinaten normal auf l, so heißt sie eine Achse. Der Durchschnittspunkt der Achse und Curve heißt Scheitelpunkt.

13. Kann man neben einer Curve eine gerade Linie so ziehen, daß sie sich derselben immer mehr nähert, ohne sie je zu schneiden, so heißt diese gerade Linie eine Asymptote der Curve.

§. 84. Aufgabe. Eine Coordinatengleichung für die gerade Linie darzustellen.

Auflösung. Es sey (Fig. 1.) cd die gerade Linie für welche die Gleichung gesucht wird; hg die Abscissenlinie; f der Anfangspunkt der Abscissen; n der Schneidungspunkt beider geraden Linien, $nf = e$; $\angle dng = \beta$; x das allgemeine Zeichen für die Länge irgend einer Abscisse; $y = \varphi x$ das für die Länge der zugehörigen rechtwinklichten Ordinate, so hat man sogleich

$$y = \varphi x = (e + x) \operatorname{tg} \beta$$

oder $e \operatorname{tg} \beta$ mit a und $\operatorname{tg} \beta$ mit b bezeichnet,

$$y = \varphi x = a + bx;$$

in welcher Gleichung also a den normalen Abstand mf und b die Tangente des Neigungswinkels β ausdrückt.

Die gerade Linie hat also zwei Parameter, $a = mf$ und $b = \operatorname{tg} \beta$.

§. 85. Aufgabe. Eine allgemeine Coordinatengleichung für den Kreis anzugeben.

Auflösung. Es bezeichne R den Halbmesser des Kreises (Fig. 2.); B die Normale von seinem Mittelpunkt auf die Abscissenlinie; A die zugehörige Absciſſe; x die Länge jeder Abſciſſe; y die der zugehörigen Ordinaten, ſo hat man

$$R^2 = (A - x)^2 + (\pm y \mp B)^2 \quad \text{alſo}$$

$$y = \varphi x = B \pm \sqrt{R^2 - (A - x)^2}$$

und der Kreis hat alſo 3 Parameter.

§. 86. Zuſatz. Für $(A - x)^2 > R^2$; alſo ſowohl für

$$x < A - R; \text{ als für}$$

$$x > A + R$$

wird $y = \varphi x$ unmöglich.

Für $B = o$; und $A = R$ wird

$$y = \varphi x = + \sqrt{2Rx - x^2}.$$

Für $B = o$; und $A = o$ wird

$$y = \varphi x = \pm \sqrt{R^2 - x^2}.$$

§. 87. Durch jeden Punkt g jeder Curve, deren Coordinatengleichung $y = \varphi x$ ſeyn mag, kann man ſich noch unzählig viele andere Curven gehend denken, und wenn in Beziehung auf dieſelbe Abſciſſenlinie (Fig. 3.) und denſelben Anfangspunkt der Abſciſſen, $z = f x$ die Gleichung für eine andere Curve ausdrückt, ſo können beide nur dann den Punkt g gemein haben, wenn für dies zu g gehörige x

$$\varphi x = f x \quad \text{iſt.}$$

Es kann aber nun die Frage entſtehen, welche unter allen Curven der Art, wie die Gleichung $z = f x$ eine andeutet, kommt der Curve $y = \varphi x$, in g am nächſten, ſchließt ſich am meiſten an ſie an, d. h. wie müſſen in der gewählten Form $z = f x$ die Parameter beſchaffen ſeyn, damit wenn dies zu g gehörige x um k wächſt, die Ordinate

$$y + \Delta y = \varphi(x + k)$$ von der
$$z + \Delta z = f(x + k)$$
am allerwenigsten verschieden, d. h. die Differenz beider
$$D = \varphi(x+k) - f(x+k)$$
ein Kleinstes wird.

Durch die Beantwortung dieser Frage bestimmt sich, wenn $z = fx$ die Gleichung für eine gerade Linie ausdrückt, die Berührungslinie oder Tangente der Curve $y = \varphi x$ für g, als zu x gehörig, und wenn $z = fx$ die Gleichung für den Kreis andeutet, so erhält man durch diese Beantwortung die Parameter desjenigen Kreises der sich an die Curve $y = \varphi x$ in g am innigsten anschließt. Man nennt einen solchen Kreis den Berührungskreis und seinen Halbmesser R, den Halbmesser der Krümmung für den Punkt g.

§. 88. Aufgabe. Die Parameter in $z = fx$ der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß
$$D = \varphi(x + k) - f(x + k)$$
(s. vor. §.) ein Minimum wird.

Auflösung. Es ist
$$\varphi(x + k) = \varphi x + k\varphi' x + \tfrac{k^2}{2}\varphi'' x + \ldots$$
$$f(x + k) = fx + kf'x + \tfrac{k^2}{2}f''x + \ldots$$
folglich
$$D = \varphi x - fx + (\varphi' x - f'x)k + (\varphi'' x - f''x)\tfrac{k^2}{2} + \ldots$$

Weil nun k immer so klein gedacht werden kann, daß jedes Glied des Werthes für D größer ist, als die absolute Summe aller folgenden Glieder (§. 7.) so wird D desto kleiner werden, je kleiner man die Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen von k in den ersten Gliedern dieser Reihe macht. Enthält also $z = fx$, n Parameter, so wird D für diese Gleichung $z = fx$ am kleinstmöglichsten, wenn man

$$\varphi x - fx = 0$$
$$\varphi' x - f' x = 0$$
$$\varphi'' x - f'' x = 0$$
u. s. w.
$$\varphi^{n-1} x - f^{n-1} x = 0$$

setzt, und aus diesen n Gleichungen, die n Parameter entwickelt, wodurch dann $z = fx$ bestimmt ist.

§. 89 **Aufgabe.** Für jeden Punkt g einer Curve $y = \varphi x$ die geradlinigte Berührungslinie zu bestimmen.

Auflösung. Hier ist nach §. 84.

$$z = fx = a + bx$$
$$\text{also} \quad dz = f'x = b$$

Die beiden Gleichungen zu Bestimmung der 2 Parameter a, b sind also

$$1. \quad \varphi x = a + bx$$
$$2. \quad \varphi' x = b$$

oder, wenn der Neigungswinkel der gesuchten Berührungslinie gegen die Abscissenlinie mit β bezeichnet wird, nach §. 84.

$$tg\,\beta = \varphi' x \quad \text{und}$$
$$a = \varphi x - x\,\varphi' x$$

Beispiel. Es sey $y^2 = 2rx - x^2$. (Fig. 4.) also $y = \varphi x$ einen Kreis entsprechend bei welchen die Abscissen auf dem Durchmesser, vom Endpunkt desselben aus, genommen sind, so hat man

$$\varphi' x = \frac{r - x}{y} \quad \text{folglich}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r-x}{y};$$

$$a = fm = \sqrt{2rx - x^2} - x\,\frac{r-x}{y} = \frac{rx}{y};$$

und daher

$$fn = fm \operatorname{Cotg}\beta$$

$$= \frac{rx}{y} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

$$= \frac{rx}{r-x}.$$

§. 90. Aufgabe. Für jeden Punkt g einer Curve den Krümmungskreis, d. h. die drei Parameter, R, A, B (§. 85.) zu bestimmen.

Auflösung. Hier ist nach §. 85.

$$z = fx = B \pm \sqrt{R^2 - (A-x)^2}$$

und also entstehen nach §. 88. für die Bestimmung der 3 Parameter die 3 Gleichungen

$$1.\quad \varphi x - fx = 0$$

$$2.\quad \varphi' x - f' x = 0$$

$$3.\quad \varphi'' x - f'' x = 0$$

Aus 1. folgt

$$\alpha.\quad (\varphi x - B)^2 = R^2 - (A-x)^2$$

Aus 2.

$$\beta.\quad (\varphi x - B)\,\varphi' x = A - x$$

Aus 3.

$$\gamma.\quad (\varphi x - B)^3 . \varphi'' x = -R^2$$

Quadrirt man die zweite dieser drei Gleichungen und addirt dann alle drei, so entsteht

$$1 + (\varphi' x)^2 + (\varphi x - B)\,\varphi'' x = 0$$

und hieraus

$$\text{I.}\quad B = \varphi x + \frac{1 + \varphi' x)^2}{\varphi'' x}.$$

Setzt man nun diesen für B gefundenen Werth in β, so ergiebt sich

$$\text{II.}\quad A = x - \frac{1 + (\varphi' x)^2}{\varphi'' x} \cdot \varphi' x$$

und substituirt man ihn in γ, so folgt

$$\text{III.}\quad R = - \frac{[1 + (\varphi' x)^2]^{\frac{3}{2}}}{\varphi'' x}$$

Beispiel. Es sey $y^2 = px$; also

$$y = \varphi x = \sqrt{px}; \text{ folglich}$$

$$\varphi' x = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{x}} \text{ und}$$

$$\varphi'' x = - \frac{1}{4x} \sqrt{\frac{p}{x}}; \text{ so hat man}$$

$$B = \sqrt{px} + \frac{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{x}}{- \frac{1}{4x} \cdot \sqrt{\frac{p}{x}}} = - 4x \cdot \sqrt{\frac{x}{p}}$$

$$A = x - \frac{1 + \frac{1}{4} \frac{p}{x}}{- \frac{1}{4x} \sqrt{\frac{p}{x}}} \cdot \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{x}} = 3x + \frac{p}{2}$$

$$R = - \frac{\left(1 + \frac{p}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}}{- \frac{1}{4x} \cdot \sqrt{\frac{p}{x}}} = \frac{(4x + p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}$$

§. 91. Bezeichnet δ den Winkel, welchen der Halbmesser des Krümmungskreises in g (Fig. 5.) mit der Ordinate $y = \varphi x$ in g bildet, so ist

$$(y - B) \operatorname{tg} \delta = A - x; \text{ also}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A - x}{\varphi x - B}$$

Nach der Gleichung β, im vorigen §. ist aber

$$\varphi' x = \frac{A - B}{\varphi x - \bar{B}}$$

folglich $\operatorname{tg} \delta = \varphi' x$

nun ist aber nach §. 89.

$$\operatorname{tg} \beta = \varphi' x$$

und man hat also

$$\beta = \delta;$$

d. h. der Neigungswinkel der geradlinigten Tangente gegen die Abscissenlinie ist gleich dem Neigungswinkel des Halbmessers des Krümmungskreises an der Berührungsstelle der Tangente gedacht, gegen die Ordinate dieser Stelle.

Die geradlinigte Tangente und der Halbmesser des Berührungskreises an der Berührungsstelle der Tangente, stehen also normal auf einander.

§ 92. Wenn in (Fig. 3.) gt die Berührungslinie oder geradlinigte Tangente für den Punkt g, und gw normal auf gt in g ist, so daß also in der Richtung gw der Mittelpunkt des Berührungskreises für g liegt, so heißt, wenn tw die Abscissenlinie ist, in Beziehung auf den Punkt g

tk die Subtangente
kw die Subnormale
gt die Tangente
gw die Normale

§. 93. Aufgabe. Für jeden Punkt g einer Curve, der Coordinatengleichung $y = \varphi x$ zugehörig, die Subtangente, Subnormale, Tangente und Normale zu bestimmen.

Auflösung. Es ist (Fig. 3.) nach §. 89.

$$\operatorname{tg} \beta = \varphi' x$$

und nach §. 91. $\angle kgw = \beta$; also

$$kw = \text{Subn} = y \operatorname{tg} \beta \text{ oder}$$

$$\text{I.} \quad \text{Subn} = \varphi x \,.\, \varphi' x$$

Ferner $\text{Subt} = kt = y \operatorname{Cotg} \beta = \frac{y}{\operatorname{tg} \beta}$ oder

$$\text{II.} \quad \text{Subt} = \frac{\varphi x}{\varphi' x}$$

Nun folgt gleich $\text{Norm} = gw = \sqrt{y^2 + kw^2}$ oder

$$\text{III.} \quad \text{Norm} = \varphi x \sqrt{1 + (\varphi' x)^2} \text{ und}$$

$$gt = \text{tang} = \sqrt{y^2 + kt^2} \text{ oder}$$

$$\text{IV.} \quad \text{Tang} = \frac{\varphi x}{\varphi' x} \sqrt{1 + (\varphi' x)^2}$$

Beispiel. Es sey $y^2 = 2rx - x^2$; also $y = \varphi x$ die Gleichung für den Kreis, die Abscissen auf dem Durchmesser vom Endpunkt desselben aus, genommen, so hat man

$$\varphi' x = \frac{r - x}{y}$$

folglich

$$\text{I.} \quad \text{Subn} = y \,.\, \frac{r-x}{y} = r - x$$

$$\text{II.} \quad \text{Subt} = y : \frac{r-x}{y} = \frac{2rx - x^2}{r - x}$$

$$\text{III.} \quad \text{Norm} = y \sqrt{1 + \left(\frac{r-x}{y}\right)^2} = r$$

$$\text{IV.} \quad \text{Tang} = r : \frac{r-x}{y} = \frac{ry}{r-x}$$

§. 94. Zusatz. Ergiebt sich für

$$\operatorname{tg} \beta = \varphi' x$$

so wie für

$$\text{Subt} - x = \frac{\varphi x - x\varphi' x}{\varphi' x}$$

ein bestimmter endlicher Werth, wenn man x unendlich groß annimmt, so hat die Curve eine Asymptote, ihre Neigung gegen die Abscessenlinie bestimmt sich durch $\varphi' x = t \beta$ für $x = \infty$ und der Abstand ihres Schneidungspunktes mit der Absc.ssenlinie vom Anfangspunkt der Abscissen, ergiebt sich aus Subt $-$ x für $x = \infty$.

Beispiel. Ist $y = \varphi x = \sqrt{ax + bx^2}$; also

$$\varphi' x = \frac{a + 2bx}{2\varphi x}; \text{ so hat man}$$

$$tg\,\beta = \frac{a + 2bx}{2\sqrt{ax + bx^2}}; \text{ oder } x = \frac{1}{z}$$

gesetzt

$$tg\,\beta = \frac{az + 2b}{2\sqrt{az + b}}$$

Es wird aber $z = 0$, wenn $x = \infty$ ist, und für $z = 0$ erhält man

$$tg\,\beta = \frac{2b}{2\sqrt{b}} = \sqrt{b}.$$

Ferner ist

$$\text{Subt} - x = \frac{\varphi x - x\varphi' x}{\varphi' x} = \frac{ax}{a + 2bx}$$

oder $x = \frac{1}{z}$ gesetzt

$$\text{Subt} - x = \frac{a}{az + 2b}$$

also für $x = \infty$, oder $z = 0$;

$$\text{Subt} - x = \frac{a}{2b}.$$

§. 95. **Aufgabe.** Es sey ab (Fig. 6.) ein Stück einer Curve rab, welches gegen die Abscissenlinie nl durchaus convex oder durchaus concav (hier concav) ist, so daß, wenn ae die Tangente in a; bf die für b ist, jede Tangente für einen zwischen a und b liegenden Punkt der Curve, die Abscissenlinie zwischen e und f schneiden muß; man soll, wenn die rechtwinklichte Coordinatengleichung $y = \varphi x$, also auch die Ableitungen derselben gegeben sind, dadurch den Bogen $ra = Fx$ bestimmen.

