

Math.  
52 $\frac{1}{2}$

Sammeiler, z. B. 314  
 Sammeiler, z. B. 12 ab 314

Zu der Factortafel.

(20. 17)

Sammeilerzahl  $\bar{n}$  numerus compositus  
 (Primzahl, Primzahl)  
 (Umfang, Primzahl)

mit gebrochener Zahl, z. B. 30  
 die gegenwärtigste Zahl z. B. 30  
 "30 ist die erste gegenwärtigste Zahl.

19 ist nicht sammeiler.  
 umfangreiche Zahlen  $\bar{n}$  einfache Zahlen, Primzahlen

Man sieht die Vielfachzahlen mit Wiederhol, folgend der Primzahlreihe alle  
 Vielfachzahlen

5 Sammeiler 2 3 5 7 11 A

4	6	10	14	22	2	
9	15	21	33	3	B F A C A	
25	35	55	77	7		
					121	11

15 Sammeiler

8	20	28	44	2	
18	30	42	66	3	C F A B
50	70	110	154	5	
2	98	154	242	7	F A C A A
27	45	63	99	3	
75	105	165	231	5	7
147	231	363	546	11	

10 Sammeiler

150	175	275	5
245	385	7	
605	11		
343	539	7	
847	11		
11	133	11	

Alte Ziffer

2	3	5	7	11	13
8	12	20	28	44	2
18	30	42	66	3	
	50	70	110	5	
		98	154	7	
			242	11	
27	45	63	99	3	3
	75	105	165	5	
		147	231	7	
			363	11	
150	175	275	5	5	
	245	385	7		
		605	11		
	343	539	7	7	
		847	11		
			1331	11	11

16  
 35  
 16  
 35

Anm. Es kann man die  
 die factortafel umgekehrt  
 Tafel machen; und zu  
 gleich die Umzahl der  
 Zahlen jeder Art mit  
 Umkehr entdecken!  
 Die Tafel kann sehr bequem  
 gelehrt werden.

ad 186

137 1387  
 175



8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25 f 5  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32 f 7  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49 f 7  
50  
51  
52  
53 f 11  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63 f 13  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77 f 7  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85 f 17  
86  
87  
88  
89  
90  
91 f 13  
92  
93  
94 f 19  
95  
96  
97  
98  
99  
100  
101  
102  
103  
104  
105  
106  
107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115 f 23  
116  
117  
118  
119 f 17  
120  
121 f 17  
122  
123 f 25  
124  
125  
126  
127

Satz § 148.7. (28 Apr. 1811)  
 § 148.7. Sei  $a$  und  $b$  Zahlen,  $a > b$ ; so ist  $a$  enthalten  $n$  ganze Male, oder  $n$  ganzemal.  
 $\Rightarrow 1, 2, 3, \dots, \alpha, \beta, \dots, (b-1), b$ .

Gezeigt im  $a^2 + nb + \alpha$ ; so ist

$$\frac{a^2}{b^2} + n^2 \frac{b^2}{b^2} + 2nb\alpha + \alpha^2; \text{ also die zweite Potenz von } a \text{ liefert mit der zweiten Potenz von } b \text{ den Rest } \alpha^2, \text{ also auf } \alpha^2 \text{ gegen } b \text{ den Rest } \alpha^2$$

$$\frac{a^3}{b^3} + n^3 \frac{b^3}{b^3} + 3n^2 b^2 \alpha + 3nb\alpha^2 + \alpha^3, \text{ gibt Rest für } b^3, \text{ den Rest } \alpha^3$$

$$\frac{a^4}{b^4} + n^4 \frac{b^4}{b^4} + 4n^3 b^3 \alpha + 6n^2 b^2 \alpha^2 + 3nb\alpha^3 + \alpha^4, \text{ den Rest } \alpha^4$$

$$\dots$$

$$\frac{a^m}{b^m} + n^m \frac{b^m}{b^m} + \frac{m}{1} n^{m-1} b^{m-1} \alpha + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} n^{m-2} b^{m-2} \alpha^2 + \dots + \frac{m}{1} nb\alpha^{m-1} + \alpha^m, \text{ gibt den Rest } \alpha^m \text{ gegen } b.$$

Die Reste der Potenzen  $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^m$  weißt, falls  $\alpha > 1$  oder  $\alpha < -1$ , bleibt der Rest immer  $= 1$ .

Alle  $\alpha = 2$  oder  $7$ , so muß irgend wie  $\alpha^m > b$  werden; dann gilt  $\frac{a^m}{b^m} = \frac{nb + \alpha^m}{b^m}$

Sei  $\frac{a^{m+1}}{b^{m+1}}$  aber,  $+ n^{m+1} \frac{b^{m+1}}{b^{m+1}} + \frac{(m+1)}{1} n^m b^m \alpha + \dots + \frac{m+1}{1} nb + \alpha^{m+1}$ ; also, da

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{nb + \alpha^m}{b^m}, \text{ somit } \frac{a^{m+1}}{b^{m+1}}$$

§ 148.8. Man nehme die Potenzen der Zahlen  $a$  an  $b$ , und mit der Zahl  $n$ ; so gibt

a)  $\frac{10}{7}$  den Rest  $3, = -4$

b)  $\frac{10^2}{7} = 3^2 = 9 - 7 = 2 = -5$

c)  $\frac{10^3}{7} = 3^3 = 27 = 6$ ; oder gleich nach  $b$  zu setzen  $2 \cdot 3 = -1$

d)  $\frac{10^4}{7} = 3^4 = 6 \cdot 3 \text{ (aus c)} = 4 = 3$

e)  $\frac{10^5}{7} = 3^5 = 3 \cdot 4 = 12 = 5 = -2$

f)  $\frac{10^6}{7} = 3^6 = 5 \cdot 3 = 1 = -6$

g)  $\frac{10^7}{7} = 3^7 = 1 \cdot 3 = 3 = -4$

Man kann hier die Zahl auflösen, so daß man die Potenzen für 7 findet. Man nehme die Potenzen der Zahlen  $a$  an  $b$ , und mit der Zahl  $n$ ; so gibt

13	527	542
31	546	231
1	2	2 = 2
9	4	12 = 5 = 0
2	5	10 = 3
6	7	42 = 0
4	2	8 = 1
5	5	25 = 4 = 1
1	3	3 = 3 = 0
3	1	3 = 3 = 0

(Francoeur math. pures) 105 = 21 = 0  
 I, p. 25

also, wenn  $+1$  und  $-1$  so kann die Potenz sein

31	546231
231	231231
546	546340
	231546

231 546 231; welche Summe die beginnend

13	527	542
31	231	231
3	7=0	2=2
3	6=6	12=5
	10=3	10=3
8	2	24=3

$$9 \sqrt{2} + 7 + 0$$

§ 148.9. Obiges § gilt auch für negative Reste, das heißt für die hat an  $nb$  Rest; wenn also

$$\frac{10}{7} = -1; \text{ so muß } \left(\frac{10}{7}\right)^2 = +1, \text{ und so abwechselnd fort;}$$

Diese Eigenschaft hat aber die Zahl 11

Reste 7 Restes gegen 6 1; 7 mangelt gegen 9, 2.

Reste 11  
 mangelt 11



F A C T O R E N  
UND  
P R I M Z A H L E N T A F E L  
v o n 1 b i s 1 0 0 0 0 0

neuberechnet und zweckmäfsig eingerichtet

nebst

einer Gebrauchsanleitung und Abhandlung der Lehre von Factoren und Primzahlen.

---

Für Mathematiker, Rechenlehrer und Kaufleute.

---

von

D. K a r l C h r. F r. K r a u f e

Privatlehrer der Philosophie und Mathematik zu Iena, der latein. Gesellschaft daselbst Secretair,  
der mineral. ebendaseibst, und der westphälischen naturforschenden Gesellschaft  
activem Mitgliede.

---

Jena und Leipzig

bei Christian Ernst Gabler.

1804.

IV (1920) 110\*

ALGEBRA

UND

WILHELM AHLBACH

VON 1810

Lehrbuch der Algebra

1810

Lehrbuch der Algebra

Lehrbuch der Algebra

1810

ALGEBRA

Lehrbuch der Algebra

1810

Lehrbuch der Algebra

Lehrbuch der Algebra

1810

## V o r b e r i c h t.

Ich liefere hier eine neuberechnete und zweckmäßiger eingerichtete Primzahlen- und Factorentafel (aller durch 2, 3, 5 untheilbaren Zahlen) von 1 bis 100000, welche die Bequemlichkeiten aller bis jetzt bekannten Factorentafeln in sich vereint, und alles das leistet, was jene nicht leisten, und was man außerdem von einer solchen Tafel fordern kann. Die Pellisch-Lambertische Tabelle (in Lamberts bekannten Zusätzen..) ist übrigens zweckmäßig, sehr kurz und bequem eingerichtet, nur giebt sie blos einen einzigen und zwar den kleinsten einfachen Factor von jeder durch 2, 3, 5 untheilbaren Zahl; daraus muß man dann erst durch Division den anderen Factor finden und so fortfahren, bis man zuletzt auf eine Primzahl geräth. In der hier gelieferten Tabelle stehen alle Quotienten, welche entstehen, wenn man mit dem kleinsten gefundenen Factor einer zu untersuchenden Zahl  $x$  in  $x$  dividirt, selbst ausgeschrieben darinnen; man braucht daher nicht zu dividiren, braucht weniger Zeit, und ist vor allem Verrechnen sicher. Auch nimmt meine Factorentafel, nebst der Primzahlentafel noch etwas weniger Raum ein als die Lambertischen, und ist für das Aufschlagen so bequem und auch so leicht verständlich nach Art des Einmaleins eingerichtet, daß in 2 Minuten Jeder den Gebrauch derselben einsehen kann. Eben darum, um nicht die Erlernung des Gebrauchs schwieriger und bei dem Gebrauche ein zu vielfaches Nachdenken und Aufmerken nöthig zu machen, auch um die leichte Symmetrie der Tabelle nicht zu zerstören, habe ich eine noch mögliche Abkürzung derselben nicht angenommen, von der ich aber bei den größern Tafeln, die bald erscheinen sollen, Gebrauch machen werde, um sie ohne beträchtlichen Schaden für die Brauchbarkeit ins Kürzere zu bringen und wohlfeiler zu machen.

Die Felkelische Tabelle hat zwar vor der Pellisch-Lambertischen den Vorzug, daß sie zugleich alle einfache Factoren von  $x$  angiebt; — allein sie giebt dieselben in Buchstaben an, und in einer so zusammengesetzten Anordnung, daß dadurch viele von dem Gebrauche derselben schlechthin ausgeschlossen bleiben; auch stehen eben so wenig, als in der Pellisch-Lambertischen, die Quotienten der Theiler von  $x$  in  $x$  darinnen, — welches doch eine wesentliche Forderung an so eine Tafel ist. — Ich habe, um zu zeigen, wie man sich der Buchstaben, wenn man sich einmal mit dergleichen einlassen will, weit bequemer, leichter und zu mehrerer Kürze bedienen könne, eine Factorentafel von 1 bis 10000 beigelegt, welche nur  $1\frac{1}{2}$  Seite einnimmt, und für Zahlen unter 10000 von denen recht gut gebraucht werden kann, die sich der Buchstaben bedienen wollen. Hätte ich auch die größere Tabelle also eingerichtet, so hätte ich sie auf 3 bis 4 Bogen liefern können; allein ich habe diels eben darum nicht thun mögen, weil vielen der Anblick von Buchstaben absolut ablehrend ist, auch an sich wirklich der Gebrauch dadurch etwas erschwert wird, endlich auch für die Wohlfeilheit nichts zu hoffen war, indem die Mühe des Setzers verdoppelt worden wäre.

Eine Tabelle der Primzahlen noch kürzer und dabei noch bequemer einzurichten, als die meinige ist, halte ich für ganz unmöglich. Nach dieser Einrichtung wird sich eine Tafel der Primzahlenreihe der zwei ersten Millionen recht bequem auf 15 Bogen drucken lassen. Ich hätte allerdings in dem anderen Alphabete der Buchstaben, (chicifische (curive) nehmen können; es würde aber dadurch das Aufschlagen etwas erschwert worden sein. In der einen Stelle, wo Mißverständniß möglich war, habe ich curive Buchstaben genommen, um anzudeuten, daß diese Buchstaben aus dem anderen Alphabete sind.

Die Seite 15 und 16 beschriebene Einrichtung der Factorentafel ist, weil sie der des Einmaleins ähnlich ist, den Ungenüßern, welche die Buchstaben scheuen, am bequemsten, sie strengt außerdem das Auge am wenigsten an, und gewährt auch andere Vortheile, die eine andere Anordnung nicht giebt; z. B. daß man sie oft als Multiplication- und Divisionstafel brauchen kann. Ihre Bequemlichkeit nimmt aber immer ab, je weiter die Tafel reicht, weil erstlich die Seiten in die Breite immer mehr zunehmen, je mehr Primzahlen als Factoren noch mit aufgenommen werden müssen, hernach auch, weil die gleichen Tausende der aufzufuchenden Zahlen um immer mehrere Seiten auseinanderdrücken, je länger die Tabelle wird. Schon bis auf 100000 fortgesetzt, beträgt die erste Seite der Tafel 3 Foliobreiten; daher sind auch die 3 ersten Seiten des Druckes mit 1 A, 1 B, 1 C bezeichnet; die zweite Seite der Tafel beträgt noch mehr als 3 Foliobreiten (welche mit 2 A, 2 B, 2 C bezeichnet sind), nehmlich noch das Stück welches p. 6 unten an 2 C angelegt und mit 2 D bezeichnet ist; man hat sich also eigentlich 2 A, 2 B, 2 C, 2 D stetig an einander zu denken; die dritte Seite der Tafel beträgt nicht ganz 2 Foliobreiten, welche mit 3 A und 3 B bezeichnet sind; die vierte Seite faßt nicht ganz 2 Foliobreiten, und ist der Kürze wegen auf p. 8 und p. 9 in die 3 Theile 4 A, 4 B, 4 C getheilt worden, die man sich wieder neben einander zu denken hat; so ist auch die 8te Seite der Tafel, der Kürze des Drucks wegen, in 8 A und 8 B getheilt worden. Der Druck fiel weit kürzer aus als das Manuscript, und der Text wurde eher gedruckt als die Tafel, daher der Absatz S. 16 „So nun ist...“ nach dem jetzt Erwähnten zu berichtigen ist. — Diese Einrichtung also der Tafel würde bei der weiteren Fortsetzung derselben übel angebracht sein. Da ich nun gefonnen bin, so bald als die Urtheile des Publicum mich und den Herrn Verleger dazu ermuntern sollten, diese Tafel bis auf 2 Millionen fortzusetzen, so werde ich dabei eine andere Einrichtung treffen müssen; nehmlich folgende, die in der zuletzt angehängten Factorentafel von 1 — 10000 beobachtet ist: bei jeder theilbaren Zahl stehen zugleich neben ihr alle ihre einfachen Theiler, durch dazwischen gesetzte Punkte von einander unterschieden; auf diese folgen auch alle Quotienten dieser Theiler, in die zu theilende Zahl nach der Reihe, durch Commata unterschieden; die mit 2 Strichen eingeschlossnen Zahlen deuten die Hunderte an, wie sie auf einander folgen, und die darauf folgenden lateinischen Buchstaben bedeuten die dazu gehörigen Zehner und Einer. Wollte man z. B. die Zahl 3289 auffuchen, so sucht man erst 32 unter den ausgezeichneten Zahlen, sieht in dem Zeiger, welche Zahl 8 bedeutet, und findet 1, nun sieht man ob 1 nach 32, ehe 33 folgt, vorkommt; es kommt vor, und steht dabei: 11, 13, 23, 299, 253, 143; das ist, die einfachen Theiler der Zahl 3289 sind 11, 13 und 23; und 3289 dividirt durch 11 ist gleich 299; 3289:13=253; und 3289:23=143. Die lateinischen Buchstaben konnten, wegen der nothwendigen Gleichheit der Kegel, jetzt nicht größer in dieser letztgedachten Tabelle genommen werden; bei der Fortsetzung aber bis 2 Million wird dafür gesorgt werden, daß sie besser in die Augen fallen, auch überhaupt diese Tafel nicht so eng gedruckt wird, als die vorliegende.

In der nächsten Lieferung soll die Factorentafel von 10000 an bis 1000000 auf diese Art fortgesetzt werden, nur mit der Abkürzung, das von 100000 bis 1000000 nicht alle Theiler, sondern nur der kleinste mit seinem Quotienten in die aufgesuchte Zahl enthalten sein soll; es sollen aber hiebei nicht, wie Seite 18 §. 22 steht, die Theiler 7 und 11 weggelassen werden. Wie wenig Bogen diese Tafel einnehmen werde, bei aller ihrer Brauchbarkeit und Deutlichkeit kann man schon aus diesem Anfange derselben ersehen. Die baldige Erscheinung derselben kann ich gewiss zusichern, sobald wir nur absehen können, die beträchtlichen Kosten nicht mit Schaden aufzuwenden.

Bei der Abfassung dieser Tafeln war mir Kästners Rath wohl bekannt, vielmehr die Fortsetzung der schon bekannten Tafeln zu liefern, als die schon gethane Mühe nochmals zu verlieren. Die Einrichtung aber vorliegender Tafeln, welche von der bekannten ganz abweicht und deren Unvollkommenheiten abzuheben sucht, machte die neue Berechnung nöthig. Ich habe zwar um zu zeigen, wie man sich der Buchstaben auch bei der Einrichtung der ersten Tafel mit großer Kürze bedienen könne, auch noch die vorhin schon erwähnte 2te Factorentafel der 10000 angehängt, die sich selbst erklärt; man wird aber gewiss die mit bloßen Zahlen vorzüglicher finden.

Da es interessant ist die Reihe der Primzahlen für sich zu übersehen, so werde ich auch diese bis 2000000 abdrucken lassen und sie auf dieselbe bequeme Art ins Kurze ziehen, so wie es auch in dieser Lieferung geschehen. Hier, bis 100000 habe ich die Lambertische Primzahlentafel, nachdem ich einige Druckfehler in derselben verbessert habe, in meine Zeichen übersetzt, abdrucken lassen; die Folge aber werde ich selbst berechnen, und dabei auch zugleich das Vorige, so das ich dann gewiss, wenn etwa noch einige Fehler in Lamberts Tafeln sein sollten, sie auch noch werde entdecken. Die Factorentafel aber ist mit äußerster Sorgfalt berechnet, mehrmals auf verschiedene Art von mir selbst durchprobt, und beim Abdruck mit größter Genauigkeit corrigirt worden: so das ich mich fast zu behaupten getraue, das gar kein Fehler in ihr befindlich ist.

Sollte aber auch, falls das Unternehmen nicht Beifall fände, die Fortsetzung unterbleiben, so wird dadurch das hier gelieferte Buch seine Brauchbarkeit nicht verlieren, indem es bis 100000 alles leistet, was man von so einer Tafel erwarten kann, und noch keine bis jetzt mir bekannte geleistet hat. Auch habe ich durch die vorausgeschickten Abhandlungen diesem Buche noch außerdem einigen Werth zu verschaffen gesucht, indem besonders die darin aufgestellte Betrachtung der Factoren und Primzahlen neu, anschaulich und in Absicht auf die wichtigsten Aufgaben dieser Art (z. B. die Art der Unendlichkeit der Primzahlenreihe, des Gesetzes ihrer Fortschreitung u. s. w.) befriedigend ist. Denen Rechenlehrern aber, welche nicht Systematiker von Profession sind, so wie auch den Kaufleuten, wird die Zusammenstellung der Kennzeichen, ob eine Zahl durch eine andere theilbar sei oder nicht, im 22 Satze erwünscht und brauchbar sein; so wie auch diesen dasjenige von gutem Nutzen sein kann, was im liebenden Kapitel über die Bruchrechnung und Regel de tri gesagt ist.

Im 25 Satze des Textes zu Ende wird eine Tafel der Reihe der nach der Größe geordneten Brüche (oder Verhältnisse) versprochen, bis auf die Grenze der Zahl 30. Sie macht den Beschluss des ganzen Werks.

Diese Tafel werde ich zugleich mit der Factorentafel fortsetzen, und zwar bis auf die Grenze 1000; dabei muß aber die Einrichtung ganz anders sein, als bei dieser kurzen Tabelle, weil man jeden Bruch leicht in ihr auffuchen, und die Reihe aller seiner Näherungsbrüche in kleineren Zahlen sogleich nebeneinandergestellt finden können muß. Inzwischen kann schon diese kleine Tafel bei den häufig vorkommenden Brüchen, deren Nenner und Zähler nicht größer als 30 sind, mit Nutzen gebraucht werden.

In Kurzem wird noch besonders eine Uebersetzung des Textes so auch der Gebrauchsanleitung zu diesen Factorentafeln in lateinischer, französischer, englischer und italienischer Sprache erscheinen, und wenn es verlangt wird, mit jedem Exemplare versandt werden.

Jena im März 1804.

Der Verfasser.

Uiber

On consultera sur les propriétés des nombres les beaux mémoires d'Euler, Lagrange, ... Dans les collections de Turin, Berlin et Pétersbourg, la Histoire des nombres de Legendre; les recherches arithmétiques de Gauss (traduits par Poulet de Sille). *Journal de math. pures* I p. 128.

Ueber die Auffuchung einfacher Factoren und Primzahlen; über die Natur und das Gesetz der unendlichen Primzahlenreihe; über die Construction und den Gebrauch dieser Factoren und Primzahlentabelle.

Erstes Kapitel.

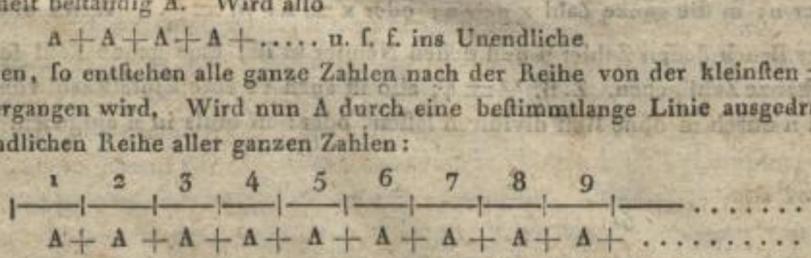
Vorbereitende Betrachtungen.

1.

Wenn dieselbe Sache bestimmt vielmal genommen wird, so ist sie in bestimmter Zahl vorhanden. Die Anschauung der Zahl ist also die Anschauung Mehrerer von derselben Art, als eines Ganzen; so das in diesem Ganzen jedes Einzelne angeschaut wird. Zahl aber an sich ist Einheit der Mehrheit Gleichartiger. Die Sache, welche bestimmtvielmahl wiederholt wird, also ihre eigne Zahl giebt, heist die Einheit. Diese Einheit kann eine begriffliche (logische) oder eine stetig große (der sinnlichen individuellen Anschauung) sein. Im ersten Falle kann alles zusammengezählt werden, was die Eigenschaft hat, welche der begrifflichen Einheit wesentlich sind; z. B. um Bäume zu zählen, kann ich Linden, Pappeln, Eichen, — kleine und große, zusammenzählen, weil es hiebei weder auf die weitem begrifflichen speciellen Bestimmungen, noch auch auf die Größe der einzelnen Bäume ankommt. Hier wird begrifflich subsumirt, oder immer das Individuum unter seinen Begriff geordnet. Daher denn auch bei diesem begrifflichen Zählen an weitere Abtheilung der Einheit in beliebige gleiche oder ungleiche Theile nicht gedacht werden kann. Nennt man eine ganze Zahl die, so aus ganzen Wiederholungen der Einheit besteht, so finden bei diesem begrifflichen Zählen blos ganze Zahlen (numeri integri) statt. Ist die Einheit eine stetige und individuell bestimmte Größe, z. B. eine bestimmte Linie, ein bestimmtes Stück Geld u. d. g. m., so lässt sie sich, an sich (nicht immer in der äußeren Darstellung), nach jedem Verhältnisse weiter eintheilen, oder als jede Zahl einer andern Einheit ihrer Art ansehen. Auch wenn man sie bestimmtvielmale genommen, lässt sich diese ihre Vielheit sogleich wieder als eine neue Einheit ansehen. Bei stetigen Größen, z. B. einer bestimmten Länge, die man sich stetig vom Nichts bis zu jeder beliebigen Größe anwachsend denken kann, ist es also an sich ganz willkürlich, von welcher bestimmten Größe die Einheit sein solle, nach welcher man zählt. Wenn man also im allgemeinen, scheinbar leer, zählt, so wird, wenn von dem Zählen stetiger Größen die Rede ist, die Einheit bestimmbar, nicht aber individuell bestimmt gesetzt; insofern können wir die Einheit, die bei den folgenden Betrachtungen immer, wenn wir von Zahlen ohne Beifatz reden, vorausgesetzt wird, die absolute Einheit nennen; weil, wenn man ihr eine bestimmte Größe giebt, ganz ohne Grund (absolute) gerade diese und keine andere angenommen wird.

2.

Wird die absolute Einheit mehrere ganzemale genommen, so entstehen ganze Zahlen derselben. Es heisse uns die absolute Einheit beständig A. Wird also



Dass aber diese Reihe bei jeder stetigen Größe ins Unendliche laufe, muss bei dieser aphoristischen Betrachtung als Axiom gesetzt werden.

3.

Diese unendliche Reihe der ganzen Zahlen kann ermessen oder durchlaufen werden:

- a) durch die absolute Einheit selbst, so fällt dieses Mafs immer wieder auf dieselben Punkte, und man setzt die unendliche Linie eben aus denselben Stücken zusammen, durch deren Aneinandersetzen eben die ganzen Zahlen entstehen;
- b) oder durch irgend ein Stück Länge, das kleiner als A ist (ein eigentlicher Bruch von A); ist nun dieses Stück zu A rational oder in endlichem Verhältnisse, so kommt man immer auch auf alle, oder auf einige Punkte, auf welche auch die ganzen Wiederholungen von A fallen. Es kann jedes kleinere Stück als A, das rational zu A ist, ausgedrückt werden, durch die allgemeine Form  $\frac{m-p}{m}$ , wo eben, wenn  $m = m$ , der Zähler kleiner ist, als der Nenner.

A Ist

Ist aber dieses kleinere Stück gegen A irrational, oder in unendlichem Verhältnisse, so kann man durch noch so viel Wiederholungen desselben, doch niemals auf einen Punkt der unendlichen Linie treffen (coincidiren), wohin auch das Ende irgend einer ganzen Zahl trifft. Welches alles hier weder erwiesen, noch für unsern Zweck weiter betrachtet werden darf.

c) oder durch irgend ein Stück Länge, welches größer als die absolute Einheit, A, ist. Dies Stück kann nun sein:

- α) eine ganze Zahl selbst, d. i.,  $2A, 3A, \dots, nA$  (wo n, wie auch immer in der Folge, jede mögliche noch so große ganze Zahl bedeuten soll); oder weil A die absolute Einheit ist,  $2, 3, 4, 5, \dots, n$  (ohne Beifatz). So ist eben dies der einzige Fall, der hier weiter betrachtet werden muß;
- β) eine ganze Zahl, und noch ein Stück, kleiner als 1 (das ist kleiner als A), oder ein uneigentlicher Bruch der absoluten Einheit. Ist das daran hangende Stück, das kleiner als 1 ist, gegen 1 rational, so hat dieses Stück die Form  $\frac{m}{m+p}$ , z. B.  $\frac{2}{3}$ ; und fällt in seinen Wiederholungen auf die Endpunkte bestimmter ganzer Zahlen. Ist dies Stück aber gegen 1 irrational, so fallen keine Wiederholungen desselben mit ihren Endpunkten auf Endpunkte ganzer Zahlen.

## 4.

Nimmt man irgend eine beliebige ganze Zahl, größer als 1 (z. B.  $2 > 1, 5 > 1, \dots$ ), zum Maßstab, oder Schritt, womit man die unendliche Linie, innerhalb welcher die ganzen Zahlen dargestellt sind, durchlaufe oder ermesse, vom Anfang bis zu einer beliebigen Grenze; so ist klar:

- a) daß jede ganze Wiederholung dieser höhern Einheit oder dieses höheren Maßes mit ihrem Endpunkt falle (coincidire) auf einen Endpunkt irgend einer ganzen Zahl. Denn die höhere Einheit besteht der Voraussetzung nach aus lauter ganzen absoluten Einheiten. Und es sind zwar alle diejenigen ganzen Zahlen, auf deren Endpunkt der Endpunkt einer bestimmtvielfachen Wiederholung der höhern Einheit fällt (womit eine Wiederholung der h. E. coincidirt), durch die Größe der höhern Einheit bestimmt, und sind in gleichen Entfernungen von einander. Z. B. wenn 3 zur höhern Einheit angenommen wird, so sind die mit deren Wiederholungen zunächst coincidirenden ganzen Zahlen: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,  $\dots$ . Daher kann auch jede solche Zahl, welche mit einer bestimmtvielfachen Wiederholung einer höheren Einheit zusammenfällt, (der Kürze wegen: jede *Einfallszahl*) ausgedrückt werden: durch diejenige höhere Einheit, deren Einfallszahl sie ist, und zugleich durch die Wiederholungszahl dieser höheren Einheit. So z. B. 15 als Einfallszahl von 5, durch 5 und 3; wo 5, 3mal genommen werden muß, um 15 zu geben. Da also solche 2 Zahlen dergleichen dritte Zahlen vollkommen bestimmen, so werden sie mit Recht deren Bestimmungszahlen, oder Factoren genannt; ferner werden dergleichen Factoren, die wir hier betrachten, ganze Factoren genannt werden, weil sowohl die höhere Einheit, als deren Wiederholungszahl, der Voraussetzung nach ganze Zahlen sind. (Denn es giebt auch ganze Zahlen, welche gebrochne Factoren haben, z. B.  $6 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{3}$ ). Da aber in der ganzen folgenden Untersuchung nur von ganzen Factoren die Rede sein wird, so hat man hier unter Factoren immer nur ganze zu verstehen. — Die beiden Factoren einer Zahl untereinander multiplicirt (producirt) geben die Einfallszahl, also bei ganzen allemal eine ganze Zahl.
- b) Bei jeder höheren Einheit liegen zwischen jeder Einfallszahl eine bestimmte Menge solcher Zahlen, welche keine Einfallszahlen sind, für diese höhere Einheit. Wenn z. B. die höhere Einheit = 2, so sind dergleichen *Zwischenzahlen* 1, 3, 5, 7, 9,  $\dots$ . Und zwar je mehr ganze Einheiten die höhere Einheit enthält, je größer wird die Menge der Zwischenzahlen gegen die Einfallszahlen derselben, wenn man bis zu einer beliebigen bestimmten Grenze fortgeht. Daher kann auch keine ganze Zahl (als höhere Einheit angesehen) ein Factor von irgend einer ihrer Zwischenzahlen sein; denn sonst wäre die Zwischenzahl zugleich eine Einfallszahl; z. B. 5 nicht von 13, oder 14.
- c) Jede beliebige ganze Zahl, n, ist in Bezug auf jede andere ganze Zahl, m, die als höhere Einheit angesehen wird, entweder eine Einfallszahl, oder eine Zwischenzahl; z. B. 12 eine Einfallszahl für 2, 3, 4, 6; aber dieselbe 12 eine Zwischenzahl von 5, 7, 8,  $\dots$ . Ist nun n eine Einfallszahl von m, so muß m mehrere ganze Male genommen (xmal genommen) n geben, also  $xm = n$  sein. Daher muß auch n als m angesehen, und die Einheit davon gesucht, das ist n dividirt durch m, oder  $n : m$  die ganze Zahl x geben; oder  $x = n : m = \frac{n}{m}$ . Wenn also n eine Einfallszahl von m sein soll, so muß der Bruch dessen Zähler n und dessen Nenner m ist, eine ganze Zahl sein, oder auch: so muß n dividirt durch m eine ganze Zahl geben. Z. B.  $\frac{12}{3} = 4$ ; also ist auch 12 eine Einfallszahl von 3. Man drückt dies kürzer so aus: es muß sich n durch m ohne Rest dividiren lassen, oder: m muß in n aufgehen.

## 5.

Wenn n eine Einfallszahl von m ist, also  $xm = n$ ; so ist auch n eine Einfallszahl von x; z. B. 6 ist eine Einfallszahl von 2, und  $2 \cdot 3 = 6$ ; also ist 6 auch eine Einfallszahl von 3. Um dies einzusehen, muß man sich davon überführen, daß bei der Multiplication auf die Ordnung zweier (oder auch mehrerer) Factoren nichts ankommt. Der allgemeine Beweis davon wird hier am kürzesten aus der Erklärung der Multiplication geführt. Soll im allgemeinen a mit b multiplicirt werden, wo a und b ganze und gebrochne Zahlen aller Art bedeuten können, und heißt das Produkt daraus y; so muß sich verhalten 1 zu a, so b zu y. Also erhält man die Proportion

$$1 : a = b : y; \text{ und } y \text{ ist gleich } \frac{ab}{1}.$$

Da aber Proportionalität bleibt, wenn die Glieder der Proportion auf folgende Art versetzt werden (wie aus der Theorie der Proportionen erwiesen wird)

$$a : b = a : y$$

so muß auch  $y$  gleich sein  $\frac{ba}{1} = ba$ . Es ist also  $y$  sowohl  $= ab$ , als auch  $= ba$ . Also kommt, was das Produkt betrifft, auf die Ordnung zweier Factoren nichts an. Und so läßt sich weiter beweisen, daß auch auf die Ordnung von 3, 4, 5 ....  $n$  Factoren in Rücksicht ihres Produkts nichts ankomme.

6.

Hieraus entstehen nun folgende Probleme, die wir hier aufzulösen haben:

A.

Kann eine Zahl mehr als 2, also 3, 4, 5, ....  $n$  und so viele Factoren haben als man will? Nach welchem Gesetze bestimmt sich dies für jede Zahl, und wie kann man alle Factoren einer jeden Zahl finden? (Unter Zahlen werden hier immer ganze Zahlen verstanden.)

B.

Giebt es Zahlen, welche für alle andere Zahlen, die als höhere Einheit gesetzt werden mögen, Zwischenzahlen sind, die also gar keine andere Factoren, als 1 und sich selbst haben? Diese Zahlen können wir vorläufig, absolute Zwischenzahlen, absolut untheilbare Zahlen, oder auch *erste Zahlen*, d. i. *Primzahlen* nennen, weil sie durch kein anderes höheres Maß als die absolute Einheit gemessen werden, als durch sich selbst und die erste Einfallszahl ihrer eignen Reihe sind. Und wenn es solche Primzahlen giebt, nach welchem Gesetze schreiten sie fort? ist ihre Reihe endlich oder endlos (unendlich)? Wie kann man von jeder Zahl untersuchen, ob sie eine Primzahl sei, oder nicht?

C.

Wie läßt sich eine Tafel verfertigen, in welcher man sogleich von allen Zahlen, bis auf eine bestimmte, willkürliche Grenze nachschlagen kann, ob sie Primzahlen oder Einfallszahlen von irgend anderen Zahlen sind? und im letzteren Falle, welches alle ihre Factoren (Theiler) sind?

(Die Einfallszahlen sollen, weil sie Producte ihrer Factoren sind, *zusammengesetzte Zahlen* (numeri compositi) dieser Factoren heißen).

## Zweites Kapitel.

(zu A)

*Über die Natur der Factoren und der zusammengesetzten Zahlen, Reihen der Zahlen und Primzahlen.*

7.

