Fünftes Kapitel.

Von der Conſtruction und Einrichtung dieſer Factoren und Primzahlentafel.

20.

a) Wenn eine Zahl n eine zuſammengeſetzte Zahl iſt, ſo muſs ſie eine von den Primzahlen bis mit $\sqrt{n}$ zum Factor haben, das heiſst, ſie muſs in der Reihe derſelben vorkommen. Wenn man alſo alle Reihen aller Primzahlen bis mit $\sqrt{n}$ conſtruirt hätte, ſo könnte man ſogleich ſehen, ob n einen Theiler, oder mehrere, oder keine hätte. Auch liegen hierin alle Factoren von n weniger einem ganz gewiſs, wiewohl auch alle innerhalb dieſer Grenze liegen können.

b) Sollte eine ſolche Tabelle für alle Zahlen bis auf eine beſtimmte Grenze tauglich ſein: ſo müſste man ſie für die letzte Zahl, d. i. bis auf dieſe Grenze einrichten. Iſt dieſe Grenzzahl G, ſo müſste man alle Reihen aller Primzahlen bis mit $\sqrt{G}$ zuſammenſtellen, wenn $\sqrt{G}$ eine Zahl iſt. Iſt $\sqrt{G}$ keine Zahl, ſo müſste man diejenige Quadratwurzel nehmen, die die der G nächſte Quadratzahl gäbe. Wenn z. B. G = 100000 wäre, wie auch für unſere Tafeln G dieſe Grenze iſt; ſo müſste man die Reihen aller Primzahlen bis $\sqrt{100000}$ haben. Die $\sqrt{100000}$ iſt idealiſch; diejenige Zahl, welche an 100000 die nächſtkleinere Quadratzahl giebt, iſt 316; denn 316 . 316 = 99856; und an 316 iſt 313 die nächſte Primzahl; alſo um die Tafel für alle Zahlen bis mit 100000 brauchbar zu machen, braucht man nur die Reihen aller Primzahlen bis auf 313 incluſive zu conſtruiren, und jede bis auf 100000, oder die dieſer Grenze nächſte Zahl fortzuſetzen, wenn 100000 nicht in der Reihe derſelben liegt.

c) Nun käme es darauf an, alle dieſe Reihen ſo zuſammenzuſtellen, daſs man bequem für jede Zahl n alle nach einander durchlaufen könnte. Die beſte Einrichtung dafür wäre die auf Art der Pythagoriſchen Tafel, oder des ſogenannten Einmaleins. Und es würde ſonach der Anfang dieſer Tafel ſo ſtehen

1	2	3	5	7	11	13
2	4	6	10	14	22	26
3	6	9	15	21	33	39
4	8	12	20	28	44	52
5	10	15	25	35	55	65
6	12	18	30	42	66	78
7	14	21	35	49	77	91
8	16	24	40	56	88	104
9	18	27	45	63	99	117
10	20	30	50	70	110	130

u. ſ. f. ins Unendliche

Jede innere Zahl iſt ein Product der beiden Factoren, welche man findet, wenn man die letzte Zahl in die Höhe, und die letzte Zahl in die Breite links nimmt.

Da in der erſten Factorenreihe, welche die erſte Verticalcolumne bildet, alle Zahlen vorkommen, ſo müſſen daher auch die Primzahlen wieder darin vorkommen.

In der andern Factorenreihe, die die oberſte Horizontalcolumne bildet, kommen aber nur die Primzahlen vor, wie dieſs aus den vorigen Paragraphen deutlich ſein wird.

d) Dieſe Tafel würde bis auf 100000 fortgeſetzt, ungeheuer weitläuftig werden, wenn ſie für alle, auch für die durch 2, 3, 5 theilbaren Zahlen gelten ſollte. Denn die Reihen der 2, 3 und 5 ſind die längſten, und müſsten ungeheuer weit nachgeſchleppt werden. Da man nun aber die Zahlen, welche durch 2, 3, 5 theilbar ſind, leicht erkennen, und durch 2, 3, 5 am leichteſten dividiren kann, ſo iſts beſſer: dieſe Factoren und Primzahlentafel nur für diejenigen Zahlen einzurichten, welche durch 2, 3, 5 nicht theilbar ſind.

Man wird aber alle durch 2, 3, 5 untheilbaren Zahlen bis 100000 erhalten, wenn man alle Primzahlen von 7 an bis mit 313, durch alle Zahlen nach einander multiplicirt, welche ſelbſt durch 2, 3, 5 nicht theilbar ſind. Oder wenn man die Reihen aller Primzahlen von 7 bis 313 conſtruirt, jede bis an 100000, und daraus alle diejenigen Zahlen weglaſst, deren Cofactor mit der vorhabenden Primzahl eine durch 2, 3, 5 theilbare Zahl iſt.

Es fallen alſo bei dieſer Beſchränkung die längſten Reihen, die von 2, 3 und 5 weg, und in der erſten Reihe der verticalen Cofactoren bleiben blos alle durch 2, 3, 5 untheilbaren Zahlen übrig. Ich will der Kürze wegen die erſte Verticalreihe den Verticalzeiger, die erſte Horizontalreihe aber den Horizontalzeiger nennen. Der Horizontalzeiger enthält alſo alle Primzahlen von 7 bis 313; der Verticalzeiger alle Zahlen, die durch 2, 3, 5 untheilbar ſind, bis auf diejenige Zahl, die mit 7 multiplicirt das nächſt geringere Product in der Reihe von 7 (R7) giebt als 100000; dieſe Zahl iſt 14281.

Die Verticalreihen, nach dem Verticalzeiger, ſind die Reihen der Primzahl, welche im Horizontalzeiger darüber ſteht.

Die Reihe von 7 muſs weiter fortlaufen, als die der 11, der 13, u. ſ. f.; kurz je gröſser die Primzahl, deſto eher bricht ihre Reihe für die Grenze, alſo hier für 100000 ab. Denn wie ein Factor des Horizontalzeigers zunimmt, in dem Maſse muſs für eine jede dieſelbe Zahl der Cofactor in dem Verticalzeiger abnehmen, alſo früher kommen.

e) Vor allen alſo iſt der Verticalzeiger zu conſtruiren, alſo alle Zahlen, die durch 2, 3, 5 nicht theilbar ſind, bis auf 14281. Denn durch R2, R3, R5 werden von jeden 30 Zahlen 22 weggenommen, bleiben alſo von jeden 30 nur 8 übrig, welche beſtändig mit denſelben Unterſchieden wiederkehren. Sie ſind

n30 + 1 ſ + 7 ſ + 11 ſ. + 13 ſ. + 17. ſ + 19 ſ. + 23 ſ. + 29

Da alſo von jeden 30 Zahlen 8 bleiben, und 10 . 30 = 300 iſt, ſo bleiben von jeden 300 Zahlen nur 10 . 8 oder 80 übrig. Es wird alſo durch dieſe Beſchränkung unſere Tabelle in der Länge, um $\frac{22}{30}$ oder $\frac{11}{15}$, alſo mehr als $\frac{2}{3}$ abgekürzt.