natürlichste und gründlichste Weg dadurch eröffnet, daſs wir nacheinander die Reihen aller Primzahlen aus der unendlichen Reihe aller ganzen Zahlen herausnehmen, und bemerken, welche Zahlen als Primzahlen bis auf eine beliebige Grenze übrig bleiben. Denn diejenigen Zahlen, die durch die Reihen der vorhergehenden Zahlen nicht weggenommen werden, sind Primzahlen, laut der Definition. Immer aber will ich diejenigen Zahlen, die durch eine bestimmte Menge von aufeinanderfolgenden Zahlenreihen aller Primzahlen von 2 an nacheinander noch aus der Reihe aller ganzen Zahlen, als noch mögliche Primzahlen übrig gelassen werden, problematische Zahlen nennen, das heiſst, solche Zahlen, von denen erst noch durch weitere Betrachtung ausgemacht werden muſs, ob sie Primzahlen sind oder nicht, aus welchen aber alle folgende Primzahlen sein müssen.

Die Reihe der 2 zuförderst, nimmt aus der unendlichen Reihe aller Zahlen, die ich der Kürze wegen hinfort S nennen will, die Hälfte weg, die andere Hälfte ($\frac{1}{2}$ S) bleibt problematisch. Und zwar wechseln die geraden Zahlen mit den ungeraden ab; alle gerade Zahlen enden sich auf 0, 2, 4, 6, 8; alle ungerade Zahlen auf 1, 3, 5, 7, 9; die ungeraden Zahlen aber sind die noch problematischen $= \frac{1}{2}$ S, aus denen also alle Primzahlen, so gröſser als 2 sind, sein müssen. Es sind also alle Primzahlen über 2, der Form $2m \mp 1$ und enden sich auf 1, 3, 5, 7, 9. Nicht aber alle diese problematische Zahlen, d. i. alle ungerade der Form $2m \mp 1$ sind darum Primzahlen.

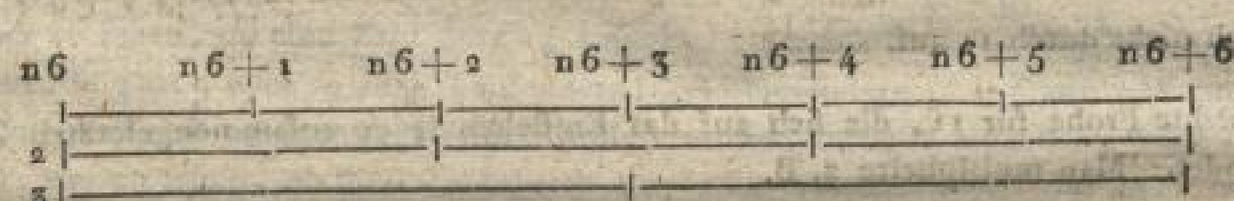
Die Reihe der 3, welche eine Primzahl ist, indem sie ungerad ist, und nur 2 vorhergeht, enthält für sich betrachtet $\frac{1}{3}$ S; da aber die Hälfte der R3 schon in R2 enthalten ist (11), so nimmt R3 von S nur $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ weg. Das ist aus S die je sechste Zahl, auſer denen die schon R2 weggenommen hat. Nehmlich die mit * bezeichneten:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 . . . .
 * * *

Also aus der Reihe der durch R2 übriggelaſsnen problematischen Zahlen, die je dritte:

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 . . . . .
* * * * *

Die R2 zugleich mit R3, nehmen also aus S zusammen $(\frac{1}{2} + \frac{1}{6})$S weg, also $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ S. Es bleiben demnach nach Wegnahme von R2 und R3 aus S noch $\frac{1}{3}$ S problematische Zahlen, oder auch $\frac{2}{6}$ S. Von je 6 Zahlen also aus S bleiben nur noch 2 übrig; 6 aber ist $= 2 . 3$ also die Stelle in S, wo der Maſsstab 2 und der Maſsstab 3 immer zusammenfallen. Jedes Vielfache von 6, n6, geht durch 2 und durch 3 auf; $n6 + 1$ geht weder durch 2 noch durch 3 auf; $n6 + 2$ geht durch 2 auf; $n6 + 3$ durch 3; $n6 + 4$ wieder durch 2; $n6 + 5$ aber weder durch 2 noch durch 3. Welches durch folgendes Schema deutlich wird:



