$\frac{n}{a.b}$ ſein, weil a und b Primzahlen ſind; alſo einer davon entweder $\sqrt{\frac{n}{a.b}}$ oder kleiner als $\sqrt{\frac{n}{a.b}}$. Iſt $c = \sqrt{\frac{n}{a.b}}$ ſo iſt $c < \sqrt{n}$, denn $\sqrt{\frac{n}{a.b}} < \sqrt{n}$. Iſt aber $c < \sqrt{\frac{n}{a.b}}$ ſo iſt c um ſo mehr kleiner als $\sqrt{n}$. Alſo die 3 Theiler a, b, c ſind kleiner, als $\sqrt{n}$, und nur der vierte, nehmlich $\frac{n}{a.b.c}$ kann $>$ ſein als $\sqrt{n}$, kann aber auch kleiner ſein. Soll nun auſer a, b, c $\frac{n}{a.b.c}$ noch ein Theiler ſein, ſo muſs er auch ein Theiler von $\frac{n}{a.b.c}$ ſein, denn a, b, c ſind Primzahlen, alſo der 4te d, muſs entweder $= \sqrt{\frac{n}{a.b.c}}$ oder $< \sqrt{\frac{n}{a.b.c}}$ ſein, in beiden Fällen alſo $< \sqrt{n}$, weil $\sqrt{\frac{n}{a.b.c}} < \sqrt{\frac{n}{a.b}} < \sqrt{\frac{n}{a}} < \sqrt{n}$. Es iſt alſo dann $a.b.c.d.\ \frac{n}{a.b.c.d} = n$; und a, b, c, $d < \sqrt{n}$; nur $\frac{n}{abcd}$ kann gröſser ſein, als $\sqrt{n}$. Iſt nun $\frac{n}{abcd}$ eine Primzahl, ſo hat man $n = a.b.c.d\ \frac{n}{abcd}$, welches die einfachen Factoren von n ſind, und von denen blos der letzte $= \frac{n}{abcd} > \sqrt{n}$ ſein kann. Da nun, wenn $\frac{n}{abcd}$ wieder eine zuſammengeſetzte Zahl iſt, unſere Schluſsfolge von neuem, und überhaupt ins Unendliche gilt, jede Zahl n aber, weil ſie ein endliches Product iſt, endlich einmal einen letzten Factor $\frac{n}{abcd\ldots p}$ als Primzahl haben muſs: ſo iſt erwieſen, was zu erweiſen war.

Man kann dieſe Betrachtung auch für die dritten, 4ten, pten Wurzeln fortſetzen, und unterſuchen, ob nicht innerhalb der $\sqrt[p]{n}$ alle Factoren von n weniger $p-1$ Factoren fallen müſſen. Allein, weil die Reſultate dieſer Betrachtungen auf unſer Vorhaben keinen Einfluſs haben, ſo laſſen wir ſie bei Seite liegen.

19.

Hierauf beruht folgendes Verfahren, von der einzeln betrachteten Zahl n alle einfache Theiler zu finden, oder im Fall es deren keine geben könne, zu entſcheiden, ob n eine Primzahl iſt oder nicht (Hiebei iſts freilich gut, wenn man bis $\sqrt{n}$ eine Primzahlentafel hat, weil man, wie gezeigt, blos mit den Primzahlen n zu unterſuchen hat. Wenigſtens wird man, wenn man eine ſolche Tafel nicht hätte, die durch 2, 3, 5, 11 theilbaren Zahlen leicht erkennen und ausſchlieſsen.):

I. Man ſehe, ob irgend eine Zahl (Primzahl), ſo $< \sqrt{n}$ iſt, ein Factor von n iſt. Iſt $\sqrt{n}$ eine ganze Zahl, ſo iſt $\sqrt{n}$ ſelbſt ein Factor, und der andere auch $\sqrt{n}$; denn $\sqrt{n}.\sqrt{n} = n$. Dann müſſen alſo alle übrige Factoren in $\sqrt{n}$ liegen. Es kann aber auch in dieſem Falle, eben wenn $\sqrt{n}$ wieder eine zuſammengeſetzte Zahl iſt, doch einen oder beliebig viele, jenachdem n genommen wird, Factoren von n geben, ſo $< \sqrt{n}$ ſind. — Nun giebt es, bis auf $\sqrt{n}$ entweder einen Factor von n oder nicht. Iſt das letztere, ſo iſt n eine Primzahl. Iſt das erſtere, ſo heiſse dieſer Factor von n, $< \sqrt{n}$, a.