Man kann alle ganze Zahlen nach einander zur höheren Einheit annehmen, und jede davon, wenn sie als Einheit angenommen worden, so vielmal anlegen und wiederholen als man will; wegen der Unendlichkeit der Reihe der ganzen Zahlen (2): daher gehören auch zu jeder Zahl unendlich viele Einfallszahlen, oder: es giebt von jeder Zahl unendlich viele zusammengesetzte Zahlen derselben, welche also durch dieselbe theilbar sind. Wenn nun jede zur E. ang. Zahl  $a$  heißt, so ist der allgemeine Ausdruck der zusammengesetzten Zahlen derselben:

$$a, 2a, 3a, 4a, 5a, \dots, ma, \dots$$

Auch hat jede Zahl unendlich viele solche Zahlen, die aus ihr nicht zusammengesetzt sind, oder, wie wir sie oben nannten, Zwischenzahlen; diese Zahlen werden auch beziehungsweise auf die erstere Zahl Primzahlen genannt (beide sind *Primzahlen unter sich*, numeri primi inter se), aber nur relative, nicht absolute. (Wiewohl eine relative Primzahl eine absolute sein kann; z. B. 3 als Einheit angenommen, ist 3 eine Zwischenzahl, oder: 3 und 3 sind *Primzahlen unter sich* (numeri primi inter se); 3 aber ist keine absolute Primzahl, denn 3 ist eine zusammenges. Z. von 2 und 4. So ist aber auch 3 und 7 in diesem Verhältnisse, allein 7 ist auch zugleich eine absolute Primzahl.)

Die Zahl 2 hat, wie wir weiter betrachten wollen, gleichviel zusammengesetzte als Zwischenzahlen; 3 aber hat 2 mal so viel Zwischenzahlen, als zusammengesetzte; 4, hat 3 mal so viel Zwisch. Zz. als zuff.; 9 hat deren 8 mal so viel als zusammengesetzte; und  $n$  hat  $n - 1$  mal soviel Zwischenzahlen, als sie zusammengesetzte hat. Dies scheint sich zu widersprechen. Denn jede Zahl,  $n$ , soll sowohl unendlich viele zusammengesetzte Zahlen, als auch unendlich viele Zwischenzahlen haben. Wie kann sie nun mehr Zwischenzahlen haben als zusammengesetzte? Denn was unendlich ist, ist gleich. Es wird aber auch hiemit für die ganzen unendlichen Reihen nichts behauptet, sondern nur, daß bis auf dieselbige beliebige Grenze beide Reihen, der zuff. und zw. Zz. betrachtet, dieses Verhältniß statt finde. Man bricht also erst die unendlichen Reihen ab, und macht sie endlich. Nimm z. B. 10 Wiederholungen von 3, so kommst du bis auf 30; darunter sind 10 zusammengesetzte und 20 Zwischenzahlen von 3. Es sind also bis auf diese Grenze 2 mal soviel Zwischenzahlen, als zusammengesetzte.

8.

Wir wollen nun eine ganze Zahl,  $> 1$ , nach der andern zur höhern Einheit annehmen, um die Gesetze der Zahlenreihen zu bemerken und zu beweisen. Alle zusammengesetzte Zahlen der 2, das ist alle Zahlen der Form  $m \cdot 2$ , oder  $2m$  (5), können vom Anfang an durch folgende Reihe bezeichnet werden

$$A, 1 \cdot 2, 2 \cdot 2, 3 \cdot 2, 4 \cdot 2, 5 \cdot 2, 6 \cdot 2, \dots$$

$$B, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

In der Reihe A sind allemal die beiden Factoren angegeben, aus denen die untenstehende Zahl entsteht; hierunter ist allemal 2; die andere Zahl, welche angiebt, wie vielmal 2 müsse genommen werden, um bei der untenstehenden Zahl anzukommen, heiße der Mitfactor oder Coefficient von 2. Unter diesen Coefficienten müssen nun nach der Reihe alle ganze Zahlen wieder-

A 2

wieder-

wiederkehren, also auch die in B, d. i. die zusammengesetzten Zahlen von 2 selbst. Da nun alle Zahlen in B durch die über ihnen stehenden 2 Factoren ausgedrückt werden können, so erhält man, wenn man dies thut, folgende Reihe:

$$\begin{array}{l} A \quad 1 \cdot 2, 2 \cdot 2, 3 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 2, 5 \cdot 2, 2 \cdot 3 \cdot 2, 7 \cdot 2, \dots \\ B \quad 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots \end{array}$$

Oder, weil auf die Ordnung der Factoren nichts ankommt (5):

$$\begin{array}{l} A \quad 1 \cdot 2, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 2 \cdot 2, 2 \cdot 5, 2 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 7 \dots \\ B \quad 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \dots \end{array}$$

Oder, wenn man die gleichen Factoren durch Exponenten ausdrückt, d. i. z. B. anstatt 2, 2, 2, schreibt  $2^3$ , d. i. 2 in der dritten Potestät:

$$\begin{array}{l} A \quad 2, 2^2, 2 \cdot 3, 2^3, 2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3, 2 \cdot 7, 2^4 \dots \\ B \quad 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \dots \end{array}$$

Wenn man nun die aus 2 zusammengesetzten Zahlen *paare, gerade, oder gepaarte Zahlen* (numeros pares) nennt, so ist hieraus klar:

a) Dafs in der Reihe der gepaarten Zahlen (der geraden Zahlen) alle Potestäten der 2 vorkommen müssen, das ist:  $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^p$ . Außerdem auch

b) alle Produkte der unpaaren oder ungeraden Zahlen, oder deren Potenzen in alle Potenzen der 2. Also

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 9, 2 \cdot 11, 2 \cdot 13, \dots \\ 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 9, 2^2 \cdot 11, 2^2 \cdot 13, \dots \\ 2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, 2^3 \cdot 9, 2^3 \cdot 11, 2^3 \cdot 13, \dots \\ 2^n \cdot 3, 2^n \cdot 5, 2^n \cdot 7, 2^n \cdot 9, 2^n \cdot 11, 2^n \cdot 13, \dots \end{array}$$

Daher die Form der ganzen Reihe, wenn u alle unpaare Zahlen bedeutet, ist:  $2^n \cdot u^m$ ; wo n und m jeden ganzen, beliebigen Exponenten bedeutet.

Die Zwischenzahlen von 2, oder die ungeraden Zahlen erhält man demnach, wenn man an alle gerade Zahlen nach 1 setzt, oder von allen 1 wegnimmt. Da nun die Form aller geraden Zahlen  $2^n \cdot u^m$  ist, so wird die Form aller ungeraden  $2^n \cdot u^m \mp 1$  sein. Oder kürzer, wenn m jeden ganzen Coefficienten bedeutet, da die Form der geraden Zahlen  $2m$  oder  $m2$  ist, so wird die der ungeraden  $2m \mp 1$ , oder  $\mp 1 + 2m$  sein. Hieraus ist offenbar:

a) dafs bei einer bestimmten Menge von Wiederholungen der 2 man die Hälfte gerade und die Hälfte ungerade Zahlen erhält; dafs also z. B. unter den ersten 100 ganzen Zahlen 50 gerade und 50 ungerade sind,

b) dafs die unendliche Reihe aller ganzen Zahlen zur Hälfte aus geraden, zur Hälfte aus ungeraden Zahlen bestehe, welche immer mit einander abwechseln.

## 9.

Die Reihe der zusammengesetzten Zahlen von 3 fängt also an:

$$\begin{array}{l} A \quad 1 \cdot 3, 2 \cdot 3, 3 \cdot 3, 4 \cdot 3, 5 \cdot 3, 6 \cdot 3, 7 \cdot 3, 8 \cdot 3, 9 \cdot 3, \dots \\ \text{oder} \quad 3, \quad \quad \quad 3^2, 2^2 \cdot 3, \quad \quad \quad 2 \cdot 3^2, \quad \quad \quad 2^3 \cdot 3, 3^3, \dots \\ B \quad 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, \dots \end{array}$$

Da nun in der Reihe A als Coefficienten alle ganze Zahlen vorkommen; also auch die in B, so kommen auch in B alle Potestäten von 3, multiplicirt in alle Potestäten jeder andern ganzen Zahl nach einander vor; und es ist daher die allgemeine Form dieser Reihe  $3^n \cdot u^m$ . Da also auch in A als Coefficienten alle Potenzen der 2 (und alle gerade Zahlen) vorkommen, so kann man auch die Form dieser Reihe allgemein so bezeichnen:  $2^n \cdot 3^p \cdot (2m \mp 1)$ , wo n und p wiederum alle ganze beliebige Exponenten und  $2m \mp 1$  jede ungerade Zahl bedeutet; auch sowohl n als p, als auch  $m = 0$  sein kann. Wenn m jeden Coefficienten bedeutet, so ist der kürzeste Ausdruck dieser Reihe  $3^m$ .

Die Reihe der Zwischenzahlen jeder Zahl n kann allgemein so ausgedrückt werden:

$$(x < n), n + (x < n), 2n + (x < n), 3n + (x < n), \dots$$

wo x jede ganze Zahl bedeutet, die kleiner als n ist. Um also die Reihe der Zwischenzahlen von 3 auszudrücken, ist  $x = 1$  und  $= 2$ ; daher ist diese Reihe:

$$\begin{array}{l} 1, 2, * 3+1, 3+2, * 2 \cdot 3+1, 2 \cdot 3+2, * 3^2+1, 3^2+2, \dots \\ 1, 2, * 4, 5, * 7, 8, * 10, 11, \dots \end{array}$$

Daraus erhellet:

a) dafs bei einer bestimmten Menge von Wiederholungen der 3, man von allen ganzen Zahlen bis dahin,  $\frac{2}{3}$  Zwischenzahlen, und  $\frac{1}{3}$  zusammengesetzte Zahlen der 3 hat. Also z. B. unter  $33 \cdot 3 = 99$  sind  $\frac{2}{3} \cdot 99$  Zwischenzz., und  $\frac{1}{3} \cdot 99$  zusammenges. Zahlen; das ist 33 zuff. Zahlen, und 66 Zwischenzz.; und es liegen allemal zwischen 2 zuff. Zahlen 2 Zwischenzahlen.

b) Die unendliche Reihe aller ganzen Zahlen besteht aus  $\frac{2}{3}$  Zwischenzahlen von 3, und  $\frac{1}{3}$  zuff. Zahlen derselben; es versteht sich, dafs dies nur Sinn hat, wenn man diese absolut unendliche Reihe beliebig abbricht.

c) In den Coefficienten der 3 in der Reihe A dieses §. kommen nach einander alle ganze Zahlen vor, in welcher gerade mit ungeraden alterniren (also auch alle gerade Zahlen; daher müssen auch in B gerade Zahlen mit ungeraden abwechseln; die geraden aber sind schon in der Reihe der zuff. Zahlen der 2 enthalten. Also ist auch die Hälfte der unendlichen Reihe der zuff. Zahlen von 3 in der Reihe der 2 schon enthalten.

(Wir wollen der Kürze wegen unter Reihe der Zahl n, die unendliche Reihe der zusammengesetzten Zahlen von n verstehen).

10.

Betrachten wir die Reihe der 4, so ist klar, dass diese ganze Reihe schon in der Reihe der 2 enthalten sein müsse; denn 4 ist eine gerade Zahl, also auch jede deren Vervielfachung. Und man erhält aus der Reihe der 2, die der 4, wenn man allemal eine Zahl herauslässt.

R. d. 2 : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...
\*, 4, \*, 8, \*, 12, \*, 16, \*, 20, ...

Allgemein heiße diese Reihe 2^2 m

Der allgemeine Ausdruck aller Zwischenzahlen von 4 ist: (2^2 m - 1, oder - 2, oder - 3), und wenn f. oder bedeutet: 2^2 m - 1 f. 2 f. 3.

Daraus folgt:

- a) dass bei einer bestimmten Menge von Wiederholungen der 4 allemal 3 Zwischenzahlen und 1 zuff. Zahlen entstehen; z. B. da 25.4 = 100, so hat man bis 100, 3.100 = 75 Zwischenzahlen und 1.100 = 25 zusammengell. Zahlen der 4.
b) Dass die unendliche Reihe aller ganzen Zahlen bestehe aus 3 von ihr Zwischenzahlen und 1 von ihr zusammengesetzten Zahlen der 4.

11.

Hieraus werden nun, ohne dass wir nöthig hätten, die Reihe der, 5, 6, 7, 8, ... nach einander zu betrachten, nachfolgende allgemeine Behauptungen, nebst ihren Beweisen, verständlich sein:

I) Jede Zahl n nimmt durch ihre unendliche Reihe aus der unendlichen Reihe aller ganzen Zahlen 1/n weg, und lässt von letzterer, als ihre eignen Zwischenzahlen (n-1)/n übrig. Z. B. die Reihe der 7 ist 1/7 der unendlichen Reihe aller Zahlen; und ihre Zwischenzahlen 6/7 derselben.

Und wenn man m Wiederholungen von n nimmt, so erhält man bis auf diese Grenze, m Einfallsz. von n, und (n-1)m = nm - m Zwischenzahlen von n. Z. B. da 9.7 = 63 (also hier m = 9, n = 7), so hat man bis 63, 9 Einfallsz. und (7-1)9 = 54 Zwischenzahlen von 7.

II) Von der Reihe von n ist die Hälfte in der Reihe von 2, der dritte Theil in der Reihe von 3, ... der n-1te Theil in der Reihe von n-1 enthalten. (Es heiße der Kürze wegen Rn Reihe von n.) Denn die Reihe von n ist:

n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n, ...

Da nun in dieser Reihe als Coefficienten alle ganze Zahlen nach einander vorkommen, so kommen darunter auch alle gerade Zahlen = R2 vor; welche die Hälfte von allen Coefficienten betragen (1). Aber alle Zahlen, die eine gerade Zahl zum Coeff. haben, sind selbst gerade (3): also ist die Hälfte der Reihe von n gerade Zahlen, also Rn zur Hälfte in R2 enthalten.

Aber auch kommen als Coefficienten von Rn alle Zahlen der R3 vor, und je der dritte Coefficient ist eine solche Zahl, also ist auch die Zahl der Rn die diesen Coefficienten hat, aus der Reihe der 3; und je die dritte der Rn ist eine solche. Also ist 1/3 Rn in der R3.

Und so für R4, R5, ... Rn-1.

III) Wenn n die Factoren a, b, c, ... hat, so ist die ganze Rn, sowohl in Ra, als Rb, als Rc, als ... enthalten. Das ist, die ganze Rn ist enthalten in der Reihe jedes ihrer Factoren; z. B. 4 hat die Factoren 2, 2; also ist die R4 ganz in der R2. Oder 6 hat die Factoren 2, 3; also ist R6 ganz in R2 und auch ganz in R3. Oder: 12 = 2.2.3 = 4.3 = 2.6; also ist die R12 in R2, in R3, in R4, in R6.

Denn wenn m = abcd; so kann man d als erste Zahl der Rd annehmen, es ist also m in Rd. Auch (5) kann man setzen m = abdc, so gehört m in Rc; daher auch in die Reihe von b und in Ra.

IV) Hat aber n keinen Factor außer 1 und sich selbst (d. i. ist n eine absolute Primzahl, eine Primzahl schlechthin), so ist auch Rn nicht ganz unter irgend einer Reihe der vorhergehenden Zahlen enthalten. Es hat also die Reihe von n einen Theil von sich als eigenthümliche Zahlen, das ist, als solche, die sich durch die ersten Zahlen aller vorhergehenden Reihen, oder durch deren Producte nicht theilen lassen.

Hiebei ist auch die Aufgabe leicht zu lösen, wie viel von der Reihe von n, wenn n eine Primzahl ist, die eigenthümlichen Zahlen derselben betragen (p bedeute jede Primzahl; also Rp soviel als Reihe von n, wenn n eine Primzahl ist)? Von der Rp ist 1/2 in der R2, 1/3 in R3, 1/4 in der R4, ... 1/(p-1) der R(p-1). Es möchte daher Jemand voreilig sagen, die eigenthümlichen Zahlen der Rp betragen 1 (wenn die Rp selbst gleich 1 gesetzt wird) = (1/2 + 1/3 + 1/4 + ... + 1/(p-1)).

Dies ist aber darum falsch, weil die 1/2, 1/3, 1/4, ... 1/(p-1) selbst zum Theil in einander liegen. Wenn z. B. p = 5; so liegt 1/3 R5 in R2, 1/4 R5 in R3, 1/5 R5 in R4. Allein die eigenthümlichen Zahlen der R5 können nicht sein = 1 - (1/2 + 1/3 + 1/4) = 1 - 13/12; denn der 1/3, der von R5 in R4 gehört, liegt schon in dem 1/3 das davon in R2 fällt, denn die ganze Reihe von 4 liegt in der R2 (III); und von dem 1/4 das von R5 in R3 gehört, liegt auch schon 1/2 in R von 2; denn die Hälfte der Reihe von 3 liegt in R2 (II); also gehört der Reihe von 5 eigenthümlich 1 (das ist ihr Ganzes, sie selbst) = (1 + 1/3) = 4/3 = 1 + 1/3. Also ist der dritte Theil der R5 eigenthümliche Zahlen; also an sich je die dritte Zahl, welches zwar in

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

B

nicht

nicht zu sein scheint, allein auch nicht für eine bestimmte Folge dieser eigenthümlichen Zahlen der Reihe behauptet wird. So sind die eigenthümlichen Zahlen der R7 nicht  $= 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6})$ , sondern  $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{5})$   
 $= 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{6})) \cdot \frac{1}{5} = 1 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}) = 1 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{15}) = 1 - (\frac{10}{15} + \frac{3}{15}) = 1 - \frac{13}{15}$   
 $= \frac{2}{15}$ . Also sind von der unendlichen Reihe der 7 nur noch  $\frac{2}{15} = \frac{2}{3 \cdot 5}$  ihr eigenthümliche Zahlen, in dem angegebenen Sinne, welches in der Folge deutlicher gemacht werden wird.

Auch folgt zugleich hiemit, daß, wenn  $m$  nicht theilbar durch  $n$ , auch  $m$  nicht theilbar sein könne durch irgend eine Zahl der Reihe von  $n$ . Z. B. weil 15 nicht theilbar ist durch 2, so kann es auch nicht theilbar sein durch 4, 6, 8, 10... denn wäre es durch 4 theilbar, so läge es in der R4, also auch in der R2, wäre also auch durch 2 theilbar.

V) Alle zusammengesetzte Zahlen von  $n$ , oder auch die ganze Rn kann so allgemein benannt werden:

$$2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 5^d \cdot 6^e \dots n^{t+y} m.$$

oder am kürzesten nm.

Alle Zwischenzahlen von  $n$  aber:

$$2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 5^d \cdot 6^e \dots n^{t+y} m \mp 1, 2, 3 \dots (n-1)$$

oder kürzer: nm  $\mp 1, 2, 3, 4, 5 \dots, n-1$ .

Wo  $n, p, q, r, \dots, y$  auch 0 werden können. Bei  $n$  ist mit Fleiß der Exponent  $t+y$  gesetzt worden, weil  $n$  wenigstens in der ersten Potenz  $= n$  vorhanden sein muß; denn  $n^0$  gäbe  $= 1$ ; weil die  $t$ te Potenz jeder Zahl  $= 1$  ist. (Denn  $n$  in die erste Potenz setzen, heißt, zu 1 das Verhältniß  $1:n$  setzen, und das andere Glied suchen, welches dann  $n$  ist;  $n$  aber in die  $t$ te Potenz setzen, heißt zu 1 nicht das Verhältniß  $1:n$  setzen, so behält man natürlich 1.)

VI) Es gibt Zahlen, die soviel Factoren haben, als man will.

*Erster Beweis.* Denn man kann so viele Zahlen in einander produciren als man will, aber das Product gehört in die Reihen jedes seiner Factoren.

*Zweiter Beweis.* Die Reihe von  $n$  enthält Zahlen der Form  $2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \dots n^{t+y}$ .

Die Reihe von  $n+1$  von der Form:  $2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \dots n^t \cdot (n+1)^{t+y}$ .

(Daran nicht zu gedenken, daß jede solche Zahl noch mit jeder Zahl multiplicirt werden kann).

VII) Die Factoren jeder Zahl sind entweder alle gleich (so wie 81 ist  $= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ ) d. i. die Zahl ist eine Potenz irgend einer Wurzel; oder alle ungleich (wie z. B.  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ); oder einige gleich andere ungleich z. B.  $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ .

## 12.

Wir sollten nun untersuchen, wie man denn von jeder Zahl  $n$  alle mögliche Factoren finden könne; oder mit andern Worten, wie man alle die Zahlen finden könne, in deren Reihen  $n$  falle. Diese Frage wird aber besser gelöst werden können, wenn wir zuvor über die Primzahlen und ihre Reihe werden nachgedacht haben. Denn die Factoren von irgend einer Zahl,  $n$ , das ist diejenigen Zahlen, in deren Reihen  $n$  fällt, sind entweder Primzahlen oder zusammengesetzte. Ist das letztere, so haben sie wieder Factoren; und vielleicht diese wieder Factoren, bis man auf Primzahlen geräth; z. B. 360 hat den Factor 2; denn es ist  $360 = 2 \cdot 180$ . Es fällt also 360 sowohl in R2, als in R180. Aber 180 hat wieder Factoren, denn  $180 = 2 \cdot 90$ ; 90 wieder u. s. f. Es ist also schon hier die Eintheilung der Factoren von  $n$  in einfache (simplices) und zusammengesetzte (compolitos) deutlich. Darum eben müssen wir erst das Verhalten der einfachen Factoren (der Primzahlen) zu den zusammengesetzten durch genauere Betrachtung der Primzahlen erkennen.

## Drittes Kapitel.

## Von den Primzahlen.

(zu B, §. 6.)

## 13.

Eine Zahl ist eine Primzahl, oder absolute Zwischenzahl, wenn sie in keine Reihe der vorhergehenden Zahl fällt, daher keinen andern Factor hat, als sich selbst und die Einheit.

Um daher von einer beliebigen Zahl  $n$  zu untersuchen, ob sie eine Primzahl sei, darf man nur erforschen, ob eine von den vorhergehenden Zahlen ein Factor sei oder nicht.

Ist  $n$  eine gerade Zahl, so ist  $\frac{n}{2}$  (d. i.  $n:2$ ) = einer ganzen Zahl  $\frac{1}{2}n$ , und  $\frac{1}{2}n$  ist also der größte Factor, den  $n$  haben kann. Denn sollte es außer  $\frac{1}{2}n$  noch einen andern größeren Factor geben, so müßte dessen Coefficient kleiner sein als 2; also weil nur von ganzen Factoren die Rede ist, 1, daher der größere Factor als  $\frac{1}{2}n$  müßte  $n$  sein; dann wäre es aber kein Factor der hier in Anschlag kommt, weil jede Zahl, auch die Primzahlen, durch sich selbst theilbar ist. Um also zu sehen, ob  $n$  eine Primzahl ist, versuche man nach einander

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots \frac{n}{2}$$

und sehe, ob eine von diesen Zahlen in  $n$  dividirt eine ganze Zahl giebt, oder nicht; findet sich bis auf  $\frac{1}{2}n = \frac{n}{2}$  kein Factor von  $n$ , so giebt es gar keinen, außer 1 und  $n$ ;  $n$  ist also eine Primzahl. Denn:

Ist  $n$  eine ungerade Zahl, so ist auch  $\frac{n}{2}$  keine ganze Zahl, also  $n$  nicht durch 2 theilbar; z. B.  $n = 15$ , ist  $\frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}$ . Man nehme diejenige ganze Zahl größer als  $n$ , die über  $\frac{n}{2}$  die nächste ist (z. B. 16), so behaupte ich, sie kann kein

kein

kein Theiler von  $n$  sein, denn sie ist größer als  $\frac{n}{2}$ ; aber  $\frac{n}{2} \cdot 2 = n$ , also kann auch der Coefficient von  $\frac{n+1}{2}$  nicht 2 sein um  $n$  zu geben, sondern er muß kleiner sein als 2; also 1; dann aber müßte  $\frac{n+1}{2} = n$  sein, weil in nur  $n$  giebt. Also ist auch eine ungerade Zahl eine Primzahl, wenn es bis auf  $\frac{n}{2}$  keine ganze Zahl giebt, die ein Theiler von  $n$  ist.

Ist  $\frac{n}{3}$  eine ganze Zahl, so wird 3 ein Factor von  $n$ ; ist aber 3 ein Factor von  $n$ , so kann es auch, wenn 2 kein Factor von  $n$  ist, keinen Factor von  $n$  geben, der größer als  $\frac{n}{3}$  ist; denn  $\frac{n}{3} \cdot 3$  ist  $= n$ , also  $\frac{n+x}{3} \cdot 3 = n + x$ ; soll also  $\frac{n+x}{3}$  mit  $y$  multiplicirt  $n$  geben, so muß  $y < 3$  sein; also weil nur von ganzen Zahlen als Factoren die Rede ist, 2 oder 1. Aber 2 ist kein Theiler der Voraussetzung nach, und 1 ist immer ein Theiler; im letztern Falle müßte auch  $\frac{n+x}{3} = n$  selbst sein.

Wenn 2 und 3 kein Theiler ist von  $n$ , so kann es auch dann keinen Theiler von  $n$  geben, der  $> \frac{n}{3}$  wäre. Denn wenn man die nächste ganze Zahl nimmt über  $\frac{n}{3}$  so ist sie doch  $> \frac{n}{3}$ , also ihr Coefficient zu  $n$ , kleiner als 3, also 2, wider die Voraussetzung. Um so mehr bei noch größeren Zahlen.

Geht aber  $n$  nicht durch 2 auf, so geht es auch durch keine Zahl auf, die durch 2 zusammengesetzt ist, wie in dem Vorigen gezeigt wurde (15, IV.). Also auch nicht durch

4, 6, 8, 10, 12 . . . . .

In diesem Falle hat man nur noch zu probiren mit:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . . . .  $\frac{n}{2}$

Und wenn  $n$  auch nicht durch 3 aufgeht, so geht es auch nicht durch eine aus 3 zusammengesetzte Zahl auf; welche letzteren also aus der Reihe der Zahlen, womit man noch zu probiren hat, weggelassen werden. In diesem Falle untersuche man nur noch  $n$  mit:

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, . . . . .  $\frac{n}{3}$

Ist 5 ein Theiler von  $n$  oder auch nicht, so ist in beiden Fällen gewiß, daß es, wenn 2 und 3  $n$  nicht theilen, keinen Factor von  $n$  geben könne,  $> \frac{n}{5}$ ; aus ähnlichen Gründen wie bei 2 und 3. Da nun ferner, wenn 5  $n$  nicht theilt, auch keine daraus zusammengesetzte Zahl durch 5  $n$  theilen kann, so bleiben, wenn auch 5 kein Theiler von  $n$  ist, nur folgende Zahlen noch zu untersuchen übrig:

7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, . . . . .  $\frac{n}{5}$

Man hat also nur diejenigen Zahlen nach einander zu untersuchen, welche selbst unter den vorigen nicht enthalten, also Primzahlen sind. Also nur:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 . . . . .  $\frac{n}{2}$

Ist 2 kein Theiler von  $n$ , so ist die Grenze der Theiler  $\frac{n}{2}$ ; ist 3 kein Theiler, so ist diese Grenze heringerückt bis auf  $\frac{n}{3}$ ; mit 5 wird sie  $\frac{n}{5}$  mit 7,  $\frac{n}{7}$ ; mit 11,  $\frac{n}{11}$  mit  $p$ ,  $\frac{n}{p}$ . Gesetzt also es sei  $n = 101$ , also 101 zu untersuchen; 2 theilt 101 nicht, die Grenze ist also  $\frac{101}{2}$ , daher, weil nur von ganzen Zahlen die Rede ist 50; auch 3 nicht, also ist die Grenze 33; auch 5 nicht, also ist die Grenze 20; auch 7 nicht, also die Grenze 14; auch 11 nicht, also die Grenze 9; da nun hierdurch die Grenze der zu untersuchenden Zahlen über die schon untersuchten heringerückt ist, so giebt es gewiß keinen Theiler von 101, es ist also 101 ganz gewiß eine Primzahl.

14. (Eise des Zusatzes von, nicht dem leeren Blatt na dem Titel.

Wenn nun gleich durch diese Bemerkungen die Zahl der für jede Zahl  $n$  zu untersuchenden Zahlen sehr abgekürzt wird, so bleibt doch deren eine sehr große Anzahl übrig, um so größer, je größer  $n$  wird. Daher auch überhaupt es keinem Vernünftigen beifallen wird, auf diese Weise die Reihe der Primzahlen anzufuchen. Wir wollen jedoch durch weitere Betrachtungen diese Methode so weit abzukürzen suchen, als nur immer möglich ist. Vielleicht aber, möchte jemand denken, kann man es den decadisich geschriebenen Zahlen an der Endziffer oder an wenigen Endziffern ansehen, ob sie durch irgend eine Zahl theilbar sind oder nicht?

Bei 2 gilt dieses allerdings; denn weil 2 ein Factor der Zahl 10 ist, welche die Wurzel des nach ihr genannten decadisichen Systems ist, so ist auch 100, 1000, 10000 u. s. f., kurz jede Potestät von 10 durch 2 theilbar. Es kommt also nur auf die Einer an, diese nun müssen 0, 2, 4, 6, 8 sein, wenn sie durch 2 aufgehen sollen. Wenn daher eine Zahl  $n$  durch 2 aufgehen soll, so muß in der letzten Stelle 0, 2, 4, 6 oder 8 stehen. Alle ungerade Zahlen enden sich also auf 1, 3, 5, 7, 9. Und da alle Primzahlen über 2 keine geraden Zahlen sein können, so folgt sogleich, daß alle Primzahlen über 2, indem sie der Form  $2m + 1$  sind, auf 1, 3, 5, 7, 9 sich endigen müssen. Nicht aber sind deshalb alle Zahlen die sich auf 1, 3, 7, 9 endigen, Primzahlen.

Auf gleiche Weise wollen wir daher von 3 untersuchen, ob es ein decadisches Kennzeichen der Zahlen gebe, die dadurch theilbar sind. Betrachtet man eine einstellige decadisiche Zahl, so muß sie 3, 6, 9 sein, wenn sie soll durch 3 aufgehen. Bei jedem 10 bleibt 1 übrig, weil  $(3 \cdot 3) + 1 = 10$  ist. Bei 20 also 2, bei 30, 3, bei 90, 9; d. i. nichts. Daraus folgt, daß jede 2 stellige decadisiche Zahl durch 3 aufgehe, wenn ihre Ziffern von ihrem decadisichen Werthe abgesehen,

addirt durch 3 aufgehen; also geht 75 durch 3 auf, 67 aber, oder 76 nicht. Aber auch bei jedem 100, bei jedem 1000 u. f. w. gilt dasselbe wie bei 10; denn  $10 \cdot 10$  ist 100, also bleibt bei 100,  $10 \cdot 1 = 10$  übrig, also 1, wie bei 10, u. f. f. ins Unendliche. Daher darf man nur die Ziffern jeder decadischen Zahl, abgesehen von ihrer decadischen Bedeutung, addiren, und sehen, ob dadurch eine Zahl entsteht, die durch 3 aufgeht; ist letzteres, so geht auch die ganze Zahl durch 3 auf; widrigenfalls nicht. Dabei kann man fogleich alle Ziffern 3, 6, 9 in allen Stellen weglassen, weil sowohl 30, 300, 3000 als 30000 durch 3 aufgehen.

Alle Zahlen, die der Form  $2^n 5^m$  sind, gehen in irgend einer decadischen Stelle in das Einfache derselben auf. Denn 10 ist  $= 2 \cdot 5$ ;

$$100 = 10 \cdot 10 = 10^2 = 2^2 \cdot 5^2; \text{ also geht in } 100 \text{ sowohl } 2, 4, \text{ als } 5, 10, 25, 50 \text{ auf.}$$

$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ ; daher gehen in 1000 alle Zahlen auf der Form: das eine geringere Potenz der 2 als die 4te mit einer geringern Potenz der 5 als die 4te multiplicirt wird. Daher kann man leicht alle Factoren von 1000 finden, wenn man combinatorisch dabei verfährt:

$$\begin{array}{r} 2, 2, 2, 5, 5, 5 \\ \hline 2, 4, 10, 25, 5 \\ \hline 8, 20, 50, 125 \\ \hline 40, 100, 250 \\ \hline 200, 500 \end{array}$$

$$10000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4.$$

u. f. f. ins Unendliche.

Daher geht 16 gewiss in 10000, 20000, 30000 . . . 90000 auf, denn 16 ist  $= 2^4$ , aber  $2^4$  ist ein Factor von 10000. Auch geht 80 gewiss in 10000 auf, denn  $80 = 5 \cdot 16 = 5 \cdot 2^4$ ; aber  $5 \cdot 2^4$  ist ein Factor von 10000, denn  $5 \cdot 2^4 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 5^4 = 10^4 = 10000$ .

Geht aber eine Zahl in einer niedern Ordnung auf; so geht sie auch in der nächst höhern auf, und in allen höhern; denn die nächsthöhere und alle höhere sind Vielfache der niedern. Welche Zahl aber in einem Einfachen aufgeht, die geht auch in dessen 2fachen, 3fachen . . . und jedem Vielfachen auf. Da also 16 in 10000 aufgeht, so geht es auch in 100000, 1000000 u. f. f. auf.

Um daher zu sehen, ob eine Zahl durch 4 aufgeht, betrachte man nur die beiden letzten niedersten Ziffern; denn da 4 in 100 aufgeht, so geht 4 auch in allen Taufendern, Zehntausendern u. f. f. auf. Wenn aber die beiden letzten Ziffern sollen durch 4 aufgehen, so müssen sie zweimal hintereinander durch 2 aufgehen, oder doppelt gerade sein (pariter pares). Z. B. 374924; um zu sehen, ob diese Zahl durch 4 aufgehe, betrachte man nur 24; wenn dies zweimal durch 2 aufgeht, nach einander, so geht auch 374924 durch 4 auf;  $24 : 2 = 12$ ;  $12 : 2 = 6$ . Also geht 374924 durch 4 auf.

Und um zu sehen, ob  $n$  durch 8 aufgehe, betrachte man, da 1000 durch 8 aufgeht, nur die letzten 3 Ziffern von  $n$ ; gehen diese durch 8 auf, oder was das Gleiche ist, lassen sich diese 3mal nacheinander durch 2 dividiren (sind sie pariter pariter pares), so geht  $n$  durch 8 auf; widrigenfalls nicht. Z. B.  $n = 3257331144$ ;  $144 : 2 = 72$ ;  $72 : 2 = 36$ ;  $36 : 2 = 18$ ; also geht  $n$  durch 8 auf.

Bei 16 betrachte man 4 Stellen, und sehe, ob diese Zahl sich 4mal durch 2 dividiren läßt.

Bei 32, 5 Stellen, und suche 5mal durch 2 zu dividiren.

Bei  $2^p$ ,  $p$  Stellen, und sehe, ob  $n$  sich  $p$ mal mit 2 dividiren läßt, oder  $p$ mal gerade ist.

Das Gleiche gilt von den Zahlen, welche Potenzen von 5 sind.

5 selbst geht in 10 auf; soll also  $n$  mit 5 aufgehen, so muß die letzte Ziffer 5 oder 0 sein.

Soll  $n$  durch 25 aufgehen, so müssen die beiden letzten Ziffern durch 5 zweimal hintereinander aufgehen, auf 25, 50, 75 oder 00 sein.

Soll  $n$  durch  $125 = 5^3$  aufgehen, so müssen die 3 letzten Ziffern dreifach gefünfte Zahlen sein, also sich 3mal hintereinander durch 5 dividiren lassen. Es sei z. B. 3777875 zu untersuchen, ob es durch 125 aufgehe; so dividire 875 3mal nacheinander mit 5, und siehe, ob es aufgeht;  $875 : 5 = 175$ ;  $175 : 5 = 35$ ;  $35 : 5 = 7$ . Also geht auch 3777875 durch 125 auf.

Soll  $n$  durch  $5^p$  theilbar sein, so siehe, ob dessen  $p$  letzte Stellen  $p$ mal hintereinander in 5 aufgehen.

So bei allen Zahlen, welche der Form  $2^n \cdot 5^m$  sind; z. B. wenn untersucht werden soll, ob  $n$  durch 500 aufgehe; so ist  $500 = 5^3 \cdot 2^2$ ; also müssen die beiden letzten Stellen durch 4, und die 3 letzten durch 125 aufgehen.

