könnte diese Tafel noch dadurch sehr verkürzt werden, dass etwa alle durch 2, 3, und 5 zusammengesetzte Zahlen, weil man diese leicht erkennen kann, und ihrer eine so grosse Menge ist, daraus weggelassen würden.

17.

Es kommt also darauf an zu zeigen, wie man eine solche Tafel, die Factorentafel genannt wird, auf dem kürzesten Wege, bis auf eine weite Grenze verfertigen könne. Sodann auch, wie man von jeder Zahl, einzeln dieselbe betrachtet, ohne Factoren und Primzahlentafel, alle mögliche einfache Factoren finden könne. (Man vergesse nicht, dass hinfort unter: *Factoren* überhaupt, *einfache Factoren* verstanden werden). Ich zeige zuerst das letztere.

Zuerst bringe ich folgende beide Sätze in Erinnerung:

a) Wenn man in irgend ein Product (in irgend eine zusammengesetzte Zahl) mit irgend einem seiner Factoren dividirt, so enthält der Quotient alle übrige Factoren. Denn auf die Ordnung der Factoren kommt nichts an.

b) Wenn man von den kleinsten Primzahlen anfängt, und n untersucht, ob n dadurch theilbar sei, und keine Primzahl übergeht, so muss man alle einfachen Factoren erhalten, welche n hat, wenn man nur bis auf die oben gezeigte Grenze $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots \frac{n}{m} < m$ fortgeht. Dabei muss man aber nicht vergessen, mit den Primzahlen so vielmal nach einander zu untersuchen, als möglich ist, weil n eine Potenz von p in sich haben kann.

18.

Man braucht hiebei nur alle Primzahlen zu untersuchen, welche innerhalb 1 und der Quadratwurzel von n, ($\sqrt{n}$) liegen. (Die Quadratwurzel von n ist diejenige Zahl, die mit sich selbst multiplicirt n giebt. Nicht alle Zahlen, ja bei weitem die allerwenigsten, sind ein Product einer Zahl in sich selbst, das ist haben eine wirkliche Quadratwurzel. Z. B. 2, und 3 nicht, von 4 ist die Wurzel 2, von 5, 6, 7, 8 giebt es keine, von 9 ists 3, von 10, 11, 12, 13, 14, 15 giebt es keine, von 16 ist 4 u. s. w. Es möchte vielleicht Mancher dieser Theorie unkundige denken, es könne von dergleichen Zahlen, von denen keine ganze Zahl die Quadratwurzel ist, doch einen Bruch geben, der mit sich selbst multiplicirt, diese Zahl gäbe. Allein ein nothwendiger Bruch (d. i. der keiner ganzen Zahl gleich ist) kann mit sich selbst multiplicirt keine ganze Zahl geben, also kann auch umgekehrt keine ganze Zahl ein Product eines nothwendigen Bruches in sich selbst sein. Diess alles wird nicht für die geschrieben, welchen die wissenschaftlichen Elemente der Arithmetik bekannt sind, sondern blos für die, welche nur eine gemeine Erkenntniss der Rechenkunst haben, und doch diese Tafeln verstehen und brauchen wollen).

Ich will diesen Satz zuerst an einigen Beispielen, sodann allgemein erweisen.

Es seien alle einfachen Factoren von 49 zu suchen; 2 ist kein Theiler, also fallen alle Theiler, die es geben könnte, innerhalb 2 und $\frac{49}{2}$, d. i. 24 (weil hier nur von ganzen Zahlen die Rede ist; — für unsern Zweck); 3 theilt auch nicht, also ist die Grenze 3 bis $\frac{49}{3}$, d. i. 16; auch 5 theilt nicht, also wird die Grenze $\frac{49}{5}$, d. i. 9, 7 theilt, denn 7.7 ist 49; also ist nun die Grenze $\frac{49}{7} = 7$; so weit ist aber untersucht worden, also giebt es auch auser 7 keinen Theiler von 49. Sollte es z. B. 11 sein, so müsste der andere Factor $\frac{49}{11} < 7$ sein, wovon wir schon gefunden haben, dass es einen solchen nicht giebt.

