



EX ORDINIS PHILOSOPHORUM MANDATO

RENUNTIANTUR

PHILOSOPHIAE DOCTORES

ET

ARTIUM LIBERALIUM MAGISTRI

RECTORE MAGNIFICO

THEODORO BRIEGER

THEOLOGIAE ET PHILOSOPHIAE DOCTORE THEOLOGIAE PROFESSORE P. O.

DECANO

ERNESTO HENRICO BRUNS

PHILOSOPHIAE DOCTORE ASTRONOMIAE PROFESSORE P. O.

PROVINCILLARIO

GUILIELMO KIRCHNER

PHILOSOPHIAE DOCTORE AGRICULTURAE PROFESSORE P. O.

INDE A DIE PRIMO MENSIS NOVEMBRIS A. MDCCCLXXXII USQUE AD
DIEM ULTIMUM MENSIS OCTOBRIS A. MDCCCLXXXIII CREATI.

*Praemissa est Henrici Bruns commentatio vernaculo sermone conscripta:
Über die Ableitung des mittleren Fehlers.*



LIPSAE

TYPIS A. EDELMANNI, TYPOGR. ACAD.

UNIVERSITÄT ZÜRICH
BIBLIOTHEK
MATH. PHYS. KLASSE
STRASSBURGERSTRASSE 49
CH-8005 ZÜRICH

UNIVERSITÄT ZÜRICH

Über die Ableitung des mittleren Fehlers.

Die von Gauss in der „Theoria combinationis etc.“ gegebene Herleitung der bekannten Regel zur Berechnung des mittleren Fehlers aus der Quadratsumme der übrigbleibenden Widersprüche ist neuerdings von Herrn Bertrand¹⁾ einer Kritik unterzogen worden, deren wesentlicher Punkt darin besteht, dass jene Regel nur eine unter der unendlich vielen sei, die man — immer innerhalb des Gedankenganges der Th. comb. bleibend — aufstellen könne, und dass diese verschiedenen und vorläufig gleichberechtigten Regeln zu verschiedenen Werthen für den gesuchten mittleren Fehler führen. Dieser Einwand ist allerdings zutreffend; für die Anwendungen der Ausgleichungs-Rechnung würde er aber nur dann in Betracht kommen, wenn es gelänge die Gaussische Vorschrift durch eine bessere und zugleich allgemein brauchbare Formel zu ersetzen. Es erscheint der Mühe werth, diese Frage etwas genauer zu untersuchen; hierbei wird sich ergeben, dass Gauss es mit Fug und Recht bei der von ihm gewählten Formel hat bewenden lassen.

Bei der Untersuchung wollen wir von der gewöhnlichen Form des Problems ausgehen, d. h. das System von n linearen Gleichungen zwischen q Grössen s

$$A_\alpha = a_{\alpha 1} s_1 + a_{\alpha 2} s_2 + \dots + a_{\alpha q} s_q \quad \text{I.}$$

($\alpha = 1, 2 \dots n$)

als gegeben voraussetzen. Hierin sind die a bekannte feste Zahlen, die s die kleinen Verbesserungen der vorläufigen Werthe, die man

1) Comptes Rendus Band 106, S. 1195 und 1259.

für die aus den Beobachtungen gesuchten Unbekannten angenommen hat, und endlich die A die Unterschiede zwischen den beobachteten Grössen und ihren mit den vorläufigen Unbekannten berechneten Werthen. Um Wiederholungen zu vermeiden, werde ein für alle Mal festgesetzt, dass die Indices $\alpha, \beta, \gamma \dots$ für die Beobachtungs- oder Gleichungs-Nummer, ferner die Indices $\lambda, \mu, \nu \dots$ für die Unbekannten-Nummer dienen sollen. Die Indices $\alpha, \beta \dots$ laufen also von 1 bis n , die Indices $\lambda, \mu \dots$ von 1 bis q , wobei in unserem Falle $q < n$. Weiter sollen die Indices $\sigma, \tau, \varrho \dots$ gebraucht werden für den Fall, wo die Nummern

$$q + 1, q + 2, \dots n$$

zu durchlaufen sind. Endlich soll das Zeichen e_{ab} den Werth Eins oder Null besitzen, jenachdem die Indices a und b gleich oder ungleich sind.

Die von den Beobachtungen abhängigen Grössen A setzen wir als unabhängig von einander voraus, d. h. es soll keine der zur Bildung der A benutzten Einzelmessungen in mehr als einem der A enthalten sein. Ferner nehmen wir an, dass zwischen den A keine streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen bestehen, was sich durch passende Wahl der Unbekannten stets erreichen lässt. Ebenso setzen wir voraus, dass bei der Bestimmung der s aus dem System I die Unbekannten von einander trennbar seien, dass also die aus dem Elementensystem

$$\left. \begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1q} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mq} & \end{array} \right\} \text{II.}$$

zu bildenden Determinanten q^{ter} Ordnung nicht sämmtlich verschwinden.

Wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler stehen die Gleichungen des Systems I mit einander in Widerspruch, d. h. jedes Werthsystem der s lässt die Widersprüche

$$A_\alpha = A_\alpha - \sum_{\mu} a_{\alpha\mu} s_\mu \quad \text{III.}$$

übrig, die nicht gleichzeitig zum Verschwinden zu bringen sind. Die wahren Werthe der s und der A bleiben unbekannt, denn Alles, was man auf Grund der Beobachtungen über die n Grössen A aussagen kann, besteht in den $n-q$ Bedingungen, die man aus III durch Elimination der s erhält. Man muss sich deshalb damit begnügen, dasjenige Werthsystem der s und A aufzusuchen, welches das meiste Vertrauen verdient. Die Vorschrift, nach der dieses Vertrauen bemessen wird, ist nothwendiger Weise mit Willkür behaftet und deshalb Sache der Convention; man kann ihre Anerkennung nicht durch logische Gründe erzwingen, sondern sich nur über sie verständigen. Rein theoretisch betrachtet, existiren deshalb unendlich viele, gleich zulässige, solcher Vorschriften und jeder einzelnen entspricht ein bestimmter „Ausgleichungs-Modus“, d. h. ein Verfahren, den Gesamtwiderspruch zwischen den Beobachtungen auf die einzelnen Gleichungen III zu vertheilen. Algebraisch gesprochen kommt jeder Ausgleichungs-Modus auf Folgendes hinaus. Man ordnet den Coefficienten a des Systems II ein System von ebensovielen Multiplikatoren

$$\begin{array}{cccc} b_{11} & \dots & b_{1q} & \\ & \dots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nq} & \end{array} \quad \text{IV.}$$

zu, die allgemein den Bedingungen

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha\mu} a_{\alpha\nu} = e_{\mu\nu} \quad \text{V.}$$

unterliegen, sonst aber, so lange der Ausgleichungs-Modus noch unbestimmt bleibt, ebenfalls nicht weiter bestimmt sind. Mittelst dieser Multiplikatoren bildet man aus den Beobachtungsgleichungen I die linearen Verbindungen

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha\lambda} A_{\alpha} = \sum_{\alpha} b_{\alpha\lambda} \left(\sum_{\mu} a_{\alpha\mu} s_{\mu} \right),$$

die wegen V zu der Relation

$$s_{\lambda} = \sum_{\alpha} b_{\alpha\lambda} A_{\alpha} \quad \text{VI.}$$

führen. Durch diese Relation sind die dem gewählten Ausgleichungs-Modus entsprechenden Werthe der s bestimmt. Die zugehörigen Widersprüche ergeben sich durch Substitution der gefundenen s in das System III. Führt man an III dieselbe Operation aus, wie an I, so wird

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha\lambda} A_{\alpha} = \sum_{\alpha} b_{\alpha\lambda} A_{\alpha} - s_{\lambda},$$

also wegen VI

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha\lambda} A_{\alpha} = 0. \quad \text{VII.}$$