Auflösung. Es sey $cd = k$; die rechtwinklichte, also mit $y = ac$ parallele Ordinate $db = y' = \varphi(x + k)$; bh das zwischen den Richtungen y und y′ liegende Stück der Tangente in b und ai das innerhalb derselben Gränzen liegende Stück der Tangente in a, so ist, weil $\angle gbi$ stumpf ist

$$gi > gb; \text{ hierzu}$$
$$ag = ag \text{ addirt, giebt}$$
$$ai > ag + gb.$$

Es ist aber nach Lehren der Geometrie

$$ag + gb > \text{Bogen } ab$$

folglich auch

$$ai > \text{Bogen } ab$$

Ferner ist, weil $\angle ahb$ ebenfalls stumpf ist

$$ab > bh; \text{ und}$$
$$\text{Bogen } ab > ab; \text{ also}$$
$$\text{Bogen } ab > bh.$$

Weil nun, wenn man sich Punkt für Punkt von a bis b innerhalb der Gränzen y und y′ Tangenten gezogen denkt, diese durchaus $> bh$ und $< ai$ sind, und stetig wachsen, was in die Augen leuchtet, wenn man sich mit ihnen aus a Parallelen bis in die Richtung y′ gezogen vorstellt, so muß, da

$$ai > \text{Bogen } ab \text{ und}$$
$$bh < \text{Bogen } ab \text{ ist,}$$

eine dieser Tangenten, innerhalb der Gränzen y und y' dem Bogen ab gleich seyn; gesetzt die für den Punkt q sey $=$ Bogen ab, so hat man, wenn qp normal auf nl ist, und cp mit k' bezeichnet wird, weil nach §. 89. die Tangente des Neigungswinkels der Curventangente in q, gegen nl

$$= \varphi'(x + k') \text{ ist}$$

die Tangente in q innerhalb der Gränzen y und y'

$$= \sqrt{k^2 + k^2 [\varphi'(x + k')]^2}$$

also auch Bogen ab

$$= \sqrt{k^2 + k^2 [\varphi'(x + k')]^2}.$$

Es ist aber Bogen $rb = F(x + k)$ und Bogen $ra = Fx$; also Bogen $ab = F(x + k) - Fx$

$$= kF'x + \frac{k^2}{2} F''x + \ldots$$

Folglich

$$kF'x + \frac{k^2}{2} F''x + \ldots = k\sqrt{1 + [\varphi'(x + k')]^2}$$

oder

$$F'x + \frac{k}{2} F''x + \ldots = \sqrt{1 + [\varphi'(x + k')]^2}.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von k, also auch für $k = 0$. Es liegt aber k' zwischen 0 und k, folglich wird k' ebenfalls $= 0$ wenn $k = 0$ ist, und die dargestellte Gleichung verwandelt sich also für $k = 0$ in die:

$$F'x = \sqrt{1 + (\varphi' x)^2}.$$

Hieraus folgt nun die allgemeine Rectifications-formel

$$Fx = \int \sqrt{1 + (\varphi' x)^2} + C$$

Ist

Ist x selbst wieder abhängig von einer andern, als ursprünglich variabel angesehenen Größe z; also $x = fz$ und man setzt $Fx = v$, $\varphi x = y$, so ist in Beziehung auf z, nach §. 28.

$$dv = F'x \,.\, f'z$$
$$dy = \varphi'x \,.\, f'z$$

und setzt man die hieraus für $F'x$ und $\varphi'x$ sich ergebenden Werthe in

$$F'x = \sqrt{1 + (\varphi'x)^2}$$

so entsteht

$$\frac{dv}{f'z} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{f'z}\right)^2} \quad \text{oder}$$
$$dv = \sqrt{(f'z^2) + (dy)^2} \quad \text{oder}$$
$$y = \psi z \quad \text{gesetzt,}$$
$$dv = \sqrt{(f'z)^2 + (\psi'z)^2};$$

woraus die allgemeinere Rectificationsformel folgt:

$$v = \int\sqrt{(f'z)^2 + (\psi'z)^2} + C$$
$$\text{oder} \quad v = \int\sqrt{1 + \left(\frac{\psi'z}{f'z}\right)^2} \,.\, f'z + C$$
$$\text{oder auch} \quad v = \int\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} + C$$

Beispiel. Es sey $y = \varphi x = a + bx$, also $\varphi'x = b = tg\,\beta$ §. 84., so hat man

$$Fx = \int\sqrt{1 + b^2} = \sqrt{1 + b^2}\int 1 = \sqrt{1 + b^2} \,.\, x + C$$
$$\text{oder} \quad Fx = x\,Sec\,\beta + C$$

§. 96. Aufgabe. Es sey alles wie im vorigen §. Man soll die Ebene (Fig. 6.) $avc = Fx$ durch $y = \varphi x$ bestimmen.

Auflösung. Es ist Ebene $acdb > ac \,.\, k$ und $< bd \,.\, k$, folglich muß zwischen ac und bd eine Ordinate qp existiren, für welche

$$\text{Ebene } acdb = qp \cdot k, \quad \text{oder}$$
$$F(x+k) - Fx = k \cdot \varphi(x+k'), \quad \text{oder auch}$$
$$kF'x + \frac{k^2}{2} F''x + - = k\varphi(x+k') \quad \text{ist.}$$

Dividirt man diese Gleichung durch k so entsteht

$$F'x + \tfrac{k}{2} F''x + \ldots = \varphi(x+k').$$

Setzt man nun $k = 0$, welcher Werth eben so gut wie jeder andere in diese Gleichung zu setzen ist, so wird auch k' als zwischen k und 0 liegend, gleich Null, und es entsteht

$$F'x = \varphi x.$$

Hieraus entspringt die allgemeine Quadraturformel

$$Fx = \int \varphi x + C.$$

Ist x selbst wieder abhängig von der urveränderlichen z, und man setzt die Ebene $avc = Fx$ gleich E und $x = fz$, so hat man in Beziehung auf z

$$dE = F'x \cdot f'z$$

$$\text{folglich} \quad F'x = \frac{dE}{f'z}; \quad \text{also}$$

$$\frac{dE}{f'z} = \varphi x = y$$

und hieraus entspringt in Beziehung auf die urvariable z die allgemeinere Quadraturformel

$$E = \int y f'z + C$$

$$\text{oder auch} \quad E = \int y dx + C.$$

Beispiel. Es sey va eine gerade Linie,

$$\angle avc = \beta; \quad \text{also}$$

$$y = \varphi x = a + bx$$

$$\text{wo} \quad a = -nv\,tg\beta \quad \text{und} \quad b = tg\beta \quad \text{ist}$$

(s. §. 84.) so hat man

$$\text{Ebene } acv = Fx = \int(a + bx) + C$$
$$= ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + C.$$

Für $x = nv$ verschwindet das Integral, und man hat also

$$Fnv = o = a.nv + \tfrac{1}{2}b.nv^2 + C$$

folglich

$$C = -a.nv - \tfrac{1}{2}b.nv^2$$

daher vollständig

$$Fx = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 - a.nv - \tfrac{1}{2}b.nv^2$$
$$= a(x - nv) + \tfrac{1}{2}b(x^2 - nv^2)$$
$$= (x - nv)[a + \tfrac{1}{2}b(x + nv)]$$
$$= cv.[-nv\,tg\beta + \tfrac{1}{2}tg\beta(x + nv)]$$
$$= \tfrac{1}{2}cv.tg\beta(x - nv)$$
$$= \tfrac{1}{2}cv.tg\beta.cv$$

Es ist aber $ac = cv.tg\beta$ also

$$Fx = \tfrac{1}{2}ac.cv$$

§. 97. Aufgabe. Es drehe sich die Ebene avc (Fig. 6.) um vc; man soll die gewölbte Oberfläche Fx welche av bei dieser ganzen Umdrehung beschreibt, durch $y = \varphi x$ bestimmen.

Auflösung. Es sey alles, was die Figur betrifft (die Annahme der Eigenschaft von qp ausgenommen) wie in §. 95., so beschreibt bei der Umdrehung der Ebene vbd um vd, die Tangente ai einen abgekürzten Kegelmantel $= M$, und die Sehne ab einen andern $= m$, der Bogen ab aber eine Zone $z = F(x + k) - Fx$. Nun ist aber $ai >$ Bogen ab (§. 95.) und M schließt z ein, folglich ist

$$M > z$$

Ferner ist die Sehne $ab <$ Bogen ab und z schließt m ein, folglich ist

$$z > m$$

Denkt man sich daher nach allen Punkten zwischen b und i, von a aus, gerade Linien gezogen, so beschreibt jede dieser Linien bei der erwähnten Drehung einen abgekürzten Kegelmantel, der kleiner wie M und größer wie m ist. Es muß daher weil auch $z < M$ und $> m$ ist, unter allen diesen Linien eine seyn, die einen Kegelmantel beschreibt, welcher $= z$ ist. Es sey au diese Linie, folglich

$$F(x + k) - Fx = \pi \, . \, au\,(ac + ud)$$

Setzt man nun den Winkel welchen au mit fl bildet $= \alpha$, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha < \varphi' x \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} \alpha > \varphi'(x + k) \quad \text{§. 95.}$$

und es muß daher zwischen a und b im Bogen ab ein Punkt q existiren, dessen Tangente mit fl den Neigungswinkel α bildet, welche Tangente also parallel und (innerhalb der Gränzen y und y') gleich au ist; man hat daher

$$\begin{aligned} au &= k \operatorname{Sec} \alpha \\ &= k \sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha^2} \\ &= k \, . \sqrt{1 + [\varphi'(x + k')]^2} \end{aligned}$$

Da nun ferner $ac = \varphi x$ und

$$\begin{aligned} du &= \varphi x + k \operatorname{tg} \alpha \\ &= \varphi x + k \varphi'(x + k'); \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$ac + ud = 2\varphi x + k \varphi'(x + k')$$

ist, so entsteht, wenn man diese Werthe in die obige erste Gleichung setzt

$$F(x+k) - Fx \quad \text{oder}$$

$$k F'x + \frac{k^2}{2} F''x + \frac{k^3}{2.3} F'''x + \ldots$$

$$= \pi . k \sqrt{1 + [\varphi'(x+k')]^2} . [2\varphi x + k\varphi'(x+k')]$$

Dividirt man diese Gleichung mit k, so hat man

$$F'x + \frac{k}{2} F''x + \frac{k^2}{2.3} F'''x + \ldots$$

$$= \pi \sqrt{1 + [\varphi'(x+k')]^2} [2\varphi x + k\varphi'(x+k')]$$

Diese allgemein gültige Gleichung behält auch für $k = 0$ ihre Gültigkeit; mit k wird aber zugleich auch $k' = 0$ und es ergiebt sich

$$F'x = \pi \sqrt{1 + (\varphi'x)^2} . 2\varphi x$$

und hieraus die allgemein gültige Quadraturformel für die gewölbten Oberflächen von Conoiden

$$Fx = 2\pi \int \sqrt{1 + (\varphi'x)^2} . \varphi x + C$$

Ist x selbst wieder abhängig von z, also $x = fz$ und man setzt die Oberfläche $Fx = Q$; $y = \psi z$ so ist

$$dQ = F'x . f'z$$

$$dy = \psi'z = \varphi'x . f'z$$

folglich

$$\frac{dQ}{f'z} = 2\pi . \psi z \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'z}{f'z}\right)^2}$$

und hieraus ergiebt sich die allgemeinere Quadraturformel

$$Q = 2\pi \int \psi z \sqrt{(f'z)^2 + (\psi'z)^2} + C$$

oder $Q = 2\pi \int y \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} + C$

oder auch $Q = 2\pi \int \psi z \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'z}{f'z}\right)^2} . f'z + C$

worinnen $y = \psi z$ und $x = fz$ ist.

Beispiel. Es sey va eine gerade Linie, also $\angle avc = \beta$ gesetzt, $y = \varphi x = a + bx$ worinnen

$b = tg\beta$ und $a = -nv\,tg\beta$ ist, so hat man $\varphi' x = b$, folglich

$$Fx = 2\pi \int \sqrt{1+b^2}\,(a+bx)$$
$$= 2\pi . Sec\beta . (ax + \tfrac{1}{2} bx^2) + C.$$

Für $x = nv$ verschwindet das Integral, und es ist

$$Fnv = 0 = 2\pi\, Sec\beta\,(a . nv + \tfrac{1}{2} b . nv^2) + C$$

folglich

$$C = -2\pi\, Sec\beta\,(a . nv + \tfrac{1}{2} b . nv^2)$$

daher vollständig

$$Fx = 2\pi\, Sec\beta\,[a(x - nv) + \tfrac{1}{2} b\,(x^2 - nv^2)]$$
$$= 2\pi\, Sec\beta\,(x - nv)(a + \tfrac{1}{2} bx + \tfrac{1}{2} b . nv)$$
$$= 2\pi\, Sec\beta . vc . (-nv\,tg\beta + \tfrac{1}{2} tg\beta . x + \tfrac{1}{2} tg\beta . nv)$$
$$= \pi\, vc . Sec\beta . tg\beta\,(x - nv)$$
$$= \pi\, vc\, Sec\beta . vc\, tg\beta$$
$$= \pi . av . ac.$$

§. 98. **Aufgabe.** In irgend einem Körper denke man sich eine durch denselben normal auf die Abscissenlinie gelegte Ebene, setze die zugehörige Abscisse $= x$, die Ebene selbst $= fx$ und den zu x und fx gehörigen Körper dem Kubikinhalt nach, $= Fx$. Man soll Fx durch fx bestimmen.

Auflösung. Wächst x um k, so daß die mit fx parallele Ebene durch den Endpunkt von k gedacht $= f(x + k)$ ist, und man denkt sich k so klein gewählt, daß von fx bis zu $f(x + k)$ ein stetiges Wachsen oder Abnehmen dieser Ebenen statt findet, so muß $F(x + k) - Fx$ d. h. der Körper zwischen fx und $f(x + k)$ innerhalb der Gränzen kfx und $kf(x + k)$ liegen. Man nehme k' kleiner wie k und setze $f(x + k')$ sey die Ebene welche mit k multiplicirt, der Größe des Körpers $F(x+k) - Fx$ gleich ist, so hat man

$$F(x+k) - Fx = kf(x+k') \text{ oder}$$

$$F'x + \tfrac{k}{2}F''x + \ldots = f(x+k').$$

Diese Gleichung gilt für jedes gehörig kleine k, also gewiß für $k=0$; mit $k=0$ wird aber auch $k'=0$ und es entsteht

$$F'x = fx;$$

und hieraus die allgemeine Cubaturformel

$$Fx = \int fx + C.$$

Ist x selbst wieder abhängig von z also $x = \psi z$ und setzt man den Körper allgemein $= K$; also $K = Fx$ die Ebene $fx = E = \varphi z$, so ist $dK = F'x \cdot \psi' z$ also

$$\frac{dK}{\psi' z} = \varphi z = E$$

und hieraus die allgemeinere Cubaturformel

$$K = \int E\psi' z + C = \int \varphi z \psi' z + C$$

$$\text{oder} \quad K = \int E \cdot dx + C.$$

Beispiel. Es sey ABCD (Fig. 7.) ein rechtwinklichtes Parallelogram; normal auf dasselbe stehen die 4 Kanten $AE = c$; $BF = n$; $CG = m$; $DH = h$; $AD = BC$ sey $= a$; $AB = DC = b$; man soll den Inhalt des Körpers $AEFBCDHG = K$ bestimmen.

Es sey, in der Entfernung $AI = BK = x$, die Ebene IKML parallel mit ABFE und DCGH, so daß LM eine gerade Linie ist und Fx bezeichne den Körper zwischen AEBF und LIKM; fx die Ebene LIKM selbst, so hat man

$$Fx = \int fx = \int \frac{y+z}{2} b = \frac{b}{2}\int (y+z)$$

worinnen y und z Functionen von x sind.

Es ist aber $x : a = y - c : h - c$ und

$x : a = z - n : m - n$ folglich

$$y = \frac{h - c}{a} x + c;$$

$$z = \frac{m - n}{a} x + n;$$ daher

$$Fx = \frac{b}{2} \int \left(\frac{h - c + m - n}{a} x + c + n \right)$$

$$= \frac{b}{2} \left[\frac{h - c + m - n}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + (c + n) x \right]$$

wo keine Constante hinzukommt, weil mit $x = o$ die Function, so wie der dafür gefundene Werth verschwindet. Setzt man nun a für x, so hat man

$$K = \frac{ab}{4} \left(\frac{h - c + m - n}{a} a + 2c + 2n \right)$$

$$= \frac{ab}{4} (h + m + c + n) \quad \text{oder}$$

$$K = \frac{AEFB + DHGC}{2} a.$$

§ 99. Aufgabe. Es sey lt (Fig. 8.) irgend eine Curve, gc die Abscissenlinie, b der Anfangspunkt der Abscissen x; die Ordinaten y unter den Neigungswinkel γ gegen gc gedacht, und y als Function von x gegeben, nämlich $y = \varphi x$; man soll eine Coordinatengleichung für Abscissen u auf mg von m ausgenommen und Ordinaten z unter dem Neigungswinkel α verstanden, aus $y = \varphi x$, herleiten.

Auflösung. Es sey $bc = x$; $ct = y$; $mn = u$; $nt = z$; g der Schneidungspunkt beider Abscissenlinien gc und gm; beider Neigungswinkel $= \delta$; $bg = e$; man fälle die Normalen th, ni auf gc, und verlängere th bis zum Durchschnittspunkt v mit der aus n mit gc parallel gezogenen Linie nv, so ist

$$th + in = tv; \quad \text{aber}$$
$$th = y \operatorname{Sin} \gamma$$
$$in = (a - u) \operatorname{Sin} \delta$$
$$tv = z \operatorname{Sin} (\alpha - \delta); \quad \text{folglich}$$

1. $y \operatorname{Sin} \gamma + (a - u) \operatorname{Sin} \delta = z \operatorname{Sin} (\alpha - \delta)$

Fällt man nun ferner die Normalen gr, nq auf die Richtung von y und die nw auf gr, so hat man

$$gr = gw + nq, \quad \text{aber}$$
$$gr = (e + x) \operatorname{Sin} \gamma$$
$$gw = (a - u) \operatorname{Sin} gnw = (a - u) \operatorname{Sin} (\gamma - \delta)$$
$$nq = z \operatorname{Sin} ntq = z \operatorname{Sin} (\gamma + \alpha - \delta) \quad \text{folglich}$$

2. $(e + x) \operatorname{Sin} \gamma = (a - u) \operatorname{Sin} (\gamma - \delta) + z \operatorname{Sin} (\gamma + \alpha - \delta)$

Entwickelt man nun y aus 1., und x aus 2., und setzt beide Werthe in $y = \varphi x$, so hat man eine unterwickelte Gleichung zwischen u und z, aus welcher sich z als Function von u bestimmen läßt.