Also von je 6 Zahlen, von n6 an gerechnet, die erste und die 5te, sind die beiden, vermöge der Reihen von 2 und 3 noch problematischen Zahlen; $n6 + 5$ ist aber $= n6 - 1$; also sind die beiden problematischen Zahlen $n6 \mp 1$; oder wenn man von allen Vielfachen der 6 nach einander ∓ 1 (d. i. entweder + oder − 1) nimmt, so erhält man die Reihe der nun noch vermöge der Reihe von 2 und 3 problematischen Zahlen, aus welchen also alle Primzahlen, die gröſser als 3 sind, sein müssen. Alle Primzahlen über 3 sind also der Form $n6 \mp 1$, wo n alle ganze Zahlen nach einander bedeutet. Die Reihe der problematischen Zahlen vermöge R2 und R3 ist also:

6 12 18 24 30 36 42 . . . . . .
5 7, 11 13, 17 19, 23 25, 29 31, 35 37, 41 43, ...

Die Reihe der 4 nimmt nichts weg, weil sie schon in R2 enthalten; sie wird also hier, wie die Reihen aller zusammengesetzten Zahlen, weil sie in den Reihen jedes ihrer Factoren enthalten sind (11) weggelassen.

Die R5 nimmt für sich $\frac{1}{5}$ S weg, da aber in R5 selbst die ganze S in den Coefficienten wiederkehrt, und von S $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ durch R2 und R3 weggenommen sind, so sind auch nur von R5 noch $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ solche Zahlen, die nicht schon in R2 und R3 enthalten sind; also nimmt, weil das Uibrige schon R2 und R3 weggenommen, R5 nur noch $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ von S weg; $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ aber ist $\frac{1}{15}$, also nimmt R5 noch $\frac{1}{15}$ S weg, oder auch $\frac{2}{30}$ S. Da nun 30 die erste Zahl, die durch 2, 3, 5 theilbar ist (also die erste Einfallszahl für 2, 3 und 5 zugleich), so heiſst dieſs: von jeden 30 Zahlen werden durch die R5 noch 2 weggenommen. Die Reihe der probl. Zahlen verm. R2 und R3 war:

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, 65, 67
* * * * *

und aus ihr fallen innerhalb jedes n30, 2 Zahlen weg, nehmlich $n30 + 5$ und $n30 + 25$; oder kürzer $n30 \mp 5$.

Da nun R2 + R3 wegnahm $\frac{2}{3}$ und R5 $\frac{1}{15}$, so nehmen R2 + R3 + R5 weg $\frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$; also von je 30 Zahlen 22; und es bleiben demnach noch von jeden 30, 8, d. i. $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$, das ist $\frac{15}{15} - \frac{11}{15}$ übrig. Und weil diese 8 von 30 nach jedem Vielfachen von 30, wo 2 und 3 und 5 zugleich einfallen, in gleichen Distanzen wiederkehren müssen, und in den ersten 30 die übrigbleibenden sind: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29: so sind also auch alle, vermöge R2 und R3 und R5 noch problematische Zahlen der Form:

$n30 + 1$ s. 7, s. 11, s. 13, s. 17, s. 19, s. 23, s. 29.

und da alle Primzahlen, die > 5 sind, aus diesen problematischen Zahlen sein müssen, so sind auch alle Primzahlen > 5 dieser Form.

Die R7 nähme für sich $\frac{1}{7}$ S weg, allein von diesem $\frac{1}{7}$ S fällt $\frac{11}{15}$ weg, denn $\frac{11}{15}$ der ganzen S, die auch in den Coefficienten der R7 wiederkehrt, sind schon in R2 + R3 + R5 enthalten; also bleiben nur $\frac{4}{15}$ oder $\frac{8}{30}$ von diesem $\frac{1}{7}$ S übrig;

also