Bei den Zahlen dieser Form giebt's also große decadische Abkürzungen; nur das uns dies für die Entdeckung der Primzahlen nicht viel hilft; weil man da, wie gezeigt, nur durch die Reihe der Primzahlen selbst  $n$  zu untersuchen hat.

Soll eine Zahl durch 6 aufgehen, so muß sie zugleich durch 2 und durch 3 aufgehen; also gerade sein, und die gezeigte Probe mit 3 aushalten.

Um dies für 7 zu untersuchen; müssen wir wieder die Potenzen der 10, welche die höheren decadischen Ordnungen geben, im Vergleich mit dem Theiler 7 untersuchen; aber

$$\begin{array}{r} 10 \text{ läßt Rest } 3; \text{ also} \\ 100 \text{ — — } 10 \cdot 3 = 30 = 2; \text{ also} \\ 1000 \text{ — — } 10 \cdot 2 = 20 = 6; \text{ also} \\ 10000 \text{ — — } 10 \cdot 6 = 60 = 4; \text{ also} \\ 100000 \text{ — — } 10 \cdot 4 = 40 = 5; \text{ also} \\ 1000000 \text{ — — } 10 \cdot 5 = 50 = 1; \text{ also} \\ 10000000 \text{ — — } 10 \cdot 1 = 10 = 3; \text{ also wieder} \\ \text{von vorne ins Unendliche.} \end{array}$$

Daher

Daher horizontal gestellt, und die dazu gehörigen Reste darüber gesetzt:

. . . 1 5 4 6 2 3 1 5 4 6 2 3 1  
. . . 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Man muß also, wenn n gegeben ist, jede Ziffer in jeder Stelle mit dem darüber stehenden Reste der einfachen Stelle multipliciren, diese Producte addiren, und sehen, ob eine Zahl herauskommt, die durch 7 aufgeht; wenn Zahlen darin vorkommen, die durch 7 aufgehen, als 7, 14, 21, 28, 35, . . . . so kann man diese logisch überspringen; so sei n = 321357953. So läßt man hier 21, 35, 7, weg, und schreibt über die übrigen Zahlen, die einfachen Reste, also:

2 231  
a) 321357953; darunter die Partialreste:  
b) 6 413

die Zahlen in b, abgesehen vom decadischen Werthe, addirt, = 14 = 2.7; also geht dieses n durch 7 auf; denn 7.45908279 = 321357953. Daraus ist klar, das dies nur eine Abkürzung *scheine*, indem man meistens eben so schnell wirklich durch 7 die Division probiren kann.

Die Zahl 9 läßt mit allen Potenzen dieselben Reste, wie 3, nemlich 1; um daher zu sehen, ob eine Zahl n durch 9 aufgehe, darf man nur alle Ziffern, vom decadischen Werthe abgesehen, addiren, und sehen, ob diese durch 9 aufgehen; dann geht auch n durch 9 auf, widrigenfalls nicht. (Alle Zahlen, die durch 9 aufgehen, gehen auch durch 3 auf, nicht aber umgekehrt.)

So giebt auch 11 eine wahre Abkürzung. Denn

10 giebt - 1, d. i. eins zu wenig;  
100 also 10. - 1, d. i. - 10, also + 1 (das ist: es ist eins drüber; es ist auch 9.11 = 99);  
1000 also 10.1 also + 10, 10 drüber, also - 1;  
10000 also 10. - 1, also + 1  
u. f. f. ins Unendliche.

Also horizontal geschrieben und die Reste drüber gesetzt:

. . . + 1 - 1 + 1 - 1 + 1  
. . . 1 1 1 1 1 1

Wenn man also die 1te, 3te, 5te, 7te . . . Ziffer zusammen addirt, so erhält man die Einheiten zusammen, welche drüber sind; addirt man aber die 2te, 4te, 6te . . . Ziffer zusammen, so erhält man die zusammen, welche fehlen; heben sich nun beide Summen auf, so muß auch n durch 11 aufgehen, widrigenfalls nicht. Z. B. 7234527; 7+5+3+7 = 22; aber 2+4+2 = 8; also geht n auch nicht durch 11 auf.

Auch giebt's noch eine andere leichte Probe für 11, die sich auf das Entstehen jeder zusammengesetzten Zahl von 11 durch die Multiplication mit 11 gründet. Man multiplicire z. B.

235724 mit 11; so hat man:  
N, 235724  
O, 235724  
P, 2592964

Wenn man 4 von 6 abzieht, bleibt 2; diese mußte also in derselben Stelle darüber und in der nächsthöheren Stelle daneben stehen; also ferner 2 von 9 giebt 7, diese mußte also darüber und daneben links stehen; demnach 7 von 2, und weil 2 < 7, 7 von 12 = 5, also mußte 5 darüber und links daneben stehen; also 5 von 9, bleibt 4, und weil eins vorhin zur 2 herübergenommen wurde nur 3; also stand 3 daneben, demnach 3 von 5 bleibt 2, da nun die letzte Ziffer wirklich 2 ist, so muß auch 2592964 durch 11 aufgehen. Dergleichen ist weitläufig mit Worten zu beschreiben, aber äußerst leicht selbst zu abstrahiren.

Die Zahl 13 giebt den Perioden

. . . - 4 - 3 + 1 + 4 + 3 - 1 - 4 - 3  
. . . 1 1 1 1 1 1 1 1 1

welches in den allermeisten Fällen gar keinen Vortheil gewährt.

So lassen sich nun zwar für höhere Primzahlen auch Perioden finden, sie gewähren aber keinen Vortheil; wie jeder mit 17, 19, 23, 29, 31 . . . probiren kann.

Die Abhandlung dieser Charakteristik ist in Rücksicht der bestimmten Zahlen in verschiedenen Systemen verschieden, allein den allgemeinen Principien nach für jedes Zahlersystem die gleiche. Es giebt davon sehr viele Anwendungen, z. B. auf die Proben der Addition und Subtraction, Multiplication und Division, durch 9 im decadischen, und allgemein durch n - 1 im n-adischen Systeme. Welches zu zeigen hieher nicht gehört. Auch auf die Lehre der Verwandlung der Brüche aller Art in Brüche eines bestimmten Systems; um zu entscheiden, welche Brüche sich z. B. ganz genau in Decima Brüchen ausdrücken lassen, und welche andere gar nicht; ferner wenn sie sich ausdrücken lassen, wie viele Decimalstellen dazu erforderlich sind. Die Theorie davon habe ich in Anfangsgründen der Arithmetik an ihrem Orte abgehandelt.

Für die zusammengesetzten Zahlen, gilt in Rücksicht dieser Abkürzungen die Regel, das man sie in ihre einfachen Factoren auflöse, und sehe, ob n sich durch alle diese einfache Factoren theilen lasse, oder nicht. Dann läßt sich auch n durch die ganze Zahl theilen oder nicht. Es ist zu dem Ende vortheilhaft, sich eine kleine Tabelle von allen Zahlen bis 100 zu bilden, dergleichen zum Schluß dieses Werks beigefügt ist.

Ehe wir die in §. 13. angefangnen Untersuchungen fortsetzen, ist's dienlich, das Gesetz der Fortschreitung der Primzahlen zu entwickeln, und zu entscheiden, ob die Reihe der Primzahlen eine endliche oder unendliche sei. Hierzu ist uns der

natürlichste und gründlichste Weg dadurch eröffnet, daß wir nacheinander die Reihen aller Primzahlen aus der unendlichen Reihe aller ganzen Zahlen herausnehmen, und bemerken, welche Zahlen als Primzahlen bis auf eine beliebige Grenze übrig bleiben. Denn diejenigen Zahlen, die durch die Reihen der vorhergehenden Zahlen nicht weggenommen werden, sind Primzahlen, laut der Definition. Immer aber will ich diejenigen Zahlen, die durch eine bestimmte Menge von aufeinanderfolgenden Zahlenreihen aller Primzahlen von 2 an nacheinander noch aus der Reihe aller ganzen Zahlen, als noch mögliche Primzahlen übrig gelassen werden, problematische Zahlen nennen, das heißt, solche Zahlen, von denen erst noch durch weitere Betrachtung ausgemacht werden muß, ob sie Primzahlen sind oder nicht, aus welchen aber alle folgende Primzahlen sein müssen.

Die Reihe der 2 zuförderst, nimmt aus der unendlichen Reihe aller Zahlen, die ich der Kürze wegen hinfort S nennen will, die Hälfte weg, die andere Hälfte ( $\frac{1}{2}$  S) bleibt problematisch. Und zwar wechseln die geraden Zahlen mit den ungeraden ab; alle gerade Zahlen enden sich auf 0, 2, 4, 6, 8; alle ungerade Zahlen auf 1, 3, 5, 7, 9; die ungeraden Zahlen aber sind die noch problematischen  $= \frac{1}{2}$  S, aus denen also alle Primzahlen, so größer als 2 sind, sein müssen. Es sind also alle Primzahlen über 2, der Form  $2m + 1$  und enden sich auf 1, 3, 5, 7, 9. Nicht aber alle diese problematische Zahlen, d. i. alle ungerade der Form  $2m + 1$  sind darum Primzahlen.

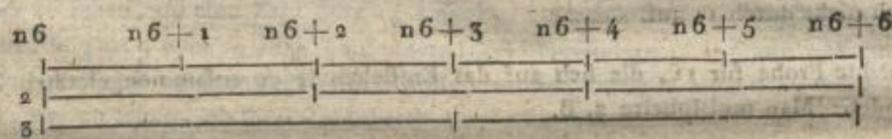
Die Reihe der 3, welche eine Primzahl ist, indem sie ungerad ist, und nur 2 vorhergeht, enthält für sich betrachtet  $\frac{2}{3}$  S; da aber die Hälfte der R<sub>3</sub> schon in R<sub>2</sub> enthalten ist (11), so nimmt R<sub>3</sub> von S nur  $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$  weg. Das ist aus S die je sechste Zahl, außer denen die schon R<sub>2</sub> weggenommen hat. Nämlich die mit \* bezeichneten:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 . . . .  
 \* \* \* \* \*

Also aus der Reihe der durch R<sub>2</sub> übriggelassenen problematischen Zahlen, die je dritte:

3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 . . . . .  
 \* \* \* \* \*

Die R<sub>2</sub> zugleich mit R<sub>3</sub>, nehmen also aus S zusammen ( $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ ) S weg, also  $\frac{7}{6}$  S. Es bleiben demnach nach Wegnahme von R<sub>2</sub> und R<sub>3</sub> aus S noch  $\frac{1}{6}$  S problematische Zahlen, oder auch  $\frac{1}{6}$  S. Von je 6 Zahlen also aus S bleiben nur noch 2 übrig; 6 aber ist  $= 2 \cdot 3$  also die Stelle in S, wo der Maßstab 2 und der Maßstab 3 immer zusammenfallen. Jedes Vielfache von 6, n6, geht durch 2 und durch 3 auf; n6 + 1 geht weder durch 2 noch durch 3 auf; n6 + 2 geht durch 2 auf; n6 + 3 durch 3; n6 + 4 wieder durch 2; n6 + 5 aber weder durch 2 noch durch 3. Welches durch folgendes Schema deutlich wird:



Also von je 6 Zahlen, von n6 an gerechnet, die erste und die 5te, sind die beiden, vermöge der Reihen von 2 und 3 noch problematischen Zahlen; n6 + 5 ist aber  $= n6 - 1$ ; also sind die beiden problematischen Zahlen  $n6 + 1$ ; oder wenn man von allen Vielfachen der 6 nach einander  $+ 1$  (d. i. entweder + oder - 1) nimmt, so erhält man die Reihe der nun noch vermöge der Reihe von 2 und 3 problematischen Zahlen, aus welchen also alle Primzahlen, die größer als 3 sind, sein müssen. Alle Primzahlen über 3 sind also der Form  $n6 + 1$ , wo n alle ganze Zahlen nach einander bedeutet. Die Reihe der problematischen Zahlen vermöge R<sub>2</sub> und R<sub>3</sub> ist also:

6    12    18    24    30    36    42 . . . . .  
 5 7, 11 13, 17 19, 23 25, 29 31, 35 37, 41 43, . . . . .

Die Reihe der 4 nimmt nichts weg, weil sie schon in R<sub>2</sub> enthalten; sie wird also hier, wie die Reihen aller zusammengesetzten Zahlen, weil sie in den Reihen jedes ihrer Factoren enthalten sind (11) weggelassen.

Die R<sub>5</sub> nimmt für sich  $\frac{1}{5}$  S weg, da aber in R<sub>5</sub> selbst die ganze S in den Coefficienten wiederkehrt, und von S  $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$  durch R<sub>2</sub> und R<sub>3</sub> weggenommen sind, so sind auch nur von R<sub>5</sub> noch  $\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$  solche Zahlen, die nicht schon in R<sub>2</sub> und R<sub>3</sub> enthalten sind; also nimmt, weil das Uibrige schon R<sub>2</sub> und R<sub>3</sub> weggenommen, R<sub>5</sub> nur noch  $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$  von S weg;  $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$  aber ist  $\frac{6}{25}$ , also nimmt R<sub>5</sub> noch  $\frac{6}{25}$  S weg, oder auch  $\frac{6}{25}$  S. Da nun 30 die erste Zahl, die durch 2, 3, 5 theilbar ist (also die erste Einfallzahl für 2, 3 und 5 zugleich), so heißt dies: von jeden 30 Zahlen werden durch die R<sub>5</sub> noch 2 weggenommen. Die Reihe der probl. Zahlen verm. R<sub>2</sub> und R<sub>3</sub> war:

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, 65, 67  
 \* \* \* \* \*

und aus ihr fallen innerhalb jedes n30, 2 Zahlen weg, nämlich  $n30 + 5$  und  $n30 + 25$ ; oder kürzer  $n30 + 5$ .

Da nun R<sub>2</sub> + R<sub>3</sub> wegnahm  $\frac{7}{6}$  und R<sub>5</sub>  $\frac{6}{25}$ , so nehmen R<sub>2</sub> + R<sub>3</sub> + R<sub>5</sub> weg  $\frac{7}{6} + \frac{6}{25} = \frac{173}{150} = \frac{173}{150}$ ; also von je 30 Zahlen 22; und es bleiben demnach noch von jeden 30, 8, d. i.  $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ , das ist  $\frac{4}{15} = \frac{4}{15}$  übrig. Und weil diese 8 von 30 nach jedem Vielfachen von 30, wo 2 und 3 und 5 zugleich einfallen, in gleichen Distanzen wiederkehren müssen, und in den ersten 30 die übrigbleibenden sind: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29; so sind also auch alle, vermöge R<sub>2</sub> und R<sub>3</sub> und R<sub>5</sub> noch problematische Zahlen der Form:

$n30 + 1$  f. 7, f. 11, f. 13, f. 17, f. 19, f. 23, f. 29.

und da alle Primzahlen, die  $> 5$  sind, aus diesen problematischen Zahlen sein müssen, so sind auch alle Primzahlen  $> 5$  dieser Form.

Die R<sub>7</sub> nähme für sich  $\frac{1}{7}$  S weg, allein von diesem  $\frac{1}{7}$  S fällt  $\frac{1}{7}$  weg, denn  $\frac{1}{7}$  der ganzen S, die auch in den Coefficienten der R<sub>7</sub> wiederkehrt, sind schon in R<sub>2</sub> + R<sub>3</sub> + R<sub>5</sub> enthalten; also bleiben nur  $\frac{6}{7}$  oder  $\frac{6}{7}$  von diesem  $\frac{1}{7}$  S übrig; also

also nimmt R7 weg:  $\frac{2}{30} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{210} = \frac{1}{105}$ . Und da 210 die erste Coincidenz oder Einfallszahl von 2, 3, 5, 7 ist: so nimmt also von je 210 Zahlen aus S 7, noch 8 weg: und von S bleiben vermöge  $R_2 + R_3 + R_5 + R_7$  noch übrig (weil  $R_2 + R_3 + R_5$  wegnahmen  $\frac{22}{30}$ , und R7 wegnimmt  $\frac{4}{105}$ , also  $R_2 + R_3 + R_5 + R_7$  wegnehmen  $\frac{22}{30} + \frac{4}{105} = \frac{22}{2.3.5} + \frac{4}{3.5.7} = \frac{22.7 + 4.2}{2.3.5.7} = \frac{162}{210}$ )  $\frac{210}{210} - \frac{162}{210} = \frac{48}{210} = \frac{8}{35}$ .

Da nun 210 die erste Einfallszahl von 2, 3, 5, 7 ist, so müssen diese 48 Zahlen in gleichen Distanzen, wie bei den ersten Zahlen wiederkehren. Die ersten solchen 48 Zahlen sind:

- 1, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 101, 103, 107, 109, 113, 121, 127, 131, 137, 139, 143, 149, 151, 157, 163, 167, 169, 173, 179, 181, 187, 191, 193, 197, 199, 209.

Daher sind alle vermöge  $R_2 + R_3 + R_5 + R_7$  noch problematische Zahlen, also auch alle Primzahlen  $> 7$ , der Form:

$$n \cdot 210 + 1, f_{11}, f_{13}, f_{17}, f_{19}, \dots, f_{199}, f_{209}.$$

Die  $R_{11}$  nähme für sich aus S weg  $\frac{1}{11} S$ , allein von diesem  $\frac{1}{11}$  ist nur noch  $\frac{24}{210} = \frac{4}{35}$  übrig, was nicht schon unter den  $R_2, R_3, R_5, R_7$  enthalten wäre; also nimmt  $R_{11}$  nur  $\frac{4}{35} \cdot \frac{1}{11} S$  weg,  $= \frac{4}{385} S = \frac{1}{96.25} S$ . Da nun  $R_2 + R_3 + R_5 + R_7$  zusammen wegnehmen  $\frac{162}{210}$ , und  $R_{11}$  wegnimmt  $\frac{4}{385}$ ; so nehmen  $R_2 + R_3 + R_5 + R_7 + R_{11}$  weg:  $(\frac{162}{210} + \frac{4}{385}) S = (\frac{162}{2.3.5.7} + \frac{4}{2.3.5.7.11}) S = \frac{11 \cdot 162 + 48}{2.3.5.7.11} S = \frac{1830}{2310} S$ ; also bleibt nun noch problematisch:  $\frac{210 - 1830}{2310} S = \frac{480}{2310} S = \frac{160}{770} S = \frac{16}{77} S = \frac{80}{385} S$ . Von jeden 2310 Zahlen, bleiben also noch 480 problematisch; und da 2310 die erste Coincidenz von 2, 3, 5, 7, 11 ist, so müssen diese 480 Zahlen nach jedem Vielfachen von 2310 (nach n. 2310) immer in denselben Distanzen wiederkehren. Wenn es nicht zu weitläufig wäre, könnte ich leicht die Form der nun noch problematischen Zahlen aufstellen. Der Mathematikverständige kann sie leicht construiren, der Andere construirt sie so nicht nach, wenn sie auch hier ständen. Diese Form ist kurz:  $n \cdot 2310 +$  jeder von den 480 übrigen Zahlen. Setzte man das Verzeichniß der nun noch vermöge der  $R_2 + R_3 + R_5 + R_7 + R_{11}$  problematischen Zahlen bis auf 1000000 fort, so würde man doch bis auf diese Grenze 207600 und einige wenige darüber, noch problematische Zahlen finden.

Wer nun auf diesem Wege eine Primzahlentafel verfertigen will, der muß die nun noch problematischen Zahlen, bis auf die Grenze verzeichnen, bis auf welche seine Tafel reichen soll, dann die Berechnung auf 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... fortsetzen, bis er seinen Zweck erreicht hat. Da ich aber auf diese Art die Primzahlentafel zu verfertigen nicht für zweckmäßig halten kann, indem so eine Tafel mit einer Factorentafel zugleich entsteht: so sei es genug, den Weg dieser Berechnung für Jeden, der sie anstellen will, eröffnet zu haben.

Hier ziehen wir nur die nächsten Folgerungen für die Unendlichkeit und für die Art der Gesetzmäßigkeit des Fortschreitens der unendlichen Reihe der Primzahlen. Euclid hat gezeigt, daß man über jede angebliche Zahl hinaus eine größere Primzahl könne angeben (Elem. IX, 20.), daß also die Reihe der Primzahlen endlos sei. Uns aber ist hier ein geometrischer und das innere Verhältniß dieser Reihe selbst darstellender Beweis aus den vorigen Betrachtungen gegeben, welcher kurz ausgedrückt im Folgenden dargestellt ist:

Durch  $R_2$  wird aus S (S selbst = 1 gesetzt)  $\frac{1}{2}$  weggenommen, es fehlt also noch  $\frac{1}{2}$ , ehe S ganz aufgehoben wäre. Durch  $R_3$  wird aber nicht einmal  $\frac{1}{3}$ , sondern nur  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ , also  $\frac{1}{6}$  weggenommen. Also vernichten  $R_2 + R_3$  von S nur  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ . Es ist also noch  $\frac{1}{6}$  der unendlichen Reihe S übrig. Aber  $R_5$  nimmt nicht einmal  $\frac{1}{5}$ , sondern nur  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$  weg (weil von der Reihe von 5 selbst nicht mehr bleibt, als was von S, welche Reihe S in den Coefficienten der  $R_5$  ganz wiederkehrt, vermöge  $R_2 + R_3$  übriggelassen ist, also nur  $\frac{1}{6}$ ). Also nimmt  $R_2 + R_3 + R_5$  weg  $\frac{2}{3} + \frac{1}{10} = \frac{14}{15}$ ; bleibt von S noch übrig  $\frac{1}{15}$ . Nun aber wird durch  $R_7$  nicht ganz  $\frac{1}{7}$ , sondern nur  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$  genommen; nun ist  $(\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{7}) < \frac{1}{42}$ , also nimmt auch noch  $R_7$  zu den vorigen hinzu genommen noch nicht die ganze S weg, sondern es bleibt  $\frac{1}{15} - (\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{7})$  übrig, d. i.  $\frac{20}{210} = \frac{2}{21}$ . Also lassen  $R_2 + R_3 + R_5 + R_7$ , übrig  $\frac{2}{21} S$ . Von der  $R_{11}$  wird also  $(\frac{1}{11} \cdot \frac{2}{21})$  weggenommen; dies ist  $< \frac{2}{21}$ . Also bleibt wieder etwas übrig; nemlich  $\frac{2}{21} - (\frac{1}{11} \cdot \frac{2}{21}) = \frac{8}{231} = \frac{8}{3.7.11}$ . Die Reihe von 13 nimmt also von diesem Reste von S =  $\frac{8}{231}$  weg  $\frac{1}{13} \cdot \frac{8}{231}$ , welches  $< \frac{8}{231}$ ; es läßt also, um es nicht weiter bestimmt zu berechnen, auch noch  $R_{13}$  übrig;  $R_{17}$  läßt also  $\frac{8}{231} - (\frac{1}{17} \cdot \frac{8}{231})$  übrig; aber  $\frac{8}{231} - (\frac{1}{17} \cdot \frac{8}{231}) < \frac{8}{231}$ ; der Rest sei  $\frac{c}{d}$ ; so nimmt die nächste Primzahl, sie heiße p, weg, nicht das ganze  $\frac{c}{d}$ , sondern nur  $(\frac{1}{p} \cdot \frac{c}{d}) < \frac{c}{d}$ ; es bleibt also  $\frac{c}{d}$  übrig, die nächste Primzahl, q, nimmt weg  $(\frac{1}{q} \cdot \frac{c}{d}) < \frac{c}{d}$ ; es bleibt also  $\frac{c}{d}$  ( $< \frac{c}{d} < \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$ ) übrig; u. s. f. ins Unendliche. Es ist also die Reihe der Primzahlen eine unendliche. Jede Reihe jeder Primzahl, die noch hinzugenommen wird, nimmt noch einige weg, aber immer weniger. Dies letztere ist hieraus klar, weil die von S bleibenden Reste  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}, \dots, \frac{x}{y}$  so beschaffen sind, daß sie immer kleiner werden; der Zähler aber giebt an, wie viele innerhalb der Grenze des Nenners in der Reihe S Zahlen wegfallen; da nun diese Brüche immer abnehmen, so wird auch das Verhältniß der Zähler zu den Nennern kleiner, also werden immer weniger Zahlen innerhalb derselben Grenze weggenommen, wenn man zu höheren Primzahlen fortgeht. Dies läßt sich durch wirkliche Construction nachweisen, wenn man die erste Coincidenz aller Primzahlen bis auf die beliebig-höchste nimmt. Es läßt sich auch das Verhältniß dieser Abnahme, aus den Verhältnissen dieser Brüche finden, und leicht zeigen, daß zwar immer weniger, aber immer weniger-weniger von den je höheren Primzahlenreihen weggenommen werden. Dies hier weiter zu verfolgen, habe ich nicht Lust, weil ein Mathematikverständiger es nach der gegebenen Anleitung leicht selbst entwickelt, ein Jeder andere aber, dem die Lehre vom Verhältniß nicht vertraut ist, doch nicht verstehen würde, auch es außerhalb dieses Zwecke liegt. Wenn nun aber diese Brüche nach einem beständigen Verhältnisse abnehmen, und wieder in der Abnahme abnehmen, so ließe sich auch eine algebraische Gleichung für die Primzahlen aufstellen. Daß dies aber nicht der Fall ist, ist daraus klar, weil die ersten Primzahlen regellos für ein beständiges Verhältniß, oder Verhältniß des Verhältnisses folgen, und folgen müssen; und da dies eben darum für die ganze unendliche Reihe der Primzahlen statt finden muß,

so folgt: daß sich keine allgemeine, algebraische Gleichung für die Primzahlenreihe aufstellen läßt. Daher auch a priori folgt, daß jede dafür ausgegebne Formel für die Primzahlenreihe, die algebraisch ist (z. B. die von Fermat, die Euler auch betrachtet, und wie auch Lambert für unzureichend befunden hat, nemlich  $\frac{b^{a-1}-1}{a}$ , wo a jede Primzahl, und b jede andere durch a untheilbare Zahl bedeutet; siehe hierüber *Lamberts Zusätze zu log. u. trigon. Tabellen*, Berlin 1770 p. 43 ff. wo überhaupt viele Sätze über Factoren und Primzahlen sich finden, welche in diese Abhandlung nicht gehören, wiewohl sich diese Abhandlung dort auch nicht findet), als falsch erkannt wird; wiewohl solche Formeln immer mit bestimmter Einschränkung einige Primzahlen entdecken. Euler sagt, man habe bisher kein Gesetz entdecken können; nach welchem die Primzahlen fortschreiten. Wir haben das Gesetz gefunden, es ist nemlich ein beständig durch jede Reihe der Primzahlen gesetzmäßig verändertes; es ist ein unendlich vielseitiges, bei immer weiterem Fortschreiten weiter bestimmtes. Daher werden wir uns nicht weiter bemühen, ein endliches, algebraisches Gesetz aufzufinden, wo ein unendliches waltet. Also wird man auch nicht hoffen, daß sich die Fortschreitung der Primzahlen an das endliche Gesetz irgend eines Zahlensystems, z. B. des decadisichen oder dyadisichen, oder dodecadisichen knüpfen werde. Daher kommt es auch, daß oft innerhalb eines frühern 100 weniger Primzahlen vorkommen, als innerhalb eines späteren; wiewohl auch im Ganzen hier die almähliche Abnahme der Primzahlen zu bemerken ist. Man kann dies in unserer beigefügten Primzahlentafel bis 100000 nachsehen. Die Zahlen bedeuten die Hunderte, die dabei stehende Letter, nach Anweisung des darüber gesetzten Zeigers, die 2 übrigen Ziffern. Beim Gebrauche muß man bemerken, ob ein Buchstabe im ersten oder 2ten Alphabete vorkommt, weil danach die Bedeutung verschieden ist. Z. B. die Primzahlen von 78000 bis 78100 sind

78000 g n r ü y g.  
78007, 17, 31, 41, 49, 59, 79.

(Also ist auch unmöglich, daß die Primzahlen mit bestimmten arithmetischen Differenzen wiederkehren.)

Um die vorige Betrachtung zu erläutern, siehe folgende Tafel hier:

Die Primzahl x	2	3	5	7	11
nimmt aus S	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} - (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3})$	$\frac{1}{5} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{7} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) \cdot \frac{1}{7}$	$\frac{1}{11} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}) \cdot \frac{1}{11}$
oder:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$	$\frac{1}{35} \cdot \frac{1}{11}$
das ist:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{385}$
alle vorige nehmen aus S:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{105} = \frac{1}{15}$	$\frac{1}{385}$
also bleiben problematisch	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{11}$

Viertes Kapitel.

Von der Auffuchung aller einfachen Factoren jeder Zahl n, und der Entscheidung, ob n überhaupt Theiler habe oder eine Primzahl sei.

16.

Die Factoren jeder Zahl lassen sich auf einfache Factoren bringen, und nach ihrer Größe ordnen. Denn es seien von n, die n in ihrem Producte gebenden Factoren a, b, c, d: so ist a entweder eine Primzahl, oder eine zusammengesetzte Zahl; ist letzteres, so suche man wieder die Factoren von a, sie seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , so ist  $\alpha$  wieder eine zusammengesetzte Zahl oder eine Primzahl; ist ersteres, so suche wieder die Factoren von  $\alpha$ , und fahre so fort, bis man auf Primzahlen kommt. Wollte jemand dies leugnen, so müßte n ein unendliches, nicht aber ein endliches Product sein. Z. B.  $360 = 4 \cdot 90; 4 = 2 \cdot 2; 90 = 2 \cdot 45; 45 = 3 \cdot 15; 15 = 3 \cdot 5$ . Es sind also alle einfache Factoren von 360, nach der Größe geordnet  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ , oder:  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ . Hieraus kann man nun leicht combinatorisch alle Factoren von 360 finden, wenn man die einfachen zu 2, zu 3, zu 4, ..., zu m (wenn deren m sind) verbindet. Z. B.

2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 360  
 4, . 6 . 10,  
 9, 15,  
 8, 12, . 20,  
 18, 30,  
 45,  
 24, . 40,  
 36, 60,  
 90,  
 72, 120,  
 180.

*Es seien  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  die un. Factoren der Zahl N, und  $m, n, p, \dots$  die Zeiger, wievielmals die Factoren  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  auf der Weise in N vorkommen sind, so daß  $N = \alpha^m \cdot \beta^n \cdot \gamma^p \dots$ . Um nun alle Theiler von N zu finden, muß man alle Glieder der Potenzreihe  $(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^m) \cdot (1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^n) \cdot (1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^p) \dots$  bilden. Die Anzahl aller Theiler aber ist  $(m+1)(n+1)(p+1) \dots$  (Francoeur math. pures I p. 27.)  
 Für 360 kommt =  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2) \cdot 5$   
 also 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.*

Alle einfache Theiler der Zahl 360, deren Product eben 360 ist, sind also: 2, 2, 2, 3, 3, 5. Und alle mögliche daraus zusammengesetzte Factoren, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180.

Aus diesem Beispiele ist klar, daß es eine große Tabelle werden würde, wenn man von allen zusammengesetzten Zahlen alle mögliche Theiler angeben wollte; daß diese Arbeit aber überflüssig sei, indem man aus den einfachen Theilern alle zusammengesetzte, wenn man deren benöthigt ist, combinatorisch darstellen kann. Sehr brauchbar aber würde eine Tabelle sein, welche von allen zusammengesetzten Zahlen alle, sie selbst producirenden, einfachen Factoren angäbe. Doch

*Für 210 ist man  $(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)$ , In factoren 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30 könnte 35, 42, 70, 105, 210*

könnte diese Tafel noch dadurch sehr verkürzt werden, daß etwa alle durch 2, 3, und 5 zusammengesetzte Zahlen, weil man diese leicht erkennen kann, und ihrer eine so große Menge ist, daraus weggelassen würden.

## 17.

Es kommt also darauf an zu zeigen, wie man eine solche Tafel, die Factorentafel genannt wird, auf dem kürzesten Wege, bis auf eine weite Grenze verfertigen könne. Sodann auch, wie man von jeder Zahl, einzeln dieselbe betrachtet, ohne Factoren und Primzahlentafel, alle mögliche einfache Factoren finden könne. (Man vergesse nicht, daß hinfort unter: *Factoren* überhaupt, *einfache Factoren* verstanden werden). Ich zeige zuerst das letztere.

Zuerst bringe ich folgende beide Sätze in Erinnerung:

- a) Wenn man in irgend ein Product (in irgend eine zusammengesetzte Zahl) mit irgend einem seiner Factoren dividirt, so enthält der Quotient alle übrige Factoren, Denn auf die Ordnung der Factoren kommt nichts an.
- b) Wenn man von den kleinsten Primzahlen anfängt, und  $n$  unterfucht, ob  $n$  dadurch theilbar sei, und keine Primzahl übergeht, so muß man alle einfachen Factoren erhalten, welche  $n$  hat, wenn man nur bis auf die oben gezeigte Grenze  $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \dots, \frac{n}{m} < m$  fortgeht. Dabei muß man aber nicht vergessen, mit den Primzahlen so vielmal nach einander zu unterfuchen, als möglich ist, weil  $n$  eine Potenz von  $p$  in sich haben kann.

## 18.

Man braucht hiebei nur alle Primzahlen zu unterfuchen, welche innerhalb 1 und der Quadratwurzel von  $n$ , ( $\sqrt{n}$ ) liegen. (Die Quadratwurzel von  $n$  ist diejenige Zahl, die mit sich selbst multiplicirt  $n$  giebt. Nicht alle Zahlen, ja bei weitem die allerwenigsten, sind ein Product einer Zahl in sich selbst, das ist haben eine wirkliche Quadratwurzel. Z. B. 2, und 3 nicht, von 4 ist die Wurzel 2, von 5, 6, 7, 8 giebt es keine, von 9 ist 3, von 10, 11, 12, 13, 14, 15 giebt es keine, von 16 ist 4 u. s. w. Es möchte vielleicht Mancher dieser Theorie unkundige denken, es könne von dergleichen Zahlen, von denen keine ganze Zahl die Quadratwurzel ist, doch einen Bruch geben, der mit sich selbst multiplicirt, diese Zahl gäbe. Allein ein nothwendiger Bruch (d. i. der keiner ganzen Zahl gleich ist) kann mit sich selbst multiplicirt keine ganze Zahl geben, also kann auch umgekehrt keine ganze Zahl ein Product eines nothwendigen Bruches in sich selbst sein. Dieß alles wird nicht für die geschrieben, welchen die wissenschaftlichen Elemente der Arithmetik bekannt sind, sondern bloß für die, welche nur eine gemeine Erkenntniß der Rechenkunst haben, und doch diese Tafeln verstehen und brauchen wollen).

Ich will diesen Satz zuerst an einigen Beispielen, sodann allgemein erweisen.

Es seien alle einfachen Factoren von 49 zu fuchen; 2 ist kein Theiler, also fallen alle Theiler, die es geben könnte, innerhalb 2 und  $\frac{49}{2}$ , d. i. 24 (weil hier nur von ganzen Zahlen die Rede ist; — für unsern Zweck); 3 theilt auch nicht, also ist die Grenze 3 bis  $\frac{49}{3}$ , d. i. 16; auch 5 theilt nicht, also wird die Grenze  $\frac{49}{5}$ , d. i. 9, 7 theilt, denn  $7 \cdot 7$  ist 49; also ist nun die Grenze  $\frac{49}{7} = 7$ ; so weit ist aber unterfucht worden, also giebt es auch außer 7 keinen Theiler von 49. Sollte es z. B. 11 sein, so müßte der andere Factor  $\frac{49}{11} < 7$  sein, wovon wir schon gefunden haben, daß es einen solchen nicht giebt.