Anwendung der in §. 83. bis §. 99. hergeleiteten Gesetze auf bestimmte Curven.

I. Von den Kegelschnitten.

§. 100. Die Curven, welche auf dem Mantel eines Kegels sich bilden, wenn man den Kegel mit einer Ebene E durchschneidet, heißen Kegelschnitte.

Ist E parallel mit der Grundfläche des Kegels, so heißt die Curve bekanntlich, ein Kreis.

Ist E parallel mit der gegenüber liegenden Seite des Kegels, so heißt sie Parabel.

Schneidet E eine Seite des Kegels und convergirt mit der gegenüber liegenden, so heißt die Curve eine Ellipse.

Schneidet E eine Seite des Kegels und divergirt mit der gegenüber liegenden, so heißt sie Hyperbel.

a. Von der Parabel.

§. 101. Aufgabe. Eine rechtwinklichte Coordinatengleichung für die Parabel herzuleiten.

Auflösung. Es sey ABC (Fig. 9.) ein Achsendurchschnitt eines beliebigen Kegels, D ein beliebiger Punkt des Durchmessers BC einer mit der Grundfläche parallelen Ebene, EF normal auf BC durch D, also $ED = DF$; $DG \mp BA$, und durch EF und DG die Ebene EGF gelegt, so ist EGF eine Parabel. Vom Scheitelpunkt G aus, sey die beliebige Abscisse GK $= x$ genommen, durch K, $MN \mp EF$ und $IP \mp BC$ gelegt, so daß also die Ebene INPM ein Kreis, folglich $MK = KN = y$ die rechtwinklichte Ordinate zu x, und GD eine Achse der Parabel ist.

Aus $IK : KM = KM : KP$ folgt nun

$$y^2 = IK \cdot KP$$

Es ist aber $IK =$ der Parallele GH, also für jedes x dieselbe Größe, und $KP = \frac{\text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,\alpha}\,x$, in welchem Ausdruck der Quotient $\frac{\text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,\alpha}$ ebenfalls für jedes x derselbe bleibt. Man hat daher

$$y^2 = \frac{GH \sin\beta}{\sin\alpha} \cdot x$$

oder wenn man die für diese Parabel unveränderliche Linie $\frac{GH \sin\beta}{\sin\alpha}$ mit p bezeichnet

$$y^2 = px.$$

§. 102. Aufgabe. Für die Parabel in Beziehung auf Absciſſen x vom Scheitelpunkt derselben aus, auf der Achſe genommen, und rechtwinklichten Ordinaten y die Subt., Subn., tang., Norm. und den Krümmungskreis für den Endpunkt von x zu bestimmen.

Auflösung. Es ist $y = \varphi x = \sqrt{px}$ also

$$\varphi' x = \frac{p}{2\sqrt{px}} = \frac{p}{2y}; \text{ und}$$

$$\varphi'' x = -\frac{p^2}{4y^3}; \text{ folglich nach §. 93.}$$

$$\text{Subt} = \frac{\varphi x}{\varphi' x} = \frac{2y^2}{p} = 2x$$

$$\text{Subn} = \varphi x\, \varphi' x = \frac{p}{2}$$

$$\text{tang} = \frac{\varphi x}{\varphi' x}\sqrt{1 + (\varphi' x)^2} = \sqrt{px + 4x^2}$$

$$\text{Norm} = \varphi x \sqrt{1 + (\varphi' x)^2} = \sqrt{px + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

Ferner nach §. 90. Beisp.

$$A = 3x + \frac{p}{2}$$

$$B = -4x\sqrt{\frac{x}{p}} = -\frac{4x^2}{y}$$

$$R = \frac{(4x + p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}$$

§. 103. Aufgabe. Für jede Absciſſenlinie eine Gleichung zwischen Absciſſen u und Ordinaten z unter dem Neigungswinkel α genommen, für die Parabel herzuleiten.

Auflösung. Betrachtet man, in Fig. 8., bt als eine Parabel, b als ihren Scheitelpunkt, bc als ihre Achse, so hat man nach §. 99. $\gamma = 90°$ genommen,

$$y = z \operatorname{Sin}(\alpha - \delta) - (a - u) \operatorname{Sin}\delta$$

$$e + x = z \operatorname{Cos}(\alpha - \delta) + (a - u) \operatorname{Cos}\delta$$

Setzt man die Werthe für y und x hieraus in $y^2 = px$, so entsteht

$$[z \operatorname{Sin}(\alpha - \delta) - (a - u) \operatorname{Sin}\delta]^2$$
$$= p[z \operatorname{Cos}(\alpha - \delta) + (a - u) \operatorname{Cos}\delta - e]$$

welches die verlangte Gleichung ist.

Beispiel. Nimmt man δ so groß, daß $tg\,\delta = \varphi' e$, folglich die Abscissenlinie $gm = a$, die Tangente für den Endpunkt von der zur Abscisse e gehörigen Ordinate h ist (vor. §.), und $\alpha = \delta$; so entsteht $a = 2e \operatorname{Sec}\delta$ gesetzt, so daß der Berührungspunkt der Tangente zugleich Anfangspunkt der Abscissen ist

$$[-(2e \operatorname{Sec}\delta - u) \operatorname{Sin}\delta]^2$$
$$\frac{h^2}{e}[z + (2e \operatorname{Sec}\delta - u) \operatorname{Cos}\delta - e]$$

oder

$$e(-h + u \operatorname{Sin}\delta)^2 = h^2(z + e - u \operatorname{Cos}\delta)$$

und hieraus

$$eu^2 \operatorname{Sin}\delta^2 = h^2 z + hu(2e \operatorname{Sin}\delta - h \operatorname{Cos}\delta)$$

oder weil $2e \operatorname{Sin}\delta = h \operatorname{Cos}\delta$ und

$$\operatorname{Sin}\delta^2 = \frac{h^2}{h^2 + 4e^2}$$ ist

$$z = \frac{e}{h^2 + 4e^2} \cdot u^2$$

§. 104. Derjenige Punkt in der Achse einer Parabel, für welchen die rechtwinklichte Ordinate $= \frac{p}{2}$ ist, heißt der Brennpunkt. Jede gerade Linie vom Brennpunkt nach irgend einer Stelle der parabolischen Linie heißt ein Brennstrahl. Der Abstand vom Scheitelpunkt bis zum Brennpunkt ist $= \frac{1}{4}p$ (aus $y^2 = px$; $\frac{1}{2}p$ für y geschrieben) und trägt man in der Verlängerung der Achse, nach entgegengesetzter Richtung, vom Scheitelpunkt aus, $\frac{1}{4}p$ ab und zieht durch den so bestimmten Punkt eine Normale durch die Achse, so heißt diese die Richtungslinie der Parabel.

§. 105. Aufgabe. Die Länge eines Brennstrahls zu bestimmen.

Auflösung. Ist ab (Fig. 10.) eine Parabel, a ihr Scheitelpunkt, am ihre Achse, $ar = x$; rb (normal auf am) $= y$; $ag = \frac{1}{4}p$, also g ihr Brennpunkt und gb ein Brennstrahl, so hat man

$$bg^2 = gr^2 + rb^2$$
$$= (x - \tfrac{1}{4}p)^2 + px$$
$$= (x + \tfrac{1}{4}p)^2; \quad \text{folglich}$$
$$bg = x + \tfrac{1}{4}p$$

§. 106. Zusatz. Ist bc die Normale in b, so hat man nach §. 102. $rc = \text{Subn} = \frac{p}{2}$; folglich

$$gc = gr + rc = x + \tfrac{1}{4}p$$
$$\text{daher} \quad bg = gc$$
$$\text{also} \quad \angle gbc = \angle gcb$$

Da nun ferner, wenn man fn durch b mit km parallel zieht

$$\angle nbc = \angle gcb \quad \text{ist,}$$

so hat man also

$$\angle nbc = \angle cbg.$$

In einem parabolischen Hohlspiegel vereinigen sich also alle parallel mit der Achse einfallenden Strahlen im Brennpunkt.

§. 107. Zusatz. Nimmt man $ak = ag = \frac{1}{4}p$ und fk senkrecht auf km, so ist $bf = rk = x + \frac{1}{4}p$; folglich (vor. §.) $bf = bg = gc$.

Die Eigenschaft $bg = bf$ giebt ein einfaches Mittel an mit Hülfe eines an der Richtungslinie fortzuschiebenden rechten Winkels und eines Faden von der Länge $x + \frac{1}{4}p$, dessen einer Endpunkt in g, der andere auf den parallel mit der Achse sich bewegenden Schenkel des rechten Winkels im Endpunkt der bestimmten oder gewählten Abscisse x befestigt ist, die Parabel stetig zu zeichnen.

§. 108. Aufgabe. Die Parabel zu rectificiren.

Auflösung. Es ist $ar = x$; $br = y$ (Fig. 10.) und $y = \sqrt{px} = \varphi x$ gesetzt, nach §. 95

$$\text{Bogen } ab = \int \sqrt{1 + (\varphi' x)^2} = \int \sqrt{1 + \frac{p}{4x}};$$

oder $\frac{p}{4x} = \text{Cotg}\,\varrho^2$ also $x = f\varrho = \frac{p}{4}\text{tg}\,\varrho$ genommen

$$\text{Bogen } ab = \int \text{Cosec}\,\varrho \cdot f\varrho$$

$$= \frac{p}{2}\int \frac{1}{\text{Sin}\,\varrho}\,\text{tg}\,\varrho\;\text{Sec}\,\varrho^2$$

$$= \frac{p}{2}\int \text{Sec}\,\varrho^3 \quad \text{also nach §. 69. IV.}$$

$$\text{Bogen } ab = \frac{p}{4}\left[\text{Sec}\,\varrho\;\text{tg}\,\varrho + \ln(\text{Sec}\,\varrho + \text{tg}\,\varrho)\right] + C$$

Nun ist aber $\text{Cotg}\,\varrho^2 = \frac{p}{4x} = \frac{y^2}{4x^2}$; also

$tg\varrho = \frac{2x}{y}$ und $Sec\varrho = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 + 4x^2}}{y}$;

daher

$$\text{Bogen } ab = \frac{p}{4}\left(\frac{2x\sqrt{y^2 + 4x^2}}{y^2} + \ln\frac{2x\sqrt{y^2 + 4x^2}}{y}\right) + C$$

Für $x = 0$ verschwindet Bogen ab und auch der so eben dafür gefundene Ausdruck, daher ist $C = 0$ und es bleibt, $\frac{y^2}{x}$ für p gesetzt;

$$\text{Bogen } ab = \tfrac{1}{2}\sqrt{y^2 + 4x^2} + \frac{y^2}{4x} . \ln\frac{2x + \sqrt{y^2 + 4x^2}}{y}$$

Beispiel. Für $x = 20$; $y = 30$ ist Bogen $ab = 37{,}36$; die Sehne ist $= 36{,}05$ und wäre ab ein Kreisbogen zu dieser Sehne, x ein Stück des zugehörigen Durchmessers, so hätte man Bogen $ab = 38{,}22$.

§. 109. Aufgabe. Die Parabel zu quadriren.

Auflösung. 1. Für rechtwinklichte Coordinaten auf der Achse (Fig. 10.). Es sey $ar = x$;

$br = y = \varphi x = \sqrt{px}$; Ebene $arb = Fx$,

so ist nach §. 96.

$$Fx = \int\varphi x = \sqrt{p} . \int x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p} . \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

Für $x = 0$ verschwindet das Integral und auch der gefundene Ausdruck; es ist also $C = 0$; folglich

$$\text{Ebene } abr = \tfrac{2}{3}\sqrt{p} . x . \sqrt{x}$$
$$= \tfrac{2}{3} x . y.$$

2. Inhaltsbestimmung des parabolischen Abschnitts $bvitb$ (Fig. 10.).

Es sey $it = tb$; $tv \mathbin{\#} km$; ie ebenfalls $\mathbin{\#} km$ folglich normal auf br; $be = b$; $vt = h$; $ie = z$; so hat man $br^2 = p . ar$ oder

1. $y^2 = px$. Ferner

$$2.\quad (y-b)^2 = p\,.\,(x-z) \text{ und}$$
$$3.\quad (y-\tfrac{b}{2})^2 = p\,.\,(x-\tfrac{z}{2}-h)$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$p = \frac{b^2}{4h}$$
$$y = \frac{(4h+z)b}{8h}$$
$$x = \frac{(4h+z)^2}{16h}$$

Es ist aber Ebene $abr = \frac{2}{3}xy$

$$\Delta ibe = \tfrac{1}{2}bz$$

Rechteck $qier = (y-b)z$

und Parab. Segm. $aqi = \frac{2}{3}(x-z)(y-b)$

folglich das Segment $bvitb$

$$= \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{1}{2}bz - (y-b)z - \tfrac{2}{3}(x-z)(y-b)$$
$$= \tfrac{2}{3}bx - \tfrac{1}{3}yz - \tfrac{1}{6}bz$$
$$= \tfrac{1}{6}\left(4b.\frac{(4h+z)^2}{16h} - 2z\frac{(4h+z)b}{8h} - bz\right)$$
$$= \tfrac{2}{3}bh.$$

§. 110. Aufgabe. Die gewölbte Oberfläche $Q = Fx$ des parabolischen Conoids, welches durch Umdrehung der Ebene arb um die Achse ar entsteht, zu bestimmen. (Fig. 10.)

Auflösung. Es ist $\varphi x = y = br = \sqrt{px}$

also $\varphi' x = \dfrac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$; folglich nach §. 97.

$$Fx = 2\pi \int \sqrt{1 + \frac{p}{4x}}\,.\,\sqrt{px}$$
$$= \pi \int \sqrt{p^2 + 4px}$$
$$= \frac{\pi}{4p}\,.\int (p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}}\,.\,4p$$

oder

oder $p^2 + 4px = fx$ gesetzt

$$Q = \frac{\pi}{4p} \int (fx)^{\frac{1}{2}} . f'x$$

$$= \frac{\pi}{4p} \cdot \frac{(fx)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \quad (\S. 60. VI.)$$

$$= \frac{\pi}{6p} \cdot (p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}} + C$$

Für $x = 0$ verschwindet das Integral, also

$$O = \frac{\pi}{6p} \cdot p^3 + C; \quad \text{daher}$$

$$C = -\frac{\pi}{6p} \cdot p^3; \quad \text{folglich}$$

$$Fx = \frac{\pi}{6p} [(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}} - p^3] \quad \text{oder}$$

$$Fx = \frac{\pi y}{6x^2} [(4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - y^3]$$

Beispiel. Für $x = 20$; $y = 30$; entsteht

$$F\,20 = 3848,46\ldots$$

Der Kegelmantel zur geraden Linie ab ist $= 3398{,}11$ und wenn ab als Kreisbogen, am als Richtung des Durchmessers angesehen wird, so erhält man die Calotte, welche ab beschreibt

$$= 4084,08\ldots$$

§. 111. Aufgabe. Es drehe sich die Ebene arb (Fig. 10.) um $ar = x$; man soll den, aus der ganzen Umdrehung entspringenden Körper Fx bestimmen.

Auflösung. Es ist die Begränzungsebene welche rb beschreibt $= fx = br^2 . \pi = y^2 \pi = px . \pi$; also nach §. 98.

$$Fx = \int p \pi x = p\pi . \frac{x^2}{2} + C$$

wo $C = 0$ ist.

Setzt man y^2 für px so hat man

$$Fx = y^2 \pi . \frac{x}{2}$$

b. Von der Ellipse.

§. 112. Aufgabe. Eine rechtwinklichte Coordinatengleichung für die Ellipse herzuleiten.

Auflösung. Es sey (Fig. 11.) ein Kegel, $\triangle feg$ ein Achsendurchschnitt desselben, so gedacht, daß wenn der Kegel schief ist, eg die kleinste, ef die größte Seite vorstellt; die Ebene iv sey parallel mit der Grundfläche des Kegels, also eine Kreisebene, iv ein Durchmesser derselben, $mq = mw$ normal auf iv, also auch normal auf die Ebene feg; durch qw sey die Ellipse $kqhw$ gelegt; $hl \mp kn \mp fg$. Setzt man nun $hk = a$; $hl = b$; $kn = h$; $hm = x$; $qm = mw = y$, so hat man

$$y^2 = im . mv.$$

Es ist aber $km : im = kh : lh$ oder

$$a - x : im = a : b \quad \text{und}$$

$$hm : mv = hk : kn; \quad \text{oder}$$

$$x : mv = a : h$$

folglich $(a - x)x : im . mv = a^2 : bh$ also

$$im . mv = \frac{bh}{a}\left(x - \frac{x^2}{a}\right); \quad \text{daher}$$

$$y^2 = \frac{bh}{a}\left(x - \frac{x^2}{a}\right).$$

Setzt man nun die für jedes x unveränderlich dieselbe bleibende Größe $\frac{bh}{a} = p$, so hat man also

$$y^2 = p\left(x - \frac{x^2}{a}\right).$$

§. 113. Bezeichnet man die zum Mittelpunkt von a gehörige Ordinate mit $\frac{c}{2}$, so hat man

$$\frac{c^2}{4} = p\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4a}\right); \quad \text{also}$$

$$c = \sqrt{pa} \quad \text{und} \quad p = \frac{c^2}{a}.$$

Man nennt a die **große** und c die **kleine Achse** der Ellipse; der **Schneidungspunkt** beider heißt der Mittelpunkt der Ellipse.