Setzt man in III statt der errechneten s ihre wahren Werthe s' ein, und bezeichnet die wahren Beobachtungsfehler mit x , so wird

$$x_{\alpha} = A_{\alpha} - \sum_{\mu} a_{\alpha\mu} s'_{\mu},$$

woraus, verbunden mit dem Früheren, der Reihe nach

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} a_{\alpha\mu} (s_{\mu} - s'_{\mu}) &= x_{\alpha} - A_{\alpha}, \\ s_{\mu} - s'_{\mu} &= \sum_{\alpha} b_{\alpha\mu} (x_{\alpha} - A_{\alpha}) = \sum_{\alpha} b_{\alpha\mu} x_{\alpha}, \\ x_{\alpha} - A_{\alpha} &= \sum_{\beta, \mu} a_{\alpha\mu} b_{\beta\mu} x_{\beta} \end{aligned}$$

folgt, oder mit der Abkürzung

$$f_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - \sum_{\mu} a_{\alpha\mu} b_{\beta\mu} \quad \text{VIII.}$$

die Relation

$$A_{\alpha} = \sum_{\beta} f_{\alpha\beta} x_{\beta}. \quad \text{IX.}$$

Um den Zusammenhang zwischen den auftretenden Grössen besser zu übersehen, wollen wir noch den Elementen a des Systems II die Elementenreihen $a_{\alpha\sigma}$ oder

$$\begin{array}{cccc} a_{1,q+1} & \cdots & a_{1,n} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n,q+1} & \cdots & a_{n,n} & \end{array}$$

hinzufügen, wo diese Hilfsgrössen folgenden Bedingungen unterliegen. Erstlich soll für die zulässigen Werthe der μ, σ

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha\sigma} b_{\alpha\mu} = 0$$

und zweitens die aus dem ganzen System der a gebildete Determinante

$$A = | a_{\alpha\beta} |$$

gleich Eins sein. Diese Bedingungen lassen sich stets erfüllen. Die Unterdeterminanten

$$\frac{\partial A}{\partial a_{\alpha\beta}}$$

sind dann, sobald der zweite Index von $a_{\alpha\beta}$ einen Werth μ annimmt, identisch mit dem $b_{\alpha\mu}$. Wir bezeichnen sie deshalb sämmtlich mit $b_{\alpha\beta}$. Wegen

$$e_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} b_{\beta\gamma} = \sum_{\lambda} a_{\alpha\lambda} b_{\beta\lambda} + \sum_{\sigma} a_{\alpha\sigma} b_{\beta\sigma} \quad \text{X.}$$

lässt sich VIII dann auch in der Form

$$f_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma} a_{\alpha\sigma} b_{\beta\sigma} \quad \text{XI.}$$

schreiben, aus der

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha\gamma} f_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\sigma} b_{\alpha\gamma} a_{\alpha\sigma} b_{\beta\sigma} = \sum_{\sigma} e_{\gamma\sigma} b_{\beta\sigma} \quad \text{XII.}$$

folgt. Führt man endlich noch neben den A durch eine lineare Transformation die Grössen

$$A'_{\alpha} = \sum_{\beta} A_{\beta} b_{\beta\alpha} \quad \text{XIII.}$$

ein, so erhält man aus IX und XII

$$A'_{\alpha} = \sum_{\beta,\gamma} b_{\beta\alpha} f_{\beta\gamma} x_{\gamma} = \sum_{\gamma,\sigma} x_{\gamma} e_{\alpha\sigma} b_{\gamma\sigma},$$

und dieses Gleichungssystem zerfällt in die beiden Bestandtheile

$$A'_{\mu} = 0, \quad \text{XIV.}$$

$$A'_{\tau} = \sum_{\gamma} x_{\gamma} b_{\gamma\tau}. \quad \text{XV.}$$

Die Gleichungen XIV sind nichts Anderes, als die Bedingungen VII, während das System XV alles enthält, was sich auf Grund der gegebenen Data über die begangenen wahren Fehler aussagen lässt.

Wir führen jetzt den Begriff des mittleren Fehlers im Sinne der Theoria comb. ein, ohne jedoch schon über den Ausgleichungsmodus $b_{\alpha\mu}$ Bestimmung zu treffen, und setzen fest, dass in dem

System I allen A dasselbe Gewicht Eins und entsprechend ein und derselbe mittlere Fehler m zukomme, indem wir uns die Gleichungen I nöthigenfalls vor Beginn der Untersuchung mit den Quadratwurzeln aus ihren Gewichten multiplicirt denken. Der mittlere Fehler des nach VI errechneten s ergibt sich aus

$$\text{m. F. } (s_\mu) = m \sqrt{\sum_{\alpha} b_{\alpha\mu}^2},$$

setzt also die Kenntniss von m voraus. Wenn man nun, wie dies in der Regel zutrifft, m nicht anderswoher kennt, so ist man einzig und allein auf das angewiesen, was die Gleichungen XV aussagen. Diese Gleichungen sind Relationen zwischen n wirklich begangenen Beobachtungsfehlern, während die Berechnung von m begrifflich die Kenntniss der Fehlerfunction oder der relativen Häufigkeit aller bei den benutzten Beobachtungsmodis möglichen Fehler voraussetzt. Die Aufgabe, m aus den vorgelegten Beobachtungen abzuleiten, ist daher in Wahrheit wegen unzureichender Daten zunächst gar nicht zu lösen und kann nur dadurch lösbar werden, dass man die genannte Lücke in irgend einer Weise ausfüllt. Der Ausweg, den Gauss hierbei einschlägt, ist in verallgemeinerter Gestalt, folgender.

Ist U ein von beobachteten Grössen abhängender Ausdruck, so denke man sich aus allen möglichen Werthen von U das arithmetische Mittel gebildet, und zwar unter Berücksichtigung der relativen Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Beobachtungsfehler, die in U auftreten. Diese Bildung des Durchschnittswerthes von U möge kurz durch das Zeichen $D(U)$ ausgedrückt werden. Es ist dann z. B. für Beobachtungen mit den entsprechenden wahren Fehlern x_1, x_2, \dots

$$D(x_\alpha) = 0, \quad \text{XVI.}$$

da man in der Begründung der Ausgleichungs-Rechnung die systematischen Fehler als vorher eliminirt voraussetzt; ferner ist

$$D(x_\alpha^2) = m_\alpha^2,$$

wenn m_α den zu dem betreffenden Beobachtungsmodus gehörigen mittleren Fehler bedeutet; endlich wird

$$D(x_\alpha x_\beta) = e_{\alpha\beta} m_\alpha m_\beta. \quad \text{XVII.}$$

Bezeichnet man jetzt mit S eine beliebige aus den A gebildete homogene quadratische Form, so lässt sich diese wegen XIII oder der gleichwerthigen Relationen

$$A_\gamma = \sum_\alpha A'_\alpha a_{\gamma\alpha} \quad \text{XVIII.}$$

als quadratische Form der A' schreiben, also, da die A'_μ verschwinden,

$$S = \sum_{\sigma, \tau} E_{\sigma\tau} A'_\sigma A'_\tau, \quad (E_{\sigma\tau} = E_{\tau\sigma}).$$

Die Einführung der x nach XV giebt dann weiter

$$S = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

wo

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma, \tau} E_{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} b_{\beta\tau} = g_{\beta\alpha}.$$

Nach XVII folgt hieraus, da wir die m_α alle als einander gleich voraussetzen,

$$D(S) = m^2 \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = m^2 T,$$

wo

$$T = \sum_\alpha g_{\alpha\alpha} = \sum_{\sigma, \tau} E_{\sigma\tau} \sum_\alpha b_{\alpha\sigma} b_{\alpha\tau}.$$

Nun besitzt die Formel

$$m^2 = \frac{D(S)}{T} \quad \text{XIX.}$$

wegen unserer Unkenntniss des Durchschnittes $D(S)$ nur theoretischen Werth; für die praktische Anwendung nimmt man an Stelle des unbekannt bleibenden $D(S)$ den einen Werth von S , den die gegebenen A oder A' , zusammen mit den gewählten E liefern, rechnet also mit der Formel

$$m^2 = \frac{S}{T}. \quad \text{XX.}$$

Dies führt, wenn für S die Quadratsumme der A genommen wird,

zu der Vorschrift von Gauss. Statt der Quadratsumme könnte man nun, wie von Herrn Bertrand hervorgehoben worden ist, mit demselben Rechte für S irgend eine andere quadratische Form der \mathcal{A} zu Grunde legen und erhielte entsprechend andere Formeln für die Berechnung von m und demgemäss auch andere Zahlenwerthe bei der numerischen Anwendung. Nur in einem speciellen Falle würde von vornherein jede Zweideutigkeit ausgeschlossen sein, nämlich wenn nur eine einzige überschüssige Gleichung vorhanden ist. Denn wenn $n = q + 1$ ist, so reducirt sich S auf den einen Term

$$S = E_{nn} A'_n A'_n,$$

der nur den einen disponibelen Coefficienten E enthält. Dieses E hebt sich aber in Zähler und Nenner von XX fort, so dass man für m immer denselben Werth erhält, wie man auch S als quadratische Form der \mathcal{A} ansetzen möge. Von diesem besonderen Falle abgesehen, bleibt die Unbestimmtheit in der Anwendung von XX zunächst bestehen und kann nur dadurch beseitigt werden, dass man nach der vertrauenswürdigsten Form von S fragt. Nun wird in dem Gedankengange der Theoria comb. das Vertrauen, das der Bestimmungsmodus einer gesuchten Grösse verdient, nach dem zugehörigen mittleren Fehler bemessen, d. h. unter allen zulässigen Formen von S ist diejenige die beste, für die der Ausdruck

$$M^2 = D \left[\left(\frac{S}{T} - m^2 \right)^2 \right]$$

zu einem Minimum wird. Diese Relation lässt sich umformen in

$$(MT)^2 = D(S^2) - m^4 T^2,$$

$$\left(\frac{MT}{m^2} \right)^2 = \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\gamma, \delta} g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \left\{ \frac{D(x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta)}{m^4} - \frac{D(x_\alpha x_\beta)}{m^2} \frac{D(x_\gamma x_\delta)}{m^2} \right\}.$$

Setzt man

$$D(x_\alpha^4) = (m_{4\alpha})^4,$$

so ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$\begin{aligned} \frac{D(x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta)}{m^4} &= e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} + e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} + e_{\alpha\delta} e_{\beta\gamma} \\ &+ \left(\frac{m_{4\alpha} m_{4\beta} m_{4\gamma} m_{4\delta}}{m^4} - 3 \right) e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} e_{\alpha\delta} e_{\beta\gamma}, \\ \left(\frac{MT}{m^2} \right)^2 &= \sum g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} (e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} + e_{\alpha\delta} e_{\beta\gamma}) \\ &+ \sum g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \left\{ \left(\frac{m_{4\alpha} m_{4\beta} m_{4\gamma} m_{4\delta}}{m^4} - 3 \right) e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} e_{\alpha\delta} e_{\beta\gamma} \right\}, \end{aligned}$$

also mit der Abkürzung

$$Q_\alpha = \left(\frac{m_{4\alpha}}{m} \right)^4 - 3, \quad \text{XXI.}$$

$$\left(\frac{MT}{m^2} \right)^2 = 2 \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}^2 + \sum_\alpha Q_\alpha g_{\alpha\alpha}^2.$$

Die g und T sind linear aus den disponiblen Coefficienten E zusammengesetzt, und es ist M durch passende Wahl der E zu einem Minimum zu machen, wobei jedoch die Bedingung festzuhalten ist, dass die Form S stets positives Vorzeichen besitzen muss, weil sonst aus XX unter Umständen ein negativer Werth von m^2 hervorgehen könnte. Diese Vorzeichenbedingung ist bekanntlich dadurch darstellbar, dass gewisse aus den E gebildete Ausdrücke niemals negativ werden dürfen. Statt diese Ausdrücke von vornherein zu berücksichtigen, kann man auch folgenden Weg einschlagen. Man sucht zunächst das Minimum von M ohne Rücksicht auf die genannten Ungleichungen. Sind letztere für die ermittelten E erfüllt, so ist die Aufgabe erledigt; sind sie nicht erfüllt, so besagt dies, dass das Minimum nicht innerhalb, sondern an der Grenze des Gebietes der zulässigen E zu suchen ist, und dass an die Stelle der Vorzeichenungleichungen gewisse Gleichungen treten. Es wird übrigens nicht nöthig sein, für den Zweck, der hier verfolgt wird, diese Seite der Frage weiter zu verfolgen.

Da M nur von den Verhältnissen der E abhängt, die Coefficienten E also nur bis auf einen gemeinsamen Factor bestimmt sind, so ist es erlaubt festzusetzen, dass T einen constanten Werth

T_o besitze. Dann sind nach der gewöhnlichen Regel die partiellen Ableitungen nach E von dem Ausdruck

$$2 \sum g_{\alpha\beta}^2 + \sum Q_{\alpha} g_{\alpha\alpha}^2 - 2\lambda (T - T_o)$$

gleich Null zu setzen, wo λ den Lagrangeschen Multiplikator bedeutet. Hiernach erhält man zunächst die Bedingungen

$$2 \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} b_{\alpha\sigma} b_{\beta\tau} + \sum_{\alpha} Q_{\alpha} g_{\alpha\alpha} b_{\alpha\sigma} b_{\alpha\tau} = \lambda \sum_{\alpha} b_{\alpha\sigma} b_{\alpha\tau} \quad \text{XXII.}$$

aus dem durch Multiplikation mit $E_{\sigma\tau}$ und Summation nach σ und τ

$$\left(\frac{MT}{m^2}\right)^2 = \lambda T, \quad M^2 = \frac{m^4 \lambda}{T} \quad \text{XXIII.}$$

folgt. Zur Bestimmung der E erhält man die linearen Gleichungen

$$2 \sum_{\varphi,\psi} E_{\varphi\psi} \sum_{\alpha} b_{\alpha\varphi} b_{\alpha\psi} + \sum_{\varphi,\psi} E_{\varphi\psi} \sum_{\alpha} Q_{\alpha} b_{\alpha\varphi} b_{\alpha\psi} = \lambda \sum_{\alpha} b_{\alpha\sigma} b_{\alpha\tau} \quad \text{XXIV.}$$

Der Factor λ braucht nicht weiter bestimmt zu werden, da er aus dem Ausdrucke für M von selber herausfällt.

Wie man sieht, setzt die Aufsuchung der besten Form von S die Kenntniss der Grössen Q voraus, die ihrerseits von dem Fehlergesetz der benutzten Beobachtungen abhängen, so dass eine allgemeine Untersuchung an dieser Stelle nothgedrungen abbrechen muss und nur specielle Fälle weiter verfolgt werden könnten. Beispielsweise tritt eine gewisse Vereinfachung ein, wenn das Gauss'sche Fehlergesetz gilt, weil dann, wie man leicht verificiren kann, die Q sämmtlich verschwinden. Führt man die Abkürzung

$$c_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = c_{\gamma\beta}$$

ein, und setzt die Determinante

$$C = |c_{\beta\gamma}|$$

und die Unterdeterminanten

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\partial C}{\partial c_{\alpha\beta}}$$

an, so gelten folgende Relationen

$$c_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha} C_{\alpha\beta} c_{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha,\delta} C_{\alpha\beta} a_{\delta\alpha} a_{\delta\gamma},$$

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma} e_{\beta\gamma} b_{\epsilon\gamma} &= \sum_{\alpha,\gamma,\delta} C_{\alpha\beta} a_{\delta\alpha} a_{\delta\gamma} b_{\epsilon\gamma} = \sum_{\alpha,\delta} C_{\alpha\beta} a_{\delta\alpha} e_{\delta\epsilon}, \\ b_{\epsilon\beta} &= \sum_{\alpha} C_{\alpha\beta} a_{\epsilon\alpha}, \\ \sum_{\epsilon} b_{\epsilon\beta} b_{\epsilon\gamma} &= \sum_{\alpha,\epsilon} C_{\alpha\beta} a_{\epsilon\alpha} b_{\epsilon\gamma} = \sum_{\alpha} C_{\alpha\beta} e_{\alpha\gamma}, \\ \sum_{\epsilon} b_{\epsilon\beta} b_{\epsilon\gamma} &= C_{\gamma\beta} = C_{\beta\gamma}.\end{aligned}$$

Hiermit lässt sich, wenn die Q verschwinden, XXIV in der Form

$$2 \sum_{\varphi,\psi} E_{\varphi\psi} C_{\varphi\sigma} C_{\psi\tau} = \lambda C_{\sigma\tau} \quad \text{XXV.}$$

schreiben. Bildet man die Determinante

$$G = |C_{\sigma\tau}|$$

mit den Unterdeterminanten

$$G_{\sigma\tau} = \frac{\partial G}{\partial C_{\sigma\tau}},$$

so erhält man aus XXV der Reihe nach

$$\begin{aligned}2 \sum_{\varphi,\psi,\tau} E_{\varphi\psi} C_{\varphi\sigma} C_{\psi\tau} G_{\omega\tau} &= \lambda \sum_{\tau} C_{\sigma\tau} G_{\omega\tau}, \\ 2 \sum_{\varphi,\psi} E_{\varphi\psi} C_{\varphi\sigma} e_{\psi\omega} G &= \lambda e_{\sigma\omega} G, \\ 2 \sum_{\varphi} E_{\varphi\omega} C_{\varphi\sigma} &= \lambda e_{\sigma\omega},\end{aligned}$$

woraus

$$2 G E_{\varphi\omega} = \lambda G_{\varphi\omega}$$

folgt. Mit diesen Werthen von E wird

$$\begin{aligned}2 G g_{\alpha\alpha} &= \lambda \sum_{\varphi,\omega} G_{\varphi\omega} b_{\alpha\varphi} b_{\alpha\omega}, \\ 2 G T &= \lambda \sum_{\varphi,\omega} G_{\varphi\omega} C_{\varphi\omega} = \lambda \sum_{\varphi} G e_{\varphi\varphi}, \\ 2 T &= \lambda (n - q)\end{aligned}$$

also wegen XXIII

$$M^2 = \frac{2 m^4}{n - q} \quad \text{XXVI.}$$

Diese für den Fall des Gaussischen Fehlergesetzes und die Methode der kleinsten Quadrate häufig abgeleitete Formel gilt hiernach für einen beliebigen Ausgleichungs-Modus, sobald die Q verschwinden und für S die vortheilhafteste Form gewählt wird. Für m erhält man

$$m^2 = \frac{S}{T} = \frac{\lambda}{2GT} \sum_{\sigma, \tau} G_{\sigma\tau} A'_\sigma A'_\tau,$$

$$(n-q) m^2 G = \sum_{\sigma, \tau} G_{\sigma\tau} A'_\sigma A'_\tau. \quad \text{XXVII.}$$

Bisher war absichtlich der Ausgleichungs-Modus unbestimmt gelassen worden. Es versteht sich aber von selbst, dass, wenn einmal der mittlere Fehler als Gütemass benutzt wird, auch für den Ausgleichungs-Modus die darnach günstigste Form, nämlich die Methode der kleinsten Quadrate zu wählen ist. Indem wir jetzt hierzu übergehen, möge zur Vereinfachung folgende Bemerkung vorausgeschickt werden. Wenn man in den vorgelegten Beobachtungsgleichungen I statt der Unbekannten s andere s' durch die lineare Transformation

$$s_\mu = \sum_\nu h_{\mu\nu} s'_\nu$$

einführt, so nehmen die Gleichungen I die Form

$$A_\alpha = \sum_\varrho a'_{\alpha\varrho} s'_\varrho, \quad a'_{\alpha\varrho} = \sum_\mu a_{\alpha\mu} h_{\mu\varrho} \quad \text{XXVIII.}$$

an. Entsprechend gehen die Hilfsgrößen $b, A, E \dots$ in andere $b', A', E' \dots$ über, die mit den früheren linear zusammenhängen, während an den Werthen der Größen A, x, S, T, m, M und ebenso an der Form der ganzen Entwicklung sich nichts ändert. Man kann nun die Transformation immer so wählen, dass die quadratische Form

$$\sum_\alpha (a_{\alpha 1} s_1 + \dots + a_{\alpha n} s_n)^2$$

durch die Transformation sich in die blosse Quadratsumme der s' verwandelt, dass also identisch

$$\sum_\alpha \left(\sum_\varrho a'_{\alpha\varrho} s'_\varrho \right)^2 = \sum_\mu (s'_\mu)^2$$

ist, woraus für die a' die Relationen

$$\sum_\alpha a'_{\alpha\mu} a'_{\alpha\nu} = e_{\mu\nu}$$

folgen. Wir wollen deshalb jetzt voraussetzen, dass eine solche Transformation mit den s vor Beginn der ganzen Untersuchung vorgenommen sei, dass also in dem System

$$A_\alpha = \sum_\mu a_{\alpha\mu} s_\mu$$

die Coefficienten den Bedingungen

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha\mu} a_{\alpha\nu} = e_{\mu\nu}$$

genügen. Die Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate führen dann, da die A einerlei Gewicht besitzen sollen, zu den Normalgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} A_{\alpha} a_{\alpha q} &= \sum_{\alpha, \mu} a_{\alpha\mu} a_{\alpha q} s_{\mu} = \sum_{\mu} e_{\mu q} s_{\mu}, \\ s_{\mu} &= \sum_{\alpha} A_{\alpha} a_{\alpha\mu}, \end{aligned}$$

d. h. die Multiplikatoren b sind in diesem Falle durch die Gleichungen

$$b_{\alpha\mu} = a_{\alpha\mu}$$

bestimmt. In der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

erfüllen die q ersten Columnen, nämlich die Elemente $a_{\alpha\mu}$ die bekannten Bedingungen der Orthogonalität, und man kann dann die Zusatzelemente $a_{\alpha\sigma}$ so wählen, dass erstens die früher für die $a_{\alpha\sigma}$ aufgestellten Bedingungen erfüllt bleiben, zweitens aber die ganze Determinante orthogonal wird. In diesem Falle ist aber für alle Unterdeterminanten b

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}.$$

Dies festgesetzt, nehmen die Bedingungen für das Minimum von M , nämlich die Gleichungen XXIV die Form

$$2 \sum_{\varphi, \psi} E_{\varphi\psi} e_{\varphi\sigma} e_{\psi\tau} + \sum_{\varphi, \psi, \alpha} E_{\varphi\psi} Q_{\alpha} a_{\alpha\varphi} a_{\alpha\psi} a_{\alpha\sigma} a_{\alpha\tau} = \lambda e_{\sigma\tau},$$

oder

$$2 E_{\sigma\tau} + \sum_{\varphi, \psi} E_{\varphi\psi} \left(\sum_{\alpha} Q_{\alpha} a_{\alpha\varphi} a_{\alpha\psi} a_{\alpha\sigma} a_{\alpha\tau} \right) = \lambda e_{\sigma\tau} \quad \text{XXIX.}$$

an. Ferner wird

$$T = \sum_{\sigma} E_{\sigma\sigma}, \quad M^2 = \frac{m^4 \lambda}{T}.$$

Diese Gleichungen sind, wie zu erwarten war, etwas einfacher, als die früheren; indessen ist das gefundene Resultat auch für den Fall der Methode der kleinsten Quadrate so lange ohne prak-

tische Bedeutung, als nicht besondere Nebenbedingungen eine weitere Vereinfachung herbeiführen. Wenn die Q wieder verschwinden, so wird

$$\begin{aligned} 2 E_{\sigma\tau} &= \lambda e_{\sigma\tau}, \\ T &= \frac{1}{2} \lambda \sum e_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2} \lambda (n-q) \\ M^2 &= \frac{2 m^4}{n-q} \end{aligned}$$

Ferner verwandelt sich S in die Quadratsumme der A' , wenn man von dem sich forhebenden Factor $\frac{1}{2} \lambda$ abzieht. Da nun die A und A' jetzt durch eine orthogonale Transformation zusammenhängen, so ist S auch gleich der Quadratsumme der A , d. h. die Gaussische Regel liefert in diesem Falle zugleich den besten Werth von m^2 .