Es sei ferner 97 zu unterfuchen; 2 theilt nicht, also ist die Grenze  $\frac{97}{2}$ , d. i. 48; 3 theilt nicht, also ist die Grenze  $\frac{97}{3}$ , d. i. 32; 5 theilt nicht, also die Grenze  $\frac{97}{5}$ , d. i. 19; 7 theilt nicht, also die Grenze  $\frac{97}{7}$ , d. i. 13; und 11 kann auch nicht theilen, denn dann wäre der andere Factor  $\frac{97}{11} < 11$ , also 7, 5, 3, 2; welches von 97 keine Factoren sind. Um so weniger kann eine größere Primzahl als 11 ein Theiler von 97 sein. Es ist also 97 eine Primzahl; 97 ist daher auch keine Quadratzahl; und  $9 \cdot 9 = 81$  aber  $10 \cdot 10 = 100$ . Es fällt also die idealische Quadratwurzel von 97 zwischen 9 und 10, d. i. sie ist größer als 9, aber kleiner als 10. Es heiße diese idealische  $\sqrt{97}$   $w$ , so ist  $w$  mal  $w = 97$ ; nimmt man daher eine größere Zahl als  $w$ , d. i.  $w + y$ , so kann nicht  $(w + y)$  mal  $w = 97$  sein, sondern es muß eine größere Zahl als 97 werden. Diejenige Zahl also mit der multiplicirt  $w + y$  97 giebt, muß kleiner als  $w$  sein, also im allgemeinen  $w - z$ ; wenn es also einen Factor geben sollte, der größer als  $w$  ist, so muß es einen geben, der kleiner als  $w$  ist; und da es hier nur auf die Primzahlen ankommt, so müßte dann eine Primzahl, die kleiner als  $w$  ist, ein Factor von 97 sein. Hat man also alle Primzahlen, bis  $w$ , das ist, bis 9, also 2, 3, 5, 7 unterfucht, und keine davon als Factor befunden, so giebt es von 97 keinen einfachen Factor, also auch keinen zusammengesetzten, also 97 ist eine Primzahl.

Im allgemeinen, wenn die Zahl  $n$  zu unterfuchen, und gefunden worden, daß keine Primzahl bis auf  $\sqrt{n}$  (es mag diese Wurzel eine Zahl, oder sie mag idealisch sein) ein Factor derselben ist, so behaupte ich, daß  $n$  eine Primzahl sei. Denn sollte  $n + y$  ein Factor von  $n$  sein, so müßte es auch einen, der Form  $n - z$  geben, welchen es der Voraussetzung nach nicht giebt.

Um also zu erforschen, ob  $n$  eine Primzahl sei, darf man nur mit allen Primzahlen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, \sqrt{n}$$

unterfuchen; giebt es bis dahin keinen Factor, so ist  $n$  eine Primzahl.

Es ist hiebei noch die Frage zu beantworten, wenn man vor dieser Grenze Theiler finde, wie viel noch Theiler über diese Grenze hinausliegen können? Ich behaupte, über  $\sqrt{n}$  liegt nur ein Theiler von  $n$  hinaus, wiewohl auch dieß nicht nothwendig ist. Dieß kann kurz im allgemeinen also bewiesen werden:

Der erste Theiler von  $n$ , der kleiner als  $\sqrt{n}$  ist, heiße  $a$ , der zweite  $b$ , der dritte  $c$  u. s. f. Ist nun  $a$  ein Theiler von  $n$ , so ist  $a \cdot \frac{n}{a} = n$ ; die übrigen Theiler von  $n$  müssen daher auch Theiler von  $\frac{n}{a}$  sein, weil  $a$  eine Primzahl ist. Also muß es nun wenigstens einen Theiler von  $n$  geben, der  $< \sqrt{\frac{n}{a}}$  oder  $\sqrt{\frac{n}{a}}$  selbst ist; da nun  $\sqrt{\frac{n}{a}} < \sqrt{n}$  (indem  $a$  eine ganze Zahl ist), so muß auch dieser 2te Theiler  $b < \sqrt{n}$  sein. Die beiden Theiler  $a$  und  $b$  von  $n$  müssen also kleiner als  $\sqrt{n}$  sein. Es ist also  $a \cdot b \cdot \frac{n}{a \cdot b} = n$ . Soll es außer diesen beiden, und  $\frac{n}{a \cdot b}$ , noch mehrere Factoren geben, so müssen es Factoren von

D

 $\frac{n}{a \cdot b}$

$\frac{n}{a \cdot b}$  sein, weil  $a$  und  $b$  Primzahlen sind; also einer davon entweder  $\sqrt{\frac{n}{a \cdot b}}$  oder kleiner als  $\sqrt{\frac{n}{a \cdot b}}$ . Ist  $c = \sqrt{\frac{n}{a \cdot b}}$  so ist  $c < \sqrt{n}$ , denn  $\sqrt{\frac{n}{a \cdot b}} < \sqrt{n}$ . Ist aber  $c < \sqrt{\frac{n}{a \cdot b}}$  so ist  $c$  um so mehr kleiner als  $\sqrt{n}$ . Also die 3 Theiler  $a, b, c$  sind kleiner, als  $\sqrt{n}$ , und nur der vierte, nemlich  $\frac{n}{a \cdot b \cdot c}$  kann  $>$  sein als  $\sqrt{n}$ , kann aber auch kleiner sein. Soll nun außer  $a, b, c$   $\frac{n}{a \cdot b \cdot c}$  noch ein Theiler sein, so muß er auch ein Theiler von  $\frac{n}{a \cdot b \cdot c}$  sein, denn  $a, b, c$  sind Primzahlen, also der 4te  $d$ , muß entweder  $= \sqrt{\frac{n}{a \cdot b \cdot c}}$  oder  $< \sqrt{\frac{n}{a \cdot b \cdot c}}$  sein, in beiden Fällen also  $< \sqrt{n}$ , weil  $\sqrt{\frac{n}{a \cdot b \cdot c}} < \sqrt{\frac{n}{a \cdot b}} < \sqrt{\frac{n}{a}} < \sqrt{n}$ . Es ist also dann  $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \frac{n}{a \cdot b \cdot c \cdot d} = n$ ; und  $a, b, c, d < \sqrt{n}$ ; nur  $\frac{n}{a \cdot b \cdot c \cdot d}$  kann größer sein, als  $\sqrt{n}$ . Ist nun  $\frac{n}{a \cdot b \cdot c \cdot d}$  eine Primzahl, so hat man  $n = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \frac{n}{a \cdot b \cdot c \cdot d}$ , welches die einfachen Factoren von  $n$  sind, und von denen bloß der letzte  $= \frac{n}{a \cdot b \cdot c \cdot d} > \sqrt{n}$  sein kann. Da nun, wenn  $\frac{n}{a \cdot b \cdot c \cdot d}$  wieder eine zusammengesetzte Zahl ist, unsere Schlussfolge von neuem, und überhaupt ins Unendliche gilt, jede Zahl  $n$  aber, weil sie ein endliches Product ist, endlich einmal einen letzten Factor  $\frac{n}{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot p}$  als Primzahl haben muß: so ist erwiesen, was zu erweisen war.

Man kann diese Betrachtung auch für die dritten, 4ten, pten Wurzeln fortsetzen, und untersuchen, ob nicht innerhalb der  $\sqrt[p]{n}$  alle Factoren von  $n$  weniger  $p-1$  Factoren fallen müssen. Allein, weil die Resultate dieser Betrachtungen auf unser Vorhaben keinen Einfluss haben, so lassen wir sie bei Seite liegen.

Hierauf beruht folgendes Verfahren, von der einzeln betrachteten Zahl  $n$  alle einfache Theiler zu finden, oder im Fall es deren keine geben können, zu entscheiden, ob  $n$  eine Primzahl ist oder nicht (Hiebei ist freilich gut, wenn man bis  $\sqrt{n}$  eine Primzahltafel hat, weil man, wie gezeigt, bloß mit den Primzahlen  $n$  zu untersuchen hat. Wenigstens wird man, wenn man eine solche Tafel nicht hätte, die durch 2, 3, 5, 11 theilbaren Zahlen leicht erkennen und ausschließen,):

I. Man sehe, ob irgend eine Zahl (Primzahl), so  $< \sqrt{n}$  ist, ein Factor von  $n$  ist. Ist  $\sqrt{n}$  eine ganze Zahl, so ist  $\sqrt{n}$  selbst ein Factor, und der andere auch  $\sqrt{n}$ ; denn  $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$ . Dann müßten also alle übrige Factoren in  $\sqrt{n}$  liegen. Es kann aber auch in diesem Falle, eben wenn  $\sqrt{n}$  wieder eine zusammengesetzte Zahl ist, doch einen oder beliebig viele, je nachdem  $n$  genommen wird, Factoren von  $n$  geben, so  $< \sqrt{n}$  sind. — Nun giebt es, bis auf  $\sqrt{n}$  entweder einen Factor von  $n$  oder nicht. Ist das letztere, so ist  $n$  eine Primzahl. Ist das erstere, so heiße dieser Factor von  $n$ ,  $< \sqrt{n}$ ,  $a$ .

II. Dann dividire durch  $a$  in  $n$ , so ist der Quotient  $\frac{n}{a}$ , und es müssen alle übrige Factoren von  $n$  auch Factoren von  $\frac{n}{a}$  sein.

III. Man untersuche, ob bis auf  $\sqrt{\frac{n}{a}}$  sich ein Factor von  $\frac{n}{a}$  findet. Findet sich keiner, so ist  $\frac{n}{a}$  eine Primzahl. Also alle Theiler von  $n$  sind  $a$  und  $\frac{n}{a}$ . Findet sich aber ein Theiler  $b$ , der  $< \sqrt{\frac{n}{a}}$ , so ist  $b$  auch ein Theiler von  $n$ , und  $a \cdot b \cdot \frac{n}{a \cdot b} = n$ . Es ist also nun  $\frac{n}{a \cdot b}$  zu untersuchen.

IV. Giebt es bis auf  $\sqrt{\frac{n}{a \cdot b}}$ , ( $\sqrt{\frac{n}{a \cdot b}}$  mit eingeschlossen, wie hier immer zu verstehen ist) keinen Theiler von  $\frac{n}{a \cdot b}$ , so ist  $\frac{n}{a \cdot b}$  eine Primzahl, und es sind  $a, b$  und  $\frac{n}{a \cdot b}$  alle Theiler von  $n$ . Giebt es aber von  $\frac{n}{a \cdot b}$  wieder einen Factor  $< \sqrt{\frac{n}{a \cdot b}}$ , welcher  $c$  heiße, so ist nun wieder  $\frac{n}{a \cdot b \cdot c}$  zu untersuchen, und so fort, bis man endlich auf eine Primzahl kommt, welche dann den letzten Factor von  $n$  abgiebt. Dies aber muß einmal geschehen, weil  $n$  ein endliches Product ist.

Hiebei ist es sehr bequem, wenn man Quadratzahlentafeln hat, weil man da immer die nächste Grenze der idealischen Wurzeln von  $n, \frac{n}{a}, \frac{n}{a \cdot b}, \dots$  ja diese Wurzeln selbst, wenn es deren giebt, auffuchen kann; welche man, bis auf die Wurzel 1000 in Lamberts Zusätzen finden kann.

Es sei z. B. 317 zu untersuchen. Die nächste Zahl an die idealische  $\sqrt{317}$  ist 17, denn  $17^2 = 289$ . Es theilt aber weder 2, 3, 5, noch 7, 11, 13, 17 die 317. Also ist 317 eine Primzahl.

Es sei die Zahl 2737 zu untersuchen;  $7 \cdot 391 = 2737$ . Es ist also 391 zu untersuchen; die nächste  $\sqrt{\phantom{x}}$  ist 19. Es theilt keine Zahl bis 17, aber  $17 \cdot 23 = 391$ . Also ist  $7 \cdot 17 \cdot 23 = 2737$ . Und weil 23 eine Primzahl ist, so sind dies alle einfache Theiler der Zahl 2737. Woraus sich denn auch alle zusammengesetzte Factoren dieser Zahl finden lassen. Sie sind:  $7 \cdot 17 = 119$ ;  $7 \cdot 23 = 161$ , und  $17 \cdot 23 = 391$ . Also alle Factoren von 2737 überhaupt sind: 7, 17, 23, 119, 161, 391.

Bei nur einigermaßen großen Zahlen ist dies Verfahren äußerst mühsam. Es ist daher wohl der Mühe werth, eine Methode zu zeigen, wie man auf die kürzeste Weise, zugleich, eine Factoren und Primzahlentafel construiren könne. Wobei aber, wie erklärt, alle durch 2, 3, 5 theilbare Zahlen ausgeschlossen werden, und auch nur die einfachen Factoren gemeint sind. Doch muß diese Tabelle so sein, daß man aus den einfachen Factoren aus ihr sogleich combinatorisch, ohne Multiplication zu verrichten, alle Theiler construiren könne, welche selbst durch 2, 3, 5 untheilbar sind.

## Fünftes Kapitel.

## Von der Construction und Einrichtung dieser Factoren und Primzahlentafel.

20.

a) Wenn eine Zahl  $n$  eine zusammengesetzte Zahl ist, so muß sie eine von den Primzahlen bis mit  $\sqrt{n}$  zum Factor haben, das heißt, sie muß in der Reihe derselben vorkommen. Wenn man also alle Reihen aller Primzahlen bis mit  $\sqrt{n}$  construirt hätte, so könnte man sogleich sehen, ob  $n$  einen Theiler, oder mehrere, oder keine hätte. Auch liegen hierin alle Factoren von  $n$  weniger einem ganz gewiß, wiewohl auch alle innerhalb dieser Grenze liegen können.

b) Sollte eine solche Tabelle für alle Zahlen bis auf eine bestimmte Grenze tauglich sein: so müßte man sie für die letzte Zahl, d. i. bis auf diese Grenze einrichten. Ist diese Grenzzahl  $G$ , so müßte man alle Reihen aller Primzahlen bis mit  $\sqrt{G}$  zusammenstellen, wenn  $\sqrt{G}$  eine Zahl ist. Ist  $\sqrt{G}$  keine Zahl, so müßte man diejenige Quadratwurzel nehmen, die die der  $G$  nächste Quadratzahl gäbe. Wenn z. B.  $G = 100000$  wäre, wie auch für unsere Tafeln  $G$  diese Grenze ist; so müßte man die Reihen aller Primzahlen bis  $\sqrt{100000}$  haben. Die  $\sqrt{100000}$  ist idealisch; diejenige Zahl, welche an 100000 die nächstkleinere Quadratzahl giebt, ist 316; denn  $316 \cdot 316 = 99856$ ; und an 316 ist 313 die nächste Primzahl; also um die Tafel für alle Zahlen bis mit 100000 brauchbar zu machen, braucht man nur die Reihen aller Primzahlen bis auf 313 inclusive zu construiren, und jede bis auf 100000, oder die dieser Grenze nächste Zahl fortzusetzen, wenn 100000 nicht in der Reihe derselben liegt.

c) Nun käme es darauf an, alle diese Reihen so zusammenzustellen, daß man bequem für jede Zahl  $n$  alle nach einander durchlaufen könnte. Die beste Einrichtung dafür wäre die auf Art der Pythagorischen Tafel, oder des sogenannten Einmaleins. Und es würde sonach der Anfang dieser Tafel so stehen

1	2	3	5	7	11	13	
2	4	6	10	14	22	26	
3	6	9	15	21	33	39	
4	8	12	20	28	44	52	
5	10	15	25	35	55	65	u. f. f. ins Unendliche
6	12	18	30	42	66	78	
7	14	21	35	49	77	91	
8	16	24	40	56	88	104	
9	18	27	45	63	99	117	
10	20	30	50	70	110	130	

Jede innere Zahl ist ein Product der beiden Factoren, welche man findet, wenn man die letzte Zahl in die Höhe, und die letzte Zahl in die Breite links nimmt.

Da in der ersten Factorenreihe, welche die erste Verticalcolumnne bildet, alle Zahlen vorkommen, so müssen daher auch die Primzahlen wieder darin vorkommen.

In der andern Factorenreihe, die die oberste Horizontalcolumnne bildet, kommen aber nur die Primzahlen vor, wie dies aus den vorigen Paragraphen deutlich sein wird.

d) Diese Tafel würde bis auf 100000 fortgesetzt, ungeheuer weitläufig werden, wenn sie für alle, auch für die durch 2, 3, 5 theilbaren Zahlen gelten sollte. Denn die Reihen der 2, 3 und 5 sind die längsten, und müßten ungeheuer weit nachgeschleppt werden. Da man nun aber die Zahlen, welche durch 2, 3, 5 theilbar sind, leicht erkennen, und durch 2, 3, 5 am leichtesten dividiren kann, so ist besser: diese Factoren und Primzahlentafel nur für diejenigen Zahlen einzurichten, welche durch 2, 3, 5 nicht theilbar sind.

Man wird aber alle durch 2, 3, 5 untheilbaren Zahlen bis 100000 erhalten, wenn man alle Primzahlen von 7 an bis mit 313, durch alle Zahlen nach einander multiplicirt, welche selbst durch 2, 3, 5 nicht theilbar sind. Oder wenn man die Reihen aller Primzahlen von 7 bis 313 construirt, jede bis an 100000, und daraus alle diejenigen Zahlen wegläßt, deren Cofactor mit der vorhabenden Primzahl eine durch 2, 3, 5 theilbare Zahl ist.

Es fallen also bei dieser Beschränkung die längsten Reihen, die von 2, 3 und 5 weg, und in der ersten Reihe der verticalen Cofactoren bleiben bloß alle durch 2, 3, 5 untheilbaren Zahlen übrig. Ich will der Kürze wegen die erste Verticalreihe den Verticalzeiger, die erste Horizontalreihe aber den Horizontalzeiger nennen. Der Horizontalzeiger enthält also alle Primzahlen von 7 bis 313; der Verticalzeiger alle Zahlen, die durch 2, 3, 5 untheilbar sind, bis auf diejenige Zahl, die mit 7 multiplicirt das nächst geringere Product in der Reihe von 7 ( $R_7$ ) giebt als 100000; diese Zahl ist 14281.

Die Verticalreihen, nach dem Verticalzeiger, sind die Reihen der Primzahl, welche im Horizontalzeiger darüber steht.

Die Reihe von 7 muß weiter fortlaufen, als die der 11, der 13, u. f. f.; kurz je größer die Primzahl, desto eher bricht ihre Reihe für die Grenze, also hier für 100000 ab. Denn wie ein Factor des Horizontalzeigers zunimmt, in dem Maße muß für eine jede dieselbe Zahl der Cofactor in dem Verticalzeiger abnehmen, also früher kommen.

e) Vor allen also ist der Verticalzeiger zu construiren, also alle Zahlen, die durch 2, 3, 5 nicht theilbar sind, bis auf 14281. Denn durch  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_5$  werden von jeden 30 Zahlen 22 weggenommen, bleiben also von jeden 30 nur 8 übrig, welche beständig mit denselben Unterschieden wiederkehren. Sie sind

$$n \ 30 + 1f + 7f + 11f + 13f + 17f + 19f + 23f + 29$$

Da also von jeden 30 Zahlen 8 bleiben, und  $10 \cdot 30 = 300$  ist, so bleiben von jeden 300 Zahlen nur 10, 8 oder 30 übrig. Es wird also durch diese Beschränkung unsere Tabelle in der Länge, um  $\frac{22}{30}$  oder  $\frac{11}{15}$ , also mehr als  $\frac{1}{3}$  abgekürzt.

D a

D 1

Da ferner nach 300 die erste durch 2, 3, 5 untheilbare Zahl  $300 + 1$  ist, also 301, und die zweite  $300 + 7$ , also 307, so müssen von 300 an bis 600, und von da bis 900 . . . jene 80 Zahlen immer in denselben Ziffern wiederkehren. Hat man also diese 80 Zahlen, so kann man daraus mit größter Leichtigkeit, zumal mit Hülfe einer Druckerei, den Verticalzeiger bis auf jede Grenze fortsetzen. Diese 80 Zahlen sind: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91, 97, 01, 03, 07, 09, 13, 19, 21, 27, 31, 33, 37, 39, 43, 49, 51, 57, 61, 63, 67, 69, 73, 79, 81, 87, 91, 93, 97, 99, 03, 09, 11, 17, 21, 23, 27, 29, 33, 39, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 63, 69, 71, 77, 81, 83, 87, 89, 93, 99.

Dies ist auch der Grund, warum jede Seite unserer Tabelle 81 Horizontalcolumnen, d. i. 81 Zeilen hat.

Ist man bis 3000 vorgerückt, so kehren 3 Ziffern wieder bis 6000 u. f. f.

Dieses Wiederkehren der 2, 3, 4 . . . n letzten Ziffern erstreckt sich, wie leicht einzusehen, auch auf die Reihen der Primzahlen selbst, und ist eben der Grund der Leichtigkeit der Construction dieser Tabelle. Wer aber deshalb meinen sollte, es mache dennoch diese Construction weder viele Mühe, noch viel Zeitaufwand, und ermüdende Aufmerksamkeit, der würde, wenn er selbst an die Arbeit gieng, sehen, wie sehr er sich betrogen. Es ist nur die Rede davon, daß dies Verfahren unter allen bisherigen, und unter allen möglichen, die zu einer wirklich brauchbaren Tabelle führen, das leichteste sei. Die Druckerei erleichtert die Arbeit sehr, zumal wenn sie ins weitere läuft. Diese Tabelle habe ich ohne Hülfe einer Druckerei berechnet. Werde ich aber veranlaßt, sie weiter fortzusetzen, so werde ich, wie oben erwähnt, nebst einigen außerwesentlichen Veränderungen, die die weitere Grenze erfordert, mich dazu der Hülfe der Druckerei bedienen. Es sollte mich aber freuen, wenn Jemand anders, der dessen fähig, zu dieser Arbeit Lust trüge.

f) Noch eine Abkürzung der Verticalcolumnen entspringt daraus, daß sie nur von dem Quadrate der Zahl anfangen müssen, deren Reihe sie darstellen.

Denn liegt eine Zahl nicht in der Reihe von 2, 3, 5, 7, so kann sie zwar in der Reihe von 11 liegen, aber nicht 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 mal 11 sein, denn sonst müßte sie ja eben schon in einer der vorigen Reihen enthalten sein, wider die Voraussetzung. Ist n auch nicht in  $R_{11}$  enthalten, so kann n doch nicht 2, 3, 5, 7, 11 mal 13 sein, wenn n auch in  $R_{13}$  enthalten ist. Daher braucht die Reihe von 13 nur von 13, 13, das ist vom Quadrat von 13 anzuheben. Und so fort ins Unendliche.

So nun ist die vorliegende Tafel eingerichtet. Jede Seitenlänge enthält 80 Zeilen, und die Tafel enthält 48 Seitenlängen. Da aber die Breite der Tafel vom Anfange, weil immer mehr Primzahlen dazu kommen, wächst, hernach aber, weil immer weniger werden, indem die größern Primzahlen alle nach einander abtreten, wieder abnimmt: so kann nicht allemal auf einer Folioseite oder auf 200 eine Seitenlänge der Tafel enthalten sein. Die erste Seitenlänge erfordert 5 Folioseitenbreiten, die man sich eigentlich alle neben einander denken muß. Weil auf der vierten Seite noch Raum ist, so ist die fünfte Breite der ersten Seitenlänge mit darauf gedruckt, und durch A C bezeichnet. Auch die zweite Seitenlänge hat 5 Folioseiten zur Breite, die man sich wieder eigentlich neben einander denken muß. Die dritte Seitenlänge hat 3 Seiten zur Breite. Die 4te nur 2; die 5te nur 2; die sechste nur eine; so die 7te, 8te, 9te; und so kommen am Ende immer mehr Seitenlängen der Tabelle auf die Breite einer und derselben Folioseite des Papiers. Die darüber geschriebenen Ziffern bedeuten die Zahl der Seitenlängen der Tabelle.

Diese Tafel giebt alle Primzahlen durch Ausschließung, denn eine jede Zahl, die nicht durch 2, 3, 5 theilbar, und auch in der Tafel nicht steht, ist eine Primzahl. Dagegen möchte Jemand einwenden, daß man ja, um diese Tafel zu verfertigen, selbst der Primzahlenreihe bis 313 bedürfe, welche Primzahlenreihe doch selbst erst aus der Tafel bekannt werden sollte. Allein die Tafel selbst bildet sich in dieser Rücksicht weiter. Daß der Anfang der Primzahlenreihe 2, 3, 7, 11, 13, 17 ist, ist bekannt. Man construirt die Tafel nur so weit, als ich sie hieher setze, so kann man schon alle durch 2, 3, 5 untheilbare Zahlen bis 329, die man schon construirt hat, in der Tafel aufsuchen, um auszumachen, ob sie eine Primzahl seien oder nicht. Ich setze dies hieher, um an diesem kleinen Theile der Tafel ihren Gebrauch nach und nach zu zeigen. Der Anfang der Tafel ist also:

1	7	11	13	17
1	.	.	.	.
7	49	.	.	.
11	77	121	.	.
13	91	143	169	.
17	119	187	221	289
19	133	209	247	323
23	161	253	299	
29	203	319	377	
31	217			
37	259			
41	287			
43	301			
47	329			

Soll nun z. B. von 289 untersucht werden, ob sie eine Primzahl ist oder nicht; so suche sie zuerst in  $R_7$ , da steht sie nicht, ist also durch 7 nicht theilbar; nun in  $R_{11}$ , in die Höhe gehend, da steht sie auch nicht; nun in  $R_{13}$ , auch da steht sie nicht; nun in  $R_{17}$ , da steht sie, und es ist  $17 \cdot 17 = 289$ ; demnach ist diese Zahl keine Primzahl.

## Sechstes Kapitel.

### Kurze Anleitung zum Gebrauch oder Nachschlagen dieser Factorentafel.

21.

Im Nachschlagen in dieser Factorentafel kann man sich durch folgende Beispiele üben.

#### Erstes Exempel.

Es sei die Zahl 2389 zu untersuchen.

Diese Zahl ist weder durch 2, noch durch 3, noch durch 5 theilbar (f. §. 13.).

Suche sie zuerst in der Reihe von 7 (in R7). Die erste Seite der Tafel giebt in R7 die letzte und größte Zahl 2093, man gehe also auf die zweite Seite (auf II A); da steht wohl 2387 und 2401, nicht aber 2389; also ist 2389 durch 7 nicht theilbar.

Also gehe man herüber in die R11, da steht wieder auf der ersten Seite (verstehe immer der Tafel) 2387, aber nicht 2389. Also ist 2389 auch durch 11 nicht theilbar.

Aber vielleicht durch 13? Man gehe daher sogleich von 2387 in R11 herüber in R13; da steht in R13 neben 2387 in R11: 2321; also gehe man in die Höhe in R13, bis man an 2353 kommt, welches schon  $<$  2389 ist. Also ist auch 2389 nicht durch 13 theilbar.

Aber vielleicht durch 17. Man gehe also aus R13, und zwar von 2353 über in R17; da steht 3077. Man gehe also in R17 in die Höhe bis 2329  $<$  2389. Es ist also auch 17 kein Theiler dieser Zahl. Man gehe also in R19, da steht neben 2329, 2603; man gehe in die Höhe bis 2299  $<$  2389; gehe also herüber in die R23 und darin herauf bis 2369  $<$  2389; dann in R29 bis 2291, dann in R31 bis 2387  $<$  2389, dann in R37 bis 2257, dann in R41 bis 2173, dann in R43 bis 2279; endlich in R47 bis 2303; weiter braucht man nicht zu gehen, um zu wissen, daß 2389 eine Primzahl sei, denn die erste Zahl der R53 ist schon 2809  $>$  2389. Die Beschreibung ist lang, allein wegen der natürlichen Anordnung der Tafel kann man dies in einer halben Minute übersehen. Hätte man diese Zahl in der Primzahlentafel aufgefunden, so hätte man sich das Auffuchen in der Factorentafel erspart; es ist überhaupt zu rathen, jede Zahl, welche über einige 1000 läuft, erst in der Primzahlentafel aufzufuchen.

#### Zweites Exempel.

Es ist die Zahl 87379 zu untersuchen.

In der Primzahlentafel steht sie nicht, ist also sicher eine zusammengesetzte Zahl. Man suche sie zuerst in der Reihe der 7; da auf jeder Seitenlänge der 7 ohngefähr 2000 enthalten sind, so wird die Zahl 87379 ohngefähr in der R7 auf der 43ten Seitenlänge der Tafel zu suchen sein. Auf der 42ten Seitenlänge in R7 findet man 87367 und 87409; also nicht 87379; also ist auch 7 kein Theiler. Also gehe man über in die R11. Da in jeder Seite der R11 ohngefähr 3000 vorkommen, so hat man etwa auf der 28ten Seite nachzusehen; auf Seite 27 von R11 findet sich 87373, nicht aber unsere Zahl, also ist auch 11 kein Theiler. Man gehe herüber in R13, in Seite 23 steht wieder 87373, also auch 13 ist kein Theiler; man gehe in R17, Seite 18 steht 87329; also gehe herüber in R19, da steht gerade über 97337, also gehe darin herauf, in Seite 16 steht 87343, nicht aber unsere Zahl. Also gehe in R23, Seite 13, da steht 87377, nicht unsere Zahl; in R29 S. 11 steht 87377. In Reihe 31 S. 10 steht unsere Zahl 87379 wieder nicht, also gehe herüber in R37 Seite 8, auch da nicht; also gehe herüber in R41, auch da nicht; also gehe in R43, in R47 (Seite 7), in R53 (Seite 6), in R59 (S. 5.) da steht unsere Zahl 87379; um den Cofactor mit 59 zu finden, gehe herüber in den vorgeschriebenen Verticalzeiger; da steht 1481; es ist also  $87379 = 59 \cdot 1481$ . Hat nun 87379 außer 59 noch mehr Factoren, so müssen sie in 1481 liegen. Man suche also diese Zahl wie zuvor 87379 in der Tafel auf; zuerst auf der ersten Seite in R7 braucht man nicht zu suchen, weil sie keinen kleinern Theiler als 59 haben kann, also zuerst in R59, deren Quadrat schon 3481 ist; es ist also 1481 eine Primzahl, und die beiden einfachen Factoren von 87379 sind 59. 1481.

#### Drittes Exempel.

Es sei die Zahl 84084 zu untersuchen.

Da die Zahl gerade ist, so theile man sie durch 2

$$\begin{array}{r} 2)84084 \\ \hline 2)42042; \text{ und diese wieder durch 2;} \\ \hline 3)21021; \text{ und dies durch 3;} \\ \hline 7007 \end{array}$$

durch 5 geht die vorliegende Zahl nicht auf; die sie producirenden Factoren sind also 2.2.3.7007; hat diese Zahl noch Factoren, so müssen sie auch Factoren von 7007 sein. Diese Zahl suche man also in der Tabelle auf in R7, Seite 4; wo sie steht mit dem Cofactor 1001; diesen suche wieder in R7 auf Seite 1, wo er auch steht mit dem Cofactor 143; diese Zahl 143 wieder in R7 aufgefunden, steht da nicht, aber daneben in R11, wo der Cofactor 13 ist; da nun 13 eine Primzahl ist, so hat auch 84084 keine weiteren Factoren, als 2.2.3.7.7.11.13, oder  $2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ . Und die Auffuchung davon steht so:

$$\begin{array}{r} 2)84084 \\ \hline 2)42042 \\ \hline 3)14021 \\ \hline 7)7007 \\ \hline 7)1001 \\ \hline 11)143 \\ \hline 13) \end{array}$$

E

Die

Die Beschreibung dieses Nachschlagens ist sehr lang gegen die kurze Zeit, welche dazu erfordert wird, wenn man nur einigermassen geübt ist.

Ich will nur noch ein einziges Beyspiel geben, um daran zu zeigen, wie man aus den einfachen Factoren mit Hülfe der Tafel ohne Multiplication (wenn die Factoren nicht 2, 3, 5 sind) alle mögliche Factoren darstellen kann,

*Viertes Exempel.*

Es sei die Zahl 54417 zu untersuchen.

Man findet davon die einfachen Factoren

$$\begin{array}{r} 3)54417 \\ 11)18139 \\ 17)1649 \\ 97 \end{array}$$

Es ist also  $3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 97 = 54417$ ; daraus bilde man combinatorisch alle zusammengesetzte Factoren

$$\begin{array}{r} 3, 11, 17, 97 \\ \hline 33, 51, 97 \\ 187, 1067 \\ 1649 \\ \hline 561, 3201 \\ 4947 \\ 18139 \end{array}$$

Alle diese Factoren 11.17, 11.97, 17.97, 11.17.97 findet man, wenn man beide einfache Cofactoren in den Zeigern auffucht, und die Zahl nimmt, die dies Product ist. Z. B. 17.97 siehe in R 17, und suche im Verticalzeiger 97, ziehe beide zusammen, so steht 1649. Und so bei den übrigen.

22.

Diese Factorentafel enthält negativ zugleich die Primzahlentafel von 1 bis 100000. Es ist aber theils an sich zu mancherlei Gebrauche vortheilhaft, die Reihe der Primzahlen für sich zu übersehen, theils aber auch bei großen Zahlen dazu bequem, vor dem Nachschlagen der Factorentafel, nachzusehen, ob  $n$  nicht etwa eine Primzahl sei. Wenn ich diese Factorentafel, dazu aufgemuntert, mit Weglassung der R7, R11, bis 1 oder 2 Millionen fortsetzen sollte, so werde ich auch diese Primzahlentafel bis dahin fortsetzen.

Siebendes Kapitel.

*Anwendung dieser Tafeln bei gemeinen und höheren Rechnungen.*

23.

Was die Anwendung dieser Factorentafel auf algebraische und höhere Rechnungen und Untersuchungen betrifft, z. B. um zu untersuchen, ob ein scheinbar irrationales Verhältniß wirklich ein solches sei oder nicht (wie  $\sqrt{12}:\sqrt{27} = 2\sqrt{3}:3\sqrt{3} = 2:3$ ), ob eine Gleichung eine ganze Wurzel habe u. s. w.: so brauche ich hievon hier nicht zu handeln, denn dem Mathematikverständigen braucht es nicht gesagt zu werden, und den gemeinen Rechner interessiert es nicht,

24.

Es bleibt mir also nur noch übrig die Anwendung dieser Tafeln zur Erleichterung gemeiner Rechnungen zu zeigen, und zwar einmal zur Reduction der Brüche auf die kleinstmögliche Benennung, und zur Vereinfachung der einfachen und zusammengesetzten Reguldetrinaufgaben.

25.

*Von der Anwendung der Factorentafel zur Reduction der Brüche auf die kleinstmögliche Benennung.*

Wenn die absolute Einheit in mehrere gleiche Theile getheilt, und dieser Theil der Einheit, nicht die Einheit selbst, mehrere ganzemal genommen wird: so entstehen hieraus einfache Brüche. Sind dieser Theile weniger, als zur ganzen Einheit gehören, so ist der Werth des Bruchs kleiner als 1, und der Bruch wird ein *kleinerer* (als 1) oder ein *eigentlicher* Bruch genannt. Werden solche Theile mehrere genommen, als zur Einheit erforderlich sind, so entsteht ein Bruch der größer als 1 ist, welcher daher ein *größerer*, oder *uneigentlicher* Bruch genannt wird. Werden dabei gerade so viele Theile der Einheit genommen, als zu 1, 2, 3, 4... Ganzen erforderlich sind, so ist so ein Bruch einer ganzen Zahl gleich, und kann daher ein *willkürlicher* Bruch genannt werden, im Gegensatz aller übrigen, welche *nothwendige* Brüche genannt werden. So ist z. B.  $\frac{3}{2} = 2$  ein willkürlicher,  $\frac{3}{4}$  aber ein nothwendiger, und zwar ein uneigentlicher oder größerer Bruch.

Die Zahl, welche den Theil nach der absoluten Einheit bestimmt, der im Bruch bestimmte ganzemal genommen wird, heißt der *Nenner*; die Zahl aber, welche angiebt, wie vielmal dieser Theil im Bruch genommen wird, der *Zähler* des Bruchs. Also wird jeder Bruch nur durch Nenner und Zähler, aber auch dadurch (wenn die Einheit gegeben) durchaus bestimmt.

Im eigentlichen Bruche ist also der Zähler kleiner als der Nenner, und im uneigentlichen der Nenner kleiner als der Zähler.