Setzt man $\frac{c^2}{a}$ für p, so hat man nun die Gleichung

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2).$$

In dem Kreise, dessen Durchmesser $= a$ ist, entspreche der Abscisse x die Ordinate z, so ist

$$z^2 = ax - x^2; \quad \text{folglich}$$

$$y : z = c : a$$

welche Proportion eine leichte Methode zu Verzeichnung der Ordinaten einer Ellipse an die Hand giebt, wenn a und c gegeben sind.

§. 114. Bezeichnet man die Abscissen vom Mittelpunkt aus auf der großen Achse genommen, mit u, und setzt also $\frac{1}{2}a \pm u$ für x in die Gleichung

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2),$$

so entsteht in jedem Fall

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right).$$

Es sind also die durch c gebildeten beiden Theile der Ellipse congruent.

§. 115. Diejenigen Punkte in a, in welchen die Ordinate dem halben Parameter p gleich ist, heißen die Brennpunkte der Ellipse. Die Entfernung jedes Brennpunktes vom Mittelpunkt der Ellipse heißt die Excentricität derselben. Jede gerade Linie von einem Brennpunkt bis zu einem Punkt der elliptischen Linie heißt ein Brennstrahl.

§ 116. Aufgabe. Die Excentricität $= e$ der Ellipse zu bestimmen.

Auflösung. Man setze in

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right);$$

$\frac{p}{2}$ oder $\frac{c^2}{2a}$ für y und e für u,

so ergiebt sich

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}.$$

§. 117. Aufgabe. Für irgend einen Punkt der elliptischen Linie die Subtangente, Subnormale und den Krümmungskreis zu bestimmen.

Auflösung. Hier ist $y = \varphi x = \frac{c}{a}\sqrt{ax - x^2}$

oder $y = fu = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2}{4} - u^2}$

folglich $\varphi' x = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - 2x}{2y}$; $\varphi'' x = -\frac{c^4}{4a^2y^3}$ oder

$$f'u = -\frac{c^2 u}{a^2 y};\quad f''u = -\frac{c^4}{4a^2y^3};$$

also nach §. 93.

$$\text{Subt} = 2x\frac{a - x}{a - 2x} = \pm\frac{a^2 - 4u^2}{4u}$$

$$\text{Subn} = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a}{2} - x\right) = \pm\frac{c^2}{a^2}u.$$

Ferner, der Abstand A §. 90.

$$= \frac{16e^2}{a^4} \cdot u^3;$$

der $B = -\frac{4e^2}{a^2 c^2} y(a^2 - 4u^2)$

und $R = \frac{(a^4 - 16c^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^4 c}$

Für $u = o$; also $y = \frac{c}{2}$; $x = \frac{a}{2}$ wird

$$\text{Subt} = \infty; \quad \text{Subn} = o;$$

der Abstand $A = o$; $B = -\frac{2e^2}{c}$; $R = \frac{a^2}{2c}$

Für $u = \pm \frac{a}{2}$; also $y = o$; $x = a$ oder $= o$ wird

$$\text{Subt} = o; \ \text{Subn} = \mp \frac{c^2}{2a}$$

der Abstand $A = \pm \frac{2e^2}{a}$; $B = o$; $R = \frac{c^2}{2a}$;

§. 118. Aufgabe. Die Länge beider Brennstrahlen nach einem und demselben Punkt der Ellipse zu bestimmen.

Auflösung. Es sey f (Fig. 12.) der Mittelpunkt der Ellipse, bg die große Achse, $fh = fi = e$ die Excentricität, also hk, ik zusammengehörige Brennstrahlen; $km = y$ die Ordinate in k; $mf = u$ die zugehörige Abscisse, so hat man

$$\begin{aligned} hk^2 &= km^2 + hm^2 \\ &= y^2 + (e - u)^2 \\ &= \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right) + e^2 - 2eu + u^2 \\ &= \frac{c^2}{4} + e^2 - 2eu + \frac{a^2 - c^2}{a^2} u^2 \\ &= \frac{a^2}{4} - 2eu + \frac{4e^2}{a^2} u^2 \end{aligned}$$

$$=\left(\frac{a}{2}-\frac{2e}{a}u\right)^2; \quad \text{also}$$

$$hk=\frac{a}{2}-\frac{2e}{a}u.$$

Ferner

$$ki^2=km^2+mi^2$$
$$=y^2+(e+u)^2$$
$$=\left(\frac{a}{2}+\frac{2e}{a}u\right)^2 \quad \text{daher}$$

$$ki=\frac{a}{2}+\frac{2e}{a}u.$$

§. 119. Zusatz. Aus dem vorigen §. folgt, daß die Summe der Brennstrahlen für jeden Punkt der Ellipse (z. B. $hk+ki$) = der großen Achse a ist, und aus dieser Eigenschaft ergiebt sich leicht eine sehr einfache Methode, wenn a und e gegeben sind, die Brennpunkte und dann auch die ganze elliptische Linie zu construiren.

§. 120. Zusatz. Ist (Fig. 12.) kn die Normale in k, so hat man nach §. 117.

$$mn=\text{Subn}=\frac{c^2}{a^2}u, \quad \text{folglich}$$

$$nf=u-\frac{c^2}{a^2}u=\frac{4e^2}{a^2}u; \quad \text{daher}$$

$$hn=e-\frac{4e^2}{a^2}u=e.\frac{a^2-4eu}{a^2} \quad \text{und also}$$

$$ni=2e-e.\frac{a^2-4eu}{a^2}=e.\frac{a^2+4eu}{a^2};$$

demnach

$$hn:ni=a^2-4eu:a^2+4eu.$$

Aus §. 118. folgt aber auch

$$hk:ki=a^2-4eu:a^2+4eu$$

und also ist

$$hn : ni = hk : ki.$$

Aus dieser Proportion folgt

$$\alpha = \beta.$$

Hieraus erkennet man für die Ellipse eine ähnliche Eigenschaft, wie die §. 106 bei der Parabel, auch folgt aus $\alpha = \beta$ eine leichte Methode die Tangente so wie die Normale für jeden Punkt der Ellipse zu construiren, wenn nur a und c gegeben sind, um die Brennpunkte zuvörderst bestimmen zu können.

§. 121. Wenn man (Fig. 13.) $bd = df = \frac{a-c}{4}$ und $fg = \frac{c}{2}$ macht, den Punkt b fest annimmt, und den Punkt g so fortbewegt, daß (in b und d Drehachsen angenommen) der Punkt f der Linie dg immer in der Linie bt bleibt, so beschreibt g eine Ellipse, deren Mittelpunkt b deren große Achse = a und deren kleine = c ist.

Um sich hiervon zu überzeugen, denke man sich irgend eine Lage, etwa die in der Figur, setze die Abscisse $bk = u$; die Ordinate $kg = y$ und den Winkel $dbf = dfb = \varphi$, so hat man

$$\tfrac{c}{2} \operatorname{Sin} \varphi = y \quad \text{und}$$

$$2 \cdot \frac{a-c}{4} \operatorname{Cos} \varphi + \tfrac{c}{2} \operatorname{Cos} \varphi = u$$

und aus der Verbindung beider Gleichungen

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right).$$

Dies ist aber eine Gleichung für die Ellipse, und folglich beschreibt g eine Ellipse zum Mittelpunkt b.

Hiernach läßt sich leicht ein Instrument zu Verzeichnung von Ellipsen anfertigen.

§. 122. Aufgabe. Die Ellipse zu rectificiren.

Auflösung. Setzt man (Fig. 12.) Bog $bk = v$; so hat man die Abscisse bm mit x; die fm mit u und mk mit $y = \varphi x$ bezeichnet

$$v = \int\sqrt{1 + (\varphi' x)^2} \quad §.\ 95.$$

oder weil $x = fu = \frac{1}{2}a - u$ ist

$$v = \int\sqrt{1 + [\varphi'(\tfrac{1}{2}a - u)]^2}\,.\,f'u$$

$$= \int\sqrt{1 + \frac{c^4 u^2}{a^4 y^2}}\,.(-1)$$

$$= -\int\sqrt{1 + \frac{c^2}{c^2}\,.\,\frac{4u^2}{a^2 - 4u^2}}$$

Wird nun $u = F\beta = \frac{1}{2}a \operatorname{Sin}\beta$ genommen, so ergiebt sich

$$v = -\int\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}\operatorname{tg}\beta^2}\,.\,\tfrac{1}{2}a \operatorname{Cos}\beta$$

$$= -\tfrac{1}{2}a\int\sqrt{\operatorname{Cos}\beta^2 + \frac{c^2}{a^2}\operatorname{Sin}\beta^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}a\int\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\operatorname{Sin}\beta^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}a\int\sqrt{1 - \left(\frac{2e}{a}\right)^2 \operatorname{Sin}\beta^2}$$

Dies Integral ist nur näherungsweise zu bestimmen, und es folgt nach dem binomischen Satz, $\left(\frac{2e}{a}\right)^2 = b$ gesetzt,

$$v = -\tfrac{a}{2}\int\Big(1 - \tfrac{1}{2}b\operatorname{Sin}\beta^2 - \frac{1}{2.2^2}b^2\operatorname{Sin}\beta^4 - \frac{3}{2.3.2^3}b^3\operatorname{Sin}\beta^6$$

$$- \frac{3.5}{2.3.4.2^4}b^4\operatorname{Sin}\beta^8 - \frac{3.5.7}{2.3.4.5.2^5}b^5\operatorname{Sin}\beta^{10}$$

$$- \frac{3.5.7.9}{2.3.4.5.6.2^6}b^6\operatorname{Sin}\beta^{12}\ldots\Big)$$

oder A für $\frac{1}{2} b$

$$B \text{ für } \frac{1}{2 \cdot 2^2} b^2$$

$$C \text{ für } \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} b^3$$

$$D \text{ für } \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} b^4$$

$$E \text{ für } \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} b^5$$

u. s. w. geschrieben, nach §. 69.

$$\begin{aligned}
v = -\tfrac{a}{2}\Big[& \left(1 - \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} B - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} C - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot D \ldots\right) \beta \\
& + \left(A + \tfrac{3}{4} B + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} C + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{7} \cdot D \ldots\right) \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta}{2} \\
& + \left(B + \tfrac{5}{6} C + \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} D + \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{9}{10} E \ldots\right) \frac{\operatorname{Sin}\beta^3 \operatorname{Cos}\beta}{4} \\
& + \left(C + \tfrac{7}{8} D + \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{9}{10} E + \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{11}{12} F \ldots\right) \frac{\operatorname{Sin}\beta^5 \operatorname{Cos}\beta}{6} \\
& + \left(D + \tfrac{9}{10} E + \tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{11}{12} F + \tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{11}{12} \cdot \tfrac{13}{14} G \ldots\right) \frac{\operatorname{Sin}\beta^7 \operatorname{Cos}\beta}{8} \\
& + \left(E + \tfrac{11}{12} F + \tfrac{11}{12} \cdot \tfrac{13}{14} G \ldots\right) \frac{\operatorname{Sin}\beta^9 \operatorname{Cos}\beta}{10} + \ldots \Big] + \text{Const.}
\end{aligned}$$

Für $x = 0$; also $u = \frac{1}{2} a$ wird $v = 0$;
und es ergiebt sich Const

$$= \tfrac{a}{2} \left(1 - \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} B \ldots\right) \tfrac{\pi}{2}$$

und demnach ist vollständig

$$\begin{aligned}
v = \tfrac{a}{2}\Big[& \left(1 - \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} B - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} C \ldots\right) \left(\tfrac{1}{2}\pi - \beta\right) \\
& - \left(A + \tfrac{3}{4} B + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} C \ldots\right) \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta}{2} \\
& - \left(B + \tfrac{5}{6} C + \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} D \ldots\right) \frac{\operatorname{Sin}\beta^3 \operatorname{Cos}\beta}{4} \\
& - \left(C + \tfrac{7}{8} D + \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{9}{10} E \ldots\right) \frac{\operatorname{Sin}\beta^5 \operatorname{Cos}\beta}{6} \ldots\ldots\ldots \Big]
\end{aligned}$$

worinnen $\mathrm{Sin}\,\beta = \frac{2u}{a}$ also

$$\mathrm{Cos}\,\beta = \sqrt{1 - \frac{4u^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{2u}{a} \quad \text{ist.}$$

Für $u = 0$ ergiebt sich der elliptische Quadrant

$$= \frac{a\pi}{4}\left(1 - \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}B - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}C \ldots\right).$$

Beispiel. Ist $a = 10$; $c = 6$; also $e = 4$, so erhält man den elliptischen Quadranten $= 6{,}383 \ldots$

§. 123. **Aufgabe.** Die Ellipse zu quadriren.

Auflösung. Ist $bm = x$ (Fig. 12.); $mf = u$; $mk = y = \varphi x$; Ebene $bmk = Fx = E$; so hat man nach §. 96.

$$Fx = \int \varphi x = \int \frac{c}{a}\sqrt{ax - x^2}$$

oder $x = fu = \frac{1}{2}a - u$ gesetzt

$$E = -\frac{c}{a}\int\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - u^2}.$$

Nimmt man nun $u = \psi\beta = \frac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,\beta$, so entsteht

$$E = \tfrac{1}{4}ac\int \mathrm{Sin}\,\beta^2$$

$$= \tfrac{1}{4}ac\left(\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta\right) + C \quad \text{§. 69.}$$

$$= \tfrac{1}{8}ac\left(\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{2u}{a} - \frac{2u\sqrt{a^2 - 4u^2}}{a^2}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{8}ac\left(\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{a - 2x}{a} - \frac{a - 2x}{a^2}\sqrt{4x(a - x)}\right) + C$$

Für $x = 0$ verschwindet dieser Ausdruck mit dem Integral, folglich ist Const. $= 0$; also vollständig

$$\text{Ebne } bmk = E = \tfrac{1}{8}ac\left(\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{a-2x}{a} - \frac{a-2x}{a^2}\sqrt{4x(a-x)}\right)$$

Für $x = bg = a$; ergiebt sich, wenn man das Resultat doppelt nimmt, die ganze Ebene der Ellipse

$$= \tfrac{1}{4}ac\pi.$$

§. 124. Aufgabe. Es sey bg (Fig. 12.) die große Achse = a der Ellipse, f ihr Mittelpunkt, bm = x; km = y = φx; mf = u; die Oberfläche welche bk bei der Umdrehung um bm beschreibt = Q = Fx; man soll Fx bestimmen.

Auflösung. Es ist nach §. 97.

$$Fx = 2\pi \int \sqrt{1 + (\varphi' x)^2} \cdot \varphi x$$

$$= 2\pi \int \sqrt{1 + \frac{c^4}{a^4} \frac{(a-2x)^2}{4y^2}} \cdot y$$

$$= \frac{2\pi c}{a} \int \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{4e^2}{a} x - \frac{4e^2}{a^2} x^2}$$

oder, weil $x = fu = \frac{1}{2}a - u$ ist

$$Q = -\frac{2\pi c}{a} \int \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{4e^2}{a^2} u^2}$$

Setzt man nun $u = \psi\beta = \frac{a^2}{4e} \operatorname{Cos}\beta$ so entsteht

$$Q = +\frac{2\pi c}{a} \int \frac{a}{2} \operatorname{Sin}\beta^2 \cdot \frac{a^2}{4e}$$

$$= \frac{\pi c a^2}{4e}\left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta\right) + C \quad §.\ 69.$$

$$= \frac{\pi c a^2}{8e}\left(\operatorname{Arc Cos}\frac{2e(a-2x)}{a^2} - \frac{2e(a-2x)}{a^4}\sqrt{a^4 - 4e^2(a-2x)^2}\right) + C$$

Für $x = o$ wird $F = o$; also

$$C = \frac{\pi c a^2}{8e}\left(-\operatorname{Arc Cos}\frac{2e}{a} + \frac{2ec}{a^2}\right);$$

daher vollständig

$$Fx = \frac{\pi c a^2}{8e}\left(\operatorname{Arc Cos}\frac{2e(a-2x)}{a^2} - \operatorname{Arc Cos}\frac{2e}{a} + \frac{2ec}{a^2} - \frac{2e(a-2x)}{a^4}\sqrt{a^4 - 4e^2(a-2x)^2}\right)$$

Setzt man nun $x = \frac{a}{2}$ und nimmt das Resultat doppelt, so findet man, weil

$$\tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc Cos}\frac{2e}{a} = \text{Arc Sin}\frac{2e}{a}$$

$$= \text{Arc Cos}\sqrt{1 - \frac{4e^2}{a^2}} = \text{Arc Cos}\frac{c}{a} \quad \text{ist,}$$

die Oberfläche des ganzen durch Umdrehung um die große Achse erzeugten Conoids

$$= \frac{\pi c a^2}{4e}\left(\frac{2ce}{a^2} + \text{Arc Cos}\frac{c}{a}\right)$$

§. 125. Aufgabe. Es sey bg (Fig. 12.) die kleine Achse $= c$ der Ellipse; f ihr Mittelpunkt, $bm = x$; $mk = y = \varphi x$; man soll die durch Umdrehung der Curve bk um $bm = x$ erzeugte conoidische Oberfläche $= Fx = Q$ bestimmen.

Auflösung. Hier ist, wie sich leicht ergiebt,

$$y = \varphi x = \frac{a}{c}\sqrt{(cx - x^2)}$$

folglich

$$Fx = 2\pi \int \sqrt{1 + \frac{a^4}{c^4} \cdot \frac{(c-2x)^2}{4y^2}} \cdot y$$

$$= \frac{2\pi a}{c} \int \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{4e^2}{e}x + \frac{4e^2}{c^2}x^2}$$

oder $x = fu = \tfrac{1}{2}c - u$ gesetzt,

$$Q = -\frac{2\pi a}{c} \int \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{4e^2}{c^2}u^2}.$$

Nimmt man nun $u = \psi\beta = \frac{c^2}{4e}\text{tg}\beta$, so entsteht

$$Q = -\frac{2\pi a}{c} \int \frac{c}{2}\text{Sec}\beta \cdot \psi'\beta$$

$$= -\frac{\pi a c^2}{4e} \int \text{Sec}\beta^3$$

$$= -\frac{\pi a c^2}{4e} \cdot \left(\frac{\text{Sec}\beta\ \text{tg}\beta}{2} + \tfrac{1}{2}\ln(\text{tg}\beta + \text{Sec}\beta)\right) + C.$$

§. 69.

$$= -\frac{\pi a c^2}{8e}\left(\frac{4eu\sqrt{c^4+16e^2u^2}}{c^4}+\ln\frac{4eu+\sqrt{c^4+16e^2u^2}}{c^2}\right)+C$$

$$= -\frac{\pi a c^2}{8e}\left(\frac{2e(c-2x)\sqrt{c^4+4e^2(c-2x)^2}}{c^4}\right.$$

$$\left.+\ln\frac{2e(c-2x)+\sqrt{c^4+4e^2(c-2x)^2}}{c^2}\right)+C$$

Für $x = o$, wird $F = o$ und man erhält

$$C = \frac{\pi a c^2}{8e}\left(\frac{2ea}{c^2}+\ln\frac{2e+a}{c}\right) \text{ also vollständig}$$

$$Fx = \frac{\pi a c^2}{8e}\left(\frac{2ea}{c^2}-\frac{2e(c-2x)\sqrt{c^4+4e^2(c-2x)^2}}{c^4}\right.$$

$$\left.+\ln\frac{2e+a}{c}-\ln\frac{2e(c-2x)+\sqrt{c^4+4e^2(c-2x)^2}}{c^2}\right)$$

Setzt man nun $x = \frac{1}{2}c$ und nimmt das Resultat doppelt, so entsteht des Ganzen durch Umdrehung um die kleine Achse erzeugten Conoids Oberfläche

$$= \frac{\pi a c^2}{4e}\left(\frac{2ea}{c^2}+\ln\frac{2e+a}{c}\right)$$

§. 126. **Aufgabe.** Die Ellipse zu cubiren.

Auflösung. Ist bg (Fig. 12.) die große Achse $= a$; $bm = x$; $mk = \varphi x = y$, der Körper welchen die Ebene bmk bei der Umdrehung um bm beschreibt $= Fx$; so hat man

$$Fx = \int(\varphi x)^2 \pi = \pi \frac{c^2}{a^2}\int(ax - x^2)$$

$$= \frac{\pi c^2}{a^2}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi c^2 x^2}{6a^2}(3a-2x)$$

also, für $x = a$, das ganze elliptische Conoid

$$Fa = \tfrac{1}{6}c^2\pi \,.\, a$$

§. 127. Zusatz. Ist bg die kleine Achse $= c$, so hat man eben so

$$Fx = \frac{\pi a^2 x^2}{6 c^2}(3c - 2x); \text{ und}$$

$$Fc = \tfrac{1}{6} a^2 \pi . c.$$

c. Von der Hyperbel.

§. 128. Aufgabe. Eine rechtwinklichte Coordinatengleichung für die Hyperbel herzuleiten.

Auflösung. Es sey gkh (Fig. 14.) Achsendurchschnitt eines Kegels, so gedacht, daß wenn der Kegel schief ist, kh die kleinste, kg die größte Seite desselben vorstellt; die Ebene tr sey parallel mit der Grundfläche, also eine Kreisebene, und tr ihr Durchmesser; $mn = nq$ normal auf tr, und Ebene vbw eine durch mq gelegte Hyperbel, bf ihre Durchschnittslinie mit dem Achsendurchschnitt, und folglich zugleich die Achse der Hyperbel. Setzt man nun $bn = x$; $mn = nq = y$; die Verlängerung von bf bis in die Verlängerung der Seite gk gemessen, also $bi = a$, so hat man bei der in der Figur angegebenen Bezeichnung der Winkel

$$nr = \frac{x \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Sin} \beta}$$

$$nt = \frac{(a + x) \operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Sin} \alpha}, \text{ also}$$

weil $y^2 = nr . nt$ ist;

$$y^2 = \frac{a \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta}\left(x + \frac{x^2}{a}\right).$$

Es ist aber die Linie $\frac{a \operatorname{Sin} \delta \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \beta}$ eine für diese Hyperbel unveränderliche Größe, und bezeichnet man dieselbe mit p, so hat man also die verlangte Gleichung

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{a}\right).$$

§. 129. Denkt man sich jede Seite des Kegels entgegengesetzt verlängert, also den Kegel gkh mit einem von gleicher Neigung in k zusammenhängend, und den hyperbolischen Schnitt in diesen zweiten Kegel verbreitet, so sind beide Hyperbeln congruent, denn der unveränderliche Coefficient, der in Beziehung auf die Hyperbel vbw, gleich $\frac{a \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}$ sich ergab, ist in Beziehung auf die andere Hyperbel $= \frac{a \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\delta}{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\alpha}$ also vollkommen derselbe. Die Gleichung $y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{a}\right)$ muß also auch vollkommen dieselbe bleiben, wenn man auch in ihr $-(a+x)$ für x schreibt.

§. 130. Nimmt man x negativ und kleiner als a, so hat man

$$y = \sqrt{-p\left(x - \frac{x^2}{a}\right)}$$

welches eine unmögliche Größe ist. Berücksichtigt man indessen die entgegengesetzte Lage nicht, so kann man sich zu jedem x welches $<$ a und negativ ist, zwei Ordinaten

$$y = \pm\sqrt{p\left(x - \frac{x^2}{a}\right)}$$

denken, und da $y = \pm\sqrt{p\left(x - \frac{x^2}{a}\right)}$ die Gleichung für die Ellipse ist, so stellt man sich gewöhnlich beide congruente Hyperbeln durch eine Ellipse verbunden vor, deren große Achse $= a$ ist. Für $x = \frac{1}{2}a$ erhält man dann die kleine Achse derselben $= c = \sqrt{ap}$; also $p = \frac{c^2}{a}$, so daß man also die Gleichung der Hyperbel nun auch so ausdrücken kann: $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$.

Der Durchschnittspunkt beider Achsen der erwähnten Verbindungslinie heißt Mittelpunkt der zusammengehörigen Hyperbeln. Ist $a = c$ so heißen die Hyperbeln gleichseitig.

§. 131. Aufgabe. Die Entfernung e des Brennpunkts g oder g' (d. h. desjenigen Punkts in der Achse der Hyperbel, für welchen die rechtwinklichte Ordinate $= \frac{1}{2}p$ ist) vom Mittelpunkt f der Hyperbel zu bestimmen. (Fig. 15.)

Auflösung. Hier ist

$$y = \frac{p}{2} = \frac{c^2}{2a}; \text{ und } x = e - \frac{a}{2} \text{ also}$$

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2}{a^2}[a(e - \tfrac{a}{2}) + (e - \tfrac{a}{2})^2];$$

und hieraus folgt

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

§. 132. Nimmt man die Abscissen aus dem Mittelpunkt f und bezeichnet sie mit u; so hat man

$$x = u - \tfrac{1}{2}a$$

und die Gleichung

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$$

verwandelt sich in die einfachere

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \tfrac{1}{4}a^2).$$

§. 133. Aufgabe. Für jeden Punkt der Hyperbel, die Subtangente, Subnormale und den Krümmungskreis zu bestimmen.

Auflösung. Man findet, wie in §. 117.,

$$\text{Subt} = \frac{4u^2 - a^2}{4u}$$

$$\text{Subn} = \frac{c^2}{a^2}u$$

$$B = -\frac{4u^2 - a^2}{a^2 c^2} 4c^2 y$$

$$R = \frac{(16c^2u^2 - a^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^4 c}$$

und $A = \frac{16c^2u^3}{a^4}$.

§. 134. Aufgabe. Zu bestimmen, ob und wie sich der Hyperbel Asymptoten construiren lassen.

Auflösung. Es ist nach vorigem §. $\text{Subt} - u = -\frac{a^2}{4u}$; also $= 0$, wenn u unendlich groß ist, die Asymptote schneidet also in f (Fig. 15.), und setzt man ihren Neigungswinkel gegen die Achse $= \beta$, so ist

$$\text{tg}\,\beta = \varphi' u = \frac{c^2 u}{a^2 y} = \frac{cu}{a\sqrt{u^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

oder $u = \frac{1}{z}$ gesetzt,

$$\text{tg}\,\beta = \frac{2c}{a\sqrt{4 - a^2z^2}} \quad \text{für } u = \infty$$

also $z = 0$.

Es ist also

$$\text{tg}\,\beta = \frac{c}{a}; \text{ folglich}$$

$$\tfrac{1}{2} a\,\text{tg}\,\beta = \tfrac{1}{2} c$$

K

d. h. man mache die Normale in n, also $nm = \frac{1}{2}c$, so wird fm die Richtung der Asymptote. -

§. 135. **Lehrsatz.** Die Differenz der Brennpunkts-linien nach irgend einem Punkt der hyperbolischen Linie ist immer $= a$.

Beweis. Sind g, g' (Fig. 15.) die Brennpunkte, so soll gezeigt werden, daß $g'k - gk = a$ ist.

Es ist $g'k^2 = (e + u)^2 + y^2$

$$= e^2 - \frac{c^2}{4} + 2eu + \frac{a^2 + c^2}{a^2} u^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + 2eu + \frac{4e^2}{a^2} u^2; \text{ also}$$

$$g'k = \frac{a}{2} + \frac{2e}{a} u.$$

Ferner $gk^2 = (e - u)^2 + y^2$; folglich

$$gk = \frac{2e}{a} u - \frac{a}{2}; \text{ daher}$$

$$g'k - gk = a.$$

§. 136. **Lehrsatz.** Die Tangente eines Punkts der Hyperbel bildet mit beiden Brennstrahlen dieses Punkts einerlei Winkel, oder, wenn kb (Fig. 15.) die Tangente in k andeutet und g, g' die Brennpunkte sind, so ist $\angle g'kb = \angle gkb$.

Beweis. Es ist $g'b = e + u - \text{Subt}$

$$= e + u - \frac{4u^2 - a^2}{4u} = \frac{4eu + a^2}{4u} \text{ und}$$

$$gb = 2e - g'b = \frac{4eu - a^2}{4u} \text{ folglich}$$

$$g'b : gb = 4eu + a^2 : 4eu - a^2$$

Da nun ferner nach dem vorigen §.

$$g'k : gk = \frac{a}{2} + \frac{2e}{a}u : \frac{2e}{a}u - \frac{a}{2} = a^2 + 4eu : 4eu - a^2$$

ist, so hat man also

$$g'b : gb = g'k : gk; \text{ folglich}$$
$$\angle g'kb = \angle gkb.$$

Hiernach läßt sich nun leicht für jeden Punkt der Hyperbel die Tangente und Normale construiren.

§. 137. Ist t (Fig. 16.) der Mittelpunkt der Hyperbeln, tb die Achse, k der Scheitelpunkt der einen, die Normalen $kf = km = \frac{c}{2}$, also tv und tw die Asymptoten, und $kn \mathrel{\#} tw$, so heißt kn^2 die Potenz der Hyperbel, und es ergiebt sich leicht $kn = \frac{e}{2}$, also $kn^2 = \frac{e^2}{4}$.

§. 138. Lehrsatz. Es ist für jeden Punkt der Hyperbel, wenn (Fig. 16.) tv und tw die Asymptoten sind

$$br^2 - bg^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Beweis. Ist t der Mittelpunkt der Hyperbeln, und $tb = u$; so hat man

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}c = u : br; \text{ also}$$
$$br^2 = \frac{c^2}{a^2}u^2; \text{ ferner}$$
$$bg^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \quad \text{§. 132.}$$
$$\text{also } br^2 - bg^2 = \tfrac{1}{4}c^2.$$

§. 139. Aufgabe. Es sey (Fig. 16.) t der Mittelpunkt der Hyperbeln, k der Scheitelpunkt der einen, tv, tw die Asymptoten; $gi \mathrel{\#} tw$; $ti = w$; $ig = z$; man sucht eine Gleichung zwischen w und z.

Auflösung. Zieht man $hq \# gi$, so ist $hq = ti$, und es verhält sich

$$rh : hq = fm : mt; \text{ oder}$$
$$br + bg : w = c : e.$$

Ferner $rg : gi = fm : mt$; oder

$$br - bg : z = c : e; \text{ folglich}$$
$$br^2 - bg^2 : wz = c^2 : e^2.$$

Es ist aber $br^2 - bg^2 = \frac{1}{4}c^2$; §. 138. folglich

$$wz = \tfrac{1}{4}e^2.$$

§. 140. Aufgabe. Die Hyperbel zu rectificiren.

Auflösung. Die Ausführung reducirt sich wie §. 122. auf eine unendliche Reihe.

§. 141. Aufgabe. Die Hyperbel zu quadriren.

Auflösung. Es ist (Fig. 16.) $tb = u$; $bg = y = \varphi u$ und Ebene $kbg = E = Fu$ gesetzt,

$$E = Fu = \int \varphi u = \frac{c}{a} \int \sqrt{u^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$$

oder $u = f\beta = \frac{1}{2} a \operatorname{Sec}\beta$ gesetzt,

$$E = \frac{c}{a} \int \tfrac{1}{2} a \operatorname{tg}\beta \, f'\beta$$
$$= \tfrac{1}{2} c \int \operatorname{tg}\beta \, \tfrac{1}{2} a \operatorname{Sec}\beta \operatorname{tg}\beta$$
$$= \tfrac{1}{4} ac \int \frac{\operatorname{Sin}\beta^2}{\operatorname{Cos}\beta^3}$$
$$= \tfrac{1}{8} ac \left[\operatorname{Sec}\beta \operatorname{tg}\beta - \ln(\operatorname{Sec}\beta + \operatorname{tg}\beta)\right] + C \quad \text{§. 70.}$$
$$= \tfrac{1}{8} ac \left(\frac{2u\sqrt{4u^2 - a^2}}{a^2} - \ln \frac{2u + \sqrt{4u^2 - a^2}}{a} \right) + C$$

Für $u = tk = \frac{a}{2}$ wird $F\frac{a}{2} = 0$ und auch das gefundene Resultat $= 0$, so daß also keine Constante hinzukommt. Es ist daher vollständig

$$Fu = \tfrac{1}{8} ac \left(\frac{2u\sqrt{4u^2 - a^2}}{a^2} - \ln \frac{2u + \sqrt{4u^2 - a^2}}{a} \right)$$

§. 142. Zusatz. Soll die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten quadrirt, also der Raum $nkgi$ bestimmt werden, so setze man die Normale zwischen ig und $tm = v$; so hat man

$$w \operatorname{Sin} ftm = v; \text{ aber}$$

$$\operatorname{Sin} ftm = \operatorname{Sin} 2ftk = 2 \operatorname{Sin} ftk \operatorname{Cos} ftk$$

$$= 2 \cdot \frac{c}{2e} \cdot \frac{a}{2e} = \frac{ac}{2e^2}; \text{ folglich}$$

$$w = \frac{2e^2}{ac} \cdot v; \text{ also nach §. 139.}$$

$$\frac{2e^2}{ac} v \cdot z = \frac{e^2}{4}; \text{ daher}$$

$$ig = z = \frac{ac}{8v}; \text{ demnach}$$

$$\text{Ebene } nkgi = Fv = \int z = \frac{ac}{8} \int \frac{1}{v}$$

$$= \frac{ac}{8} \cdot \ln v + C \text{ oder}$$

$$= \frac{ac}{8} \cdot \ln \frac{acw}{2e^2} + C$$

Für $w = tn = \frac{e}{2}$ wird

$$F\tfrac{e}{2} = 0; \text{ also}$$

$$C = -\frac{ac}{8} \ln \frac{ac}{4e}$$

daher vollständig

$$\text{Ebene } nkgi = \tfrac{1}{8} ac \ln \frac{2w}{e}.$$

§. 143. Aufgabe. Es drehe sich die Ebene kbg um kb; man soll die Oberfläche $Fu = Q$, welche kg bei dieser Umdrehung beschreibt, bestimmen. (Fig. 16.)