Es sei ferner 97 zu untersuchen; 2 theilt nicht, also ist die Grenze $\frac{97}{2}$, d. i. 48; 3 theilt nicht, also ist die Grenze $\frac{97}{3}$, d. i. 32; 5 theilt nicht, also die Grenze $\frac{97}{5}$, d. i. 19; 7 theilt nicht, also die Grenze $\frac{97}{7}$, d. i. 13; und 11 kann auch nicht theilen, denn dann wäre der andere Factor $\frac{97}{11} < 11$, also 7, 5, 3, 2; welches von 97 keine Factoren sind. Um so weniger kann eine grössere Primzahl als 11 ein Theiler von 97 sein. Es ist also 97 eine Primzahl; 97 ist daher auch keine Quadratzahl; und $9.9 = 81$ aber $10.10 = 100$. Es fällt also die idealische Quadratwurzel von 97 zwischen 9 und 10, d. i. sie ist grösser als 9, aber kleiner als 10. Es heisse diese idealische $\sqrt{97}$ w, so ist w mal $w = 97$; nimmt man daher eine grössere Zahl als w, d. i. $w+y$, so kann nicht $(w+y)$ mal $w = 97$ sein, sondern es muss eine grössere Zahl als 97 werden. Diejenige Zahl also mit der multiplicirt $w+y$ 97 giebt, muss kleiner als w sein, also im allgemeinen $w-z$; wenn es also einen Factor geben sollte, der grösser als w ist, so muss es einen geben, der kleiner als w ist; und da es hier nur auf die Primzahlen ankommt, so müsste dann eine Primzahl, die kleiner als w ist, ein Factor von 97 sein. Hat man also alle Primzahlen, bis w, das ist, bis 9, also 2, 3, 5, 7 untersucht, und keine davon als Factor befunden, so giebt es von 97 keinen einfachen Factor, also auch keinen zusammengesetzten, also 97 ist eine Primzahl.

Im allgemeinen, wenn die Zahl n zu untersuchen, und gefunden worden, dass keine Primzahl bis auf $\sqrt{n}$ (es mag diese Wurzel eine Zahl, oder sie mag idealisch sein) ein Factor derselben ist, so behaupte ich, dass n eine Primzahl sei. Denn sollte $n+y$ ein Factor von n sein, so müsste es auch einen, der Form $n-z$ geben, welchen es der Voraussetzung nach nicht giebt.

Um also zu erforschen, ob n eine Primzahl sei, darf man nur mit allen Primzahlen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\ldots \sqrt{n}$$

untersuchen; giebt es bis dahin keinen Factor, so ist n eine Primzahl.

Es ist hiebei noch die Frage zu beantworten, wenn man vor dieser Grenze Theiler finde, wie viel noch Theiler über diese Grenze hinausliegen können? Ich behaupte, über $\sqrt{n}$ liegt nur ein Theiler von n hinaus, wiewohl auch diess nicht nothwendig ist. Diess kann kurz im allgemeinen also bewiesen werden:

Der erste Theiler von n, der kleiner als $\sqrt{n}$ ist, heisse a, der zweite b, der dritte c u. s. f. Ist nun a ein Theiler von n, so ist $a.\frac{n}{a} = n$; die übrigen Theiler von n müssen daher auch Theiler von $\frac{n}{a}$ sein, weil a eine Primzahl ist. Also muss es nun wenigstens einen Theiler von n geben, der $< \sqrt{\frac{n}{a}}$ oder $\sqrt{\frac{n}{a}}$ selbst ist; da nun $\sqrt{\frac{n}{a}} < \sqrt{n}$ (indem a eine ganze Zahl ist), so muss auch dieser 2te Theiler $b < \sqrt{n}$ sein. Die beiden Theiler a und b von n müssen also kleiner als $\sqrt{n}$ sein. Es ist also $a.b.\frac{n}{a.b} = n$. Soll es auser diesen beiden, und $\frac{n}{a.b}$, noch mehrere Factoren geben, so müssen es Factoren von $\frac{n}{a.b}$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332631095/23 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG