10.

Betrachten wir die Reihe der 4, so ist klar, dafs diese ganze Reihe schon in der Reihe der 2 enthalten sein müsse; denn 4 ist eine gerade Zahl, also auch jede deren Vervielfachung. Und man erhält aus der Reihe der 2, die der 4, wenn man allemal eine Zahl herausläfst.

R. d. 2 : 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , . . .
* , 4 , * , 8 , * , 12 , * , 16 , * , 20 . . . .

Allgemein heifse diese Reihe 2^2 m

Der allgemeine Ausdruck aller Zwischenzahlen von 4 ist: (2^2 m $\mp$ 1, oder $\mp$ 2, oder $\mp$ 3), und wenn f. *oder* bedeutet: 2^2 m $\mp$ 1 f. 2 f. 3.

Daraus folgt:

a) dafs bei einer bestimmten Menge von Wiederholungen der 4 allemal $\frac{3}{4}$ Zwischenzahlen und $\frac{1}{4}$ zuff. Zahlen entstehen; z. B. da 25.4 = 100, so hat man bis 100, $\frac{3}{4}$.100 = 75 Zwischenzahlen und $\frac{1}{4}$.100 = 25 zusammengeff. Zahlen der 4.

b) Dafs die unendliche Reihe aller ganzen Zahlen bestehe aus $\frac{3}{4}$ von ihr Zwischenzahlen und $\frac{1}{4}$ von ihr zusammengesetzten Zahlen der 4.

11.

Hieraus werden nun, ohne dafs wir nöthig hätten, die Reihe der, 5, 6, 7, 8 .... nach einander zu betrachten, nachfolgende allgemeine Behauptungen, nebst ihren Beweisen, verständlich sein:

I) Jede Zahl n nimmt durch ihre unendliche Reihe aus der unendlichen Reihe aller ganzen Zahlen $\frac{1}{n}$ weg, und läfst von letzterer, als ihre eignen Zwischenzahlen $\frac{n-1}{n}$ übrig. Z. B. die Reihe der 7 ist $\frac{1}{7}$ der unendlichen Reihe aller Zahlen; und ihre Zwischenzahlen $\frac{6}{7}$ derselben.

Und wenn man m Wiederholungen von n nimmt, so erhält man bis auf diese Grenze, m Einfallszz. von n, und (n—1) m = nm — m Zwischenzahlen von n. Z. B. da 9.7 = 63 (also hier m = 9, n = 7), so hat man bis 63, 9 Einfallszz. und (7—1) 9 = 54 Zwischenzahlen von 7.

II) Von der Reihe von n ist die Hälfte in der Reihe von 2, der dritte Theil in der Reihe von 3, ... der n — 1te Theil in der Reihe von n — 1 enthalten. (Es heifse der Kürze wegen Rn Reihe von n.) Denn die Reihe von n ist:

n , 2n , 3n , 4n , 5n , 6n . . . . . .

Da nun in dieser Reihe als Coefficienten alle ganze Zahlen nach einander vorkommen, so kommen darunter auch alle gerade Zahlen = R2 vor; welche die Hälfte von allen Coefficienten betragen (1). Aber alle Zahlen, die eine gerade Zahl zum Coeff. haben, sind selbst gerade (8): also ist die Hälfte der Reihe von n gerade Zahlen, also Rn zur Hälfte in R2 enthalten.

Aber auch kommen als Coefficienten von Rn alle Zahlen der R3 vor, und je der dritte Coefficient ist eine solche Zahl, also ist auch die Zahl der Rn die diesen Coefficienten hat, aus der Reihe der 3; und je die dritte der Rn ist eine solche. Also ist $\frac{1}{3}$ Rn in der R3.

Und so für R4, R5 .... Rn — 1.

III) Wenn n die Factoren a, b, c . . . . hat, so ist die ganze Rn, sowohl in Ra, als Rb, als Rc, als . . . . . enthalten. Das ist, die ganze Rn ist enthalten in der Reihe jedes ihrer Factoren; z. B. 4 hat die Factoren 2.2; also ist die R4 ganz in der R2. Oder 6 hat die Factoren 2.3; also ist R6 ganz in R2 und auch ganz in R3. Oder: 12 = 2.2.3 = 4.3 = 2.6; also ist die R12 in R2, in R3, in R4, in R6.

Denn wenn m = abcd; so kann man d als erste Zahl der Rd annehmen, es ist also m in Rd. Auch (5) kann man setzen m = abdc, so gehört m in Rc; daher auch in die Reihe von b und in Ra.

IV) Hat aber n keinen Factor aufser 1 und sich selbst (d. i. ist n eine absolute Primzahl, eine Primzahl schlechthin), so ist auch Rn nicht ganz unter irgend einer Reihe der vorhergehenden Zahlen enthalten. Es hat also die Reihe von n einen Theil von sich als eigenthümliche Zahlen, das ist, als solche, die sich durch die ersten Zahlen aller vorhergehenden Reihen, oder durch deren Producte nicht theilen lassen.

Hiebei ist auch die Aufgabe leicht zu lösen, wie viel von der Reihe von n, wenn n eine Primzahl ist, die eigenthümlichen Zahlen derselben betragen (p bedeute jede Primzahl; also Rp soviel als Reihe von n, wenn n eine Primzahl ist)? Von der Rp ist $\frac{1}{2}$ in der R2, $\frac{1}{3}$ in R3, $\frac{1}{4}$ in der R4, ... $\frac{1}{p-1}$ der R(p — 1). Es möchte daher Jemand voreilig sagen, die eigenthümlichen Zahlen der Rp betrügen 1 (wenn die Rp selbst gleich 1 gesetzt wird) — $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{p-1})$. Diefs ist aber darum falsch, weil die $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ .... $\frac{1}{p-1}$ selbst zum Theil in einander liegen. Wenn z. B. p = 5; so liegt $\frac{1}{2}$ R5 in R2, $\frac{1}{3}$ R5 in R3, $\frac{1}{4}$ R5 in R4. Allein die eigenthümlichen Zahlen der R5 können nicht sein = $1 - (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$ = $1 - \frac{13}{12}$; denn der $\frac{1}{4}$, der von R5 in R4 gehört, liegt schon in dem $\frac{1}{2}$ das davon in R2 fällt, denn die ganze Reihe von 4 liegt in der R2 (III); und von dem $\frac{1}{3}$ das von R5 in R3 gehört, liegt auch schon $\frac{1}{2}$ in R von 2; denn die Hälfte der Reihe von 3 liegt in R2 (II); also gehört der Reihe von 5 eigenthümlich 1 (das ist ihr Ganzes, sie selbst) — $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}) = 1 - (\frac{1}{2}+\frac{1}{6}) = 1 - \frac{4}{6} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Also ist der dritte Theil der R5 eigenthümliche Zahlen; also an sich je die dritte Zahl, welches zwar in

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

nicht