Man kann jeden uneigentlichen Bruch sogleich auf einen eigentlichen bringen, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt; denn so vielmal der Nenner im Zähler enthalten ist, so vielmal ist die absolute Einheit, worauf sich der Bruch bezieht,

bezieht, im Bruche enthalten. Ist nun der uneigentliche Bruch willkürlich, so findet man die ganze Zahl, der er gleich ist. Ist er aber nothwendig, so findet man die ganze Zahl und den Ueberschuss, der dann nothwendigerweise ein eigentlicher Bruch ist.

Jeder uneigentliche Bruch, werde also, wenn er ein nothwendiger ist, auf eine ganze Zahl und einen eigentlichen Bruch gebracht.

In je mehr Theile man die absolute Einheit theilt, je kleiner wird der Bruch bei demselben Zähler; z. B.  $\frac{1}{2}$  ist 2mal so groß als  $\frac{1}{4}$ , weil im letztern die Einheit in noch einmal soviel Theile ist getheilt worden;  $\frac{1}{3}$  ist nur der dritte Theil von  $\frac{1}{2}$ , weil in ersterem 3mal soviel Theile sind. Im allgemeinen  $\frac{a}{b \cdot n}$  ist nur der nte Theil von  $\frac{a}{b}$ .

So wie der Zähler wächst, wächst auch der Werth des Bruchs, denn man nimmt immer mehr solche Theile, als der Bruch enthält; also ist  $\frac{2}{3}$  noch einmal so groß als  $\frac{1}{3}$ ; und im allgemeinen  $\frac{a \cdot n}{b}$  nmal so groß als  $\frac{a}{b}$ .

Daraus folgt: dass der Werth eines Bruchs unverändert bleibt, wenn man Nenner und Zähler durch dieselbe Zahl multiplicirt; z. B. wenn man anstatt  $\frac{1}{3}$  setzt  $\frac{3}{3 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ , so ist  $\frac{1}{3}$  der dritte Theil von  $\frac{1}{3}$ ; setzt man nun für  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ , so ist  $\frac{1}{3}$  3mal so groß als  $\frac{1}{3}$ ; also ist  $\frac{1}{3}$  der dreifache dritte Theil von  $\frac{1}{3}$ , also von demselben Werthe als  $\frac{1}{3}$ . Im allgemeinen für  $\frac{a}{b}$   $\frac{a}{b \cdot n}$  gesetzt, giebt von  $\frac{a}{b}$  den nten Theil; für  $\frac{a}{b \cdot n}$ , ferner  $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$  gesetzt, giebt von  $\frac{a}{b \cdot n}$  das nfache also vom nten Theile von  $\frac{a}{b}$  das nfache; das ist  $= \frac{a}{b}$ . Es ist also  $\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}$ .

Und daraus folgt weiter, dass, wenn man Nenner und Zähler eines Bruchs durch dieselben Zahlen dividirt, auch der Werth des Bruchs unverändert bleibe, und nur in kleineren Zahlen wiederkehre. Kleinere Zahlen aber lassen sich leichter übersehen und beurtheilen als größere. Daher sucht man immer einen Bruch auf so kleine Zahlen zu bringen als möglich. Es sei z. B. der Bruch  $\frac{12}{30} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 5}$  gegeben, so hat den Nenner und Zähler die gemeinsamen Factoren 2 und 3, diese also kann man austreichen, und erhält die kleinste Benennung des vorliegenden Bruchs, nemlich  $\frac{2}{5}$  die möglich.

Ist aber Nenner und Zähler eines Bruchs so beschaffen, dass beide keinen gemeinschaftlichen Factor haben, oder: dass sie Primzahlen unter sich sind, wie  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ , so kann man so einen Bruch ganz genau in kleineren Zahlen nicht ausdrücken. Ist einer von beiden, der Nenner oder Zähler eine Primzahl, so sind beide gewiss (numeri primi inter se) Primzahlen unter sich; z. B.  $\frac{12}{13}$ . Ehe man daher beide Zahlen in den Factorentafeln aufsucht, sehe man erst nach, ob nicht eine von beiden eine Primzahl ist; denn außerdem wäre das Aufschlagen vergebens, die andere Zahl mag so viele Theiler haben als sie will.

#### Erstes Exempel.

Der Bruch  $\frac{12012}{15708}$  sei auf kleinste Benennung zu bringen.

##### 1) Untersuchung des Zählers

$$\begin{array}{r} 2) 12012 \\ \hline 2) 6006 \\ \hline 3) 3003 \\ \hline 7) 1001 \\ \hline 11) 143 \\ \hline 13 \end{array}$$

Es ist also der Zähler  $= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ .

##### 2) Untersuchung des Nenners 15708

$$\begin{array}{r} 2) 15708 \\ \hline 2) 7854 \\ \hline 3) 3927 \\ \hline 7) 1309 \\ \hline 11) 187 \\ \hline 17 \end{array}$$

Es ist also der Nenner  $= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$ .

##### 3) Der ganze Bruch also $\frac{12012}{15708}$ ist auf diese Form gebracht:

$$\frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17} \text{ also } = \frac{13}{17}$$

welcher ein Wurzelbruch ist, und sich weiter nicht aufheben lässt.

*Anmerkung 1.* Es ist auch in gemeinen Rechnungen vortheilhaft, alle Brüche auf Decimalbrüche zu bringen, und sich eine Decimalbruchtafel für die gewöhnlichen Einheiten und deren Unterabtheilungen (z. B. für Münzen, zuförderst für Rthlr., Gr. und Pfennige — für Mafse und gebräuchliche Gewichte) zu verfertigen. Bringt man sodann alle im Handel und Wandel vorkommende Brüche dieser Einheiten auf Decimalbrüche, so kann man sogleich sehen, wie viel dergleichen Brüche im Werthe jener Einheit betragen. Um dies an einem Beispiele zu zeigen, habe ich eine Decimaltabelle für Groschen und Pfennige angehängt.

Geetzt also, es bedeutete obiger Bruch  $\frac{12012}{15708}$  Rthlr.; so ist dieser Bruch  $= \frac{13}{17}$ . Er wird in einen Decimalbruch verwandelt, wenn man 13 durch 17 dividirt. Die Rechnung sieht so:

$$17) 13,0 \text{ (0,7647 \dots)}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ \hline 110 \\ 102 \\ \hline 80 \\ 68 \\ \hline 120 \\ 119 \\ \hline \end{array}$$

u. f. ferner ins Unendliche.

Schlägt man in der Tabelle der Groschen nach, so ist:  $0,75 = 18$  Gr., und  $0,7916$  ist  $19$  Gr.; es fällt also  $0,7647$ , oder der Decimalwerth von  $\frac{13}{17} = \frac{13000}{17000}$  zwischen  $18$  und  $19$  Groschen. Man ziehe also den Decimalwerth von  $18$  Gr. von  $0,7647\dots$  ab.

$$\begin{array}{r} 0,7647 \\ - 0,75 \\ \hline 0,0147 \end{array}, \text{ so bleibt noch:}$$

Es ist also  $\frac{13}{17} = 18$  Gr. +  $0,0147$  Rthlr. Diesen letzteren Werth suche man unter den Pfennigen. Es ist aber  $4$  Pf. =  $0,0138$ , und  $5$  Pf. =  $0,017361$ . Dazwischen fällt  $0,0147$ . Man ziehe also von  $0,0147$  ab  $0,0138$

$0,0147$ , weniger:

$0,0138$ ; bleibt Rest:

$0,0009$ ; welches kleiner als  $\frac{1}{2}$  Pfennig, und vielleicht nach Befinden der Umstände kann aus der Acht gelassen werden. Kommt aber dieser Ueberschuß  $0,0009$  öfter vor, so werde er wieder mit in Rechnung gebracht. Es ist also  $\frac{13}{17}$  Rthlr. =  $18$  Gr.  $4$  Pf. +  $0,0009$  Rthlr.

Bei dergleichen Reductionen gemeiner Brüche auf Decimalbrüche, ist es nun eben, wegen dadurch erleichterter Division sehr vortheilhaft, erst den zu reducirenden Bruch auf kleinstmögliche Benennung zu bringen. Denn man kann in unferm Beispiele eher  $\frac{13}{17}$  als  $\frac{13000}{17000}$  auf einen Decimalbruch bringen.

Anmerkung 2. Es ist immer von Vortheil, so lange und soviel als möglich bei allerlei Rechnungen alle Producte in ihre Factoren getrennt darzustellen; damit man hinterher nicht erst nöthig habe, die Factoren aufzufuchen.

#### Zweites Exempel.

Es ist der Bruch  $\frac{157}{2432}$  auf kürzeste Benennung zu bringen.

Da  $157$  eine Primzahl ist, so ist dies eine unmögliche Forderung. Wer mit Decimalbrüchen rechnet, der bringe ihn ohne weiteres auf einen Decimalbruch, welches immer am ersten und genauesten zum Zwecke führt. Wer die Lehre von continuirlichen oder Stufenbrüchen kennt, so weit als hier nöthig ist, der bringe ihn auf einen Stufenbruch, und nehme für die Natur der Sache die größtmögliche Annäherung an den wahren Werth. Andere Methoden, die gewöhnlich sind, sind dadurch unzuverlässig, daß man den Fehler gewöhnlich dabei nicht beurtheilt.

Um die Rechnung mit Stufenbrüchen für die meisten Fälle zu ersparen, dürfte man nur etwa bis auf  $1000$  alle Wurzelbrüche (d. i. nicht reducible) von  $\frac{1}{1000}$  an in Rücksicht ihrer Größe ordnen. Dann dürfte man nur den gegebenen Bruch z. B.  $\frac{157}{2432}$  in dieser Tabelle aufschlagen, so würden alle Werthe der möglichen Näherung in kleinern Zahlen daneben stehen, die man auch durch Berechnung des Stufenbruchs gefunden haben würde. Um dies zu erläutern, habe ich eine solche Tabelle bis auf den größten Nenner  $30$  hinzugefügt.

Sucht man z. B. in dieser Tabelle  $\frac{157}{2432}$  auf, so findet man folgende Näherungswerthe in kleineren Zahlen

Kleiner	Größer
$\frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$

Durch den Stufenbruch  $\frac{157}{2432} = \frac{157}{2432}$ , findet man nur die Näherungswerthe  $\frac{1}{2}$  (zu groß), und  $\frac{1}{3}$  (zu klein); sind  $\frac{1}{2}$  Theile des Thalers, so fehlt man, wenn man sich hier mit der nächsten Näherung  $\frac{1}{2}$  Rthlr. begnügt, um  $4$  Pf. +  $0,0009$  Rthlr.; denn  $\frac{1}{2}$  Rthlr. ist, wie oben gefunden =  $18$  Gr. +  $4$  Pf. +  $0,0009$  Rthlr. Dieser Fehler ist immer sehr beträchtlich. Nähme man noch eine andere kleinere Näherung, so würde man noch mehr fehlen.

Man muß daher immer Sorge tragen, daß man sich oder Anderen mit solchen Näherungen nicht Schaden thut. Bei der Decimalbruchrechnung kann man aber dies leicht überurtheilen; so wie auch in der beigefügten Tabelle; denn man darf nur die Näherung mit dem wahren Werthe auf einerlei Benennung bringen, und dann die Zähler vergleichen; z. B.  $\frac{1}{2} : \frac{157}{2432} = \frac{3 \cdot 17 \cdot 4 \cdot 13}{4 \cdot 17} = \frac{52 \cdot 52}{68}$ ; es verhält sich also

$$\frac{1}{2} : \frac{157}{2432} = \frac{52}{68} : \frac{52}{68}$$

Es ist also  $\frac{1}{2}$  um  $\frac{1}{68}$  der Einheit zu wenig;  $\frac{1}{3}$  vom Rthlr. ist =  $4$  Pf.; nun ist  $\frac{1}{68} > \frac{1}{72}$ , woraus man also auch auf diesem Wege einsieht, daß man mehr als  $4$  Pf. zu wenig setzt.

So eine Tabelle der Brüche ist aber auch zugleich eine Ordnung der Verhältnisse, und Mathematikverständige wissen, daß an einer solchen Ordnung der Verhältnisse viel gelegen ist. Ich werde daher, wenn ich Mufe genug finde, mit der bis  $1$  oder  $2$  Millionen erweiterten Factoren und Primzahlentafel, auch zugleich eine zweckmäßig gestellte Tabelle der geordneten Wurzelbrüche bis  $\frac{1}{1000000}$  geben.

Wie die Factorentafel zu gebrauchen sei, um mehrere Brüche von verschiedener Benennung auf die größte gemeinsame Benennung zu bringen, will ich nur an einem einzigen Beispiele von  $2$  Brüchen zeigen. Und zuvor nur erinnern, daß man beide Brüche erst für sich auf die kleinste Benennung zu bringen habe, ehe man sie auf die kleinste gemeinsame bringt. Wenn

Wenn

Wenn diese beiden Brüche im allgemeinen  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{b}{c}$  sind, so bringe man sie erst für sich auf die kleinste Benennung, wenn es angeht, allgemein auf  $\frac{\alpha}{\beta}$  und  $\frac{\beta}{\gamma}$ ; nun sehe man, ob  $\beta$  und  $\gamma$  gemeinsame Factoren haben, oder nicht; ist  $\beta$ , oder  $\gamma$ , oder beide, eine Primzahl, so zeigt sich hiebei keine weitere Abkürzung. Wohl aber, wenn  $\beta$  und  $\gamma$  gemeinsame Theiler haben,

Es sei also  $\frac{462}{546}$  und  $\frac{285}{23205}$  auf kleinste gemeinsame Benennung zu bringen.

Wenn man diese Zahlen in ihre Factoren auflöst, so ist:  $\frac{462}{546} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17} = \frac{7 \cdot 11}{13 \cdot 17}$

Und  $\frac{285}{23205} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 19}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17} = \frac{19}{7 \cdot 13 \cdot 17}$

Es sind also nun auf kleinste gemeinsame Benennung zu bringen  $\frac{77}{13 \cdot 17}$  und  $\frac{19}{7 \cdot 13 \cdot 17}$

Man erhält:  $\frac{77 \cdot 7}{7 \cdot 13 \cdot 17}$  und  $\frac{19}{7 \cdot 13 \cdot 17}$

Welche Producte man in der Factorentafel auffuchen kann, und finden:

$$\frac{539}{1547} \text{ und } \frac{19}{1547}$$

27.

Von der Anwendung der Factorentafel auf Aufgaben der einfachen und zusammengesetzten Regel de tri.

Hier kommt es vor Allem darauf an, daß man den Begriff des Verhältnisses recht faße.

Das Verhältniß zweier Größen ist die Vielheit derselben in Bezug auf eine ihnen gemeinsame Einheit, welche beide durch ihre ganzen Wiederholungen ausmisst (wenn anders das Verhältniß ein solches ist, wovon es eine solche gemeinsame Einheit giebt; denn es giebt unendlicherlei Verhältniße, wo eine solche anzugeben unmöglich; weshalb dergleichen Verhältniße *unnenbare* oder *unendliche* Verhältniße heißen, von welchen hier nicht die Rede). Z. B. das Verhältniß 1:3 beruht auf dem Entstehen von 1 aus 3, durch Dreitheilung, oder umgekehrt, der 3 aus 1 durch Verdreifachung. Das gemeinsame Maß zwischen 1 und 3 ist die absolute Einheit selbst, und es giebt für 1 und 3 kein größeres; daher wird auch dies, und alle dergleichen Verhältniße werden *Wurzelverhältniße* genannt. Wird aber sowohl 1 als 3 mit einerlei ganzer Zahl multiplicirt, so wird das Verhältniß dadurch nicht gestört, sondern bloß der Ausdruck; denn 2 Ganze verhalten sich wie ihre gleichen Vielfachen. Hieraus entspringen unendlich viele verschiedene Ausdrücke desselben Wurzelverhältnisses; z. B. für 1:3 findet sich

$$2:6, 3:9, 4:12, 5:15, 6:18, 7:21, 8:24 \dots$$

Da aber von allen Ausdrücken desselben Verhältnisses sich das Wurzelverhältniß, als in kleinsten Zahlen, am leichtesten übersehen, und sich am leichtesten damit rechnen läßt, so hat man allemal das Verhältniß, womit man rechnet, auf sein Wurzelverhältniß zu bringen; dies aber erreicht man, wenn man aus beiden Gliedern die Factoren sucht, und die gemeinsamen wegläßt. Ist ein Glied eine Primzahl, oder sind beide Primzahlen unter sich, das ist, haben sie keine gemeinsamen Theiler, so ist es das Wurzelverhältniß selbst, und läßt sich auf keinen kleineren Ausdruck bringen.

Wenn ein, oder wenn beide Glieder gebrochne Zahlen sind, so bringe man sie erst auf gemeinsame Benennung; dann verhalten sich beide wie die Zähler der gleichen Benennung; als z. B. es sei  $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$  gegeben; so erhält man  $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = 9 : 14$  (weil man Vielfache derselben Einheit, nemlich des 12ten Theiles der absoluten Einheit, hat), welches Verhältniß ein Wurzelverhältniß ist. Man bringe hiebei beide auf die kürzeste Benennung, nach der oben gegebenen Anleitung.

Zwei gleiche Verhältniße bilden eine Proportion, wie z. B. 1:3 = 4:12, und es muß dann das vierte Glied dasselbe Vielfache des dritten sein, als das 2te vom ersten ist; z. B. 3 ist das Dreifache von 1, so 12 das Dreifache von 4. In jeder Proportion ist daher das Product der beiden äußersten Glieder = dem Producte der beiden inneren, z. B. 1.12 = 3.4. Denn, um dies im allgemeinen zu bezeichnen: so heißen die 4 Glieder a:b = c:d; dann ist, wenn b das n-fache von a, auch d das n-fache von c; also a : na = c : nc, also ist das Product der beiden äußersten Glieder anc, und das Product der beiden inneren nac; da nun auf die Ordnung der Factoren nichts ankommt, so ist anc = nac. Wenn also das 4te Glied unbekannt, so wird es gefunden, wenn man das Product der beiden inneren Glieder nimmt, und durch das erste dividirt; im allgemeinen das vierte Glied d ist gleich  $\frac{bc}{a}$ . Hieraus entspringen nun folgende Abkürzungen der Ausrechnung des vierten Gliedes; *erstlich* bringe die beiden ersten Glieder, a und b auf ihren kleinsten Ausdruck; *zweitens* siehe, ob das erste und dritte Glied gemeinsame Theiler hat; wenn dies ist, so streiche die gemeinsamen heraus, denn der Werth eines Bruches, also auch der von  $\frac{bc}{a}$  bleibt unverändert, wenn man im Nenner und Zähler die gleichen Factoren herausläßt. So sei z. B. folgende Aufgabe der einfachen Regel de tri gegeben

$$210 : 30 = 21 : d$$

so hat man in Factoren aufgelöst:

$$1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 : 2 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 7$$

$$\text{also } d = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{3}{1} = 3.$$

Wenn 2 Arten von Größen sich so bestimmen, daß, wie die eine zunimmt, so die andere abnimmt und umgekehrt, und man sucht die vierte Proportionalgröße d; so muß die gefuchte als die dritte angesehen werden; z. B. je mehr man Arbeiter nimmt, je eher wird die Arbeit fertig, und umgekehrt. Wenn man also fragte: 3 Arbeiter bringen 30 Tage zu (verstehe zu derselben Arbeit), wie lange bringen 21 Arbeiter zu; so werden die 21 Arbeiter gerade in dem Verhältniße weniger Zeit brauchen, als sie mehrere sind als 3 Arbeiter; also stehet die Aufgabe:

F

3 Ar.

3 Arbeiter: 21 Arbeiter = d Tage: 30 Tage. Die gefuchte Zahl der Tage ist also  $\frac{3 \cdot 30}{21} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$  Tage.  
 Im allgemeinen also, wenn d das vierte Glied bei umgekehrter Regel de tri ist, so ist  $d = \frac{a \cdot c}{b}$ . Daher hier folgende beide Abkürzungen gelten: *erstens* bringe a und b auf seinen Wurzel Ausdruck, durch Herauslassen der gemeinfamen Factoren, *Zweitens* siehe, ob das zweite und dritte Glied gemeinfame Factoren hat (nehmlich b und c), und lasse sie heraus, denn dadurch wird der Werth des Bruchs  $\frac{a \cdot c}{b} = d$  nicht verändert.

Die Aufgaben der zusammengesetzten Regel de tri beruhen auf der Zusammenfassung der Verhältnisse, und es können dabei so viele Verhältnisse als man will, wie sie sind, oder ihre umgekehrten zusammengesetzt werden. Es werden aber Verhältnisse zusammengesetzt, wenn man die Vorderglieder ineinander, und die Hinterglieder ineinander multiplicirt; dann ist das Verhältniß der Producte das Verhältniß, das aus ihrer Zusammenfassung entsteht. Es seien z. B. die Verhältnisse a:b, c:d, e:f, g:h zusammenzusetzen; so setze

$$\begin{array}{l} a:b \\ c:d \\ e:f \\ g:h \\ \hline aceg : bdfh \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 1:2 \\ 3:4 \\ 2:5 \\ 7:3 \\ \hline 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 : 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 42 : 120 \end{array}$$

Hiebei finden also folgende Abkürzungen statt:

- 1) bringe jedes der zusammenzusetzenden Verhältnisse auf seinen Wurzel Ausdruck;
- 2) bringe das aus der Zusammenfassung entstandene Verhältniß auf seinen Wurzel Ausdruck; welches geschieht, wenn man, die beiden Gliedern gemeinfamen, Factoren ausläßt; z. B.  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 : 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 7 : 20$ . Da nun dessen beide Glieder durch Production aller Vorderglieder und aller Hinterglieder der zusammenzusetzenden Verhältnisse entstehen, so kann man gleich in den beiden gegenüberstehenden Reihen, die gleichen Factoren ausstreichen; z. B. also

$$\begin{array}{l} a : b \\ nb : a \\ c : md \\ me : c \\ \hline anbcme : bamdc \\ ne : d \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 2 : 3 \\ 5 : 2 \\ 7 : 3 \\ 2 : 7 \\ \hline 2 \cdot 5 : 3 \\ 10 : 3 \end{array}$$

Wenn nun zu einem zusammengesetzten Verhältnisse, und einem gegebenen dritten Gliede, ein viertes in geradem Verhältnisse gefucht wird, so ist, wenn A und B die Glieder des zusammengesetzten Verhältnisses, p das gegebne dritte Glied, q das gefuchte 4te bedeutet,  $q = \frac{Bp}{A}$ ; man kann also auch, wenn A und B schon als Wurzelverhältniß ausgedrückt ist, die gemeinfamen Factoren aus A und p weglassen.

Wird aber zu A:B und dem dritten Gliede p das 4te Glied q in umgekehrtem Verhältnisse gefucht, so ist  $q = \frac{Ap}{B}$ ; also muß man dann die gemeinfamen Factoren von p und B weglassen, um die Aufgabe möglichst abzukürzen.

Ich füge ein einziges Beispiel hinzu aus der sogenannten Regel von fünf (regula de quinque). Es sollen z. B. von zwei verschieden großen Capitalen, welche verschiedenlange Zeit ausliehen, die Interessen des anderen aus den Interessen des ersteren gefunden werden. Es heißen die beiden Capitale C und c, die Zeit des ersteren Z, die Zeit des anderen z; die Interesse des ersteren, welche bekannt ist, I, und die gefuchte des anderen i. Vor allem ist zu bedenken, wie denn das Verhältniß von I:i aus C:c und Z:z bestimmt werde; je größer das Capital, je mehr Interesse in gleichen Zeiten; je größer die Zeiten bei einerlei Capital, je größer die Interessen, es werden also C:c und Z:z *gerad* zusammengesetzt; und es ist also

$$\begin{array}{l} C : c \\ Z : z \\ \hline CZ : cz = I : i \end{array}$$

wobei nicht zu vergessen, daß beide Capitale nach gleichen Procenten verinteressirt werden.

Nun sei folgende Aufgabe gegeben: 6370 Rthlr. geben in 51 Jahren 13000 Rthlr., wieviel geben 2618 Rthlr. in 65 Jahren. Die Aufgabe stehet also:

$$\begin{array}{l} C : c \\ Z : z \\ \hline CZ : cZ = I : i \end{array} \quad \begin{array}{l} 6370 : 2618 \\ 51 : 65 \\ \hline 6370 \cdot 51 : 2618 \cdot 65 = 13000 : i \end{array}$$

In Factoren aufgelöst:

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 : 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \\ 3 \cdot 17 : 5 \cdot 13 \\ \hline 3 : 1 = 13000 : \frac{13000}{3} \end{array}$$

Also giebt das andere Capital unter dieser Bestimmung  $\frac{13000}{3}$  Thlr.; das ist 4333.333... oder  $4333 + \frac{1}{3}$  Rthl. = 4333 Rthl. + 8 Gr.

*Schlussanmerkung.*

Die §§ 28, 29, 30 sind bloß für solche, welche zwar in den gemeinen Rechnungen Fertigkeit besitzen, aber der wissenschaftlichen Einsicht in dieselben entbehren, und den Grund der durch die Factoren möglichen Abkürzungen doch einzusehen wünschen. Sollte auch für diese die hier gegebne Erläuterung zu kurz oder zu allgemein sein, so muß ich sie auf andere vollständigere Erklärungen in Lehrbüchern der Arithmetik verweisen, z. B. auf Segners Vorlesungen über die Arithmetik und Geometrie, Stahls Arithmetik u. s. w. Auch habe ich in meinem Grundriß der Arithmetik, der zu Michaelis 1803 bei eben dem Verleger erschienen ist, welches auch dieß Werk übernommen, die Lehre vom Verhältniß und der Proportion ausführlicher und umfassender darzustellen gesucht, als es oftmals geschieht.

I A

	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	49	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	77	121	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	91	143	169	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	119	187	221	289	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	133	209	247	323	361	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	161	253	299	391	437	529	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	203	319	377	493	551	667	841	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
31	217	341	403	527	589	713	899	961	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
37	259	407	481	629	703	851	1073	1147	1369	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
41	287	451	533	697	779	943	189	271	517	1681	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
43	301	473	559	731	817	989	247	333	591	763	1849	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
47	329	517	611	799	893	1081	363	457	739	927	2021	2209	.	.	.	.	.	.	.	.	.
49	343	539	637	833	931	1127	421	519	813	2009	107	303	.	.	.	.	.	.	.	.	.
53	371	583	689	901	1007	219	537	643	961	173	279	491	2809	.	.	.	.	.	.	.	.
59	413	649	767	1003	1121	357	711	829	2183	419	537	773	3127	3481	.	.	.	.	.	.	.
61	427	671	793	1037	159	403	769	891	257	501	623	867	253	599	3721	.	.	.	.	.	.
67	469	737	871	139	273	541	943	2077	479	747	881	3149	551	953	4087	4489	.	.	.	.	.
71	497	781	923	207	349	633	2059	201	627	911	3053	337	763	4189	331	757	5041	.	.	.	.
73	511	803	949	241	387	679	117	263	701	993	139	431	869	307	453	891	183	5329	.	.	.
77	539	847	1001	309	463	771	233	387	849	3157	311	619	4081	543	697	5159	467	621	.	.	.
79	553	869	1027	343	501	817	291	449	923	239	397	713	187	661	819	293	609	767	6241	.	.
83	581	913	079	411	577	909	407	573	3071	403	569	901	399	897	5063	561	893	6059	557	6889	.
89	623	979	157	513	691	2047	581	759	293	649	827	4183	717	5251	429	963	6319	497	7031	7387	.
91	637	1001	183	547	729	2093	639	821	367	731	913	277	823	369	551	6097	461	643	189	553	.
97	679	1067	261	649	843	231	813	3007	589	977	4171	559	5141	723	917	499	887	7081	663	8051	.
101	707	111	313	717	919	323	929	131	737	4141	343	747	353	959	6161	767	7171	373	979	383	.
103	721	133	339	751	957	369	987	193	811	223	429	841	459	6077	283	901	313	519	8137	549	.
107	749	177	391	819	2033	461	3103	317	959	387	601	5029	671	313	527	7169	597	811	453	881	.
109	763	199	417	853	2071	507	161	379	4033	469	687	123	777	431	649	303	739	957	611	9047	.
113	791	243	469	921	147	599	277	503	181	633	859	311	989	667	893	571	8023	8249	927	379	.
119	833	309	547	2023	261	737	451	689	403	879	5117	593	6307	7021	7259	973	449	687	9401	877	.
121	847	331	573	2057	299	783	509	751	477	961	203	687	413	139	381	8107	591	833	559	10043	.
127	889	397	651	159	413	921	683	937	699	5207	461	969	731	493	747	509	9017	9271	10033	541	.
131	917	441	703	227	489	3013	799	4061	847	371	633	6157	943	729	991	777	301	563	349	873	.
133	931	463	729	261	527	3059	857	123	921	453	719	251	7049	847	8113	911	443	709	507	11039	.
137	959	507	781	329	603	151	973	247	5069	617	891	439	261	8083	357	9179	727	10001	823	371	.
139	973	529	807	363	641	197	4031	309	143	699	977	533	367	201	479	313	869	147	981	537	.
143	1001	573	859	431	717	289	147	433	291	863	6149	721	579	437	723	581	10153	439	11297	869	.
149	1043	639	937	533	831	427	321	619	513	6109	407	7003	897	791	9089	983	579	877	771	12367	.
151	057	661	963	567	869	473	379	681	587	191	493	097	8003	909	211	10117	721	11023	929	533	.
157	099	727	2041	669	983	611	553	867	809	437	751	379	321	9263	577	519	11147	461	12403	13031	.
161	127	771	2093	737	3059	703	669	991	957	601	923	567	533	499	821	787	431	753	719	363	.
163	141	793	119	771	3097	749	727	5053	6031	683	7009	661	639	617	943	921	573	899	877	529	.
167	169	837	171	839	173	841	843	177	179	847	181	849	851	853	10187	11189	857	12191	13193	861	.
169	183	859	197	873	211	887	901	239	253	929	267	943	957	971	309	323	999	337	351	14027	.
173	211	903	249	941	287	979	5017	363	401	7093	439	8131	9169	10207	553	591	12283	629	667	359	.
179	253	969	327	3043	401	4117	191	549	623	339	697	413	487	561	919	993	709	13067	14141	857	.
181	267	991	353	3077	439	4163	249	611	697	421	783	507	593	679	11041	12127	851	213	299	15023	.
187	309	2057	431	179	553	301	423	797	919	667	8041	789	911	11033	407	529	13277	651	773	521	.
191	337	2101	483	247	629	393	539	921	7067	831	213	977	10123	269	651	797	561	943	15089	853	.
193	351	123	509	281	667	439	597	983	141	913	299	9071	229	387	773	931	703	14089	247	16019	.
197	379	167	561	349	743	531	713	6107	289	8077	471	259	441	623	12017	13199	987	381	563	351	.
199	393	189	587	383	781	577	771	169	363	159	557	353	547	741	139	333	14129	527	721	517	.
203	421	233	639	451	857	669	887	293	511	323	729	541	759	977	383	601	413	819	16037	849	.
209	463	299	717	553	971	807	6061	479	733	569	987	823	11077	12331	749	14003	839	15257	511	17347	.
211	477	321	743	587	4009	853	119	541	807	651	9073	917	183	449	871	137	981	403	669	513	.
217	1519	387	821	689	4123	991	293	727	8029	897	331	10199	501	803	13237	539	15407	841	17143	18011	.
221	547	431	873	757	199	5083	409	851	177	9061	503	387	713	13039	481	807	691	16133	459	343	.
223	561	453	899	791	237	5129	467	913	251	143	589	481	819	157	603	941	833	279	617	509	.
227	589	497	951	859	313	221	583	7037	399	307	761	669	12031	393	847	15209	16117	571	933	841	.
229	603	519	977	893	351	267	641	099	473	389	847	763	137	511	969	340	259	717	18091	19007	.
233	631	563	3029	961	427	359	757	223	621	553	10019	951	349	747	14213	611	543	17009	407	339	.
239	673	629	3107	4063	541	497	931	409	843	799	277	11233	667	14101	579	16013	969	447	881	837	.
241	687	651	133	4097	579	543	989	471	917	881	363	327	773	219	701	147	17111	593	19039	20003	.
247	729	717	211	199	693	681	7163	657	9139	10127	621	609	13091	573	13067	549	537	18031	513	501	.
251	757	761	263	267	769	773	279	781	287	291	793	797	303	809	311	817	821	323	829	833	.
253	771	783	289	301	807	819	337	843	361	373	879	891	409	927	433	951	963	469	987	999	.
257	799	827	341	369	883	911	453	967	509	537	11051	12079	621	15163	677	17219	18247	761	20303	21331	.
259	813	849	367	403	921	957	511	8029	583	619	137	173	727	281	799	353	389	907	461	497	.
263	841	893	419	471	997	6049	627	153	731	783	309	361	939	517	16043	621	673	19199	777	829	.
269	883	959	497	573	5111	6187	801	339	953	11029	567	643	14257	871	409	18023	19099	637			

I B

I	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	
83																					
89	7921																				
91	8099																				
97	633	9409																			
101	989	797	10201																		
103	9167	991	403	10609																	
107	523	10379	807	11021	11449																
109	701	573	11009	227	663	11881															
113	10037	961	413	639	12091	12317	12769														
119	591	11543	12019	12257	733	971	13447														
121	769	737	221	463	947	13189	673														
127	11303	12319	827	13081	13589	843	14351	16129													
131	659	707	13231	493	14017	14279	803	637	17161												
133	837	901	433	699	231	497	15029	891	423												
137	12193	13289	837	14111	659	933	481	17399	947	18769											
139	371	483	14039	317	673	15151	707	653	18209	19043	19321										
143	727	871	443	729	15301	587	16159	18161	733	591	677										
149	13261	14453	15049	15347	943	16241	837	923	19519	20413	20711	22201									
151	439	647	251	533	16157	459	17063	19177	781	687	989	499	22801								
157	973	15229	857	16171	799	17113	741	939	20567	21509	21823	23393	23707	24649							
161	14329	617	16261	583	17227	549	18193	20447	21091	22057	22379	989	24311	25277							
163	507	811	463	789	441	767	419	701	853	831	657	24287	613	591	26369						
167	863	16199	867	17201	869	18203	871	21209	877	879	23213	883	25217	26219	27221	27889					
169	15041	393	17069	407	18083	421	19097	463	22139	23153	491	25181	519	533	547	28223					
173	397	781	473	819	511	857	549	971	663	701	24047	777	26123	27161	28199	891	29929				
179	931	17363	18079	18437	19153	19511	20227	22733	23449	24523	881	26671	27029	28103	29177	29893	30967	32041			
181	16109	557	281	643	367	729	453	987	711	797	25159	969	831	417	503	30327	31313	399	32761		
187	643	18139	887	19261	20009	20383	21131	23749	24497	25619	993	27863	28237	29359	30481	31229	32351	33473	33847		
191	999	527	19291	673	437	819	583	24257	25021	26167	26549	28459	841	987	31133	897	33043	34189	34571	36481	
193	17177	721	493	879	651	21037	809	511	283	441	827	757	29143	30301	459	82231	389	547	933	803	
197	533	19109	897	20291	21079	473	22261	25019	807	989	27383	29353	747	929	32111	899	34081	35263	35657	37627	
199	711	303	20099	497	293	691	487	273	26069	27263	661	651	30049	31243	437	33233	427	621	36019	38009	
203	18067	691	503	909	721	22127	939	781	593	811	28217	30247	653	871	33089	901	35119	36337	743	773	
209	601	20273	21109	21527	22363	781	23617	26543	27379	28633	29051	31141	31559	32813	34067	34903	36157	37411	37829	39919	
211	779	467	311	733	577	999	843	797	641	907	329	439	861	33127	393	35237	503	769	38191	40301	
217	19313	21049	917	22351	23219	23653	24521	27559	28427	29729	30163	32333	32767	34069	35371	36239	37541	38843	39277	41447	
221	669	437	22321	763	647	24089	973	28067	951	30277	719	929	33371	697	36023	907	38233	39559	40001	42211	
223	847	631	523	969	861	307	25199	321	29213	551	997	33227	673	35011	349	37241	579	917	863	593	
227	20203	22019	927	23381	24289	743	651	829	737	31099	31553	823	34277	639	37001	909	39271	40633	41087	43357	
229	381	213	23129	587	503	961	877	29083	999	373	831	34121	579	953	327	38243	617	991	449	739	
233	737	601	533	999	931	25397	26329	591	30523	921	32387	717	35183	36581	979	911	40309	41707	42173	44503	
239	21271	23183	24139	24617	25573	26051	27007	30353	31309	32743	33221	35611	36089	37523	38957	39913	41347	42781	43259	45649	
241	449	377	341	823	787	269	233	607	571	33017	499	909	891	837	39283	40247	693	43139	621	46031	
247	983	959	947	25441	26429	923	911	31369	32857	839	34333	36803	37297	38779	40261	41249	42731	44213	44707	47177	
251	22339	24347	25351	853	857	27359	28363	877	881	34387	889	37399	901	39407	913	917	43423	929	45431	941	
253	517	541	553	26059	27071	577	589	32131	33143	661	35167	697	38203	721	41239	42251	769	45287	793	48323	
257	873	929	957	471	499	28013	29041	639	667	35209	723	38293	807	40349	891	919	44461	46003	46517	49087	
259	23051	25123	26159	677	713	231	267	893	929	483	36001	591	39109	663	42217	43253	807	861	879	469	
263	407	511	563	27089	28141	667	719	33401	34453	36031	557	39187	713	41291	869	921	45499	47077	47603	50233	
269	941	26093	27169	707	783	29321	30397	34163	35239	853	37391	40081	40619	42233	43847	44923	46537	48151	48689	51379	
271	24119	287	371	913	997	339	623	417	501	37127	669	379	921	547	44173	45257	883	509	49051	761	
277	653	869	977	28531	29639	30193	31301	35179	36287	949	38503	41273	41827	43489	45151	46259	47921	49583	50137	52907	
281	25009	27257	28381	943	30067	629	753	687	811	38497	39059	869	42431	44117	803	927	48613	50299	861	53671	
283	187	451	583	29149	281	847	979	941	37073	771	337	42167	733	431	46129	47261	959	657	51223	54053	
287	543	839	987	561	709	31283	32431	36449	597	39319	893	763	43337	45059	781	929	49651	51373	947	817	
289	721	28033	29189	767	923	501	657	703	859	593	40171	43061	639	373	47107	48263	997	731	52309	55199	
293	26077	421	593	30179	31351	937	33109	37211	38383	40141	727	657	44243	46001	759	931	50689	52447	53933	963	
299	611	29003	30199	797	993	32591	787	973	39169	963	41561	44551	45149	943	48737	49933	51727	53521	54119	57109	
I	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	