Auflösung. Es ist

$$Fu = 2\pi \int \varphi u . \sqrt{1 + (\varphi' u)^2}$$

$$= 2\pi \frac{c}{a} \int \sqrt{\frac{4e^2}{a^2} u^2 - \frac{1}{4} a^2}$$

oder $u = f\beta = \frac{a^2}{4e} \operatorname{Sec}\beta$ gesetzt,

$$Q = \frac{\pi c a^2}{4e} \int \frac{\operatorname{Sin}\beta^2}{\operatorname{Cos}\beta^3}$$

$$= \frac{\pi c a^2}{8e} [\operatorname{Sec}\beta \operatorname{tg}\beta - \ln(\operatorname{Sec}\beta + \operatorname{tg}\beta)] + C$$

$$= \frac{\pi c a^2}{8e} \left(\frac{4eu}{a^4} \sqrt{16e^2u^2 - a^4} - \ln \frac{4eu + \sqrt{16e^2u^2 - a^4}}{a^2} \right) + C$$

Für $u = \frac{a}{2}$ ergiebt sich

$$C = \frac{\pi c a^2}{8e} \left(-\frac{2ce}{a^2} + \ln \frac{2e + c}{a} \right);$$

daher vollständig

$$Fu = \frac{\pi c a^2}{8e} \left(\frac{4eu}{a^4} \sqrt{16e^2u^2 - a^4} - \frac{2ec}{a^2} \right.$$

$$\left. - \ln \frac{4eu + \sqrt{16e^2u^2 - a^4}}{a(2e + c)} \right)$$

Beispiel. Ist $a = 160$; $c = 80$; $u = 100$; also $y = 30$; $x = 20$; $p = 40$; $e = 89,44\ldots$ so entsteht

$$F\,100 = 3790,14\ldots$$

In §. 110. war $p = 45$, und die conoidische Oberfläche $= 3848,46\ldots$

§. 144. Aufgabe. Die Hyperbel zu cubiren.

Auflösung. Dreht sich (Fig. 16.) die Ebene kbg um kb, so ist der entstehende Körper oder

$$Fx = \int bg^2 \pi$$

$$= \pi \int \frac{c^2}{a^2} (ax + x^2)$$

$$=\frac{\pi c^2}{a^2}\left(a\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$$
$$=\frac{\pi c^2 x^2}{6a^2}(3a+2x).$$

II. Von einigen andern Curven.

a. Die Conchoide oder Muschellinie.

§. 145. Es sey vw (Fig. 17.) eine gerade Linie cd schneide dieselbe normal in f. Zieht man nun aus den in cd beliebig gewählten Punkt d gerade Linien, welche vw schneiden, und macht $fc = gh = ik = ln$ u. s. w. (und so auch linker Hand), so heißt die durch diese Punkte c, h, k, n u. s. w. bestimmte Curve, eine Conchoide.

§ 146. Aufgabe. Eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten $ft = x$ und $tk = y = \varphi x$ für die Conchoide herzuleiten.

Auflösung. Es sey $df = b$; $fc = a$; km normal auf vw so ist $im^2 = ki^2 - km^2$ oder

$$im = \sqrt{a^2 - x^2}$$

ferner

$$df : fi = dt : tk; \text{ oder}$$
$$b : y - \sqrt{a^2 - x^2} = b + x : y$$

und hieraus

$$y = \frac{b+x}{x}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

§. 147. Es erhellet aus der Construction der Curve, daß cf die Achse und vw die Asymptote derselben ist.

Uebrigens erscheint hier eine Polargleichung in einfacherer Gestalt. Setzt man nämlich jede Linie wie

$dk = u$; ihren Neigungswinkel kdc gegen die Achse $= \beta$; so hat man sogleich

$$(u - a)\,\mathrm{Cos}\,\beta = b$$

und dann auch

$$a\,\mathrm{Cos}\,\beta = x$$
$$u\,\mathrm{Sin}\,\beta = y$$

oder $\quad x = a\,\mathrm{Cos}\,\beta$

und $\quad y = b\,\mathrm{tg}\,\beta + a\,\mathrm{Sin}\,\beta.$

§. 148. **Aufgabe.** Den Krümmungshalbmesser R der Conchoide zu bestimmen.

Auflösung. Hier ist $\varphi x = \frac{b + x}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$

also $\varphi' x = -\frac{a^2 b + x^3}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$ und

$$\varphi'' x = -\frac{a^2}{x^3} \cdot \frac{x^3 + 3bx^2 - 2a^2 b}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

folglich nach §. 90.

$$R = -\frac{[1 + (\varphi' x^2]^{\frac{3}{2}}}{\varphi'' x},$$

oder nach Substitution der eben angegebenen Werthe

$$R = \frac{\frac{a}{-}(x^4 + 2bx^3 + a^2 b^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3(x^3 + 3bx^2 - 2a^2 b)}$$

§. 149. **Zusatz.** Der eben dargestellte Werth für R wird unendlich groß wenn $x^3 + 3bx^2 = 2a^2 b$ und negativ, wenn $x^3 + 3bx^2 < 2a^2 b$ ist. Hieraus erhellet, daß die Curve an dem Punkt, der zu dem x gehört, welches der Gleichung $x^3 + 3bx^2 = 2\ ^2 b$ entspricht, aus concav in convex übergeht. Ein solcher Punkt heißt **Wendungspunkt** der Curve.

Beispiel. Für $a = 10$; $b = 1$ ergiebt sich der Wendepunkt an der zu $x = 5$ gehörigen Stelle.

§. 150. **Aufgabe.** Die Conchoide zu quadriren.

Auflösung. Es sey $ct = u$; $tk = y$; $ft = x$; Ebene $ctk = Fu = E$; so hat man

$$E = \int y;$$

y als Function von u verstanden. Es ist aber

$$u = fx = a - x \quad \text{also}$$

$$E = \int y f'x$$

$$= -\int y = -\int \frac{b+x}{x} \sqrt{a^2 - x^2}$$

oder $\quad x = \varphi\beta = a \operatorname{Cos}\beta \quad$ gesetzt

$$E = -\int \frac{b + a \operatorname{Cos}\beta}{a \operatorname{Cos}\beta} a \operatorname{Sin}\beta\, \varphi'\beta$$

$$= +\int \frac{b + a \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\beta} \operatorname{Sin}\beta\, a \operatorname{Sin}\beta$$

$$= ab \int \frac{\operatorname{Sin}\beta^2}{\operatorname{Cos}\beta} + a^2 \int \operatorname{Sin}\beta^2$$

$$= ab \ln(\operatorname{Sec}\beta + \operatorname{tg}\beta) - ab \operatorname{Sin}\beta + \tfrac{a^2}{2}(\beta - \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{Arc\,Cos} \frac{x}{a} + ab \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \frac{2b + x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

indem Const $= 0$ wird.

§. 151. **Aufgabe.** Die Conchoide zu cubiren.

Auflösung. Es drehe sich die Ebene $fckm$ um fm, so ist der entstehende Körper K, als Function von $tk = fm = y$ betrachtet $= \int x^2 \pi$, oder $y = \varphi x$ gesetzt

$$K = \pi \int x^2 \varphi' x$$

$$= -\pi \int \frac{a^2 b + x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

oder $x = f\beta = a \, \mathrm{Cos}\,\beta$ gesetzt

$$K = \pi \int (a^2 b + a^3 \, \mathrm{Cos}\,\beta^3)$$

$$= \pi \left[a^2 b \beta + \tfrac{a^3}{3} (2 + \mathrm{Cos}\,\beta^2) \, \mathrm{Sin}\,\beta\right]$$

$$= \frac{\pi a^2}{3} \left(3 b \, \mathrm{Arc\,Cos} \frac{x}{a} + \frac{2a^2 + x^2}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}\right)$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $x = a$ der Ausdruck mit K verschwindet.

§. 152. Nach der dargestellten Formel kann ziemlich übereinstimmend mit Messungen der Cubicinhalt der Fässer berechnet werden. (S. meine Aufgaben aus der Körperlehre. Berlin, 1811.)

b. Die Neoide oder Spinnlinie.

§. 153. Aus g (Fig. 18.) sey über der geraden Linie ch ein Halbkreis beschrieben; eine beliebig große Verlängerung hk des Durchmessers ch in eine Anzahl (in der Figur 18. in 6) gleicher Theile und in eben so viele die halbe Peripherie über ch getheilt; ferner sey $il = \frac{1}{6} hk$; $pq = \frac{2}{6} hk$; $rt = \frac{3}{6} hk$, $vw = \frac{4}{6} hk$; $z\varrho = \frac{5}{6} hk$ gemacht, und durch die Punkte c, l, q, t, w, ϱ, k eine Curve stetig gezogen, so heißt diese Curve (wegen ihrer Anwendbarkeit bei Spinnmaschinen, um eine gleichförmige Erhebung und Senkung hervorzubringen) die Neoide.

§. 154. Aufgabe. Gleichungen für die Neoide herzuleiten.

Auflösung. Die Abscisse $k\mu$ sey $= x$, die rechtwinklichte zugehörige Ordinate $\mu q = y$; der dem zugehörigen Winkel kgq für den Halbmesser $= 1$ entsprechende Bogen $= \beta$; der Halbmesser $gc = gh$

$= a$; die Linie $hk = b$; so verhält sich, nach der angegebenen Construction

$$\text{Bogen } cp : \text{Bogen } crh = pq : hk \quad \text{oder}$$

$$a\pi - a\beta : a\pi = pq : b$$

und also ist

$$pq = \frac{b(\pi - \beta)}{\pi} \quad \text{folglich}$$

$$gq = a + \frac{b(\pi - \beta)}{\pi}$$

$$= a + b - \frac{b}{\pi}\beta.$$

Es ist aber

$$q\mu = y = qg \operatorname{Sin}\beta \quad \text{also}$$

$$1. \quad y = \left(a + b - \frac{b}{\pi}\beta\right) \operatorname{Sin}\beta \quad \text{und}$$

$$k\mu = x = hg + hk + g\mu \quad \text{oder}$$

$$2. \quad x = a + b - \left(a + b - \frac{b}{\pi}\beta\right) \operatorname{Cos}\beta.$$

Hieraus folgt auch, weil

$$-(x - a - b)\operatorname{tg}\beta = y \quad \text{ist,}$$

$$y^2 + (x - a - b)^2 = \left(a + b - \frac{b}{\pi} \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{a + b - x}\right)^2$$

§. 155. Aufgabe. Die Neoide zu rectificiren.

Auflösung. Es ist

$$y = \psi\beta = (a + b)\operatorname{Sin}\beta - \frac{b}{\pi}\beta \operatorname{Sin}\beta$$

$$x = f\beta = a + b - (a + b)\operatorname{Cos}\beta + \frac{b}{\pi}\beta \operatorname{Cos}\beta$$

folglich

$$dy = \psi'\beta = (a + b)\operatorname{Cos}\beta - \frac{b}{\pi}\operatorname{Sin}\beta - \frac{b}{\pi}\beta \operatorname{Cos}\beta$$

$$dx = f'\beta = (a + b)\operatorname{Sin}\beta + \frac{b}{\pi}\operatorname{Cos}\beta - \frac{b}{\pi}\beta \operatorname{Sin}\beta$$

daher

$$(\psi'\beta)^2 + (f\beta)^2 = \frac{b^2}{\pi^2} + \left(a + b - \frac{b}{\pi}\beta\right)^2$$

$$= \frac{b^2}{\pi^2}\left[1 + \left(\frac{a+b}{b}\pi - \beta\right)^2\right]$$

also, wenn man den Bogen $kq = v$ setzt,

$$v = \frac{b}{\pi}\int\sqrt{1 + \left(\frac{a+b}{b}\pi - \beta\right)^2}$$

oder $\beta = \varphi\delta = \frac{a+b}{b}\pi - \operatorname{tg}\delta$ genommen,

$$v = \frac{b}{\pi}\int \operatorname{Sec}\delta\,\varphi'\delta$$

$$= -\frac{b}{\pi}\int \operatorname{Sec}\delta\,\operatorname{Sec}\delta^2$$

$$= -\frac{b}{\pi}\int \operatorname{Sec}\delta^3$$

$$= -\frac{b}{2\pi}[\operatorname{tg}\delta\,\operatorname{Sec}\delta + \ln(\operatorname{tg}\delta + \operatorname{Sec}\delta)] + C$$

also, $\frac{a+b}{b}$ mit n bezeichnet,

$$v = -\frac{b}{2\pi}\Big((n\pi - \beta)\sqrt{1 + (n\pi - \beta)^2}$$

$$+ \ln[n\pi - \beta + \sqrt{1 + (n\pi - \beta)^2}]\Big) + C$$

Für $\beta = 0$ wird auch $v = 0$; folglich

$$C = \frac{b}{2\pi}[n\pi\sqrt{1 + n^2\pi^2} + \ln(n\pi + \sqrt{1 + n^2\pi^2})]$$

also vollständig

$$v = \frac{b}{2\pi}\Big(n\pi\sqrt{1 + n^2\pi^2} - (n\pi - \beta)\sqrt{1 + (n\pi - \beta)^2}$$

$$+ \ln\frac{n\pi + \sqrt{1 + n^2\pi^2}}{n\pi - \beta + \sqrt{1 + (n\pi - \beta)^2}}\Big)$$

Für $\beta = \pi$ erhält man hieraus den ganzen Bogen kt c

$$= \frac{b}{2\pi}\left(n\pi\sqrt{1+n^2\pi^2} - m\pi.\sqrt{1+m^2\pi^2} + \ln \frac{n\pi + \sqrt{1+n^2\pi^2}}{m\pi + \sqrt{1+m^2\pi^2}}\right)$$

unter m die Größe $n - 1 = \frac{a}{b}$ verstanden.

Beispiel. Für $a = 7$; $b = 11$, erhält man Bogen $ktc = 40,9 \ldots$

c. Die Evolvente, oder Abwickelungslinie.

§. 156. Wenn man sich an eine beliebige Curve einen Faden angelegt und an seinen einen Endpunkt befestigt vorstellt, und nun unter steter Anspannung den Faden abwickelt, so beschreibt der andere Endpunkt eine Curve, welche Evolvente heißt. Die Curve von welcher abgewickelt wird, heißt die Evolute. Ist die Evolute ein Kreis, so heißt die abgewickelte Linie insbesondere Kreisevolvente, und von dieser soll hier nur die Rede seyn.

§. 157. Aufgabe. Gleichungen für die Kreisevolvente herzuleiten.

Auflösung. Der Halbmesser der Evolute sey $= r$; der Faden sey von a bis b (Fig. 19.) abgewickelt, ac die entstandene Evolvente, also bc eine Tangente des Kreises in b und bc = Bogen ab $= r\beta$. Setzt man nun in Beziehung auf die durch den Mittelpunkt n des Kreises und den Anfangspunkt a der Abwickelung gehende Abscissenlinie, die Abscisse $nf = x$ und die rechtwinklichte Ordinate $fc = y$, so ergiebt sich leicht, wenn man bg normal auf nf und et normal auf bg zieht

$$x = r \operatorname{Cos}\beta + r\beta \operatorname{Sin}\beta$$
$$y = r \operatorname{Sin}\beta - r\beta \operatorname{Cos}\beta$$

§. 158. Aufgabe. Die Kreisevolvente zu rectificiren.

Auflösung. Es ist

$$y = \psi\beta = r \operatorname{Sin}\beta - r\beta \operatorname{Cos}\beta \quad \text{und}$$
$$x = f\beta = r \operatorname{Cos}\beta + r\beta \operatorname{Sin}\beta$$

also

$$dy = \psi'\beta = r\beta \operatorname{Sin}\beta \quad \text{und}$$
$$dx = f'\beta = r\beta \operatorname{Cos}\beta; \quad \text{also}$$
$$(\psi'\beta)^2 + (f'\beta)^2 = r^2\beta^2;$$

daher Bogen ac oder

$$v = \int r\beta = \tfrac{1}{2} r\beta^2.$$

§. 159. Aufgabe. Die Kreisevolvente zu quadriren.