II. Dann dividire durch a in n, ſo iſt der Quotient $\frac{n}{a}$, und es müſſen alle übrige Factoren von n auch Factoren von $\frac{n}{a}$ ſein.

III. Man unterſuche, ob bis auf $\sqrt{\frac{n}{a}}$ ſich ein Factor von $\frac{n}{a}$ findet. Findet ſich keiner, ſo iſt $\frac{n}{a}$ eine Primzahl. Alſo alle Theiler von n ſind a und $\frac{n}{a}$. Findet ſich aber ein Theiler b, der $< \sqrt{\frac{n}{a}}$, ſo iſt b auch ein Theiler von n, und $a.b.\frac{n}{ab} = n$. Es iſt alſo nun $\frac{n}{ab}$ zu unterſuchen.

IV. Giebt es bis auf $\sqrt{\frac{n}{ab}}$, ($\sqrt{\frac{n}{ab}}$ mit eingeſchloſſen, wie hier immer zu verſtehen iſt) keinen Theiler von $\frac{n}{ab}$, ſo iſt $\frac{n}{ab}$ eine Primzahl, und es ſind a, b und $\frac{n}{ab}$ alle Theiler von n. Giebt es aber von $\frac{n}{ab}$ wieder einen Factor $< \sqrt{\frac{n}{ab}}$, welcher c heiſse, ſo iſt nun wieder $\frac{n}{abc}$ zu unterſuchen, und ſo fort, bis man endlich auf eine Primzahl kommt, welche dann den letzten Factor von n abgiebt. Dieſs aber muſs einmal geſchehen, weil n ein endliches Product iſt.

Hiebei iſt es ſehr bequem, wenn man Quadratzahlentafeln hat, weil man da immer die nächſte Grenze der idealiſchen Wurzeln von n, $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{ab}$ .... ja dieſe Wurzeln ſelbſt, wenn es deren giebt, aufſuchen kann; welche man, bis auf die Wurzel 1000 in Lamberts Zuſätzen finden kann.

Es ſei z. B. 317 zu unterſuchen. Die nächſte Zahl an die idealiſche $\sqrt{317}$ iſt 17, denn $17^2 = 289$. Es theilt aber weder 2, 3, 5, noch 7, 11, 13, 17 die 517. Alſo iſt 317 eine Primzahl.

Es ſei die Zahl 2737 zu unterſuchen; $7.391 = 2757$. Es iſt alſo 391 zu unterſuchen; die nächſte $\sqrt{\ }$ iſt 19. Es theilt keine Zahl bis 17, aber $17.23 = 391$. Alſo iſt $7.17.23 = 2737$. Und weil 23 eine Primzahl iſt, ſo ſind dieſs alle einfache Theiler der Zahl 2737. Woraus ſich denn auch alle zuſammengeſetzte Factoren dieſer Zahl finden laſſen. Sie ſind: $7.17 = 119$; $7.23 = 161$, und $17.23 = 391$. Alſo alle Factoren von 2737 überhaupt ſind: 7, 17, 23, 119, 161, 391.

Bei nur einigermaſsen groſsen Zahlen iſt dieſs Verfahren äuſserſt mühſam. Es iſt daher wohl der Mühe werth, eine Methode zu zeigen, wie man auf die kürzeſte Weiſe, zugleich, eine Factoren und Primzahlentafel conſtruiren könne. Wobei aber, wie erklärt, alle durch 2, 3, 5 theilbare Zahlen ausgeſchloſſen werden, und auch nur die einfachen Factoren gemeint ſind. Doch muſs dieſe Tabelle ſo ſein, daſs man aus den einfachen Factoren aus ihr ſogleich combinatoriſch, ohne Multiplication zu verrichten, alle Theiler conſtruiren könne, welche ſelbſt durch 2, 3, 5 untheilbar ſind.