Ist aber dieses kleinere Stück gegen A irrational, oder in unendlichem Verhältnisse, so kann man durch noch so viel Wiederholungen desselben, doch niemals auf einen Punkt der unendlichen Linie treffen (coincidiren), wohin auch das Ende irgend einer ganzen Zahl trifft. Welches alles hier weder erwiesen, noch für unsern Zweck weiter betrachtet werden darf.

c) oder durch irgend ein Stück Länge, welches größer als die absolute Einheit, A, ist. Diess Stück kann nun sein:

α) eine ganze Zahl selbst, d. i., 2 A, 3 A, ... n A (wo n, wie auch immer in der Folge, jede mögliche noch so grosse ganze Zahl bedeuten soll); oder weil A die absolute Einheit ist, 2, 3, 4, 5 .... n (ohne Beisatz). So ist eben diess der einzige Fall, der hier weiter betrachtet werden muss;

β) eine ganze Zahl, und noch ein Stück, kleiner als 1 (das ist kleiner als A), oder ein uneigentlicher Bruch der absoluten Einheit. Ist das daran hangende Stück, das kleiner als 1 ist, gegen 1 rational, so hat dieses Stück die Form $\frac{m}{m+p}$, z. B. $\frac{2}{7}$; und fällt in seinen Wiederholungen auf die Endpunkte bestimmter ganzer Zahlen. Ist diess Stück aber gegen 1 irrational, so fallen keine Wiederholungen desselben mit ihren Endpunkten auf Endpunkte ganzer Zahlen.

4.

Nimmt man irgend eine beliebige ganze Zahl, grösser als 1 (z. B. $2 > 1$, $5 > 1$....), zum Maßstab, oder Schritt, womit man die unendliche Linie, innerhalb welcher die ganzen Zahlen dargestellt sind, durchlaufe oder ermesse, vom Anfange bis zu einer beliebigen Grenze; so ist klar:

a) dass jede ganze Wiederholung dieser höhern Einheit oder dieses höheren Maßes mit ihrem Endpunkt falle (coincidire) auf einen Endpunkt irgend einer ganzen Zahl. Denn die höhere Einheit besteht der Voraussetzung nach aus lauter ganzen absoluten Einheiten. Und es sind zwar alle diejenigen ganzen Zahlen, auf deren Endpunkt der Endpunkt einer bestimmtvielfachen Wiederholung der höhern Einheit fällt (womit eine Wiederholung der h. E. coincidirt), durch die Grösse der höhern Einheit bestimmt, und sind in gleichen Entfernungen von einander. Z. B. wenn 3 zur höhern Einheit angenommen wird, so sind die mit deren Wiederholungen zunächst coincidirenden ganzen Zahlen: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... Daher kann auch jede solche Zahl, welche mit einer bestimmt vielfachen Wiederholung einer höheren Einheit zusammenfällt, (der Kürze wegen: jede *Einfallszahl*) ausgedrückt werden: durch diejenige höhere Einheit, deren Einfallszahl sie ist, und zugleich durch die Wiederholungszahl dieser höheren Einheit. So z. B. 15 als Einfallszahl von 5, durch 5 und 3; wo 5, 3mal genommen werden muss, um 15 zu geben. Da also solche 2 Zahlen dergleichen dritte Zahlen vollkommen bestimmen, so werden sie mit Recht deren Bestimmungszahlen, oder Factoren genannt; ferner werden dergleichen Factoren, die wir hier betrachten, ganze Factoren genannt werden, weil sowohl die höhere Einheit, als deren Wiederholungszahl, der Voraussetzung nach ganze Zahlen sind. (Denn es giebt auch ganze Zahlen, welche gebrochne Factoren haben, z. B. $6 = \frac{9}{14} \cdot \frac{28}{3}$). Da aber in der ganzen folgenden Untersuchung nur von ganzen Factoren die Rede sein wird, so hat man hier unter Factoren immer nur ganze zu verstehen. — Die beiden Factoren einer Zahl untereinander multiplicirt (producirt) geben die Einfallszahl, also bei ganzen allemal eine ganze Zahl.

b) Bei jeder höheren Einheit liegen zwischen jeder Einfallszahl eine bestimmte Menge *solcher Zahlen*, welche keine Einfallszahlen sind, für diese höhere Einheit. Wenn z. B. die höhere Einheit = 2, so sind dergleichen *Zwischenzahlen* 1, 3, 5, 7, 9 ..... Und zwar je mehr ganze Einheiten die höhere Einheit enthält, je grösser wird die Menge der Zwischenzahlen gegen die Einfallszahlen derselben, wenn man bis zu einer beliebigen bestimmten Grenze fortgeht. Daher kann auch keine ganze Zahl (als höhere Einheit angesehen) ein Factor von irgend einer ihrer Zwischenzahlen sein; denn sonst wäre die Zwischenzahl zugleich eine Einfallszahl; z. B. 5 nicht von 13, oder 14.

c) Jede beliebige ganze Zahl, n, ist in Bezug auf jede andere ganze Zahl, m, die als höhere Einheit angesehen wird, entweder eine Einfallszahl, oder eine Zwischenzahl; z. B. 12 eine Einfallszahl für 2, 3, 4, 6; aber dieselbe 12 eine Zwischenzahl von 5, 7, 8 .... Ist nun n eine Einfallszahl von m, so muss m mehrere ganze male genommen (x mal genommen) n geben, also $xm = n$ sein. Daher muss auch n als m angesehen, und die Einheit davon gesucht, das ist n dividirt durch m, oder n : m die ganze Zahl x geben; oder $x = n : m = \frac{n}{m}$. Wenn also n eine Einfallszahl von m sein soll, so muss der Bruch dessen Zähler n und dessen Nenner m ist, eine ganze Zahl sein, oder auch: so muss n dividirt durch m eine ganze Zahl geben. Z. B. $\frac{12}{3} = 4$; also ist auch 12 eine Einfallszahl von 3. Man drückt diess kürzer so aus: es muss sich n durch m ohne Rest dividiren lassen, oder: m muss in n aufgehen.

5.

Wenn n eine Einfallszahl von m ist, also $xm = n$; so ist auch n eine Einfallszahl von x; z. B. 6 ist eine Einfallszahl von 2, und $2 . 3 = 6$; also ist 6 auch eine Einfallszahl von 3.. Um diess einzusehen, muss man sich davon überführen, dass bei der Multiplication auf die Ordnung zweier (oder auch mehrerer) Factoren nichts ankommt. Der allgemeine Beweiss davon wird hier am kürzesten aus der Erklärung der Multiplication geführt. Soll im allgemeinen a mit b multiplicirt werden, wo a und b ganze und gebrochne Zahlen aller Art bedeuten können, und heisst das Produkt daraus y; so muss sich verhalten 1 zu a, so b zu y. Also erhält man die Proportion

$$1 : a = b : y; \text{ und } y \text{ ist gleich } \frac{ab}{1}.$$

Da aber Proportionalität bleibt, wenn die Glieder der Proportion auf folgende Art versetzt werden (wie aus der Theorie der Proportionen erwiesen wird)

$$1 : b = a : y$$

so