I C

	1	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	
191	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
193 37249	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
197 38021 38809	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
199 407 39203 39601	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
203 39179 991 40397	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
209 40337 41173 41591	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
211 723 567 989 44521	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
217 41881 42749 43183 45787	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
221 42653 43537 979 46631	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
223 43039 931 44377 47053 49729	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
227 811 44719 45173 897 50621 51529	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
229 44197 45113 571 48319 51067 983 52441	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
233 969 901 46367 49163 959 52891 53357 54289	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
239 46127 47083 47561 50429 53297 54253 54731 55687 57121	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
241 513 477 959 851 743 707 55189 56153 57599 58081	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
247 47671 48659 49153 52117 55081 56069 56563 57551 59033 59527	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
251 48443 49447 949 961 973 977 57479 58483 989 60491 63001	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
253 829 841 50347 53383 56419 57431 937 949 60467 973 503	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
257 49601 50629 51143 54227 57311 58339 58853 59881 61423 61937 64507 66049	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
259 987 51023 541 649 757 793 59311 60347 901 62419 65009 563	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
263 50759 811 52337 55493 58649 59701 60227 61279 62857 63383 66013 67591 69169	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
269 51917 52993 53531 56759 59987 61063 61601 62677 64291 64829 67519 69133 70747 72361	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
271 52303 53387 929 57181 60433 517 62059 63143 769 65311 68021 647 71273 72899 73441	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
277 53461 54569 55123 58447 61771 62879 63433 64541 66203 66757 69527 71189 72851 74513 75067 76729	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
281 54233 55357 919 59291 62663 63787 64349 65473 67159 67721 70531 72217 73903 75589 76151 77837 78961	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
283 619 751 56317 713 63109 64241 807 939 637 68203 71033 731 74429 76127 693 78391 79523 80089	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
287 55391 56339 57113 60557 64001 65149 65723 66871 68593 69167 72037 73759 75481 77203 77777 79499 80647 81221	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
289 777 933 511 979 447 603 66181 67337 69071 649 539 74273 76007 741 78319 80053 81209 787	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
293 56549 57721 58307 61823 65339 66511 67097 68269 70027 70613 73543 75301 77059 78817 79403 81161 82333 82919 85849	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
299 57707 58903 59501 63089 66677 67873 68471 69667 71461 72059 75049 76843 78637 80431 81029 82823 84019 84617 87607	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293		

I	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83
801	2107	3311	3913	5117	5719	6923	8729	9331	11137	12341	12943	14147	15953	17759	18361	20167	21371	21973	23779	24983
307	2149	3377	991	219	833	7061	903	517	359	587	13201	429	16271	18113	727	569	797	22411	24253	25481
311	177	421	4043	287	909	153	9019	641	507	751	373	617	483	349	971	837	22081	703	569	813
313	191	443	4069	321	947	199	077	703	581	833	459	711	589	467	19093	971	223	849	727	979
317	219	487	121	389	6023	291	193	827	729	997	631	899	801	703	337	21239	507	23141	25043	26311
319	233	509	147	423	061	337	251	889	803	13079	717	993	907	821	459	373	649	287	201	477
323	261	553	199	491	137	429	367	10013	951	243	889	15181	17119	19057	703	641	933	579	517	809
329	303	619	277	593	251	567	541	199	12173	489	14147	463	437	411	20069	22043	23359	24017	991	27307
331	317	641	303	627	289	613	599	261	247	571	233	557	543	529	191	177	501	163	26149	473
337	359	707	381	729	403	751	773	447	469	817	491	839	861	883	557	579	927	601	623	971
341	387	751	433	797	479	843	889	571	617	981	663	16027	18073	20119	801	847	24211	893	939	28303
343	401	773	459	831	517	889	947	633	691	14063	749	121	179	237	923	981	353	25039	27097	469
347	429	817	511	899	593	981	10063	757	839	227	921	309	391	473	21167	23249	637	331	413	801
349	443	839	537	933	631	8027	121	819	913	309	15007	403	497	591	289	383	779	477	571	967
353	471	883	589	6001	707	119	237	943	13061	473	179	591	709	827	533	651	25063	769	887	29299
359	2513	949	667	103	821	257	411	11129	283	719	437	873	19027	21181	899	24053	489	26207	28361	797
361	527	971	693	137	859	303	469	191	357	801	523	967	133	299	22021	187	631	353	519	963
367	569	4037	771	239	973	441	643	377	579	15047	781	17249	451	653	387	589	26057	791	993	30461
371	597	4081	823	307	7049	533	759	501	727	211	953	437	663	889	631	857	341	27083	29309	793
373	611	103	849	341	087	579	817	563	801	293	16039	531	769	22007	753	991	483	229	467	959
377	639	147	901	409	163	671	933	687	949	457	211	719	981	243	997	25259	767	521	783	31291
379	653	169	927	443	201	717	991	749	14023	539	297	813	20087	361	23119	393	909	667	941	457
383	681	213	979	511	277	809	11107	873	171	703	469	18001	299	597	363	661	27193	959	30257	789
389	723	279	5057	613	391	947	281	12059	393	949	727	283	617	951	729	26063	619	28397	731	32287
391	737	301	5083	647	429	993	339	121	467	16031	813	377	723	23069	851	197	761	543	889	453
397	779	367	161	749	543	9131	513	307	689	277	17071	659	21041	423	24217	599	28187	981	31363	951
401	807	411	213	817	619	223	629	431	837	441	243	847	253	659	461	867	471	29273	679	33283
403	821	433	239	851	657	269	687	493	911	523	329	941	559	777	583	27001	613	419	837	449
407	849	477	291	919	733	361	803	617	15059	687	501	19129	571	24013	827	269	897	711	32153	781
409	863	499	317	953	771	407	861	679	133	769	587	223	677	131	949	403	29039	857	311	947
413	891	4543	369	7021	847	499	977	803	281	933	759	411	889	367	25193	671	323	30149	627	34279
419	933	609	447	123	961	637	12151	989	503	17179	18017	693	22207	721	559	28073	749	587	33101	777
421	947	631	473	157	999	683	209	13051	577	261	103	787	313	839	681	207	891	733	259	943
427	989	697	551	259	8113	821	383	237	799	507	361	20069	631	25193	26047	609	30317	31171	733	35441
431	3017	741	603	327	189	913	499	361	947	671	533	257	843	429	291	877	601	463	34049	773
433	3031	763	629	361	227	959	557	423	16021	753	619	351	949	547	413	29011	743	609	207	939
437	059	807	681	429	303	10051	673	547	169	917	791	539	23161	783	657	279	31027	901	523	36271
439	073	829	707	463	341	097	731	609	243	999	877	633	267	901	779	413	169	32047	681	437
443	101	873	759	531	417	189	847	733	391	18163	19049	821	479	26137	27023	681	453	339	997	769
449	143	939	837	633	531	327	13021	919	613	409	307	21103	797	491	389	30083	879	777	35471	37267
451	157	961	863	667	569	373	079	981	687	491	393	197	903	609	511	217	32021	923	629	433
457	199	5027	941	769	683	511	253	14167	909	737	651	479	24221	963	877	619	447	33361	36103	931
461	227	5071	993	837	759	603	369	291	17057	901	823	667	433	27199	28121	887	731	653	419	38263
463	241	093	6019	871	797	649	427	353	131	983	909	761	539	317	243	31021	873	799	577	429
467	269	137	6071	939	873	741	543	477	279	19147	20081	949	751	553	487	289	33157	34091	893	761
469	283	159	097	973	911	787	601	539	353	229	167	22043	857	671	609	423	299	237	37051	927
473	311	203	149	8041	987	879	717	663	501	393	339	231	25069	907	853	691	583	529	367	39259
479	353	269	227	143	9101	11017	891	849	723	639	597	513	387	28261	29219	32093	34009	967	841	757
481	367	291	253	177	139	063	949	911	797	721	683	607	493	379	341	227	151	35113	999	923
487	409	357	331	279	253	201	14123	15097	18019	967	941	889	811	733	707	1629	577	551	38473	40421
491	437	401	383	347	329	293	239	221	167	20131	21113	23077	26023	969	951	897	861	843	789	753
493	451	423	409	381	367	339	297	283	241	213	199	171	129	29087	30073	33031	35003	989	947	919
497	479	467	461	449	443	431	413	407	389	377	371	359	341	323	317	299	287	36281	39263	41251
499	493	489	487	483	481	477	471	469	463	459	457	453	447	441	439	433	429	427	421	417
503	3521	5533	539	551	557	569	587	593	611	623	629	641	659	677	683	701	713	719	737	749
509	563	599	617	653	671	707	761	779	833	869	887	923	977	30031	31049	34103	36139	37157	40211	42247
511	577	621	643	687	709	753	819	841	907	951	973	24017	27083	149	171	287	281	303	369	413
517	619	687	721	789	823	891	993	16027	19129	21197	22231	299	401	503	537	639	707	741	843	911
521	647	731	773	857	899	983	15109	151	277	361	403	487	613	739	781	907	991	38033	41159	43243
523	661	753	799	891	937	12029	167	213	351	443	489	581	719	857	903	35041	37133	179	317	409
527	689	797	851	959	10013	121	283	337	499	607	661	769	931	31093	32147	309	417	471	633	741
529	703	819	877	993	051	167	341	399	573	689	747	863	28037	211	269	443	559	617	791	907
533	731	863	929	9061	127	259	457	523	721	853	919	25051	249	447	513	711	843	909	42107	44239
539	773	929	7007	163	241	397	631	709	943	22099	23177	333	567	801	879	36113	38269	39347	581	737
541	787	951	7033	197	279	443	689	771	20017	181	263	427	673	919	33001	247	411	493	739	903
547	829	6017	111	299	393	581	863	957	239	427	521	709	991	32273	367	649	837	931	43213	45401
551	857	6061	163	367	469	673	979	17081	387	591	693	897	29263	509	611	917	39121	40223	529	733
553	871	083	189	401	507	719	16037													

2 B

I	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191
301	26789	29197	30401	31003	32207	32809	34013	38227	39431	41237	41839	44849	45451	47257	49063	50267	52073	53879	54481	57491
307	27323	779	31007	621	849	33463	691	989	40217	42039	42673	45743	46357	48199	50041	51269	53111	54953	55567	58637
311	679	30167	411	32033	33277	899	35143	39497	741	607	43229	46339	961	827	693	937	803	55669	56291	59401
313	857	361	613	239	491	34117	369	751	41003	881	507	637	47263	49141	51019	52271	54149	56027	653	783
317	28213	749	32017	651	919	553	821	40259	527	43429	44063	47233	867	769	671	939	841	743	57377	60547
319	391	943	219	837	34133	771	36047	513	789	703	341	531	48169	50083	997	53273	55187	57101	739	929
323	747	31331	623	33269	561	35207	499	41021	42313	44251	897	48127	773	711	52649	941	879	817	58463	61693
329	29281	913	33229	887	35203	861	37177	783	43099	45073	45731	49041	49679	51653	53627	54943	56917	58891	59549	62839
331	459	32107	431	34093	417	36079	403	42037	361	347	46009	319	981	967	933	55277	57263	59249	911	63221
337	993	689	34037	711	36059	733	38081	799	44147	46169	843	50213	50887	52909	54031	56279	58301	60323	60997	64367
341	30349	33077	441	35123	487	37169	533	43307	671	717	47399	809	51491	53537	55583	547	993	61039	61721	65131
343	527	271	643	329	701	387	759	561	933	991	677	51107	793	851	909	57281	59339	307	62083	513
347	883	639	35047	741	37129	823	39211	44069	45457	47539	48233	703	52397	54479	56561	949	60031	62113	807	66277
349	31061	853	249	947	343	38041	437	323	719	813	511	52001	699	793	887	58283	377	471	63169	659
353	417	34241	653	36359	771	477	889	831	46243	48361	49067	597	53303	55421	57539	951	61069	63187	893	67423
359	951	823	36259	977	38413	39131	40567	45593	47029	49183	901	53491	54209	56363	58517	59953	62107	64261	64979	68569
361	32129	35017	461	37183	627	349	793	847	291	457	50179	789	511	677	843	60287	453	619	65341	951
367	663	599	37067	801	39269	40003	41471	46609	48077	50279	51013	54683	55417	57619	59821	61289	63491	65693	66427	70097
371	33019	987	471	38213	697	439	923	47117	601	827	569	55279	56021	58247	60473	957	64183	66409	67151	861
373	197	36181	673	419	911	657	42149	371	863	51101	847	577	323	561	799	62291	529	767	513	71243
377	553	569	38077	831	40339	41093	601	879	49387	54471	56171	627	59189	61451	959	65221	67483	68237	72007	
379	731	763	279	39037	553	311	827	48133	649	923	681	471	57229	503	777	63293	507	841	599	389
383	34087	37151	683	449	981	747	43279	641	50173	52471	53237	57067	833	60131	62429	961	66259	68557	69323	73153
389	621	733	39289	40067	41623	42401	957	49403	959	53293	54071	961	58739	61073	63407	64963	67297	69631	70409	74299
391	799	927	491	273	837	619	44183	657	51221	567	349	58259	59041	387	733	65297	643	989	771	681
397	35333	38509	40097	891	42479	43273	861	50419	52007	54389	55183	59153	947	62329	64711	66299	68681	71063	71857	75827
401	689	897	501	41303	907	709	45313	927	531	937	739	749	60551	957	65363	967	69373	779	72581	76591
403	867	39091	703	509	43121	927	539	51181	793	55211	56017	60047	853	63271	689	67301	719	72137	943	973
407	36223	479	41107	921	549	44363	991	689	53317	759	573	643	61457	899	66341	969	70411	853	73667	77737
409	401	673	309	42127	763	581	46217	943	579	56033	851	941	759	64213	667	68303	757	73211	74029	78119
413	757	40061	713	539	44191	45017	669	52451	54103	581	57407	61537	62363	841	67319	971	71449	927	753	883
419	37291	643	42319	43157	833	671	47347	53213	889	57403	58241	62431	63269	65783	68297	69973	72487	75001	75839	80029
421	469	837	521	363	45047	889	573	467	55151	677	519	729	571	66097	623	70307	833	359	76201	411
427	38003	41419	43127	981	689	46543	48251	54229	937	58499	59353	63623	64477	67039	69601	71309	73871	76433	77287	81557
431	359	807	531	44893	46117	979	703	737	56461	59047	909	64219	65081	667	70253	977	74563	77149	78011	82321
433	537	42001	733	599	331	47197	929	991	723	321	60187	517	383	981	579	72311	909	507	373	703
437	893	389	44137	45011	759	633	49381	55499	57247	869	743	65113	937	68609	71231	979	75601	78223	79097	83467
439	39071	583	339	217	973	851	607	753	509	60143	61021	411	66289	923	557	73313	947	581	459	849
443	427	971	743	629	47401	48287	50059	56261	58033	691	577	66007	893	69551	72209	981	76639	79297	80183	84613
449	961	43553	45349	46247	48043	941	737	57023	819	61513	62411	901	67799	70493	73187	74983	77677	80371	81269	85759
451	40139	747	551	453	257	49159	963	277	59081	787	689	67199	68101	807	513	75317	78023	729	631	86141
457	673	44329	46157	47071	899	813	51641	58039	867	62609	63523	68093	69007	71749	74491	76319	79061	81803	82717	87287
461	41029	717	561	483	49327	50249	52093	547	60391	63157	64079	689	611	72377	75143	937	753	82519	83441	88051
463	207	911	763	689	541	467	319	801	653	431	357	987	913	691	469	77321	80099	877	803	453
467	563	45299	47167	48101	969	903	771	59309	61177	979	913	69583	70517	73319	76121	989	791	83593	84527	89197
469	741	493	369	307	50183	51121	997	563	439	64253	65191	881	819	633	447	78323	81137	951	889	579
473	42097	881	773	719	611	557	53449	60071	963	801	747	70477	71423	74261	77099	991	829	84667	85613	90343
479	631	46463	48379	49337	51253	52211	54127	833	62749	65623	66581	71371	72329	75203	78077	79993	82867	85741	86699	91489
481	809	657	581	543	467	429	353	61087	63011	897	859	669	631	517	403	80327	83213	86099	87061	871
487	43343	47239	49187	50161	52109	53083	55031	849	797	66719	67693	72563	73537	76459	79381	81329	84251	87173	88147	93017
491	699	627	591	573	537	519	483	62357	64321	67267	68249	73159	74141	77087	80033	997	943	889	871	781
493	877	821	793	779	751	737	709	611	583	541	527	457	443	401	359	82331	85289	88247	89233	94163
497	44233	48209	50197	51191	53179	54173	56161	63119	65107	68089	69083	74053	75047	78029	81011	999	981	963	957	927
499	411	403	399	397	393	391	387	373	369	363	361	351	349	343	337	83333	86327	89321	90319	95309
503	767	791	803	809	821	827	839	881	893	911	917	947	953	971	989	84001	87019	90037	91043	96073
509	45301	49373	51409	52427	54463	55481	57517	64643	66679	69733	70751	75841	76859	79913	82967	85003	88057	91111	92129	97219
511	479	567	611	633	677	699	743	897	941	70007	71029	76139	77161	80227	83293	337	403	469	491	601
517	46013	50149	52217	53251	55319	56353	58421	65659	67727	829	863	77033	78067	81169	84271	86339	89441	92543	93577	98747
521	369	537	621	663	747	789	873	66167	68251	71377	72419	629	671	797	923	87007	90133	93259	94301	99511
523	547	731	823	869	961	57007	59099	421	513	651	697	927	973	82111	85249	341	479	617	663	893
527	903	51119	53227	54281	56389	443	551	929	69037	72199	73253	78523	79577	739	901	88009	91171	94333	95387	
529	47081	313	429	487	603	661	777	67183	299	473	531	821	879	83053	86227	343	517	691	749	
533	437	701	833	899	57031	58097	60229	691	823	73021	7									

I 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307  
 301 58093 59297 59899 63511 67123 68327 68929 70133 71939 72541 75551 77357 79163 80969 81571 83377 84581 85183 88193  
 307 59251 60479 61093 64777 68461 69689 70303 71531 73373 73987 77057 78899 80741 82583 83197 85039 86267 86881 89951 94249  
 311 60023 61267 889 65621 69353 70397 71219 72463 74329 74951 78061 79927 81793 83659 84281 86147 87391 88013 91123 95477  
 313 409 661 62287 66043 799 71051 677 929 807 75433 563 80441 82319 84197 823 701 933 579 701 96091  
 317 61181 62449 63083 887 70691 959 72593 73861 75763 76397 70567 81469 83371 85273 85907 87809 89077 89711 92881 97319  
 319 567 843 481 67309 71137 72413 73051 74327 76241 879 80069 983 897 811 86449 88363 639 90277 93467 933  
 323 62339 63631 64277 68153 72029 73321 967 75259 77197 77843 81073 83011 84949 86887 87533 89471 90763 91409 94639 99161  
 329 63497 64813 65471 69419 73367 74683 75341 76637 78631 79289 82579 84553 86527 88501 89159 91133 92449 93107 96397  
 331 883 65207 869 841 813 75137 799 77123 79109 771 83081 85067 87053 89039 701 687 93011 673 983  
 337 65041 66389 67063 71107 75151 70499 77173 78521 80543 81217 84587 86609 88631 90653 91327 93349 94697 95371 98741  
 341 813 67177 859 71951 76043 77407 78089 79453 81499 82181 85591 87637 89683 91729 92411 94457 95821 96503 99913  
 343 66109 371 68257 72373 489 861 547 919 977 663 86093 88151 90209 92267 953 95011 96383 97069  
 347 971 68359 69053 73217 77381 78769 79463 80851 82933 83627 87097 89179 91261 93343 94037 96119 97507 98201  
 349 67357 753 451 73639 827 79223 921 81317 83411 84109 599 693 787 881 579 673 98069 767  
 353 68129 69541 70247 74483 78719 80131 80837 82249 84367 85073 88603 90721 92839 94957 95663 97781 99193 99899  
 359 69287 70723 71441 75749 80057 81493 82211 83647 85801 86519 90109 92263 94417 96571 97289 99443  
 361 673 71117 839 76171 503 947 669 84113 86279 87001 611 777 943 97109 831 997  
 367 70831 72299 73033 77437 81841 83309 84043 85511 87713 88447 92117 94319 96521 98723 99457  
 371 71603 73087 829 78281 82733 84217 959 86443 88669 89411 93121 95347 97573 99799  
 373 989 481 74227 703 83179 671 85417 909 89147 803 623 641 90293  
 377 72761 74269 75023 79547 84071 85579 86333 87841 90103 90857 94627 96889 99151  
 379 73147 663 421 969 517 86033 791 88307 581 91339 95129 97403 677  
 383 919 75451 76217 80813 85409 941 87707 89239 91537 92303 96133 98431  
 389 75077 76633 77411 82079 86747 88303 89081 90637 92971 93749 97639 99973  
 391 463 77027 809 501 87193 757 539 91103 93449 94231 98141  
 397 76621 78209 79003 83767 88531 90119 90913 92501 94883 95677 99647  
 401 77393 997 799 84611 89423 91027 91829 93433 95839 96641  
 403 779 79391 80197 85033 869 481 92287 899 96317 97123  
 407 78551 80179 993 877 90761 92389 93203 94831 97273 98087  
 409 937 573 81391 86299 91207 843 661 95297 751 569  
 413 79709 81361 82187 87143 92099 95951 94577 96229 98707 99533  
 419 80867 82543 83381 88409 93437 95113 95951 97627  
 421 81253 937 779 831 883 567 96409 98093  
 427 82411 84119 84973 90097 95221 96929 97783 99491  
 431 83183 907 85769 941 96113 97837 98699  
 433 569 83301 86167 91363 559 98291 99157  
 437 84341 86089 963 92207 97451 99199  
 439 727 483 87361 629 897 653  
 443 85499 87271 88157 93473 98789  
 449 86657 88453 89351 94739  
 451 87043 847 749 95161  
 457 88201 90029 90943 96427  
 461 973 817 91739 97271  
 463 89359 91211 92137 693  
 467 90131 999 933 98537  
 469 517 92393 93331 959  
 473 91289 93181 94127 99803  
 479 92447 94363 95321  
 481 833 757 719  
 487 93991 95939 96913  
 491 94763 96727 97709  
 493 95149 97121 98107  
 497 921 909 903  
 499 96307 98303 99301  
 503 97079 99091  
 509 98237  
 511 623  
 517 99781

## 2 D

I 311 313  
 311 96721  
 313 97343 97969  
 317 98587 99221  
 319 99209 99847

3 A

i	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83
601	4207	6611	7813	10217	11419	13823	17429	18631	22237	24641	25843	28247	31853	35459	36661	40267	42671	43873	47479	49883
607	4249	6677	891	319	533	961	603	817	459	887	26101	529	32171	813	37027	669	43097	44311	953	50381
611	277	721	943	387	609	14053	719	941	607	25051	273	717	383	36049	271	937	381	603	48269	713
613	291	743	969	421	647	099	777	19003	681	133	359	811	489	167	393	41071	523	749	427	879
617	319	787	8021	489	723	191	893	127	829	297	531	999	701	403	637	339	807	45041	743	51211
619	333	809	8047	523	761	237	931	189	903	379	617	29093	807	521	759	473	949	187	901	377
623	361	853	099	591	837	329	18067	313	23051	543	789	281	33019	757	38003	741	44233	479	49217	709
629	403	919	177	693	951	467	241	499	273	789	27047	563	337	37111	369	42143	659	917	691	52207
631	417	941	203	727	989	513	299	561	347	871	133	657	443	229	491	277	801	46063	849	373
637	459	7007	281	829	12103	651	473	747	569	26117	391	939	761	583	857	679	45227	501	50323	871
641	487	7051	333	897	179	743	589	871	717	281	563	30127	973	819	39101	947	511	793	639	53203
643	4501	073	359	931	217	789	647	933	791	363	649	221	34079	937	223	43081	653	939	797	369
647	529	117	411	999	293	881	763	20057	939	527	821	409	291	38173	467	349	937	47231	51113	701
649	543	139	437	11033	331	927	821	119	24013	609	907	503	397	291	589	483	46079	377	271	867
653	571	183	489	101	407	15019	937	243	161	773	28079	691	609	527	833	751	363	669	587	54199
659	613	249	567	203	521	157	19111	429	383	27019	337	973	927	881	40199	44153	789	48107	52061	697
661	627	271	593	237	559	203	169	491	457	101	423	31067	35033	999	321	287	931	253	219	863
667	669	337	671	339	673	341	343	677	679	347	681	349	351	39333	687	689	47357	691	693	53361
671	697	381	723	407	749	433	459	801	827	511	853	537	563	589	931	957	641	983	53009	693
673	711	403	749	441	787	479	517	863	901	593	939	631	669	707	41053	45091	783	49129	167	859
677	739	447	801	509	863	571	633	987	25049	757	29111	819	881	943	297	359	48067	421	483	56191
679	753	469	827	543	901	617	691	21049	123	839	197	913	987	40061	419	493	209	567	641	357
683	781	7513	879	611	977	709	807	173	271	28003	369	32101	36199	297	663	761	493	859	957	689
689	823	579	957	713	13091	847	981	359	493	249	627	383	517	651	42029	46163	919	50297	54431	57187
691	837	601	983	747	129	893	20039	421	567	331	713	477	623	769	151	297	49061	443	589	353
697	879	667	9061	849	243	16031	213	607	789	577	971	759	941	41123	517	699	487	881	55063	851
701	907	711	9113	917	319	123	329	731	937	741	30143	947	37153	359	761	967	771	51173	379	58183
703	921	733	139	951	357	169	387	793	26011	823	229	33041	259	477	883	47101	913	319	537	349
707	949	777	191	12019	433	261	503	917	159	987	401	229	471	713	43127	369	50197	611	853	681
709	963	799	217	053	471	307	561	979	233	29069	487	323	577	831	249	503	339	757	56011	847
713	991	843	269	121	547	399	677	22103	381	233	659	511	789	42067	493	771	623	52049	327	59179
719	5033	909	347	223	661	537	851	289	603	479	917	793	38107	421	859	48173	51049	487	801	677
721	5047	931	373	257	699	583	909	351	677	561	31003	887	213	539	981	307	191	633	959	843
727	089	997	451	359	813	721	21083	537	899	807	261	34169	531	893	44347	709	617	53071	57433	60341
731	117	8041	503	427	889	813	199	661	27047	971	433	357	743	43129	591	977	901	363	749	673
733	131	8063	529	461	927	859	257	723	121	30053	519	451	849	247	713	49111	52043	509	907	839
737	159	107	581	529	14003	951	373	847	269	217	691	639	39061	483	957	379	327	801	58223	61171
739	173	129	607	563	041	997	431	909	343	299	777	733	167	601	45079	513	469	947	381	337
743	201	173	659	631	117	17089	547	23033	491	463	949	921	379	837	323	781	753	54239	697	669
749	243	239	737	733	231	227	721	219	713	709	32207	35203	697	44191	689	50183	53179	677	59171	62167
751	257	261	763	767	269	273	779	281	787	791	293	297	803	809	811	317	321	823	329	333
757	299	327	841	869	383	411	953	467	28009	31037	551	579	40121	663	46177	719	747	55261	803	831
761	327	371	893	937	459	593	22069	591	157	201	723	767	333	899	421	987	54031	553	60119	63163
763	341	393	919	971	497	549	127	653	231	283	809	861	439	45017	543	51121	173	699	277	329
767	369	437	971	13039	573	641	243	777	379	447	981	36049	651	253	787	389	457	991	593	661
769	383	459	997	073	611	687	301	839	453	529	33067	143	737	371	909	523	599	56137	751	827
773	411	8503	10049	141	687	779	417	963	601	693	239	331	969	607	47153	791	883	429	61067	64159
779	453	569	10127	243	801	917	591	24149	823	939	497	613	41287	961	519	52193	55309	867	541	657
781	467	591	153	277	839	963	649	211	897	32021	583	707	393	46079	641	327	451	57013	699	823
787	5509	657	231	379	953	18101	823	397	29119	267	841	989	711	433	48007	729	877	451	62173	65321
791	537	701	283	447	15029	193	939	521	267	431	34013	37177	923	669	251	997	161	743	489	653
793	551	723	309	481	067	239	997	583	341	513	099	271	42029	787	373	53131	56303	889	647	819
797	579	767	361	549	143	331	23113	707	489	677	271	459	241	47023	617	399	587	58181	963	66151
799	593	789	887	583	181	377	171	769	563	759	357	553	347	141	739	533	729	327	63121	317
803	621	833	439	651	257	469	287	893	711	923	529	741	559	377	983	801	57013	619	437	649
809	663	899	517	753	371	607	461	25079	933	33169	787	38023	877	731	49349	54203	439	59057	911	67147
811	677	921	543	787	409	653	519	141	30007	251	873	117	983	849	471	337	581	203	64069	313
817	719	987	621	889	523	791	693	327	229	497	35131	399	43301	48203	837	739	58007	641	543	811
821	747	9031	673	957	599	883	809	451	377	661	303	587	513	439	50081	55007	291	933	859	68143
823	761	9053	699	991	637	929	867	513	451	743	389	681	619	557	203	141	433	60079	65017	309
827	789	097	751	14059	713	19021	983	637	599	907	561	869	831	793	447	409	717	371	333	641
829	803	119	777	093	751	067	24041	699	673	989	647	963	937	911	569	543	859	517	491	807
833	831	163	829	161	827	159	157	823	821	34153	819	39151	44149	49147	813	811	59143	809	807	69139
839	873	229	907	263	941	297	331	26009	31043	399	36077	433	467	501	51179	56213	569	61247	66281	637
841	887	251	933	297	979	343	589	071	117	481	163	527	573	619	301	347	711	393	439	803
847	929	317	11011	399	16093	481	563	257	339	727	421	809	891	973	667	749	60137	831	913	70301
851	957	361	11063	467	169	573	679	381	487	891	593	997	45103	50209	911	57017	421	62123	67229	633
853	971	383	089	501																

3 B

4 A

I 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163  
601 53489 58297 60701 61903 64307 65509 67913 76327 78731 82337 83539 89549 90751 94357 97963  
607 54023 879 61307 62521 949 66163 68591 77089 79517 83159 84373 90443 91657 95299 98941  
611 379 59267 711 933 65377 599 69043 397 80041 707 929 91039 92261 927 99593  
613 357 461 913 63139 591 817 269 851 303 981 85207 337 563 96241 919  
617 913 849 62317 551 66019 67253 721 78359 827 84529 763 933 93167 869  
619 55091 60043 519 757 233 471 947 613 81089 803 86041 92231 469 97183  
623 447 431 923 64169 661 907 70399 79121 613 85351 597 827 94073 811  
629 981 61013 63529 787 67303 68561 71077 883 82399 86173 87431 93721 979 98753  
631 56159 207 731 993 517 779 303 80137 661 447 709 94019 95281 99067  
637 693 789 64337 65611 68159 69433 981 899 83447 87269 88543 913 96187  
641 57049 62177 741 66023 587 869 72433 81407 971 817 89099 95509 791  
643 227 371 943 229 801 70087 639 661 84233 88091 377 807 97093  
647 583 759 65347 641 69229 523 73111 82169 757 639 933 96403 697  
649 761 953 549 847 443 741 337 423 85019 913 90211 701 999  
653 58117 63341 953 67259 871 71177 789 931 543 89461 767 97297 98603  
659 631 923 66559 877 70513 831 74467 83693 86329 90283 91601 98191 99509  
661 829 64117 761 68083 727 72049 693 947 591 557 879 489  
667 59363 699 67367 701 71369 703 75371 84709 87377 91379 92713 99383  
671 719 65087 771 69113 797 73139 823 85217 901 927 93269 979  
673 897 251 973 319 72011 357 76049 471 88163 92201 547  
677 60253 669 68377 731 439 793 501 979 687 749 94103  
679 431 863 579 937 653 74011 727 86233 949 93023 381  
683 787 66251 983 70349 73081 447 77179 741 89473 571 937  
689 61321 833 69589 967 723 75101 837 87503 90259 94393 95771  
691 499 67027 791 71173 937 319 78083 757 521 667 96049  
697 62033 609 70397 791 74579 973 701 88519 91307 95489 883  
701 389 997 801 72203 75007 76409 79213 89027 831 96037 97439  
703 567 68191 71003 409 221 627 439 281 92093 311 717  
707 923 579 407 821 649 77063 891 789 617 859 98273  
709 63101 773 609 73027 863 281 80117 90043 879 57133 551  
713 457 69161 72013 439 76291 717 569 551 93403 681 99107  
719 991 743 619 74057 933 78371 81247 91313 94189 98503 941  
721 64169 937 821 263 77147 589 473 567 451 777  
727 703 70519 73427 881 789 79243 82151 92329 95237 99599  
731 65059 907 831 75293 78217 679 603 837 761  
733 237 71101 74033 499 431 897 829 93091 96023  
737 593 489 437 911 859 80333 83281 599 547  
739 771 683 639 76117 79073 551 507 853 809  
743 66127 72071 75043 529 501 987 959 94361 97333  
749 661 653 649 77147 80143 81641 84637 95123 98119  
751 839 847 851 333 357 859 863 377 381  
757 67373 73429 76457 971 999 82513 85541 96139 99167  
761 729 817 861 78383 81427 949 993 647 691  
763 907 74011 77063 589 641 83167 86219 901 953  
767 68263 399 467 79001 82069 603 671 97409  
769 441 593 669 207 283 821 897 663  
773 797 981 78073 619 711 84257 87349 98171  
779 69331 75563 679 80237 83353 911 88027 933  
781 509 757 881 443 567 85129 253 99187  
787 70043 76339 79487 81061 84209 783 931 949  
791 399 727 891 473 637 86219 89383  
793 577 921 80093 679 851 437 609  
797 933 77309 497 82091 85279 873 90061  
799 71111 503 699 297 493 87091 287  
803 467 891 81103 709 921 527 739  
809 72001 78473 709 83327 86563 88181 91417  
811 179 667 911 533 777 399 643  
817 713 79249 82517 84151 87419 89053 92321  
821 73069 637 921 563 847 489 773  
823 247 831 83123 769 88061 707 999  
827 603 80219 527 85181 489 90143 93451  
829 781 413 729 387 703 361 677  
833 74137 801 84133 799 89131 797 94129  
839 671 81383 739 86417 773 91451 807  
841 849 577 941 623 987 669 95033  
847 75383 82159 85547 87241 90629 92323 711  
851 739 547 951 653 91057 759 96163  
853 917 741 86153 859 271 977 389  
857 76273 83129 557 88271 699 93413 841  
859 451 323 759 477 913 631 97067  
863 807 711 87163 889 92341 94067 519  
869 77341 84293 769 89507 983 721 98197  
871 519 487 971 713 93197 939 423  
877 78053 85069 88577 90331 839 95593 99101  
881 409 457 981 743 94267 96029 553  
883 587 651 89183 949 481 247 779  
887 943 86039 537 91361 909 683  
889 79131 233 789 567 95123 901  
893 477 621 90193 979 551 97337  
899 80011 87203 799 92597 96193 991  
I 89 97 101 103 107 109