Sind die Q von Null verschieden, und wählt man für S mit Gauss die Quadratsumme, so sind die Minimumsbedingungen für M im Allgemeinen nicht mehr erfüllt, und man erhält nicht den sichersten Werth von m , der theoretisch möglich ist. Man hat dann anzusetzen

$$\begin{aligned} E_{\sigma\tau} &= e_{\sigma\tau}, \\ g_{\alpha\beta} &= \sum_{\sigma} a_{\alpha\sigma} a_{\beta\sigma}, \\ g_{\alpha\beta}^2 &= \sum_{\sigma, \tau} a_{\alpha\sigma} a_{\beta\sigma} a_{\alpha\tau} a_{\beta\tau}, \\ \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}^2 &= \sum_{\sigma, \tau} e_{\sigma\tau} \cdot e_{\sigma\tau} = n-q, \\ \sum_{\alpha} g_{\alpha\alpha} &= \sum_{\sigma} e_{\sigma\sigma} = n-q, \end{aligned}$$

und erhält dann aus XX und XXI

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{S}{n-q}, \quad T = n-q, \\ \left(\frac{M(n-q)}{m^2} \right)^2 &= 2(n-q) + \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \left(\sum_{\sigma} a_{\alpha\sigma}^2 \right)^2, \end{aligned}$$

was auf bekannte Gaussische Formeln hinauskommt.

Fasst man die gefundenen Sätze für den Fall der Methode der kleinsten Quadrate zusammen, so lässt sich folgendes aussprechen.

1) Wenn nur eine einzige überschüssige Beobachtung vorhanden ist, so ist es gleichgültig, welche quadratische Form S der Widersprüche \mathcal{A} man bei der Berechnung von m , d. h. des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit, zu Grunde legt, da alle auf denselben Werth von m führen. Bei der Wahl unter den unendlich vielen möglichen Formen von S giebt dann die Einfachheit der Rechnung für die Quadratsumme der \mathcal{A} den Ausschlag.

2) Wenn mehrere überschüssige Beobachtungen vorliegen, und wenn ferner die Grössen

$$Q_a = \frac{D(x_a^4)}{m^4} - 3$$

von Null verschieden sind, so verlangt die Aufsuchung des besten m einerseits die Ermittlung der Q , andererseits aber einen solchen Rechnungsaufwand, dass, namentlich mit Rücksicht auf den eigentlichen Zweck der Ermittlung der m , in praxi von der Lösung dieser Aufgabe im Allgemeinen nicht die Rede sein kann. Man wird es dann aus Gründen der Einfachheit bei der von Gauss benutzten Quadratsumme bewenden lassen und nimmt für den Vortheil der bequemeren Rechnung den Nachtheil in den Kauf, dass die Unsicherheit des gefundenen m^2 nicht den kleinsten überhaupt erreichbaren Werth besitzt.

3) Wenn die Q verschwinden, wie dies u. A. bei dem Gaussischen Fehlergesetz zutrifft, so liefert die Quadratsumme der \mathcal{A} zugleich den sichersten Werth von m^2 .

Aus den vorstehenden Sätzen ergibt sich, dass Gauss allen Grund hatte, bei seiner bekannten Formel stehen zu bleiben.

Leipzig, 1892, Dec. 5.

Restat ut munere sollemni defungamur et publice renuntiemus doctores philosophiae artiumque liberalium magistros, qui rectore magnifico THEODORO BRIEGER inde a primo die mensis Novembris anni MDCCCLXXXII usque ad diem ultimum mensis Octobris anni MDCCCLXXXIII creati sunt.

Anno MDCCCLXXXII.

1. die 9. mensis Novembris EDUARDUS THAUSING, Alsatus e vico Lutterbach oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber die Ursachen des Schossens der Zuckerrüben“ et examine die 2. mensis Augusti 1892 magna cum laude superato.
2. die 11. mensis Novembris EDUARDUS BRADFORD TITCHENER, Cicestriensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Ueber binoculare Wirkungen monocularer Reize“ et examine die 5. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
3. die 11. mensis Novembris WILDER DWIGHT BANCROFT, Americanus e Newport in Civitate Rhode Island oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Ueber Oxydationsketten“ et examine die 5. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
4. die 22. mensis Novembris CAROLUS HÜBNER, Dresdensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Zur Geschichte der kursächsischen Politik beim Ausbruche des österreichischen Erbfolgekrieges“ et examine die 18. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
5. die 25. mensis Novembris RICARDUS WACHSMUTH, Marburgensis, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Untersuchungen auf dem Gebiete der inneren Wärmeleitung“ et examine die 24. mensis Novembris 1892 cum laude superato.
6. die 27. mensis Novembris ERNESTUS ZIMMERMANN, Hamburgensis tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Die Landschaft in der venetianischen Malerei bis zum Tode Tizians“ et examine die 15. mensis Decembris 1891 magna cum laude superato.
7. die 2. mensis Decembris CAROLUS NESZÉNYI, Pragensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Beiträge zur Keimungsgeschichte von Cichorium Intybus L.“ et examine die 4. mensis Martii 1891 magna cum laude superato.

8. die 3. mensis Decembris GUSTAVUS WAECHTER, e vico Elverdissen in Guestfalia oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Die Entbitterung der Lupinen und über den Werth der nach Soltsien behandelten Lupinenkörner als Krafftuttermittel für Milchvieh“ et examine die 5. mensis Iulii 1892 magna cum laude superato.
9. die 9. mensis Decembris CAROLUS LUEDECKE, e vico Teutschenthal in provincia Saxonia oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Die Gesteine und Ackerböden der Muschelkalkformation in der Gegend von Göttingen und Michelstadt i. O.“ et examine die 25. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
10. die 10. mensis Decembris HUGO ZEIDLER, Berolinensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Die Anfänge des deutschen Genossenschaftswesens der Neuzeit“ et examine die 26. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
11. die 13. mensis Decembris CAROLUS FRICKER, Tubingensis, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Ursprung und Verbreitung des antarktischen Treibeises“ et examine die 25. mensis Iulii 1891 magna cum laude superato.
12. die 13. mensis Decembris GUILIELMUS FLEMMING, Lobaviensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Zur Beurtheilung des Christenthums Justins des Märtyrers“ et examine die 19. mensis Octobris 1892 cum laude superato.
13. die 17. mensis Decembris RICARDUS WOGGE, Alfeldensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Einfluss des Zuckerrübenbaues auf die Landwirthschaft“ et examine die 18. mensis Iulii 1892 magna cum laude superato.
14. die 17. mensis Decembris MARTINUS LANG, Silesius e vico Stonsdorf oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Ueber die Leiblichkeit der Vernunftwesen bei Origenes“ et examine die 28. mensis Octobris 1892 rite superato.
15. die 20. mensis Decembris RICARDUS ROEDEL, Chemnitiensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Johann Jacob Wilhelm Heinse. Sein Leben und seine Werke“ et examine die 7. mensis Iulii 1892 rite superato.
16. die 20. mensis Decembris HERMANNUS BARGE, Lipsiensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Die Verhandlungen zu Linz und Passau und der Vertrag von Passau im Jahre 1552“ et examine die 27. mensis Iulii 1892 magna cum laude superato.
17. die 20. mensis Decembris NICOLA TSCHERWEN-IWANOFF, Macedoniensis e vico Kukusch oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Beiträge zur Darstellung uud Kenntniss des polymeren Di- und Trichloracetonitrils“ et examine die 3. mensis Martii 1892 cum laude superato.

18. die 22. mensis Decembris MARTINUS AUGUSTUS ZINSSER, Hassus e vico Münster oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Der ethische Intellectualismus Spinozas“ et examine die 29. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
19. die 24. mensis Decembris ARNOLDUS HESS, Giessensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Ein Beitrag zur Ermittlung der Constitution der Camphoronsäure“ et examine die 30. mensis Novembris 1892 magna cum laude superato.
20. die 28. mensis Decembris IOANNES ADOLFUS WISLICENUS, Duregensis, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Zur Kenntniss der geometrisch isomeren Krotonsäuren“ et examine die 17. mensis Decembris 1892 summa cum laude superato.
21. die 31. mensis Decembris ERNESTUS GUILIELMUS GEHMLICH, Saxo e vico Obersaida oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Die städtischen Lateinschulen des sächsischen Erzgebirges im 16. Jahrhundert“ et examine die 25. mensis Iulii 1892 magna cum laude superato.