Auflösung. Setzt man die Ebene caf $= E$ so hat man nach §. 96.

$$E = \int \psi\beta \cdot f\beta$$
$$= r^2 \int \beta \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta - r^2 \int \beta^2 \operatorname{Cos}\beta^2.$$

Es ist aber auch

$$E = \int \psi\beta \cdot f\beta = \psi\beta \cdot f\beta - \int f\beta \cdot \psi'\beta$$

oder

$$E = yx - r^2 \int \beta \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta - r^2 \int \beta^2 \operatorname{Sin}\beta^2$$

also

$$2E = xy - (r^2 \int \beta^2 \operatorname{Sin}\beta^2 + r^2 \int \beta^2 \operatorname{Cos}\beta^2)$$
$$= xy - r^2 \int \beta^2$$
$$= xy - \frac{r^2\beta^3}{3} + C;$$

also

$$E = \frac{xy}{2} - \frac{r^2 \beta^3}{6}$$

wo keine Constante hinzukommt.

Es ist aber auch nach der Figur

$$E = \frac{xy}{2} - nacn; \quad \text{daher}$$

$$nacn = \frac{r^2 \beta^3}{6}.$$

d. Die Cycloide oder Radlinie.

§. 160. Bezeichnet irgend eine Curve c die Bahn eines fortrollenden Kreises, so beschreibt jeder Punkt der Peripherie dieses Kreises eine Curve, welche Cycloide heißt. Ist c eine gerade Linie und bleibt der Erzeugungskreis während seiner Bewegung immer in derselben Ebene, so heißt die entstandene Curve schlechthin Cycloide. Ist c eine Kreislinie, und bewegt sich der Erzeugungskreis in derselben Ebene mit c, außerhalb der Peripherie c, so heißt die Curve Epicycloide, bewegt er sich aber innerhalb, so heißt sie Hypocycloide. Ist c eine Kreislinie, und bewegt sich der Erzeugungskreis nicht in einerlei Ebene mit der, in welcher c liegt, aber unter stets gleicher Neigung gegen dieselbe, so beschreibt jeder Punkt des Erzeugungskreises eine Curve, welche sphärische Epicycloide heißt.

α) Die gemeine Cycloide.

§. 161. Aufgabe. Für die gewöhnliche Cycloide Gleichungen, welche die Bestimmung ihrer Gestaltung enthalten, herzuleiten.

Auflösung. Es sey (Fig. 20.) der Durchmesser $cd = 2r$ des Erzeugungskreises normal auf der geraden Linie $ca = r\pi$ auf welcher die Bewegung erfolgen soll, d der beschreibende Punkt; nimmt man nun an, der Kreis sey um den Winkel β fortgerollt, macht $ck =$ Bogen $ch = r\beta$, errichtet in k eine Normale, macht $km = r$, beschreibt aus m mit r den Halbkreis kw über der erwähnten Normale, und nimmt Bogen $kn =$ Bogen hd, so ist n die Stelle in welcher sich jetzt der beschreibende Punkt d befindet, d. h. n ist ein Punkt der Cycloide. Fällt man nun von n eine Normale nf auf dc, setzt $df = x$; $fn = y$ und Winkel $deg = \delta$, so ist $ni = gf$ und hierzu ig addirt, $ng = if$; über $if = ck = ca - ak = r\pi -$ Bogen nk $= r\pi -$ Bogen $gc =$ Bogen gd; folglich $ng =$ Bogen gd. Es ist aber auch $if = ck =$ Bog. ch; folglich Bog. $gd =$ Bog. ch daher

$$\delta = \beta; \quad \text{also}$$

$$nf = gf + ng = gf + \text{Bog.}\ gd$$

oder

$$1. \quad y = r \operatorname{Sin} \delta + r\delta \quad \text{und}$$

$$2. \quad x = r - r \operatorname{Cos} \delta.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt auch

$$\delta = \operatorname{Arc\,Cos} \frac{r-x}{r}$$

und aus $\operatorname{Cos} \delta = \frac{r-x}{r}$ ergiebt sich

$$\operatorname{Sin} \delta = \frac{\sqrt{2rx - x^2}}{r}.$$

Die rechtwinklichte Coordinatengleichung ist daher

$$y = \varphi x = \sqrt{2rx - x^2} + r \operatorname{Arc Cos} \frac{r-x}{r}.$$

§. 162. Aufgabe. Die Subtangente, Subnormale und den Krümmungskreis der Cycloide zu bestimmen.

Auflösung. Aus $y = \varphi x$ folgt

$$\varphi' x = \sqrt{\frac{2r-x}{x}}; \quad \varphi'' x = -\frac{r}{x\sqrt{2rx - x^2}};$$

$$\text{Subt} = y \cdot \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$$

$$\text{Subn} = y \cdot \sqrt{\frac{2r-x}{x}};$$

ferner, nach §. 90.

$$B = r \operatorname{Arc Cos} \frac{r-x}{r} - \sqrt{2rx - x^2}$$

$$= r\delta - r \operatorname{Sin} \delta$$

$$A = 4r - x$$

und der Halbmesser R des Krümmungskreises

$$= 2\sqrt{4r^2 - 2rx};$$

also $= 2$. Sehne cg, für den Punkt n.

§. 163. Aufgabe. Die Cycloide zu rectificiren.

Auflösung. Bezeichnet man den Bogen dn mit v, so hat man

$$v = \int\sqrt{1 + (\varphi' x)^2} = \int\sqrt{\frac{2r}{x}}$$

$$= \sqrt{2r} \int x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2r} \cdot 2 \cdot \sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{2rx} = 2 \text{ . Sehne gd}$$

also Bogen da $= 4r$.

§. 164. Aufgabe. Die Cycloide zu quadriren.

Auflösung. Es ist

$$y = \varphi\delta = r(\mathrm{Sin}\,\delta + \delta) \quad \text{und}$$
$$x = f\delta = r(1 - \mathrm{Cos}\,\delta)$$

also, nach §. 96.

die Ebene $nfd = \int \varphi\delta\, f'\delta$

$$= \varphi\delta \,.\, f\delta - \int f\delta \,.\, \varphi'\delta$$
$$= xy - r^2 \int (1 - \mathrm{Cos}\,\delta)(1 + \mathrm{Cos}\,\delta)$$
$$= xy - r^2 \int \mathrm{Sin}\,\delta^2$$
$$= xy - \tfrac{1}{2} r^2 (\delta - \mathrm{Sin}\,\delta\, \mathrm{Cos}\,\delta)$$
$$= nfdq - (\text{Ausschnitt } egpd - \triangle\, egf)$$
$$= nfdq - gpdf$$
$$= nqdpg$$

Subtrahirt man nun $gpdn$ so bleibt

$$gpdf = nqd.$$

Aus der Formel

$$nfd = nfdq - gpdf$$

folgt für $\delta = \pi$;

$$andc = 2r \,.\, r\pi - \tfrac{1}{2} r^2 \pi$$
$$= \tfrac{3}{2} r^2 \pi;$$

und also ist die ganze Ebene der Cycloide dreimal so groß als der erzeugende Kreis.

§. 165. Liegt der die Cycloide beschreibende Punkt außerhalb des Erzeugungskreises, so heißt die Cycloide verkürzt oder verschlungen; liegt er innerhalb, so heißt sie gestreckt oder verlängert.

β) Die Epicycloide.

§. 166. Aufgabe. Gleichungen für die Epicycloide herzuleiten.

Auflösung. Es sey wc (Fig. 21.) ein Bogen des Grundkreises, b sein Mittelpunkt; der Erzeugungskreis berühre jetzt den Grundkreis in f, und der in der Verlängerung von bf liegende Punkt h seiner Peripherie sey der beschreibende Punkt; macht man nun fn dem beliebigen Bogen $fk = r\beta$ gleich, zieht bn, nimmt in dieser Richtung $nm = fg = r$, beschreibt aus m mit mn einen Kreis und macht Bogen np = Bogen kh, so ist p ein Punkt der Epicycloide. Fällt man nun pt normal auf hb, setzt $ht = x$; $tp = \varphi x = y$; macht mq normal auf pt, und bezeichnet fb mit a, so hat man die Gleichungen

1. Bogen fk = Bogen fn
2. $pt = pq + qt$
3. $ht = hb - bt$;

oder

1. $r\beta = a\varrho$
   (unter β und ϱ die Bogen für den Halbmesser 1 verstanden)
2. $y = (a + r) \operatorname{Sin} \varrho + r \operatorname{Sin} (\beta + \varrho)$
3. $x = a + 2r - (a + r) \operatorname{Cos} \varrho - r \operatorname{Cos} (\beta + \varrho)$

oder auch, wenn man aus 1. den Werth für ϱ in 2. und 3. setzt

$$y = F\beta = (a + r) \operatorname{Sin} \frac{r}{a} \beta + r \operatorname{Sin} \frac{a + r}{a} \beta$$

$$x = f\beta = a + 2r - (a + r) \operatorname{Cos} \frac{r}{a} \beta - r \operatorname{Cos} \frac{a + r}{a} \beta$$

oder

$$\frac{r}{a} = n \text{ und } \frac{a + r}{a} = m \text{ gesetzt,}$$

$$y = F\beta = ma \operatorname{Sin} n\beta + r \operatorname{Sin} m\beta$$
$$x = f\beta = a + 2r - ma \operatorname{Cos} n\beta - r \operatorname{Cos} m\beta.$$

§. 167. Aufgabe. Die Subtangente, Subnormale und den Krümmungskreis der Epicycloide zu bestimmen.

Auflösung. Aus $y = \varphi x$; $x = f\beta$; $y = F\beta$ folgt nach §. 28.

$$F'\beta = \varphi' x \,.\, f'\beta \quad \text{und}$$
$$F''\beta = \varphi' x \,.\, f''\beta + \varphi'' x \,.\, (f'\beta)^2; \quad \text{also}$$
$$\varphi' x = F'\beta : f'\beta$$
$$\varphi'' x = \frac{F''\beta - \varphi' x \,.\, f''\beta}{(f'\beta)^2}.$$

Es ergiebt sich aber

$$F'\beta = mr(\operatorname{Cos} n\beta + \operatorname{Cos} m\beta)$$
$$F''\beta = -mr(n \operatorname{Sin} n\beta + m \operatorname{Sin} m\beta)$$
$$f'\beta = mr(\operatorname{Sin} n\beta + \operatorname{Sin} m\beta)$$
$$f''\beta = mr(n \operatorname{Cos} n\beta + m \operatorname{Cos} m\beta)$$

folglich ist

$$\varphi' x = \frac{\operatorname{Cos} n\beta + \operatorname{Cos} m\beta}{\operatorname{Sin} n\beta + \operatorname{Sin} m\beta} = \operatorname{Cotg} \frac{a + 2r}{2a}\beta$$
$$\varphi'' x = -\frac{n + m}{nma} \cdot \frac{1 + \operatorname{Cos}\beta}{(\operatorname{Sin} n\beta + \operatorname{Sin} m\beta)^3}$$
$$= -\frac{n + m}{4nma} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{Sin}\frac{a + 2r}{2a}\beta\right)^3}$$

daher

$$\text{Subt} = \frac{\varphi x}{\varphi' x} = y \operatorname{tg} \frac{a + 2r}{2a}\beta$$
$$\text{Subn} = \varphi x \, \varphi' x = y \operatorname{Cotg} \frac{a + 2r}{a}\beta$$
$$B = y - \frac{4(a + r)r}{a + 2r} \operatorname{Sin} \frac{a + 2r}{2a}\beta \operatorname{Cos}\frac{\beta}{2}$$

oder

$$B = \frac{a}{a+2r}\left((a+r)\,\mathrm{Sin}\,\frac{r}{a}\beta - r\,\mathrm{Sin}\,\frac{a+r}{a}\beta\right);$$

$$A = x + \frac{4(a+r)r}{a+2r}\,\mathrm{Cos}\,\frac{a+2r}{2a}\beta\,\mathrm{Cos}\,\frac{\beta}{2}$$

oder

$$A = a+2r - \frac{a}{a+2r}\left((a+r)\,\mathrm{Cos}\,\frac{r}{a}\beta - r\,\mathrm{Cos}\,\frac{a+r}{a}\beta\right)$$

und

$$R = \frac{4(a+r)r}{a+2r}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\beta}{2}.$$

Beispiel. Für $\beta = 0$ ergiebt sich

$$\mathrm{Subt} = 0;\quad B = 0;$$

$$\mathrm{Subn} = A = R = \frac{4r(a+r)}{a+2r}.$$

§. 168. Aufgabe. Die Epicycloide zu rectificiren.

Auflösung. Setzt man Bogen $hp = v$, so ist, nach §. 95.

$$\begin{aligned} v &= \int\sqrt{(F'\beta)^2 + (f'\beta)^2} \\ &= \int\sqrt{m^2 r^2 (2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\beta)} \\ &= \frac{2(a+r)r}{a}.\int \mathrm{Cos}\,\frac{\beta}{2} \\ &= \frac{4(a+r)r}{a}.\int \mathrm{Cos}\,\frac{\beta}{2}.\tfrac{1}{2} \\ &= \frac{4(a+r)r}{a}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Beispiel. Für $\beta = \pi$ wird hieraus

$$\text{Bogen } hpc = \frac{4r(a+r)}{a}.$$

γ) Die Hypocycloide.

§. 169. Bei derselben Bedeutung der Buchstaben wie in β, erhält man eben so

$$y = F\beta = (a - r)\,\mathrm{Sin}\,\frac{r}{a}\beta + r\,\mathrm{Sin}\,\frac{a-r}{a}\beta$$

$$x = f\beta = -(a - 2r) + (a - r)\,\mathrm{Cos}\,\frac{r}{a}\beta - r\,\mathrm{Cos}\,\frac{a-r}{a}\beta$$

$$v = \frac{4r(a-r)}{a}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\beta;$$

also den halben Bogen für $\beta = \pi$ gleich $\frac{4r(a-r)}{a}$.

Ist $r = \frac{1}{2}a$ so erhält man denselben $= a$, d. h. die Hypocycloide wird eine gerade Linie wenn $r = \frac{1}{2}a$ ist.

Anhang.

In Beziehung auf die Herleitung einiger Formeln in meinem Lehrbuch der angewandten Mathematik, 2n Bd. Berlin 1818. Realschulbuchhandlung, füge ich hier noch einige Bemerkungen und Abänderungen bei.

Zu §. 8. S. 14.

Es sey $v = \varphi x$; $y = fx$; das Moment von v in Beziehung auf $a = Fx$; so fällt, wenn x um k wächst, und $\varphi(x+k) - \varphi x$ durchaus concav oder durchaus convex gegen $x+k$ ist, $F(x+k) - Fx$ zwischen $[\varphi(x+k) - \varphi x].fx$ und $[\varphi(x+k) - \varphi x] f(x+k)$, d. h. es ist

$$F(x+k) - Fx \gtrless [\varphi(x+k) - \varphi x] fx \text{ und zugleich}$$

$$F(x+k) - Fx \lessgtr [\varphi(x+k) - \varphi x] f(x+k).$$

Nimmt man daher $k' < k$, so muß es einen Werth für k' geben, für welchen

$$F(x+k) - Fx = [\varphi(x+k) - \varphi x] f(x+k')$$

ist. Man hat also hieraus nach §. 25.

$$kF'x + \tfrac{k^2}{2} F''x + \ldots = (k\varphi'x + \tfrac{k^2}{2} \varphi''x \ldots) f(x+k')$$

oder, mit k dividirt,

$$F'x + \tfrac{k}{2} F''x + \ldots = (\varphi'x + \tfrac{k}{2} \varphi''x + \ldots) f(x+k')$$

Mit k wird auch $k' = o$ und für $k = o$; also auch $k' = o$ erhält man hieraus

$$F'x = \varphi'x \,.\, fx; \quad \text{folglich}$$
$$Fx = \int \varphi'x \,.\, fx; \quad \text{daher}$$
$$z = \frac{\int \varphi'x \,.\, fx}{\varphi x} \quad \text{oder} \quad = \frac{\int y\, dv}{v}.$$

Zu §. 9. S. 15.

Es sey das Moment der durch die rechtwinklichten Coordinaten x und $y = fx$ bestimmten Ebene, in Beziehung auf $a = Fx$, so fällt, wenn x um k wächst, $F(x+k) - Fx$ zwischen $(x+\frac{k}{2}).kfx$ und $(x+\frac{k}{2})k.f(x+k)$. Nimmt man daher $k' < k$, so muß es einen Werth von k' geben, für welchen

$$F(x+k) - Fx = (x+\tfrac{k}{2})\,k\,.\,f(x+k') \quad \text{ist.}$$

Hieraus folgt, nach §. 25., wenn man durch k dividirt

$$F'x + \tfrac{k}{2}F''x \ldots = (x+\tfrac{k}{2})\,.\,f(x+k').$$

Setzt man hierin $k = o$; so wird auch $k' = o$, und es entsteht

$$F'x = x\,.\,fx; \quad \text{also}$$
$$Fx = \int x fx$$
$$\text{folglich} \quad z = \frac{\int x fx}{\int fx}.$$

Zu §. 11. S. 16.