I 7 11 13 17  
901 6307 9911 11713 15317  
907 349 977 791 419  
911 377 10021 843 487  
913 391 10043 869 521  
917 419 087 921 589  
919 433 109 947 623  
923 461 153 999 691  
929 6503 219 12077 793  
931 517 241 12103 827  
937 559 307 181 929  
941 587 351 233 997  
943 601 373 259 16031  
947 629 417 311 099  
949 643 439 337 133  
953 671 463 389 201  
959 713 10549 467 303  
961 727 571 493 337  
967 769 637 571 439  
971 797 681 623 507  
973 811 703 649 541  
977 839 747 701 609  
979 853 769 727 643  
983 881 813 779 711  
989 923 879 857 813  
991 937 901 883 847  
997 979 967 961 949  
1001 7007 11011 13013 17017  
1003 7021 11033 13039 051  
1007 049 077 091 119  
1009 063 099 117 153  
1013 091 143 169 221  
1019 133 209 247 323  
1021 147 231 273 357  
1027 189 297 351 459  
1031 217 341 403 527  
1033 231 363 429 561  
1037 259 407 481 629  
1039 273 429 507 663  
1043 301 473 559 731  
1049 343 11539 637 833  
1051 357 561 663 867  
1057 399 627 741 969  
1061 427 671 793 18037  
1063 441 693 819 071  
1067 469 737 871 139  
1069 483 759 897 173  
1073 7511 803 949 241  
1079 553 869 14027 343  
1081 567 891 14053 377  
1087 609 957 131 479  
1091 637 12001 183 547  
1093 651 12023 209 581  
1097 679 067 261 649  
1099 693 089 287 683  
1103 721 133 339 751  
1109 763 199 417 853  
1111 777 231 443 887  
1117 819 287 521 989  
1121 847 331 573 19057  
1123 861 353 599 091  
1127 889 397 651 159  
1129 903 419 677 193  
1133 931 463 729 261  
1139 973 12529 807 363  
1141 987 551 833 397  
1147 8029 617 911 499  
1151 8057 661 963 567  
1153 071 683 989 601  
1157 099 727 15041 669  
1159 113 749 15067 703  
1163 141 793 119 771  
1169 183 859 197 873  
1171 197 881 223 907  
1177 239 947 301 20009  
1181 267 991 353 077  
1183 281 13013 379 111  
1187 309 13057 431 179  
1189 323 079 457 213  
1193 351 123 509 281  
1199 393 189 587 383  
I 7 11 13 17

4 B

I	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103
901	17119	20723	26129	27931	33337	36941	38743	42347	47753	53159	54961	60367	63971	65773	71179	74783	80189	87397	91001	92803
907	233	861	303	28117	559	37187	39001	629	48071	513	55327	769	64397	66211	653	75281	723	979	607	93421
911	309	953	419	241	707	351	173	817	283	749	571	61037	681	503	969	613	81079	88367	92011	833
913	347	999	477	303	781	433	259	911	389	867	693	171	823	649	72127	779	257	561	213	94039
917	423	21091	593	427	929	597	431	43099	601	54103	937	439	65107	941	443	76111	613	949	617	451
919	461	137	651	489	34003	679	517	193	707	221	56059	573	249	67087	601	277	791	89143	819	657
923	537	229	767	613	151	843	689	381	919	457	303	841	533	379	917	609	82147	531	93223	95069
929	651	367	941	799	373	38089	947	663	49237	811	669	62243	959	817	73391	77107	681	90113	829	687
931	689	413	999	861	447	171	40033	757	343	929	791	377	66101	963	549	273	859	307	94031	893
937	803	551	27173	29047	669	417	291	44039	661	55283	57157	779	527	68401	74023	771	83393	889	637	96511
941	879	643	289	171	817	581	463	227	873	519	401	63047	811	693	339	78103	749	91277	95041	923
943	917	689	347	233	891	663	549	321	979	637	523	181	953	839	497	269	927	471	243	97129
947	993	781	463	357	35039	827	721	509	50191	873	767	449	67237	69131	813	601	84283	859	647	541
949	18031	827	521	419	113	909	807	603	297	991	889	583	379	277	971	767	461	92053	849	747
953	107	919	637	543	261	39073	979	791	509	56227	58133	851	663	569	75287	79099	817	441	96253	98159
959	221	22037	811	729	483	319	41237	45073	827	581	499	64253	68089	70007	761	597	85351	93023	859	777
961	259	103	869	791	557	401	323	167	933	699	621	387	231	153	919	763	529	217	97061	983
967	373	241	28043	977	779	647	581	449	51251	57053	987	789	657	591	76393	80261	86063	799	667	99601
971	449	333	159	30101	927	811	753	637	463	289	59231	65057	941	883	709	593	419	94187	98071	
973	487	379	217	163	36001	893	839	731	569	407	353	191	69083	71029	867	759	597	381	273	
977	563	471	333	287	149	40037	42011	919	781	643	597	459	367	321	77183	81091	87953	769	677	
979	601	517	391	349	223	139	097	46013	887	761	719	593	509	467	341	257	131	963	879	
983	677	609	507	473	371	303	269	201	52099	997	963	861	793	759	657	589	487	95351	99283	
989	791	747	681	659	593	549	527	483	417	58351	60329	66263	70219	72197	78131	82087	88021	933	889	
991	829	793	739	721	667	631	613	577	523	469	451	397	361	343	289	253	199	96127		
997	943	931	913	907	889	877	871	859	841	823	817	799	787	781	763	751	733	709		
1001	19019	23023	29029	31031	37037	41041	43043	47047	53053	59059	61061	67067	71071	73073	79079	83083	89089	97097		
1003	057	069	087	093	111	123	129	141	159	177	183	201	213	219	237	249	267	291		
1007	133	161	203	217	259	287	301	329	371	413	427	469	497	511	553	581	623	679		
1009	171	207	261	279	333	369	387	423	477	531	549	603	639	657	711	747	801	873		
1013	247	299	377	403	481	533	559	611	689	767	793	871	923	949	80027	84079	90157	98261		
1019	361	437	551	589	703	779	817	893	54007	60121	62159	68273	72349	74387	501	577	691	843		
1021	399	483	609	651	777	861	903	987	113	239	281	407	491	533	659	743	869	99037		
1027	513	621	783	837	999	42107	44161	48269	431	593	647	809	917	971	81133	85241	91403	619		
1031	589	713	899	961	38147	271	333	457	643	829	891	69077	73201	75263	449	573	759			
1033	627	759	957	32023	221	353	419	551	749	947	63013	211	343	409	607	739	937			
1037	703	851	30073	147	369	517	591	739	961	61183	257	479	627	701	923	86071	92293			
1039	741	897	131	209	443	599	677	833	55067	301	379	613	769	847	82081	237	471			
1043	817	989	247	333	591	763	849	49021	279	537	623	881	74053	76139	397	569	827			
1049	931	24127	421	519	813	42009	45107	303	597	891	989	70283	479	577	871	87067	93361			
1051	969	173	479	581	887	091	193	397	703	62009	64111	417	621	723	83029	233	559			
1057	20083	311	653	767	39109	337	451	679	56021	363	477	819	75047	77161	503	731	94073			
1061	159	403	769	891	257	501	623	867	233	599	721	71087	331	453	819	88063	429			
1063	197	449	827	953	331	583	709	961	339	717	843	221	473	599	977	229	607			
1067	273	541	943	33077	479	747	881	50149	351	953	65087	489	757	891	84293	561	963			
1069	311	587	31001	139	553	829	967	243	657	63071	209	623	899	78037	451	727	95141			
1073	387	679	117	263	701	993	46139	431	869	307	453	891	76183	329	767	89059	497			
1079	501	817	291	449	923	44239	397	713	57187	661	819	72293	609	767	85241	557	96031			
1081	539	863	349	511	997	321	483	807	293	779	941	427	751	913	399	723	209			
1087	653	25001	523	697	40219	567	741	51089	611	64133	66307	829	77177	79351	873	90221	743			
1091	729	093	639	821	367	731	913	277	823	369	551	73097	461	643	86189	553	97099			
1093	767	139	697	883	441	813	999	371	929	487	673	231	603	789	347	719	277			
1097	843	231	813	34007	589	977	47171	559	58141	723	917	409	887	80081	663	91051	633			
1099	881	277	871	069	663	45059	257	653	247	841	67039	633	78029	227	821	217	811			
1103	957	369	987	193	811	223	429	841	459	65077	283	901	313	519	87137	549	98167			
1109	21071	507	32161	379	41033	469	687	52123	777	431	649	74303	739	957	611	92047	701			
1111	109	553	219	441	107	551	773	217	883	549	771	437	881	81103	769	213	879			
1117	223	691	393	627	329	797	48031	499	59201	903	68137	839	79307	541	88243	711	99413			
1121	299	783	509	751	477	961	203	687	413	66139	381	75107	591	833	559	93043	769			
1123	337	829	567	813	551	46043	289	781	519	257	503	241	733	979	717	209	947			
1127	413	921	683	937	699	207	461	969	731	493	747	509	80017	82271	89033	541				
1129	451	967	741	999	773	289	547	53063	837	611	869	643	159	417	191	707				
1133	527	26059	857	35123	921	453	719	251	60049	847	69113	911	443	709	507	94039				
1139	641	197	33031	309	42143	699	977	533	367	67201	479	76313	869	83147	981	537				
1141	679	243	089	371	217	781	49063	627	473	319	601	447	81011	293	90139	703				
1147	793	381	263	557	439	47027	321	909	791	673	967	849	437	731	613	95201				
1151	869	473	379	681	587	191	493	54097	61003	909	70211	77117	721	84023	929	533				
1153	907	519	437	743	661	273	579	191	109	68027	333	251	863	169	91087	609				
1157	983	611	553	867	809	437	751	379	321	263	577	519	82147	461	403	96031				
1159	22021	657	611	929	883	519	837	473	427	381	699	653	289	60						

I	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83
1201	8407	13211	15613	20417	22819	27623	34829	37231	44437	49241	51643	55447	63653	70839	73261	80467	85271	87673	94879	99683
1207	449	277	691	519	933	761	35003	417	659	487	901	729	971	71213	627	869	697	88111	95353	
1211	477	321	743	587	23009	853	119	541	807	651	52073	917	64183	449	871	81137	981	403	669	
1213	491	343	769	621	047	899	177	603	881	733	159	57011	289	507	993	271	86123	549	827	
1217	8519	387	821	689	123	991	293	727	45029	897	331	199	501	803	74237	539	407	841	96143	
1219	533	409	847	723	161	28037	351	789	103	979	417	293	607	921	359	673	549	987	301	
1223	561	453	899	791	237	129	467	913	251	50143	589	481	819	72157	603	941	833	89279	617	
1229	603	13519	977	893	351	267	641	38099	473	389	847	763	65137	511	969	82343	87259	717	97091	
1231	617	541	16003	927	389	313	699	161	547	471	933	857	243	629	75091	477	401	863	249	
1237	659	607	16081	21029	503	451	873	347	769	717	53191	58139	561	983	457	879	827	90301	723	
1241	687	651	133	097	579	543	989	471	917	881	363	327	773	73219	701	83147	88111	593	98039	
1243	701	673	159	131	617	589	36047	533	991	963	449	421	879	337	823	281	253	739	197	
1247	729	717	211	199	693	681	163	657	46139	51127	621	609	66091	573	76067	549	537	91031	513	
1249	743	739	237	233	731	727	221	719	213	209	707	703	197	691	189	683	679	177	671	
1253	771	783	289	301	807	819	337	843	361	373	879	891	409	927	433	951	963	469	987	
1259	813	849	367	403	921	957	511	39029	583	619	54137	59173	727	74281	799	84353	89389	907	99461	
1261	827	871	393	437	959	29003	569	091	657	701	223	267	833	399	921	487	531	92053	619	
1267	869	937	471	539	24073	141	743	277	879	947	481	549	67151	753	77287	889	957	491		
1271	897	981	523	607	149	233	859	401	47027	52111	653	737	363	989	531	85157	90241	783		
1273	911	14003	549	641	187	279	917	463	101	193	739	831	469	75107	653	291	383	929		
1277	939	14047	601	709	263	371	87033	587	249	857	911	60019	681	343	897	559	667	93221		
1279	953	069	627	743	301	417	091	649	323	439	997	113	787	461	78019	693	809	367		
1283	981	113	679	811	377	509	207	773	471	603	55169	301	999	697	263	961	91093	659		
1289	9023	179	757	913	491	647	381	959	693	849	427	583	68317	76051	629	86363	519	94097		
1291	9037	201	783	947	529	693	439	40021	767	931	513	677	423	169	751	497	661	243		
1297	079	267	861	22049	643	831	613	207	989	53177	771	959	741	523	79117	899	92087	681		
1301	107	311	913	117	719	923	729	331	48137	341	943	61147	953	759	361	87167	371	973		
1303	121	333	939	151	757	969	787	393	211	423	56029	241	69059	877	483	301	513	95119		
1307	149	377	991	219	833	30061	903	517	359	587	201	429	271	77113	727	569	797	411		
1309	163	399	17017	253	871	107	961	579	433	669	287	523	377	231	849	703	939	557		
1313	191	443	17069	321	947	199	38077	703	581	833	459	711	589	467	80093	971	93223	849		
1319	233	14509	147	423	25061	337	251	889	803	54079	717	993	907	821	459	88373	649	96287		
1321	247	531	173	457	099	383	309	951	877	161	803	62087	70013	939	581	507	791	433		
1327	289	597	251	559	213	521	483	41137	49099	407	57061	369	331	78293	947	909	94217	871		
1331	317	641	303	627	289	613	599	261	247	571	233	557	543	529	81191	89177	501	97163		
1333	331	663	329	661	327	659	657	323	321	653	319	651	649	647	313	311	648	309		
1337	359	707	381	729	403	751	773	447	469	817	491	839	861	883	557	579	927	601		
1339	373	729	407	763	441	797	831	509	543	899	577	933	967	79001	679	713	95069	747		
1343	401	773	459	831	517	889	947	633	691	55063	749	63121	71179	237	923	981	353	98039		
1349	443	839	537	933	631	31027	39121	819	913	309	58007	403	497	591	82289	90383	779	477		
1351	457	861	563	967	669	073	179	881	987	391	093	497	603	709	411	517	921	623		
1357	499	927	641	23069	783	211	333	42067	50209	637	351	779	921	80063	777	919	90347	99061		
1361	9527	971	693	137	859	303	469	191	337	801	523	967	72133	299	83021	91187	631	353		
1363	541	993	719	171	897	349	527	253	431	883	609	64061	239	417	143	321	773	499		
1367	569	15037	771	239	973	441	643	377	579	56047	781	249	451	653	387	589	97057	791		
1369	583	15059	797	273	26011	487	701	439	633	129	867	343	537	771	509	723	199	937		
1373	611	103	849	341	087	579	817	563	801	293	59039	531	769	81007	753	991	483			
1379	653	169	927	443	201	717	991	749	51023	539	297	813	73087	361	84119	92393	909			
1381	667	191	953	477	239	763	40049	811	097	621	383	907	193	479	241	527	98051			
1387	709	257	18031	579	353	901	223	997	319	867	641	65189	511	833	607	929	477			
1391	737	301	18083	647	429	993	339	43121	467	57031	813	377	723	82069	851	93197	761			
1393	751	323	109	681	467	32039	397	183	541	113	899	471	829	187	973	331	903			
1397	779	367	161	749	543	131	513	307	689	277	60071	659	74041	423	85217	599	99187			
1399	793	389	187	783	581	177	571	369	763	359	157	753	147	541	339	733	329			
1403	821	433	239	851	657	269	687	493	911	523	329	941	359	777	583	94001	613			
1409	863	499	317	953	771	407	861	679	52133	769	587	66223	677	83131	949	403				
1411	877	15521	343	987	809	453	919	741	207	851	673	317	783	249	86071	537				
1417	919	587	421	24089	923	591	41093	927	429	58097	931	599	75101	603	437	939				
1421	947	631	473	157	999	683	209	44051	577	261	61103	787	313	839	681	95207				
1423	961	653	499	191	27037	729	267	113	651	343	189	881	419	957	803	341				
1427	989	697	531	259	113	821	383	237	799	507	361	67069	631	84193	87047	609				
1429	10003	719	577	293	151	867	441	299	873	589	447	163	737	311	169	743				
1433	10031	763	629	361	227	959	557	423	53021	753	619	351	949	547	413	96011				
1439	073	829	707	463	341	33097	731	609	243	999	877	633	76267	901	779	413				
1441	087	851	733	497	379	143	789	671	317	59081	963	727	373	85019	901	547				
1447	129	917	811	599	493	281	963	857	539	327	62221	68009	691	373	88267	949				
1451	157	961	863	667	569	373	42079	981	687	491	393	197	903	609	511	97217				
1453	171	983	889	701	607	419	137	45043	761	573	479	291	77009	727	633	351				
1457	199	16027	941	769	683	511	253	167	909	737	651	479	221	963	877	619				
1459	213	16049	967	803	721	557	311	229	983	819	737	573	327	86081	999	753				
1463	241	093	19019	871	797	649	427	353	54131	983	909	761	539	317	89243	98021				
14																				

6

I	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61
1501	10507	16511	19513	25517	28519	34523	43529	46531	55537	61541	64543	70547	79553	88559	91561
1507	549	577	591	619	633	661	703	717	759	787	801	829	871	913	927
1511	577	621	643	687	709	753	819	841	907	951	973	1017	80083	89149	92171
1513	591	643	669	721	747	799	877	903	981	62033	65059	111	189	267	293
1517	619	687	721	789	823	891	993	47027	56129	197	231	299	401	503	537
1519	633	709	747	823	861	937	44051	089	203	279	317	393	507	621	659
1523	661	753	799	891	937	35029	167	213	351	443	489	581	719	857	903
1529	703	819	877	993	29051	167	341	399	573	689	747	863	81037	90211	93269
1531	717	841	903	26027	089	213	399	461	647	771	833	957	143	329	391
1537	759	907	981	129	203	351	573	647	869	63017	66091	72239	461	683	757
1541	787	951	20033	197	279	443	689	771	57017	181	263	427	673	919	94001
1543	801	973	20039	231	317	489	747	833	091	263	349	521	779	91037	123
1547	829	17017	111	299	393	581	863	957	239	427	521	709	991	273	367
1549	843	17039	137	333	431	627	921	48019	313	509	607	803	82097	391	489
1553	871	083	189	401	507	719	45037	143	461	673	779	991	309	627	733
1559	913	149	267	503	621	857	211	329	683	919	67037	73273	627	981	95099
1561	927	171	293	537	659	903	269	391	757	64001	123	367	733	92099	221
1567	969	237	371	639	773	36041	443	577	979	247	381	649	83051	453	587
1571	997	281	423	707	849	133	559	701	58127	411	553	837	263	689	831
1573	11011	303	449	741	887	179	617	763	201	493	639	931	369	807	953
1577	11039	347	501	809	963	271	733	887	349	657	811	74119	581	93043	96197
1579	053	369	527	843	30001	317	791	949	423	739	897	213	687	161	319
1583	081	413	579	911	077	409	907	49073	571	903	68069	401	899	397	563
1589	123	479	657	27013	191	547	46081	259	793	65149	327	683	84217	751	929
1591	137	17501	683	047	229	593	139	321	867	231	413	777	323	869	97051
1597	179	567	761	149	343	731	313	507	59089	477	671	75059	641	94223	417
1601	207	611	813	217	419	823	429	631	237	641	843	247	853	459	661
1603	221	633	839	251	457	869	487	693	311	723	929	341	959	577	783
1607	249	677	891	319	533	961	603	817	459	887	69101	529	85171	813	98027
1609	263	699	917	353	571	37007	661	879	533	969	187	623	277	931	149
1613	291	743	969	421	647	099	777	50003	681	66133	359	811	489	95167	393
1619	333	809	21047	523	761	237	951	189	903	379	617	76093	807	521	759
1621	347	831	21073	557	799	283	47009	251	977	461	703	187	913	639	881
1627	389	897	151	659	913	421	183	457	60199	707	961	469	86231	993	99247
1631	417	941	203	727	989	513	299	561	347	871	70133	657	443	96229	491
1633	431	963	229	761	31027	559	357	623	421	953	219	751	549	347	613
1637	459	18007	281	829	103	651	473	747	569	67117	391	939	761	583	857
1639	473	18029	307	863	141	697	531	809	643	199	477	77033	867	701	979
1643	11501	073	359	931	217	789	647	933	791	363	649	221	87079	937	
1649	543	139	437	28033	331	927	821	51119	61013	609	907	503	397	97291	
1651	557	161	463	067	369	973	879	181	087	691	993	597	503	409	
1657	599	227	541	169	483	38111	48053	367	309	937	71251	879	821	763	
1661	627	271	593	237	559	203	169	491	457	68101	423	78067	88033	999	
1663	641	293	619	271	597	249	227	553	531	183	509	161	139	98117	
1667	669	337	671	339	673	341	343	677	679	347	681	349	351	353	
1669	683	359	697	373	711	387	401	739	753	429	767	443	457	471	
1673	711	403	749	441	787	479	517	863	901	593	939	631	659	707	
1679	753	469	827	543	901	617	691	52049	62123	839	72197	913	987	99061	
1681	767	491	853	577	939	663	749	111	197	921	283	79007	89093	179	
1687	809	18557	931	679	32053	801	923	297	419	69167	541	289	411	533	
1691	837	601	983	747	129	893	49039	421	567	331	713	477	623	769	
1693	851	623	22009	781	167	939	097	483	641	413	799	571	729	887	
1697	879	667	22061	849	243	39031	213	607	789	577	971	759	941		
1699	893	689	087	883	281	077	271	669	863	659	73057	853	90047		
1703	921	733	139	951	357	169	387	793	63011	823	229	80041	259		
1709	963	799	217	29053	471	307	561	979	233	70069	487	323	577		
1711	977	821	243	087	509	353	619	53041	307	151	573	417	683		
1717	12019	887	321	189	623	491	793	227	529	397	831	699	91001		
1721	12047	931	373	257	699	583	909	351	677	561	74003	887	213		
1723	061	953	399	291	737	629	967	413	751	643	089	981	319		
1727	089	997	451	359	813	721	50083	537	899	807	261	81169	531		
1729	103	19019	477	393	851	767	141	599	973	889	347	263	637		
1733	131	19063	529	461	927	859	257	723	64121	71053	519	451	849		
1739	173	129	607	563	33041	997	431	909	343	299	777	733	92167		
1741	187	151	633	597	079	40043	489	971	417	381	863	827	273		
1747	229	217	711	699	193	181	663	54157	639	627	75121	82109	591		
1751	257	261	763	767	269	273	779	281	787	791	293	297	803		
1753	271	283	789	801	307	319	837	343	861	873	379	391	909		
1757	299	327	841	869	383	411	953	467	65009	72037	551	579	93121		
1759	313	349	867	903	421	457	51011	529	083	119	637	673	227		
1763	341	393	919	971	497	549	127	653	231	283	809	861	439		
1769	383	459	997	30073	611	687	301	839	453	529	76067	83143	757		
1771	397	481	23023	107	649	733	359	901	527	611	153	237	863		
1777	439	19547	23101	209	763	871	533	55087	749	857	411	519	94181		
1781	467	591	153	277	839	963	649	211	897	73021	583	707	393		
1783	481	613	179	311	877	41009	707	273	971	103	669	801	499		
1787	12509	657	231	379	953	101	823	397	66119	267	841	989	711		
1789	523	679	257	413	991	147	881	459	193	349	927	84083	817		
1793	551	723	309	481	34067	239	997	583	341	513	77099	271	95029		
1799	593	789	387	583	181	377	52171	769	563	759	357	553	347		
1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53		

7

I	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
1801	12607	19811	23413	30617	34219	41423	52229	55831	66637	73841	77443	84647	93453
1807	649	877	491	719	333	561	403	56017	859	74087	701	929	771
1811	677	921	543	787	409	653	519	141	67007	251	873	85117	983
1813	691	943	569	821	447	699	577	203	081	333	959	211	96089
1817	719	987	621	889	523	791	693	327	229	497	78131	399	301
1819	733	20009	647	923	561	837	751	389	303	579	217	493	407
1823	761	20053	699	991	637	929	867	513	451	743	389	681	619
1829	803	119	777	31093	751	42067	53041	699	673	989	647	963	937
1831	817	141	803	127	789	113	999	761	747	75071	733	86057	97043
1837	859	207	881	229	903	251	273	947	969	317	991	339	361
1841	887	251	933	297	979	343	389	57071	68117	481	79163	527	373
1843	901	273	959	331	35017	389	447	133	191	563	249	621	679
1847	929	317	24011	399	093	481	363	257	339	727	421	809	891
1849	943	339	24037	433	131	527	621	319	413	809	507	903	997
1853	971	383	089	501	207	619	737	443	561	973	679	87091	98209
1859	13013	449	167	603	321	757	911	629	783	76219	937	373	527
1861	13027	471	193	637	359	803	969	691	857	301	80023	467	633
1867	069	20537	271	739	473	941	54143	877	69079	547	281	749	951
1871	097	581	323	807	549	43033	259	58001	227	711	453	937	99163
1873	111	603	349	841	587	079	317	063	301	793	539	88031	269
1877	139	647	401	909	663	171	433	187	449	957	711	219	481
1879	153	669	427	943	701	217	491	249	523	77039	797	313	587
1883	181	713	479	33011	777	309	607	373	671	203	969	501	799
1889	223	779	557	113	891	447	781	559	893	449	81227	783	
1891	237	801	583	147	929	493	839	621	967	531	313	877	
1897	279	867	661	249	36043	631	55013	807	70189	777	571	89159	
1901	307	911	713	317	119	723	129	931	337	941	743	347	
1903	321	933	739	351	157	769	187	993	411	78023	829	441	
1907	349	977	791	419	233	861	303	59117	559	187	82001	629	
1909	363	999	817	453	271	907	361	179	633	269	087	723	
1913	391	21043	869	521	347	999	477	303	781	433	259	911	
1919	433	21109	947	623	461	44137	651	489	71093	679	517	90193	
1921	447	131	973	657	499	183	709	551	077	761	603	287	
1927	489	197	25051	759	613	321	883	737	299	79007	861	569	
1931	13517	241	25103	827	689	413	999	861	447	171	83033	757	
1933	531	263	129	861	727	459	56057	923	521	253	119	851	
1937	559	307	181	929	803	551	173	60047	669	417	291	91039	
1939	573	329	207	963	841	597	231	109	743	499	377	133	
1943	601	373	259	33031	917	689	347	233	891	663	549	321	
1949	643	439	337	133	37031	827	521	419	72113	909	807	603	
1951	657	461	363	167	069	873	579	481	187	991	893	697	
1957	699	21527	441	269	183	45011	753	667	409	80237	84151	979	
1961	727	571	493	337	259	103	869	791	557	401	323	92167	
1963	741	593	519	371	297	149	927	853	631	483	409	261	
1967	769	637	571	439	373	241	57043	977	779	647	581	449	
1969	783	659	597	473	411	287	101	61039	853	729	667	543	
1973	811	703	649	541	487	379	217	163	73001	893	839	731	
1979	853	769	727	643	601	517	391	349	223	81139	85097	93013	
1981	867	791	733	677	639	563	449	411	297	221	183	107	
1987	909	857	831	779	753	701	623	597	519	467	441	389	
1991	937	901	883	847	829	793	739	721	667	631	613	577	
1993	951	923	909	881	867	839	797	783	741	713	699	671	
1997	979	967	961	949	943	931	913	907	889	877	871	859	
1999	993	989	987	983	981	977	971	969	963	959	957	953	
2003	14021	22033	26039	34051	38057	46069	58087	62093	74111	82123	86129	94141	
2009	14063	22099	26117	153	171	207	261	279	333	369	387	423	
2011	077	121	143	187	209	253	319	341	407	451	473	517	
2017	119	187	221	289	323	391	493	527	629	697	731	799	
2021	147	231	273	357	399	483	609	651	777	861	903	987	
2023	161	253	299	391	487	529	667	713	851	943	989	95081	
2027	189	297	351	459	513	621	783	837	999	83107	87161	269	
2029	203	319	377	493	551	667	841	899	75073	189	247	363	
2033	231	363	429	561	627	759	957	63023	221	353	419	551	
2039	273	429	507	663	741	897	59131	209	443	599	677	833	
2041	287	451	533	697	779	943	189	271	517	681	763	927	
2047	329	22517	611	799	893	47081	363	457	739	927	88021	96209	
2051	357	561	663	867	969	173	479	581	887	84091	193	397	
2053	371	583	689	901	39007	219	537	643	961	173	279	491	
2057	399	627	741	969	083	311	653	767	76109	337	451	679	
2059	413	649	767	35003	121	357	711	829	183	419	537	773	
2063	441	693	819	071	197	449	827	953	331	583	709	961	
2069	483	759	897	173	311	587	60001	64139	553	829	967	97243	
2071	497	781	923	207	349	633	059	201	627	911	89033	337	
2077	14539	847	27001	309	463	771	233	387	849	85157	311	619	
2081	567	891	27053	377	539	863	349	511	997	321	483	807	
2083	581	913	079	411	577	909	407	573	77071	403	569	901	
2087	609	957	131	479	653	48001	523	697	219	567	741	98089	
2089	623	979	157	513	691	047	581	759	293	649	827	183	
2093	651	23023	209	581	767	139	697	883	441	813	999	371	
2099	693	23089	287	683	881	277	871	65069	663	86059	90257	653	
I	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	

8 A

I	7	11	13	17	19
2101	14707	23111	27313	35717	39919
2107	749	177	391	819	40033
2111	777	221	443	887	109
2113	791	243	469	921	147
2117	819	287	521	989	223
2119	833	309	547	36023	261
2123	861	353	599	091	337
2129	903	419	677	193	451
2131	917	441	703	227	489
2137	959	23507	781	329	603
2141	987	551	833	397	679
2143	15001	573	859	431	717
2147	15029	617	911	499	793
2149	043	639	937	533	831
2153	071	683	989	601	907
2159	113	749	28067	703	41021
2161	127	771	28093	737	059
2167	169	837	171	839	173
2171	197	881	223	907	249
2173	211	903	249	941	287
2177	239	947	301	37009	363
2179	253	969	327	043	401
2183	281	24013	379	111	477
2189	323	24079	457	213	591
2191	337	101	483	247	629
2197	379	167	561	349	743
2201	407	211	613	417	819
2203	421	233	639	451	857
2207	449	277	691	519	933
2209	463	299	717	553	971
2213	491	343	769	621	42047
2219	15533	409	847	723	161
2221	547	431	873	757	199
2227	589	497	951	859	313
2231	617	24541	29003	927	389
2233	631	563	29029	961	427
2237	659	607	081	38029	503
2239	673	629	107	063	541
2243	701	673	159	131	617
2249	743	739	237	233	731
2251	757	761	263	267	769
2257	799	827	341	369	883
2261	827	871	393	437	959
2263	841	893	419	471	997
2267	869	937	471	539	

8 B

I	23	29	31	37	41	43	47
2101	48323	60929	65131	77737	86141	90343	98747
2107	461	61103	317	959	387	601	99029
2111	553	219	441	78107	551	773	217
2113	599	277	503	181	633	859	311
2117	691	393	627	329	797	91031	499
2119	737	451	689	403	879	117	593
2123	829	567	813	551	87043	289	781
2129	967	741	999	773	289	547	
2131	49013	799	66061	847	371	633	
2137	151	973	247	79069	617	891	
2141	243	62089	371	217	781	92063	
2143	289	147	433	291	863	149	
2147	381	263	557	439	88027	321	
2149	427	321	619	513	109	407	
2153	519	437	743	661	273	579	
2159	657	611	929	883	519	837	
2161	703	669	991	957	601	923	
2167	841	843	67177	80179	847	93181	
2171	933	959	301	327	89011	353	
2173	979	63017	363	401	093	439	
2177	50071	133	487	549	237	611	
2179	117	191	549	623	339	697	
2183	209	307	673	771	503	869	
2189	347	481	859	993	749	94127	
2191	393	539	921	81067	831	213	
2197	531	713	68107	289	90077	471	
2201	623	829	231	437	241	643	
2203	669	887	293	511	323	729	
2207	761	64003	417	659	487	901	
2209	807	061	479	733	569	987	
2213	899	177	603	881	733	95159	
2219	51037	351	789	82103	979	417	
2221	083	409	851	177	91061	503	
2227	221	583	69037	399	307	761	
2231	313	699	161	547	471	933	
2233	359	757	223	621	553	96019	
2237	451	873	347	769	717	191	
2239	497	931	409	843	799	277	
2243	589	65047	533	991	963	449	
2249	727	221	719	83213	92209	707	
2251	773	279	781	287	291	793	
2257	911	453	967	509	537	97051	
2261	52003	569	70091	657	701	223	
2263	049	627	153	731	783	309	
2267	141	743	277	879	947	481	
2269	187	801	339	953	93029	567	
2273	279	917	403	84101	193	739	
2279	417	66091	649	823	439	997	
2281	463	149	711	397	521	98083	
2287	601	823	897	619	767	341	
2291	693	439	71021	767	931	513	
2293	739	497	083	841	94513	599	
2297	831	613	207	989	177	771	
2299	877	671	269	85063	259	857	
2303	969	787	393	211	423	99029	
2309	53107	961	579	433	669	287	
2311	153	67019	641	507	751	373	
2317	291	193	827	729	997	631	
2321	383	309	951	877	95161	803	
2323	429	367	72013	951	243	889	
2327	521	483	137	86099	407		
2329	567	541	199	173	489		
2333	659	657	323	321	653		
2339	797	831	509	543	899		
2341	843	889	571	617	981		
2347	981	68063	757	839	96227		
2351	54073	179	881	987	391		
2353	119	237	943	87061	473		
2357	211	353	73067	209	637		
2359	257	411	129	283	719		
2363	349	527	253	431	883		
2369	487	701	439	653	97129		
2371	533	759	501	727	211		
2377	671	953	687	949	457		
2381	763	69049	811	88097	621		
2383	809	107	873	171	703		
2387	901	223	997	319	867		
2389	947	281	74059	393	949		
2393	55039	397	183	541	98113		
2399	177	571	369	763	359		
I	23	29	31	37	41		