Anno MDCCCLXXXIII.

22. die 4. mensis Ianuarii GUSTAVUS CAROLUS AUGUSTUS BERNDT, Erfordiensis, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Ueber die Leibesübungen bei den Philantropisten“ et examine die 27. mensis Octobris 1892 cum laude superato.
23. die 4. mensis Ianuarii EDUARDUS BIBERFELD, Vratislaviensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Der Reisebericht des David Rëubëni“ et examine die 7. mensis Iulii 1891 rite superato.
24. die 4. mensis Ianuarii IOANNES MARTINUS PAULINUS, Saxo e vico Neustadt oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Die Sittenlehre Geulincx“ et examine die 19. mensis Octobris 1892 cum laude superato.
25. die 9. mensis Ianuarii FRANK WELLINGTON GAGE, Americanus ex Amherst in civitate Minnesota oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „The Negro Problem in the United States“ et examine die 21. mensis Iulii 1892 rite superato.
26. die 9. mensis Ianuarii HIDESABURO ENDO, Iaponiensis e Tokio oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Das Leben und die pädagogische Bedeutung des Confucius“ et examine die 9. mensis Augusti 1892 rite superato.
27. die 11. mensis Ianuarii HUGO ECKENER, Flenopolensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Untersuchungen über die Schwankungen der Auffassung minimaler Sinnesreize“ et examine die 15. mensis Iulii 1892 magna cum laude superato.

28. die 18. mensis Ianuarii WILLIAM STANLEY MARSHALL, Americanus e Milwaukee in civitate Wisconsin oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Beitrag zur Kenntniss der Gregarinen“ et examine die 1. mensis Martii 1892 magna cum laude superato.
29. die 20. mensis Ianuarii IOANNES WENDLAND, e Mestin oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Die deutschen Getreidezölle, ihre Geschichte und ihre Wirkungen“ et examine die 19. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
30. die 23. mensis Ianuarii AUGUSTUS VIEFHAUS, ex Elberfeld oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber die Synthese und Constitution der Propylidenessigsäure und Aethylidenpropionsäure“ et examine die 17. mensis Decembris 1892 magna cum laude superato.
31. die 27. mensis Ianuarii ALFREDUS GEORGIUS LUDOVICUS GUILIELMUS HEUSSNER, Casselanus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Die altchristlichen Orpheusdarstellungen“ et examine die 6. mensis Decembris 1892 cum laude superato.
32. die 31. mensis Ianuarii WALTER PASIG, e Johann-Georgenstadt oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Spinozas Rationalismus und Erkenntnisslehre“ et examine die 13. mensis Decembris 1892 rite superato.
33. die 1. mensis Februarii ALBRECHTUS HAUPT, Hassus e Büdingen oriundus, tradita dissertatione egregia typis impressa quae inscribitur „Die Baukunst der Renaissance in Portugal“ sine examine.
34. die 6. mensis Februarii CAROLUS ANTONIUS SCHNEIDER, Wormatiensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber den Einfluss verschiedener Fütterung auf die Zusammensetzung der Milch“ et examine die 22. mensis Novembris 1892 cum laude superato.
35. die 6. mensis Februarii EDUARDUS WARMINGTON, Britannus e Dudley oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Ueber Phenyluracil und analoge Verbindungen“ et examine die 30. mensis Novembris 1892 magna cum laude superato.
36. die 8. mensis Februarii ERNESTUS DEUTSCH, Ezelingensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Das Verhältniss Karl Ritters zu Pestalozzi und seinen Jüngern“ et examine die 22. mensis Aprilis 1892 magna cum laude superato.
37. die 11. mensis Februarii CAROLUS THEODORUS LUDOVICUS HAGEMANN, Asnidiensis, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Ueber die Einwirkung von Methylenjodid auf Natracetessigester“ et examine die 17. mensis Decembris 1892 summa cum laude superato.

38. die 11. mensis Februarii PETRUS SALMIS BURNS, Americanus e New Bradford in civitate Massachussetts oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Chemisches Verhalten einiger dimolecularer Nitrile“ et examine die 8. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
39. die 27. mensis Februarii IOHN SCHOLTE NOLLEN, Americanus e Pella in civitate Iowa oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Goethes Goetz von Berlichingen auf der Bühne“ et examine die 28. mensis Iulii 1892 rite superato.
40. die 27. mensis Februarii IULIUS SCHAPLER, Varsoviensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Chamissos Peter Schlemihl“ et examine die 17. mensis Novembris 1892 cum laude superato.
41. die 4. mensis Martii RUDOLFUS LINDNER, Sitaviensis, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Ueber zwei isomere Benzyl-derivate des Nitroso- β -Benzylhydroxylamins“ et examine die 16. mensis Februarii 1893 magna cum laude superato.
42. die 8. mensis Martii GUILIELMUS WEYGANDT, Visbadensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Entstehung der Träume“ et examine die 30. mensis Ianuarii 1893 magna cum laude superato.
43. die 15. mensis Martii ARNO KOESTER, Saxo-Aldenburgensis e vico Klein-Stechau oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Zur Umlagerung der Oximidverbindungen“ et examine die 16. mensis Decembris 1892 magna cum laude superato.
44. die 15. mensis Martii CLEMENS FOERSTER, Budissensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Zur Geographie der politischen Grenze“ et examine die 7. mensis Iulii 1892 magna cum laude superato.
45. die 17. mensis Martii OTTO BEST, Hassus e vico Osthofen oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Ueber γ -Oxyterpenylsäure“ et examine die 4. mensis Martii 1893 magna cum laude superato.
46. die 22. mensis Martii HERMANNUS TIMPE, Brunsvicensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber die Beziehungen der Phosphate und des Caseins zur Milchsäuregährung“ et examine die 26. mensis Novembris 1892 summa cum laude superato.
47. die 23. mensis Martii CAROLUS POHL, Neo-Brenoburgensis, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Das Verhältniss der Philosophie zur Theologie bei Roger Bacon“ et examine die 2. mensis Martii 1893 rite superato.
48. die 23. mensis Martii ALFONSUS DE HEYKING, Mitaviensis, tradita dissertatione admodum laudabili typis impressa quae inscribitur „L'exterritorialité“ sine examine.

49. die 28. mensis Martii ERNESTUS SCHWALBE, Saxo e vico Niederhasslau oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Die historische Entwicklung des Anschauungsprincipes in der Zeit von Luther bis Pestalozzi“ et examine die 15. mensis Martii 1893 rite superato.
50. die 29. mensis Martii LUDOVICUS HORN, Palatinatensis e Homburg oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Kritik der Verfahren zur Bestimmung des Lebendgewichtes beim Rinde durch Messung“ et examine die 14. mensis Novembris 1892 magna cum laude superato.
51. die 29. mensis Martii LIGHTNER WITMER, Americanus e Philadelphia oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Zur experimentellen Aesthetik einfacher räumlicher Formenverhältnisse“ et examine die 18. mensis Iulii 1892 magna cum laude superato.
52. die 5. mensis Aprilis IOHN WESLEY JOHNSON, Americanus e Richmond in civitate Mississippi oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Researches ou Heat of obscure Rays“ et examine die 14. mensis Iulii 1892 rite superato.
53. die 8. mensis Aprilis OSCARUS OELSNER, Saxo e Meerane oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber die Einwirkung von 2 Molekulen Monochloressigester auf Dinatriumacetondicarbonsäureester und über ein Condensationsproduct des Acetondicarbonsäureesters“ et examine die 4. mensis Martii 1893 magna cum laude superato.
54. die 8. mensis Aprilis FRIDERICUS PANZER, ex Asch in Bohemia oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Meister Rümzlants Leben und Dichten“ et examine die 12. mensis Decembris 1892 magna cum laude superato.
55. die 11. mensis Aprilis AUGUSTUS HOEFER, Nassovius e vico Miehlen oriundus, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Die Reiserechnungen des Bischofs Wolfger von Passau“ et examine die 14. mensis Iulii 1892 magna cum laude superato.
56. die 12. mensis Aprilis CAROLUS KOETSCHAU, ex oppido Ohrdruf oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Barthel Beham und der Meister des Messkircher Altars“ et examine die 28. mensis Februarii 1893 magna cum laude superato.
57. die 12. mensis Aprilis MAXIMILIANUS CARLSON, Saxo-Borussus e vico Grana oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Säuren aus dem Dicyanhydrin des Benzoylacetons“ et examine die 16. mensis Februarii 1893 magna cum laude superato.
58. die 12. mensis Aprilis RUDOLFUS MAEDER, Saxo e vico Dorfhain oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Die paedagogische Bedeutung Fischarts“ et examine die 15. mensis Martii 1893 cum laude superato.