Es sey $v = \varphi x$; $y = fx$; das Moment der Oberfläche $= Fx$; so wird, wenn $x + k$ aus x wird, $F(x+k) - Fx$ zwischen $2\pi fx[\varphi(x+k) - \varphi x].x$ und $2\pi f(x+k)[\varphi(x+k) - \varphi x](x+k)$ fallen, und es muß also ein zwischen Null und k liegendes k' geben, wofür $F(x+k) - Fx = 2\pi f(x+k')[\varphi(x+k) - \varphi x](x+k')$ wird.

Aus dieser Gleichung folgt

$$F'x + \tfrac{k}{2}F''x + \ldots = 2\pi(x+k')f(x+k')(\varphi'x + \tfrac{k}{2}\varphi''x + \ldots)$$

und

und hieraus für $k = 0$

$$F'x = 2\pi x\, fx \,.\, \varphi' x; \quad \text{folglich}$$

$$Fx = 2\pi \int x\, fx\, \varphi' x; \quad \text{und}$$

$$z = \frac{Fx}{2\pi \int fx\, \varphi' x} = \frac{\int x\, fx\, \varphi' x}{\int fx\, \varphi' x}.$$

Zu §. 12. S. 17.

Setzt man das Moment des Körpers $\int \varphi x = Fx$, so fällt $F(x+k) - Fx$ zwischen $\varphi x \,.\, k \,.\, (x + \frac{k}{2})$ und $\varphi(x+k) \,.\, k(x + \frac{k}{2})$ und es muß also zwischen 0 und k ein Werth k' liegen, für welchen

$$F(x+k) - Fx = \varphi(x+k') \,.\, k(x+\tfrac{k}{2}) \text{ ist.}$$

Hieraus ergiebt sich

$$F'x + \tfrac{k}{2} F''x + \ldots = (x + \tfrac{k}{2}) \varphi(x+k') \quad \text{und hieraus}$$

$$F'x = x \varphi x; \quad \text{also}$$

$$Fx = \int x\, \varphi x; \quad \text{folglich}$$

$$z = \frac{\int x\, \varphi x}{\int \varphi x}.$$

Zu §. 14. S. 18. und 19.

Hier muß S. 18. Z. 2 und 4 v. u. und S. 19. Z. 5. von oben jedesmal, für $x = a$, weggestrichen werden.

Zu §. 62. S. 86.

Hier wird 1) d^2P nicht $= -2$ (s. Z. 17. v. o. S. 87.) sondern $= -\frac{2}{3}$; ferner wird 2) (S. 88. Z. 7. v. o.) d^2Q nicht $= -$ sondern $= +\frac{1}{3}$ und die ganze Ansicht ist daher unbrauchbar. Man urtheile deshalb folgendergestalt: wenn $h\beta \operatorname{Cotg}\beta + \varrho\beta \operatorname{Cosec}\beta = \varphi\beta$ gesetzt wird, so ist $\varphi'\beta = \frac{(h \operatorname{Cos}\beta + \varrho) \operatorname{Sin}\beta - \beta(\varrho \operatorname{Cos}\beta + h)}{\operatorname{Sin}\beta^2}$ oder, den Zähler $= F\beta$ gesetzt, $\varphi'\beta = \frac{F\beta}{\operatorname{Sin}\beta^2}$. Es wird aber offenbar $F\beta = 0$, wenn $\beta = 0$ ist und für $\beta = 0$ wird

$\varphi'' = -(2h - \varrho)$. Man hat also $\varphi\beta = \text{Max.}$ für $\beta = 0$ so lange $2h > \varrho$ ist, daher auch $R = \text{Max.}$ für $\beta = 0$, wenn $2h > \varrho$ ist.

Zu §. 84. S. 116.

Wächst x um k, so ist der Normaldruck auf den Ring

$$= \frac{[(x+k)^2 - x^2]\pi}{r^2\pi} W.$$

Setzt man nun das Moment des Reibungswiderstandes auf der Ebene $x^2\pi$, $= Fx$; so hat man

$$F(x+k) - Fx > x \,.\, \mu \frac{(x+k)^2 - x^2}{r^2} W \quad \text{und}$$

$$F(x+k) - Fx < (x+k) \,.\, \mu \frac{(x+k)^2 - x^2}{r^2} W;$$

folglich, wenn k' zwischen o und k gedacht wird

$$F(x+k) - Fx = (x+k')\,\mu \frac{(x+k)^2 - x^2}{r^2} W;$$

oder $\quad F'x + \frac{k}{2}F''x + \ldots = (x+k')\,\mu \frac{2x+k}{r^2} W$

und hieraus für $k = 0$, also auch $k' = 0$;

$$F'x = \frac{2\mu}{r^2} W \,.\, x^2; \quad \text{folglich}$$

$$Fx = \frac{2\mu W}{3r^2} \,.\, x^3; \quad \text{daher}$$

$$Fr = \tfrac{2}{3} r \,.\, \mu W.$$

Zu §. 85. S. 117.

Es sey $\angle afb = x$; $\angle bfc = k$; die in b (tangential wirkend) nöthige Kraft fürs Gleichgewicht mit Q und der Reibung auf den Bogen $ab = rx$, sey $= Fx$; der Normaldruck auf den Bogen ab oder rx sey $= fx$, so hat man den Normaldruck auf den Bogen bc oder rk $= f(x+k) - fx$ und die in c fürs Gleichgewicht erforderliche Kraft (tangential wirkend) $= F(x+k)$. Es entspringt also $f(x+k) - fx$ aus der Kraft $F(x+k)$ in c und der Gegenwirkung Fx in b. Wäre jede dieser Wirkungen $= F(x+k)$ so würde ein größerer, wäre jede $= Fx$, so würde ein kleinerer Normaldruck statt finden, d. h. es ist $f(x+k) - fx < 2F(x+k) . \text{Sin}^{k}$

und $f(x+k) - fx > 2Fx . \text{Sin}\frac{k}{2}$.

Denkt man sich daher $k' > 0$ und $< k$, so muß es einen Werth für k' geben, für welchen

$$f(x+k) - fx = 2F(x+k')\, \text{Sin}\frac{k}{2} \quad \text{ist.}$$

Nun ist aber fürs Gleichgewicht

$$F(x+k) = Fx + \mu\,[f(x+k) - fx] \quad \text{folglich}$$

$$F(x+k) - Fx = 2\mu\, F(x+k') . \text{Sin}\frac{k}{2} \quad \text{oder}$$

$$F'x + \frac{k}{2}F''x + \ldots = 2\mu F(x+k')\left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{2^3.2.3} \ldots\right)$$

und hieraus, für $k = 0$; also auch $k' = 0$;

$$F'x = 2\mu . Fx . \frac{1}{2} = \mu Fx; \quad \text{daher}$$

$$\frac{F'x}{Fx} = \mu \quad \text{folglich}$$

$$\int \frac{F'x}{Fx} = \mu . \int 1 \quad \text{oder}$$

$$\ln Fx = \mu x + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ hat man $F = Q$; also $\text{Const} = \ln Q$; demnach vollständig $\ln Fx = \mu x + \ln Q$; also

$$\ln \frac{Fx}{Q} = \mu x; \quad \text{folglich}$$

$$\ln \frac{P}{Q} = \mu\alpha \quad \text{oder}$$

$$\frac{P}{Q} = e^{\mu\alpha}; \quad \text{daher}$$

$$P = e^{\mu\alpha} . Q.$$

Zu §. 100. S. 141.

Setzt man $V = Fx$; $\Delta x = k$; $\alpha = fx$; $Q = \varphi x$;

so sind Fx; $F(x+k)$ und $\varphi(x+k) - \varphi x$ drei in einer Ebene thätige und unter einander Gleichgewicht haltende Kräfte, also

$$F(x+k) \operatorname{Sin} f(x+k) = Fx . \operatorname{Sin} fx$$

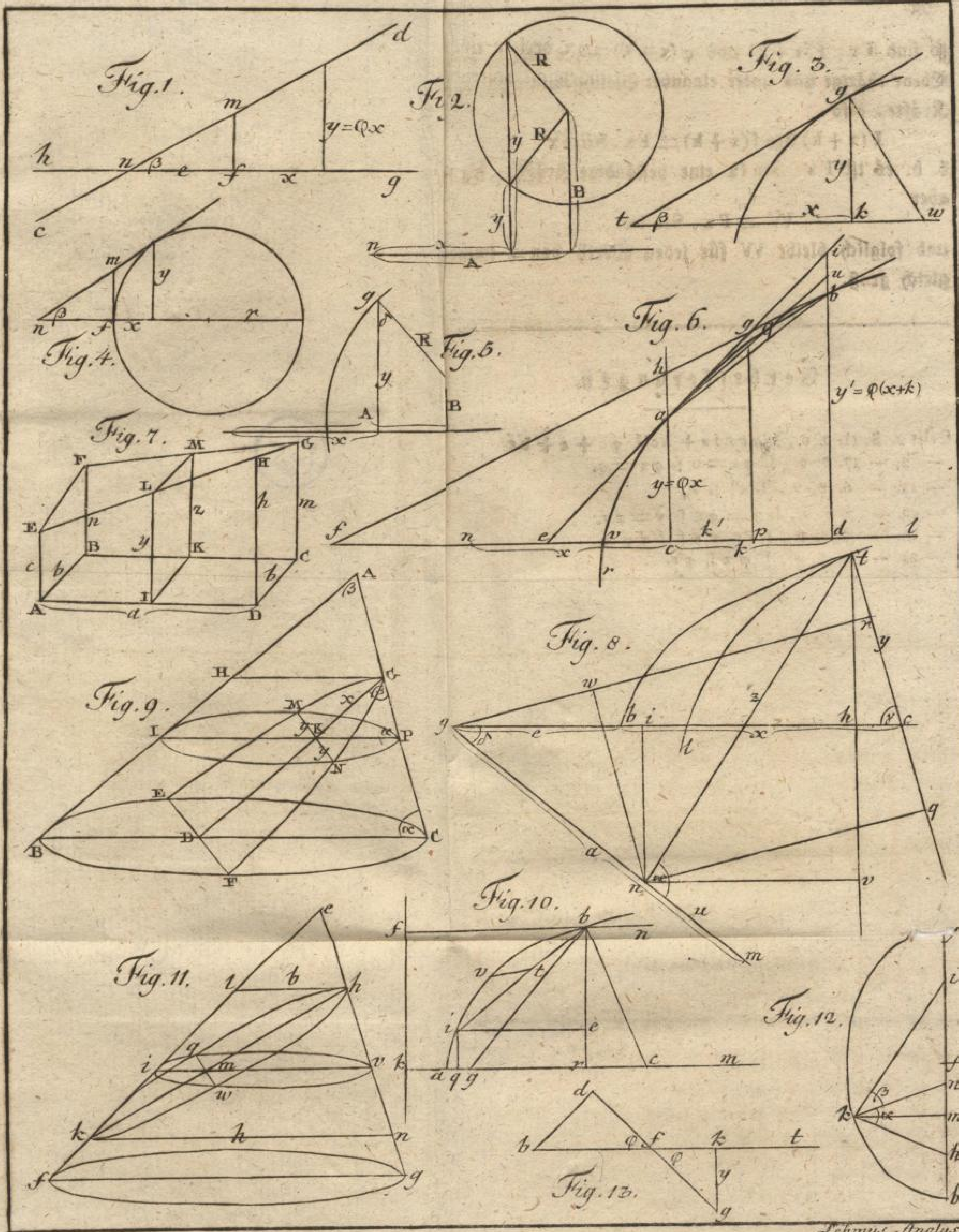
d. h. es ist $Fx . \operatorname{Sin} fx$ eine beständige Größe. Es ist aber

$$W = Fx . \operatorname{Sin} fx$$

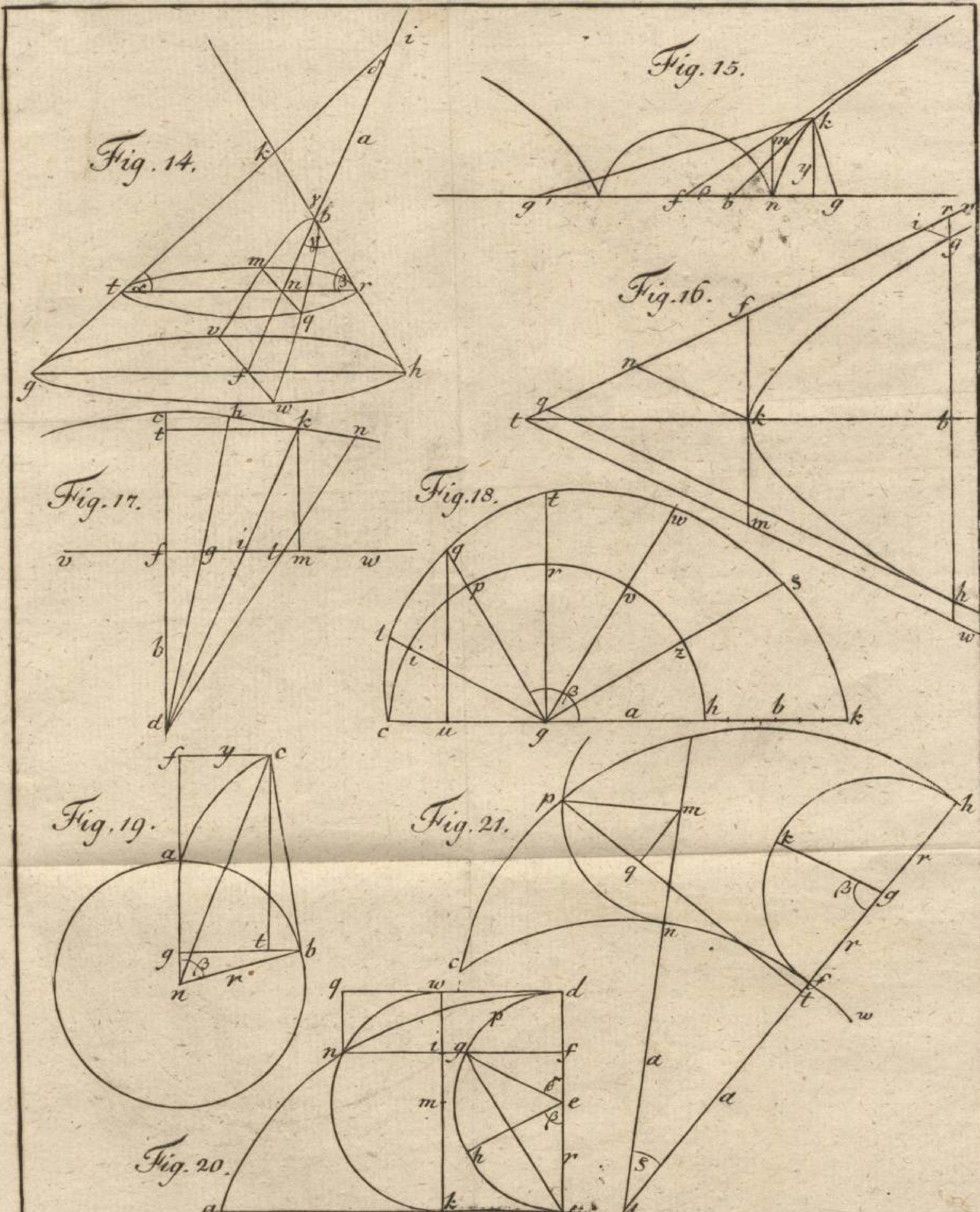
und folglich bleibt W für jeden Werth von x immer gleich groß.

Verbesserungen.

Seite 2. Z. 11. v. o., l. $\varphi c = a + bc$ f. $\varphi c + a + bc$.
— 2. — 17. v. o., l. $\varphi a = o$ f. $\varphi x = o$.
— 11. — 6. v. u., l. x^n f. x_n
— 13. — 7. v. o., l. $y = \varphi x$ f. $y = \varphi y$.
— 18. — 5. v. u., l. $fx . \varphi' x$ f. $f'x \, \varphi' x$.
— 24. — 7. v. o., l. $\varphi' x$ f. $\varphi' r$.
— 31. — 7. v. o., l. φx f. φk.
— 37. — 2. v. u., l. $\frac{k}{2} \varphi'' x$ f. $\frac{3k}{2} \varphi'' x$.
— 55. — 13. v. o., l. $p \varphi' x$ f. $p \varphi x$.
— 55. — 15. v. o., l. $p \varphi' x$ f. $p \varphi x$.
— 58. — 1. v. o., l. §. 55 f. §. 58.
— 65. — 9. v. o., l. $=$ f. $-$
— 70. — 11. v. o., l. $\frac{1}{2}$ f. $\frac{1}{3}$.
— 73. — 12. v. o., l. setze f. sage.
— 77. — 2. v. o., l. $\varphi' x$ f. $\varphi' \varphi$.
— 97. — 9. v. o. im Beisp. 2. l. $= - \frac{1}{\ln^2 \varphi x}$ f. $= \frac{1}{\ln^2 \varphi x}$
— 121. — 10. u. 11. v. u., l. unentwickelte f. unterwickelte.



Lehmus Analysis.



Lehmus Analysis.

Datum der Entleihung bitte hier einstempeln!

(204) JG 162/14/79