59. die 15. mensis Aprilis MICHAÏLO R. POPOVIČ, e Belgrad oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Der Friede von Karlowitz“ et examine die 8. Martii 1893 cum laude superato.
60. die 15. mensis Aprilis GUSTAVUS BRUNO MOCKER, Caminitiensis, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „De musis a poetis Graecorum in componendis carminibus invocatis“ et examine die 22. mensis Decembris 1892 rite superato.
61. die 18. mensis Aprilis BRUNO KAEMPFE, Saxo-Borussus e Schkeuditz oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Beiträge zu experimentellen Prüfung der Methode der richtigen und falschen Fälle“ et examine die 23. mensis Novembris 1892 cum laude superato.
62. die 19. mensis Aprilis HERMANNUS FLEISCHHAUER, Marsipolensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber die Condensation von Estern und Nitrilen mittels Natriumaethylats“ et examine die 27. mensis Octobris 1892 magna cum laude superato.
63. die 20. mensis Aprilis GEBHARDUS HEEB, Helveticus e vico Altstätten in civitate San-Gallo oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Die Genossengüter im Canton St. Gallen“ et examine die 19. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
64. die 25. mensis Aprilis PAULUS SCHWARZ, Nissensis, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Umar ibn abi rebî 'a ein arabischer Dichter der Umajjadenzeit“ et examine die 22. mensis Decembris 1892 magna cum laude superato.
65. die 25. mensis Aprilis OTTO SCHMIDT, Saxo ex Urbe Susudala oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Hugo von St. Victor als Pädagog“ et examine die 6. mensis Februarii 1893 cum laude superato.
66. die 28. mensis Aprilis IOANNES WOLF, Berolinensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Ein anonymer Musiktraktat des elften bis zwölften Jahrhunderts“ et examine die 14. mensis Februarii 1893 rite superato.
67. die 5. mensis Maii FRANCISCUS BACHMANN, Anhaltinus e vico Thurland oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Die Entwicklung der Ethik Schleiermachers“ et examine die 4. mensis Augusti 1892 cum laude superato.
68. die 5. mensis Maii HENRICUS SHERING PRATT, Americanus e Toledo in civitate Ohio oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Beiträge zur Kenntniss der Pupiparen“ et examine die 20. mensis Iulii 1892 magna cum laude superato.

69. die 10 mensis Maii HENRICUS BRANDENBURG, Asnidiensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Abnorme electromotorische Kräfte des Quecksilbers“ et examine die 25. mensis Februarii 1893 magna cum laude superato.
70. die 12. mensis Maii HOWARD B. GIBSON, Americanus e Harren in civitate Connecticut oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „On the Liberation of Nitrogen during the Process of Putrefaction“ et examine die 23. mensis Iulii 1892 cum laude superato.
71. die 18. mensis Maii ERICUS KLUSEMANN, Budensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber die Zusammensetzung und die Beschaffenheit der aus den grossen und aus den kleinen Fettkügelchen der Kuhmilch gewonnenen Butter“ et examine die 22. mensis Novembris 1892 magna cum laude superato.
72. die 30. mensis Maii PAULUS FRIEDERICUS AEMILIUS BALKE, ex oppido Saalfeld oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Zur Kenntniss der Xantinkörper“ et examine die 28. mensis Februarii 1893 magna cum laude superato.
73. die 1. mensis Iunii THEODORUS KLÄHR, Dresdensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Richard Mulcasters Leben, Wirken und pädagogische Ideen“ et examine die 6. mensis Februarii 1893 cum laude superato.
74. die 1. mensis Iunii OTTO ALBERTUS NEUMEISTER, Saxo e vico Gross-Schoenau oriundus tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Ueber Oenanthinbromüre“ et examine die 5. mensis Maii 1893 cum laude superato.
75. die 3. mensis Iunii THEODORUS STIER, Borussus e vico Karalene oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Analyse und Kritik der Berkeley'schen Erkenntnisstheorie und Metaphysik“ sine examine.
76. die 6. mensis Iunii MICHAEL ALTSCHUL, Russus ex oppido Nowogradok oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Ueber die kritischen Grössen einiger organischer Verbindungen“ et examine die 15. mensis Maii 1893 cum laude superato.
77. die 7. mensis Iunii WLADIMIR S. PANTSCHOW, Bulgarus ex oppido Etropol oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Die Agrarverhältnisse des Fürstenthumes Bulgarien in ihrer geschichtlichen Entwicklung“ et examine die 8. mensis Maii 1893 magna cum laude superato.
78. die 7. mensis Iunii CAROLUS IOANNES A VIETH, Dresdensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Anwendungen einer vielfach komplexen Grösse auf die Zahlentheorie“ et examine die 29. mensis Aprilis 1893 cum laude superato.

79. die 8. mensis Iunii RAYMUNDUS RUDOLFUS SCHMIDT, Lipsiensis, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Ueber alkylirte Toluidin-sulfonsäuren“ et exmine die 5. mensis Maii 1893 cum laude superato.
80. die 13. mensis Iunii WACLAW M. BORZUCHOWSKI, Polonus e vico Zabki oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Der Zusammenhang der Menge der im gesammten Ackerboden und in den abschlämmbaren Bestandtheilen enthaltenen Pflanzennährstoffe mit der Fruchtbarkeit des Bodens“ et examine die 4. mensis Maii 1893 cum laude superato.
81. die 15. mensis Iunii MAX WEGER, Lipsiensis, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Ueber Bromsubstitutionsproducte der Sebacinsäure, Oxy-Derivate derselben und deren Oxydationsproducte“ et examine die 28. mensis Aprilis 1893 summa cum laude superato.
82. die 21. mensis Iunii GUILLELMUS GUNDERMANN, Saxo e vico Mockau oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Quantitative Untersuchungen über die Bildung von Crotonsäure und Isocrotonsäure aus einigen β -Derivaten der Buttersäure“ et examine die 18. mensis Maii 1893 cum laude superato.
83. die 22. mensis Iunii PAULUS JURETSCHKE, Silesius e vico Leimerwitz oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Einfluss verschiedener Oelkuchensorten auf den Fettgehalt der Milch und auf die Beschaffenheit des Butterfettes“ et examine die 2. mensis Martii 1893 magna cum laude superato.
84. die 27. mensis Iunii CAROLUS DIETZ, Coburgensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Die lateinische Vorlage des alt-hochdeutschen Tatian“ et examine die 15. mensis Decembris 1892 magna cum laude superato.
85. die 27. mensis Iunii OSCARUS MEISNER, Silesius e vico Melaune oriundus, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Der Dekalog. Eine kritische Studie“ et examine die 24. mensis Aprilis 1893 cum laude superato.
86. die 4. mensis Iulii FRIDERICUS GEORGIUS WAECHTER, Saxo e vico Paschkowitz oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Sächsische Knappschafts-Statistik, umfassend Untersuchungen über Sterblichkeit, Invalidität und Krankheit“ et examine die 21. mensis Iunii 1893 rite superato.
87. die 4. mensis Iulii OTTO OCH, ex oppido Gotha oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Untersuchungen über die Einwirkung der getrockneten Biertreber und der getrockneten Getreideschlempe auf die Milchsecretion des Rindes“ et examine die 4. mensis Maii 1893 cum laude superato.

88. die 5. mensis Iulii IOANNES QUIQUEREZ, Stiriensis e vico Slavo-Bistrica oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Quellenstudien zu Schillers Jungfrau von Orleans“ sine examine.
89. die 6. mensis Iulii CHILES CLIFTON FERRELL, Americanus e Greenville in civitate South-Carolina oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Teutonic antiquities in the Anglosaxon Genesis“ et examine die 17. mensis Novembris 1892 cum laude superato.
90. die 6. mensis Iulii HUGO JUSATZ, ex urbe Waltershausen in civitate Sachsen-Gotha oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „De irrationalitate studia rhythmica“ et examine die 19. mensis Ianuarii 1893 cum laude superato.
91. die 14. mensis Iulii CAROLUS DEICHMANN, Halensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Das Problem des Raumes in der griechischen Philosophie bis Aristoteles“ et examine die 17. mensis Maii 1893 rite superato.
92. die 15. mensis Iulii PORPHYRIOS LOGOTHETIS, Graecus ex urbe Hagio-Strato, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „*Η ΘΕΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΑΘΗΝΑΙΟΠΟΥ*“ et examine die 1. mensis Iunii 1893 rite superato.
93. die 19. mensis Iulii BERNHARDUS STANGE, Saxo-Vimariensis ex urbe Sulza oriundus, tradita dissertatione typis impressa admodum laudabili quae inscribitur „Beziehungen zwischen Substratconcentration, Turgor und Wachstum bei einigen phanerogamen Pflanzen“ et examine die 18. mensis Iulii 1893 magna cum laude superato.
94. die 31. mensis Iulii FRED WASHINGTON ATKINSON, Americanus ex urbe Reading in civitate Massachusetts oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „The Professional Preparation of Secondary Teachers in the United States“ et examine die 27. mensis Iulii 1893 cum laude superato.
95. die 3. mensis Augusti IULIUS STOCKLASA, Litomisliensis tradita dissertatione typis impressa admodum laudabili quae inscribitur „Pedologische Studien I“ et examine die 21. mensis Iunii 1893 cum laude superato.
96. die 4. mensis Augusti HERMANNUS FREUDENBERG, Bremensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber die Bedeutung der electromotorischen Kraft für electrolytische Metalltrennungen“ et examine die 1. mensis Maii 1893 summa cum laude superato.
97. die 7. mensis Augusti SAMUEL BARNETT SCHRYVER, Londiniensis, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Untersuchungen über die Oxydationsproducte von Terpentinöl und die Derivate derselben“ et examine die 12. mensis Maii 1893 magna cum laude superato.

98. die 11. mensis Augusti OTTO SCHILLING, Brunsvicensis tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „De Legionibus Romanorum I. Minervia et XXX. Ulpia“ et examine die 10. mensis Martii 1893 cum laude superato.
99. die 18. mensis Septembris RAOUL RICHTER, Berolinensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Schopenhauers Verhältniss zu Kant in seinen Grundzügen. I. Th.“ et examine die 22. mensis Iulii 1893 summa cum laude superato.
100. die 18. mensis Septembris IOHN C. ROE, Neo-Eboracensis, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Some obscure and disputed points in Byronic biography“ et examine die 2. mensis Iunii 1893 cum laude superato.
101. die 18. mensis Septembris RUDOLFUS HENNIG, Lipsiensis, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Symbolae ad Asiae minoris reges sacerdotes Polemonemque I. Ponti regem“ et examine die 4. mensis Iulii 1893 rite superato.
102. die 18. mensis Septembris ALEXANDER DE HEMPTINNE, Gandanensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber die electriche Leitfähigkeit der Flamme und der Gase“ et examine die 30. mensis Iunii 1893 cum laude superato.
103. die 18. mensis Septembris OSCARUS SCHELLENBERGER, Saxo-Borussus e vico Ratscher oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Ueber die Grösse und die Zahl der Fettkügelchen in der Milch von Kühen verschiedener Rassen“ et examine die 13. mensis Februarii 1893 cum laude superato.
104. die 18. mensis Septembris MARTINUS BÜLZ, Lipsiensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „De Provinciarum Romanorum quaestoribus, qui fuerunt ab A. V. C. DCLXXII usque ad A. V. C. DCCX“ et examine die 18. mensis Maii 1893 magna cum laude superato.
105. die 18. mensis Septembris DUNCAN SPAETH, Americanus ex urbe Philadelphia oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Die Syntax des Verbums in dem angelsächsischen Gedichte Daniel“ et examine die 11. mensis Iulii 1893 summa cum laude superato.
106. die 18. mensis Septembris IOANNES SPITZNER, Borussus e vico Grossjehser oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Beitrag zur Kritik der Unterrichts- und Erziehungslehre des Desiderius Erasmus“ et examine die 8. mensis Februarii 1893 magna cum laude superato.
107. die 22. mensis Septembris HENRICUS GOECKEL, Meiningensis, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Zur Kenntniss des Menthols und Menthons und über die Oxydation des Methylcamphers“ et examine die 25. mensis Iulii 1893 magna cum laude superato.

108. die 22. mensis Septembris IULIUS RICHTER, Saxo e vico Klein-Schweidnitz oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Charles Rollins Traité des Études und seine Stellung in der Geschichte der zeitgenössischen französischen Pädagogik“ et examine die 12. mensis Iulii 1893 cum laude superato.
109. die 22. mensis Septembris KARAPET TER-MKRTTCHIAN, Russus e vico Zëgna oriundus, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Die griechischen Quellen über die Paulikianer“ et examine die 10. mensis Decembris 1892 cum laude superato.
110. die 25. mensis Septembris RICARDUS BUSCHIK, Saxo ex urbe Pirna oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „Die Abhängigkeit der verschiedenen Bevölkerungsdichtigkeiten des Königreiches Sachsen von den geographischen Bedingungen“ et examine die 2. mensis Decembris 1892 magna cum laude superato.
111. die 2. mensis Octobris ALFREDUS HELFF, Saxo-Borussus ex urbe Oschersleben oriundus, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Molekulargewichtsbestimmungen der Verbindungen von Phosphor und Schwefel und Schmelzpunkte von Gemengen beider Elemente“ et examine die 1. mensis Maii 1893 magna cum laude superato.
112. die 10. mensis Octobris FRIDERICUS ROTH, Bavaricus e vico Schwabach oriundus, tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Weibliche Erziehung und weiblicher Unterricht im Zeitalter der Reformation“ et examine die 4. mensis Iulii 1893 cum laude superato.
113. die 12. mensis Octobris CONSTANTINUS RADULESCU-MOTRU, Rumanus ex urbe Butoesti oriundus, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Zur Entwicklung von Kant's Theorie der Naturcausalität“ et examine die 22. mensis Iulii 1893 magna cum laude superato.
114. die 14. mensis Octobris THEODORUS BLOCH, Slesvicus ex urbe Christiansfeld oriundus, tradita dissertatione egregia quae inscribitur „Vararuci und Hemaçandra. Ein Beitrag zur Kritik und Geschichte der Prakrit-Grammatik“ et examine die 3. mensis Iulii 1893 summa cum laude superato.
115. die 21. mensis Octobris GEORGIUS TAYLOR FILES, Americanus ex urbe Portland in civitate Maine oriundus, tradita dissertatione admodum laudabili quae inscribitur „The Anglo-Saxon House“ et examine die 5. mensis Iunii 1893 cum laude superato.
116. die 26. mensis Octobris GEORGIUS RUPPRECHT, Lipsiensis, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Tennysons Naturschilderungen“ et examine die 29. mensis Iulii 1893 rite superato.

117. die 29. mensis Octobris RICARDUS MEIENREIS, Berolinensis, tradita dissertatione idonea quae inscribitur „Adam de la Hale's Spiel „Robin und Marion““ et examine die 14. mensis Iulii 1893 cum laude superato.
118. die 29. mensis Octobris CAROLUS HAGER, Curiensis tradita dissertatione laudabili quae inscribitur „Die Ueberwälzung der Zuckersteuer und die Prämie der Rübenzuckerindustrie in Deutschland und Frankreich“ et examine die 14. mensis Octobris 1893 rite superato.
119. die 31. mensis Octobris AEMILIUS ZIMMERMANN, Elbingensis, tradita dissertatione typis impressa idonea quae inscribitur „De epistulari temporum usu Ciceroniano quaestiones grammaticae I—IV“ et examine die 31. mensis Iulii 1893 rite superato.

Viginti candidatorum petitiones per idem tempus prosperum eventum non habuerunt.