9

I	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
2401	16807	26411	31213	40817	45619	55223	69629	74431	88837	98441
2407	849	477	291	919	733	361	803	617	89059	687
2411	877	521	343	987	809	453	919	741	207	851
2413	891	543	369	41021	847	499	977	803	281	933
2417	919	587	421	089	923	591	70093	927	429	99097
2419	933	609	447	123	961	637	151	989	503	179
2423	961	653	499	191	46037	729	267	75113	651	343
2429	17003	719	577	293	151	867	441	299	873	589
2431	17017	741	603	327	189	913	499	361	947	671
2437	059	807	681	429	303	56051	673	547	90169	917
2441	087	851	733	497	379	143	789	671	317	
2443	101	873	759	531	417	189	847	733	391	
2447	129	917	811	599	493	281	963	857	539	
2449	143	939	837	633	531	327	71021	919	613	
2453	171	983	889	701	607	419	137	76043	761	
2459	213	27049	967	803	721	557	311	229	983	
2461	227	27071	993	837	759	603	369	291	91057	
2467	269	137	32071	939	873	741	543	477	279	
2471	297	181	32123	42007	949	833	659	601	427	
2473	311	203	149	041	987	879	717	663	501	
2477	339	247	201	109	47063	971	833	787	649	
2479	353	269	227	143	101	57017	891	849	723	
2483	381	313	279	211	177	109	72007	973	871	
2489	423	379	357	313	291	247	181	77159	92093	
2491	437	401	383	347	329	293	239	221	167	
2497	479	467	461	449	443	431	413	407	389	
2501	17507	27511	513	517	519	523	529	531	537	
2503	521	533	539	551	557	569	587	593	611	
2507	549	577	591	619	633	661	703	717	759	
2509	563	599	617	653	671	707	761	779	833	
2513	591	643	669	721	747	799	877	903	981	
2519	633	709	747	823	861	937	73051	78089	93203	
2521	647	731	773	857	899	983	109	151	277	
2527	689	797	851	959	48013	58121	283	337	499	
2531	717	841	903	43027	089	213	399	461	647	
2533	731	863	929	061	127	259	457	523	721	
2537	759	907	981	129	203	351	573	647	869	
2539	773	929	33007	163	241	397	631	709	943	
2543	801	973	33059	231	317	489	747	883	94091	
2549	843	28039	137	333	431	627	921	79019	313	
2551	857	28061	163	367	469	673	979	081	387	
2557	899	127	241	469	583	811	74153	267	609	
2561	927	171	293	537	659	903	269	391	757	
2563	941	193	319	571	697	949	327	453	831	
2567	999	237	371	639	773	59041	443	577	979	
2569	983	259	397	673	811	087	501	639	95053	
2573	18011	303	449	741	887	179	617	763	201	
2579	18053	369	527	843	49001	317	791	949	423	
2581	067	391	553	877	039	363	849	80011	497	
2587	109	457	631	979	153	501	75023	197	719	
2591	137	28501	683	44047	229	593	139	321	867	
2593	151	523	709	081	267	639	197	383	941	
2597	179	567	761	149	343	731	313	507	96089	
2599	193	589	787	183	381	777	371	569	163	
2603	221	633	839	251	457	869	487	693	311	
2609	263	699	917	353	571	60007	661	879	533	
2611	277	721	943	387	609	053	719	941	607	
2617	319	787	34021	489	723	191	893	81127	829	
2621	347	831	34073	557	799	283	76009	251	977	
2623	361	853	099	591	837	329	067	313	97051	
2627	389	897	151	659	913	421	183	437	199	
2629	403	919	177	693	951	467	241	499	273	
2633	431	963	229	761	50027	559	357	623	421	
2639	473	29029	307	863	141	697	531	809	643	
2641	487	29051	333	897	179	743	589	871	717	
2647	18529	117	411	999	293	881	763	82057	939	
2651	557	161	463	45067	369	973	879	181	98087	
2653	571	183	489	101	407	61019	937	243	161	
2657	599	227	541	169	483	111	77053	367	309	
2659	613	249	567	203	521	157	111	429	383	
2663	641	293	619	271	597	249	227	553	531	
2669	683									

10

I	7	11	13	17	19	23	29	31	37
2701	18907	29711	35113	45917	51319	62123	78329	83731	99937
2707	949	777	35191	46019	433	261	503	917	
2711	977	821	243	087	509	353	619	84041	
2713	991	843	269	121	547	399	677	103	
2717	19019	887	321	189	623	491	793	227	
2719	19033	909	347	223	661	537	851	289	
2723	061	953	399	201	737	629	967	413	
2729	103	30019	477	393	851	767	79141	599	
2731	117	30041	503	427	889	813	199	661	
2737	159	107	381	529	52003	951	373	847	
2741	187	151	633	597	079	63043	489	971	
2743	201	173	659	631	117	089	547	85033	
2747	229	217	711	699	193	181	663	157	
2749	243	239	737	733	231	227	721	219	
2753	271	283	789	801	307	319	837	343	
2759	313	349	867	903	421	457	80011	529	
2761	327	371	893	937	459	503	069	591	
2767	369	437	971	47039	573	641	243	777	
2771	397	481	36023	107	649	733	359	901	
2773	411	30503	36049	141	687	779	417	963	
2777	439	547	101	209	763	871	533	86087	
2779	453	569	127	243	801	917	591	149	
2783	481	613	179	311	877	64009	707	273	
2789	19323	679	257	413	991	147	881	459	
2791	537	701	283	447	53029	193	939	521	
2797	579	767	361	549	143	331	81113	707	
2801	607	811	413	617	219	423	229	831	
2803	621	833	439	651	257	469	287	893	
2807	649	877	491	719	333	561	403	87017	
2809	663	899	517	753	371	607	461	079	
2813	691	943	569	821	447	699	577	203	
2819	733	31009	647	923	561	837	751	389	
2821	747	31031	673	957	599	883	809	451	
2827	789	097	751	48059	713	65021	983	637	
2831	817	141	803	127	789	113	82099	761	
2833	831	163	829	161	827	159	157	823	
2837	859	207	881	229	903	251	273	947	
2839	873	229	907	263	941	297	331	88009	
2843	901	273	959	331	54017	389	447	133	
2849	943	339	37037	433	131	527	621	319	
2851	957	361	37063	467	169	573	679	381	
2857	999	427	141	569	283	711	853	567	
2861	20027	471	193	637	359	803	969	691	
2863	20041	493	219	671	397	849	83027	753	
2867	069	31537	271	759	473	941	143	877	
2869	083	559	297	773	311	987	201	939	
2873	111	603	349	841	587	66079	317	89063	
2879	153	669	427	943	701	217	491	249	
2881	167	691	453	977	739	263	549	311	
2887	209	757	531	49079	853	401	723	497	
2891	237	801	583	147	929	493	839	621	
2893	251	823	609	181	967	539	897	683	
2897	279	867	661	249	55043	631	84013	807	
2899	293	889	687	283	081	677	071	869	
2903	321	933	739	351	157	769	187	993	
2909	363	999	817	453	271	907	361	90179	
2911	377	32021	843	487	309	953	419	241	
2917	419	32087	921	589	423	67091	593	427	
2921	447	131	973	657	499	183	709	551	
2923	461	153	999	691	537	229	767	613	
2927	489	197	38051	759	613	321	883	737	
2929	20503	219	38077	793	651	367	941	799	
2933	531	263	129	861	727	459	85057	923	
2939	573	329	207	963	841	597	231	91109	
2941	587	351	233	997	879	643	289	171	
2947	629	417	311	50099	993	781	463	357	
2951	657	461	363	167	56069	873	579	481	
2953	671	483	389	201	107	919	637	543	
2957	699	32527	441	269	183	68011	753	667	
2959	713	549	467	303	221	057	811	729	
2963	741	593	519	371	297	149	927	853	
2969	783	659	597	473	411	287	86101	92039	
2971	797	681	623	507	449	333	159	101	
2977	839	747	701	609	563	471	333	287	
2981	867	791	753	677	639	563	449	411	
2983	881	813	779	711	677	609	507	473	
2987	909	857	831	779	753	701	623	597	
2989	923	879	857	813	791	747	681	659	
2993	951	923	909	881	867	839	797	783	
2999	993	989	987	983	981	977	971	969	
I	7	11	13	17	19	23	29	31	

11

I	7	11	13	17	19	23	29	31
3001	21007	33011	39013	51017	57019	69023	87029	93031
3007	21049	33077	39091	119	133	161	203	217
3011	077	121	143	187	209	253	319	341
3013	091	143	169	221	247	299	377	403
3017	119	187	221	289	323	391	493	527
3019	133	209	247	323	361	437	551	589
3023	161	253	299	391	437	529	667	713
3029	203	319	377	493	551	667	841	899
3031	217	341	403	527	589	713	899	961
3037	259	407	481	629	703	851	88073	94147
3041	287	451	533	697	779	943	189	271
3043	301	473	559	731	817	989	247	333
3047	329	33517	611	799	893	70081	353	457
3049	343	539	637	833	931	127	421	519
3053	371	583	689	901	58007	219	537	643
3059	413	649	767	52003	121	357	711	829
3061	427	671	793	037	159	403	769	891
3067	469	737	871	139	273	541	943	95077
3071	497	781	923	207	349	633	89059	201
3073	21511	803	949	241	387	679	117	263
3077	539	847	40001	309	463	771	233	387
3079	553	869	40027	343	501	817	291	449
3083	581	913	079	411	577	909	407	573
3089	623	979	157	513	691	71047	581	759
3091	637	34001	183	547	729	093	639	821
3097	679	54067	261	649	843	231	813	96007
3101	707	111	313	717	919	323	929	131
3103	721	133	339	751	957	369	987	193
3107	749	177	391	819	59033	461	90103	317
3109	763	199	417	853	071	507	161	379
3113	791	243	469	921	147	599	277	503
3119	833	309	547	53023	261	737	451	689
3121	847	331	573	057	299	783	509	751
3127	889	397	651	159	413	921	683	937
3131	917	441	703	227	489	72013	799	97061
3133	931	463	729	261	527	059	857	123
3137	959	34507	781	329	603	151	973	247
3139	973	529	807	363	641	197	91031	309
3143	22001	573	859	431	717	289	147	433
3149	22043	639	937	533	831	427	321	619
3151	057	661	963	567	869	473	379	681
3157	099	727	41041	669	983	611	553	867
3161	127	771	41093	737	60059	703	669	991
3163	141	793	119	771	097	749	727	98053
3167	169	837	171	839	173	841	843	177
3169	183	859	197	873	211	887	901	239
3173	211	903	249	941	287	979	92017	363
3179	253	969	327	54043	401	73117	191	549
3181	267	991	353	077	439	163	249	611
3187	309	35057	431	179	553	801	423	797
3191	337	35101	483	247	629	393	539	921
3193	351	123	599	281	667	439	597	983
3197	379	167	561	349	743	531	713	99107
3199	393	189	587	383	781	577	771	169
3203	421	233	639	451	857	669	887	293
3209	463	299	717	553	971	807	93061	479
3211	477	321	743	587	61009	853	119	541
3217	22519	387	821	689	123	991	293	727
3221	547	431	873	757	199	74033	409	851
3223	561	453	899	791	237	129	467	913
3227	589	497	951	859	313	221	583	
3229	603	35519	977	893	351	267	641	
3233	631	563	42029	961	427	359	757	
3239	673	629	42107	55063	541	497	931	
3241	687	651	133	097	579	543	989	
3247	729	717	211	199	693	681	94163	
3251	757	761	263	267				

12

1	7	11	13	17	19	23	29
3301	23107	36311	42913	56117	62719	75923	95729
3307	23149	377	991	219	833	76061	903
3311	177	421	43043	287	909	153	96019
3313	191	443	43069	321	947	199	077
3317	219	487	121	389	63023	291	193
3319	233	36509	147	423	061	337	251
3323	261	553	109	491	137	429	367
3329	303	619	277	593	251	567	541
3331	317	641	303	627	289	613	599
3337	359	707	381	729	403	751	773
3341	387	751	433	797	479	843	889
3343	401	773	459	831	517	889	947
3347	429	817	511	899	593	981	97063
3349	443	839	537	933	631	77027	121
3353	471	883	589	57001	707	119	237
3359	23513	949	667	103	821	257	411
3361	527	971	693	137	859	303	469
3367	569	37037	771	239	973	441	643
3371	597	37081	823	307	64049	533	759
3373	611	103	849	341	087	579	817
3377	639	147	901	409	163	671	933
3379	653	169	927	443	201	717	991
3383	681	213	979	511	277	809	98107
3389	723	279	44057	613	391	947	281
3391	737	301	44083	647	429	993	339
3397	779	307	161	749	543	78131	513
3401	807	411	213	817	619	223	629
3403	821	433	239	851	657	269	687
3407	849	477	291	919	733	361	803
3409	863	499	317	953	771	407	861
3413	891	37543	369	58021	847	499	977
3419	933	609	447	123	961	637	99151
3421	947	631	473	157	999	683	209
3427	989	697	551	259	65113	821	383
3431	24017	741	603	327	189	913	499
3433	24031	763	629	361	227	959	557
3437	059	807	681	429	303	79051	673
3439	073	829	707	463	341	097	731
3443	101	873	759	531	417	189	847
3449	143	939	837	633	531	327	
3451	157	961	863	667	569	373	
3457	199	38027	941	769	683	511	
3461	227	38071	993	837	759	603	
3463	241	093	45019	871	797	649	
3467	269	137	45071	939	873	741	
3469	283	159	097	973	911	787	
3473	311	203	149	59041	987	879	
3479	253	269	227	143	66101	80017	
3481	367	291	253	177	139	063	
3487	409	337	331	279	253	201	
3491	437	401	383	347	329	293	
3493	451	423	409	381	367	339	
3497	479	467	461	449	443	431	
3499	493	489	487	483	481	477	
3503	24521	38533	539	551	557	569	
3509	563	599	617	653	671	707	
3511	577	621	643	687	709	753	
3517	619	687	721	789	823	891	
3521	647	731	773	857	899	983	
3523	661	753	799	891	937	81029	
3527	689	797	851	959	67013	121	
3529	703	819	877	993	051	167	
3533	731	863	929	60061	127	259	
3539	773	929	46007	163	241	397	
3541	787	951	46033	197	279	443	
3547	829	39017	111	299	393	581	
3551	857	39061	163	367	469	673	
3553	871	083	189	401	507	719	
3557	899	127	241	469	583	811	
3559	913	149	267	503	621	857	
3563	941	193	319	571	697	949	
3569	983	259	397	673	811	82087	
3571	997	281	423	707	849	133	
3577	25039	347	501	809	963	271	
3581	25067	391	553	877	68039	363	
3583	081	413	579	911	077	409	
3587	109	457	631	979	163	501	
3589	123	479	657	61013	191	547	
3593	151	39523	709	081	267	639	
3599	193	589	787	183	381	777	

13

1	7	11	13	17	19	23
3601	25207	39611	46813	61217	68419	82823
3607	25249	677	891	319	533	961
3611	277	721	943	387	609	83053
3613	291	743	969	421	647	099
3617	319	787	47021	489	723	191
3619	333	809	47047	523	761	237
3623	361	853	099	591	837	329
3629	403	919	177	693	951	467
3631	417	941	203	727	989	513
3637	459	40007	281	829	69103	651
3641	487	40051	333	897	179	743
3643	25501	073	359	931	217	789
3647	529	117	411	999	293	881
3649	543	139	437	62033	331	927
3653	571	183	489	101	407	84019
3659	613	249	567	203	521	157
3661	627	271	593	237	559	203
3667	669	337	671	339	673	341
3671	697	381	723	407	749	433
3673	711	403	749	441	787	479
3677	739	447	801	509	863	571
3679	753	469	827	543	901	617
3683	781	40513	879	611	977	709
3689	823	579	957	713	70091	847
3691	837	601	983	747	129	893
3697	879	667	48061	849	243	85031
3701	907	711	48113	917	319	123
3703	921	733	139	951	357	169
3707	949	777	191	63019	433	261
3709	963	799	217	053	471	307
3713	991	843	269	121	547	399
3719	26033	909	347	223	661	537
3721	26047	931	373	257	699	583
3727	089	997	451	359	813	721
3731	117	41041	503	427	889	813
3733	131	41063	529	461	927	859
3737	159	107	581	529	71003	951
3739	173	129	607	563	041	997
3743	201	173	659	631	117	86089
3749	243	239	737	733	231	227
3751	257	261	763	767	269	273
3757	299	327	841	869	883	411
3761	327	371	893	937	459	503
3763	341	393	919	971	497	549
3767	369	437	971	64039	573	641
3769	383	459	997	073	611	687
3773	411	41503	49049	141	687	779
3779	453	569	49127	243	801	917
3781	467	591	153	277	839	963
3787	26509	657	231	379	953	87101
3791	537	701	283	447	72029	193
3793	551	723	309	481	067	239
3797	579	767	361	549	143	331
3799	593	789	387	583	181	377
3803	621	833	439	631	257	469
3809	663	899	517	753	371	607
3811	677	921	543	787	409	653
3817	719	987	621	889	523	791
3821	747	42031	673	957	399	883
3823	761	42033	699	991	637	929
3827	789	097	751	61039	713	88021
3829	803	119	777	093	751	067
3833	831	163	829	161	827	159
3839	873	229	907	263	941	297
3841	887	251	933	297	979	343
3847	929	317	50011	399	73093	481
3851	957	361	50063	467	169	573
3853	971	383	089	501	207	619
3857	999	427	141	569	283	711
3859	27013	449	167	603	321	757
3863	27041	493	219	671	397	849
3869	083	42559	297	773	511	987
3871	097	581	323	807	549	89033
3877	139	647	401	909	663	171
3881	167	691	453	977	739	263
3883	181	713	479	66011	777	309210
3887	209	757	531	079	853	401
3889	223	779	557	113	891	447
3893	251	823	609	181	967	539
3899	293	889	687	253	74981	677

1 7 11 13 17 19 23

14

	1	7	11	13	17	19	23
3901	27307	42911	50713	66317	74119	89723	
3907	27349	977	791	419	233	861	
3911	377	43021	843	487	309	953	
3913	391	43043	869	521	347	999	
3917	419	087	921	589	423	90091	
3919	433	109	947	623	461	137	
3923	461	153	999	691	537	229	
3929	27503	219	51077	793	651	367	
3931	517	241	51103	827	689	413	
3937	559	307	181	929	803	551	
3941	587	351	233	997	879	643	
3943	601	373	259	67031	917	689	
3947	629	417	311	099	993	781	
3949	643	439	337	133	75031	827	
3953	671	483	389	201	107	919	
3959	713	45549	467	303	221	91057	
3961	727	571	493	337	259	103	
3967	769	637	571	439	373	241	
3971	797	681	623	507	449	333	
3973	811	703	649	541	487	379	
3977	839	747	701	609	563	471	
3979	853	769	727	643	601	517	
3983	881	813	779	711	677	609	
3989	923	879	857	813	791	747	
3991	937	901	883	847	829	793	
3997	979	967	961	949	943	931	
4001	28007	44011	52013	68017	76019	92023	
4003	28021	44033	52039	051	057	069	
4007	049	077	091	119	133	161	
4009	063	099	117	153	171	207	
4013	091	143	169	221	247	299	
4019	133	209	247	323	361	437	
4021	147	231	273	357	399	483	
4027	189	297	351	459	513	621	
4031	217	341	403	527	589	713	
4033	231	363	429	561	627	759	
4037	259	407	481	629	703	851	
4039	273	429	507	663	741	897	
4043	301	473	559	731	817	989	
4049	343	44539	637	833	931	93127	
4051	357	561	663	867	969	173	
4057	399	627	741	969	77083	311	
4061	427	671	793	69037	159	403	
4063	441	693	819	071	197	449	
4067	469	737	871	139	273	541	
4069	483	759	897	173	311	587	
4073	28511	803	949	241	387	679	
4079	553	869	53027	343	501	847	
4081	567	891	53053	377	539	863	
4087	609	957	131	479	653	94001	
4091	637	45001	183	547	729	093	
4093	651	45023	209	581	767	139	
4097	679	067	261	649	843	231	
4099	693	089	287	683	881	277	
4103	721	133	339	751	957	369	
4109	763	199	417	853	78071	507	
4111	777	221	443	887	109	553	
4117	819	287	521	989	223	691	
4121	847	331	573	70057	299	783	
4123	861	353	599	091	337	829	
4127	889	397	651	159	413	921	
4129	903	419	677	193	451	967	
4133	931	463	729	261	527	95059	
4139	973	45529	807	363	641	197	
4141	987	551	833	397	679	243	
4147	29029	617	911	499	793	381	
4151	29057	661	963	567	869	473	
4153	071	683	989	601	907	519	
4157	099	727	54041	669	983	611	
4159	113	749	54067	703	79021	657	
4163	141	793	119	771	097	749	
4169	183	859	197	873	211	887	
4171	197	881	223	907	249	933	
4177	239	947	301	71009	363	96071	
4181	267	991	353	077	439	163	
4183	281	46013	379	111	477	209	
4187	309	46057	431	179	553	301	
4189	323	079	457	213	591	347	
4193	351	123	509	281	667	439	
4199	393	189	587	383	781	577	

15

	1	7	11	13	17	19	23
4201	29407	46211	54613	71417	79819	96623	
4207	449	277	691	519	933	761	
4211	477	321	743	587	80009	853	
4213	491	343	769	621	047	899	
4217	29519	387	821	689	123	991	
4219	533	409	847	723	161	97037	
4223	561	453	899	791	237	129	
4229	603	46519	977	893	351	267	
4231	617	541	55003	927	389	313	
4237	659	607	55081	72029	503	451	
4241	687	651	133	097	579	543	
4243	701	673	159	131	617	589	
4247	729	717	211	199	693	681	
4249	743	739	237	233	731	727	
4253	771	783	289	301	807	819	
4259	813	849	367	403	921	957	
4261	827	871	393	437	959	98003	
4267	869	937	471	539	81073	141	
4271	897	981	523	607	149	233	
4273	911	47003	549	641	187	279	
4277	939	47047	601	709	263	371	
4279	953	069	627	743	301	417	
4283	981	113	679	811	377	509	
4289	30023	179	757	913	491	647	
4291	30037	201	783	947	529	693	
4297	079	267	861	73049	643	831	
4301	107	311	913	117	719	923	
4303	121	333	939	151	757	969	
4307	149	377	991	219	833	99061	
4309	163	399	56017	253	871	107	
4313	191	443	56069	321	947	199	
4319	233	47509	147	423	82061	337	
4321	247	531	173	457	099	383	
4327	289	597	251	559	213	521	
4331	317	641	303	627	289	613	
4333	331	663	329	661	327	659	
4337	359	707	351	729	403	751	
4339	373	729	407	763	441	797	
4343	401	773	459	831	517	889	
4349	443	839	537	933	631		
4351	457	861	563	967	669		
4357	499	927	641	74069	783		
4361	30527	971	693	137	859		
4363	541	993	719	171	897		
4367	569	48037	771	239	973		
4369	583	48059	797	273	83011		
4373	611	103	849	341	087		
4379	653	169	927	443	201		
4381	667	191	953	477	239		
4387	709	257	57031	579	353		
4391	737	301	57083	647	429		
4393	751	323	109	681	467		
4397	779	367	161	749	543		
4399	793	389	187	783	581		
4403	821	433	239	851	657		
4409	863	499	317	953	771		
4411	877	48521	343	987	809		
4417	919	587	421	75089	923		
4421	947	631	473	157	999		
4423	961	653	499	191	84037		
4427	989	697	551	259	113		
4429	31003	719	577	293	151		
4433	31031	763	629	361	227		
4439	073	829	707	463	341		
4441	087	851	733	497	379		
4447	129	917	811	599	493		
4451	157	961	863	667	569		
4453	171	983	889	701	607		
4457	199	49027	941	769	683		
4459	213	49049	967	803	721		
4463	241	093	58019	871	797		
4469	283	159	58097	973	911		
4471	297	181	123	76007	949		
4477	339	247	201	109	85063		
4481	367	291	253	177	139		
4483	381	313	279	211	177		
4487	409	337	331	279	253		
4489	423	379	357	313	291		
4493	451	423	409	381	367		
4499	493	489	487	483	481		

16

	1	7	11	13	17	19
4501	31507	49511	58513	76517	85519	
4507	549	577	591	619	633	
4511	577	621	643	687	709	
4513	591	643	669	721	747	
4517	619	687	721	789	823	
4519	633	709	747	823	861	
4523	661	753	799	891	937	
4529	703	819	877	993	86051	
4531	717	841	903	77027	089	
4537	759	907	981	129	203	
4541	787	951	59033	197	279	
4543	801	973	59059	231	317	
4547	829	50017	111	299	393	
4549	843	50039	137	333	431	
4553	871	083	189	401	507	
4559	913	149	267	503	621	
4561	927	171	293	537	659	
4567	969	237	371	639	773	
4571	997	281	423	707	849	
4573	32011	303	449	741	887	
4577	32039	347	501	809	963	
4579	053	369	527	843	87001	
4583						

i	7	11	13	17	19
4801	33607	52811	62413	81617	91219
4807	649	877	491	719	333
4811	677	921	543	787	409
4813	691	943	569	821	447
4817	719	987	621	889	523
4819	733	53009	647	923	561
4823	761	53033	699	991	637
4829	803	119	777	82093	751
4831	817	141	803	82127	789
4837	859	207	881	229	903
4841	887	231	933	297	979
4843	901	273	959	331	92017
4847	929	317	63011	399	093
4849	943	339	63037	433	131
4853	971	383	089	501	207
4859	34013	449	167	603	321
4861	34027	471	193	637	359
4867	069	53537	271	739	473
4871	097	581	323	807	549
4873	111	603	349	841	587
4877	139	647	401	909	663
4879	153	669	427	943	701
4883	181	713	479	83011	777
4889	223	779	63557	83113	891
4891	237	801	533	147	929
4897	279	867	661	249	93043
4901	34307	911	713	317	119
4903	321	933	739	351	157
4907	349	977	791	419	233
4909	363	999	817	453	271
4913	391	54043	869	521	347
4919	433	54109	947	623	461
4921	447	131	973	657	499
4927	489	197	64051	759	613
4931	517	241	64103	827	689
4933	531	263	129	861	727
4937	559	307	181	929	803
4939	573	329	207	963	841
4943	34601	373	259	84031	917
4949	643	439	337	84133	94031
4951	657	461	363	167	069
4957	699	54527	441	269	183
4961	727	571	493	337	259
4963	741	593	64319	371	297
4967	769	637	571	439	373
4969	783	659	597	473	411
4973	811	703	649	541	487
4979	853	769	727	643	601
4981	867	791	753	677	639
4987	909	857	831	779	753
4991	937	901	883	847	829
4993	951	923	909	881	867
4997	979	967	961	949	943
4999	993	989	987	983	981
5003	33021	55033	65039	85051	95057
5009	33003	55099	65117	85153	171
5011	077	121	143	187	209
5017	119	187	221	289	323
5021	147	231	273	357	399
5023	161	253	299	391	437
5027	189	297	351	459	513
5029	203	319	377	493	551
5033	231	363	429	561	627
5039	273	429	65507	663	741
5041	287	451	533	697	779
5047	35329	55517	611	799	893
5051	357	561	663	867	969
5053	371	583	689	901	96007
5057	399	627	741	969	083
5059	413	649	767	86003	121
5063	441	693	819	86071	197
5069	483	759	897	173	311
5071	497	781	923	207	349
5077	35539	847	66001	309	463
5081	567	891	66053	377	539
5083	581	913	079	411	577
5087	609	957	131	479	653
5089	623	979	157	513	691
5093	651	56023	209	581	767
5099	35693	56089	66287	86683	96881

i	7	11	13	17	19
5101	35707	56111	66313	86717	96919
5107	749	177	391	819	97033
5111	777	221	443	887	109
5113	791	243	469	921	147
5117	819	287	66521	989	223
5119	833	309	547	87023	261
5123	861	353	599	87091	337
5129	903	419	677	193	451
5131	917	441	703	227	489
5137	959	50507	781	329	603
5141	987	551	833	397	679
5143	36001	573	859	431	717
5147	36029	617	911	499	793
5149	043	639	937	533	831
5153	071	683	989	601	907
5159	113	749	67067	703	98021
5161	127	771	67093	737	059
5167	169	837	171	839	173
5171	197	881	223	907	249
5173	211	903	249	941	287
5177	239	947	301	88009	363
5179	253	969	327	88043	401
5183	281	57013	379	111	477
5189	36323	57079	457	213	591
5191	337	101	483	247	629
5197	379	167	67561	349	743
5201	407	211	613	417	819
5203	421	233	639	451	857
5207	449	277	691	519	933
5209	463	299	717	553	971
5213	491	343	769	621	99047
5219	533	409	847	723	161
5221	547	431	873	757	199
5227	589	497	951	859	313
5231	36617	57541	68003	927	389
5233	631	563	68029	961	427
5237	659	607	081	89029	503
5239	673	629	107	89063	541
5243	701	673	159	131	617
5249	743	739	237	233	731
5251	757	761	263	267	769
5257	799	827	341	369	883
5261	827	871	393	437	959
5263	841	893	419	471	997
5267	869	937	471	539	
5269	883	959	497	573	
5273	911	58003	68549	641	
5279	953	58069	627	743	
5281	967	091	653	777	
5287	37009	157	731	879	
5291	37037	201	783	947	
5293	051	223	809	981	
5297	079	267	861	90049	
5299	093	289	887	90083	
5303	121	333	939	151	
5309	163	399	69017	253	
5311	177	421	69043	287	
5317	219	487	121	389	
5321	247	58531	173	457	
5323	261	513	199	491	
5327	289	597	251	559	
5329	37303	619	277	593	
5333	331	663	329	661	
5339	373	729	407	763	
5341	387	751	433	797	
5347	429	817	69511	899	
5351	457	861	563	967	
5353	471	883	589	91001	
5357	499	927	641	91069	
5359	37513	949	667	103	
5363	541	993	719	171	
5369	583	59059	797	273	
5371	597	59081	823	307	
5377	639	147	901	409	
5381	667	191	953	477	
5383	681	213	979	511	
5387	709	257	70031	579	
5389	723	279	70057	613	
5393	751	323	109	681	
5399	37793	59389	70187	91783	

i	7	11	13	17
5401	37807	59411	70213	91817
5407	849	477	70291	919
5411	877	59521	343	987
5413	891	543	369	92021
5417	919	587	421	92089
5419	933	609	447	123
5423	961	653	499	191
5429	38003	719	70577	293
5431	38017	741	603	327
5437	059	807	681	429
5441	087	851	733	497
5443	101	873	759	531
5447	129	917	811	599
5449	143	939	837	633
5453	171	983	889	701
5459	213	60049	967	803
5461	227	60071	993	837
5467	269	137	71071	939
5471	297	181	71123	93007
5473	38311	203	149	93041
5477	339	247	201	109
5479	353	269	227	143
5483	381	313	279	211
5489	423	379	357	313
5491	437	401	383	347
5497	479	467	461	449
5501	507	60511	71513	517
5503	521	533	539	551
5507	549	577	591	619
5509	563	599	617	653
5513	591	643	669	721
5519	38633	709	747	823
5521	647	731	773	857
5527	689	797	851	959
5531	717	841	903	94027
5533	731	863	929	94061
5537	759	907	981	129
5539	773	929	72007	163
5543	801	973	72059	231
5549	843	61039	137	333
5551	857	61061	163	367
5557	899	127	241	469
5561	927	171	293	537
5563	941	193	319	571
5567	969	237	371	639
5569	983	259	397	673
5573	39011	303	449	741
5579	39053	369	72527	843
5581	067	391	553	877
5587	109	457	631	979
5591	137	61501	683	93047
5593	151	523	709	95031
5597	179	567	761	149
5599	193	589	787	183
5603	221	633	839	251
5609	263	699	917	333
5611	277	721	943	387
5617	39319	787	73021	489
5621	347	831	73073	557
5623	361	853	099	591
5627	389	897	151	659
5629	403	919	177	693
5633	431	963	229	761
5639	473	62029	307	863
5641	487	62031	333	897
5647	529	117	411	999
5651	557	161	463	96067
5653	571	183	489	96101
5657	599	227	73341	169

20				
I	7	II	13	17
5701	39907	62711	74113	96917
5707	949	777	74191	97019
5711	977	821	243	087
5713	991	843	269	121
5717	40019	887	321	189
5719	40033	909	347	223
5723	061	953	399	291
5729	103	63019	477	393
5731	117	63041	74503	427
5737	159	107	581	529
5741	187	151	633	597
5743	201	173	659	631
5747	229	217	711	699
5749	243	239	737	735
5753	271	283	789	801
5759	40313	349	867	903
5761	327	371	893	937
5767	369	437	971	98039
5771	397	481	75023	98107
5773	411	63503	75049	141
5777	439	547	101	209
5779	453	569	127	243
5783	481	613	179	311
5789	523	679	257	413
5791	537	701	283	447
5797	579	767	361	549
5801	40607	811	413	617
5803	621	833	439	651
5807	649	877	491	719
5809	663	899	517	753
5813	691	943	75569	821
5819	733	64009	647	923
5821	747	64031	673	957
5827	789	097	751	99059
5831	817	141	803	99127
5833	831	163	829	161
5837	859	207	881	229
5839	873	229	907	263
5843	901	273	959	331
5849	943	339	76037	433
5851	957	361	76063	467
5857	999	427	141	569
5861	41027	471	193	637
5863	41041	493	219	671
5867	069	64537	271	739
5869	083	559	297	773
5873	111	603	349	841
5879	153	669	427	943
5881	167	691	453	977
5887	209	757	76531	
5891	237	801	583	
5893	251	823	609	
5897	279	867	661	
5899	293	889	687	
5903	41321	933	739	
5909	363	999	817	
5911	377	65021	843	
5917	419	65087	921	
5921	447	131	973	
5923	461	153	999	
5927	489	197	77051	
5929	503	219	77077	
5933	531	263	129	
5939	573	329	207	
5941	587	351	233	
5947	41629	417	311	
5951	657	461	363	
5953	671	483	389	
5957	699	65327	441	
5959	713	549	467	
5963	741	593	77519	
5969	783	659	597	
5971	797	681	623	
5977	839	747	701	
5981	867	791	753	
5983	881	813	779	
5987	909	857	831	
5989	923	879	857	
5993	951	923	909	
5999	41993	65989	77987	

21			
I	7	II	13
6001	42007	66011	78013
6007	42049	66077	78091
6011	077	121	143
6013	091	143	169
6017	119	187	221
6019	133	209	247
6023	161	253	299
6029	203	319	377
6031	217	341	403
6037	259	407	481
6041	287	451	78533
6043	42301	473	559
6047	329	66517	611
6049	343	539	637
6053	371	583	689
6059	413	649	767
6061	427	671	793
6067	469	737	871
6071	497	781	923
6073	511	803	949
6077	539	847	79001
6079	553	869	79027
6083	581	913	079
6089	42623	979	157
6091	637	67001	183
6097	679	67067	261
6101	707	111	313
6103	721	133	339
6107	749	177	391
6109	763	199	417
6113	791	243	469
6119	833	309	79547
6121	847	331	573
6127	889	397	651
6131	917	441	703
6133	931	463	729
6137	959	67507	781
6139	973	529	807
6143	43001	573	859
6149	43043	639	937
6151	057	661	963
6157	099	727	80041
6161	127	771	80093
6163	141	793	119
6167	169	837	171
6169	183	859	197
6173	211	903	249
6179	253	969	327
6181	267	991	353
6187	43309	68057	431
6191	337	68101	483
6193	351	123	80509
6197	379	167	561
6199	393	189	587
6203	421	233	639
6209	463	299	717
6211	477	321	743
6217	519	387	821
6221	547	431	873
6223	561	453	899
6227	589	497	951
6229	43603	68519	977
6233	631	563	81029
6239	673	629	81107
6241	687	651	133
6247	729	717	211
6251	757	761	263
6253	771	783	289
6257	799	827	341
6259	813	849	367
6263	841	893	419
6269	883	959	497
6271	897	981	81523
6277	939	69047	691
6281	967	69091	653
6283	981	113	679
6287	44009	157	731
6289	44023	179	757
6293	051	223	809
6299	44093	69289	81887

22			
I	7	II	13
6301	44107	69311	81913
6307	44149	377	991
6311	177	421	82043
6313	191	443	82069
6317	219	487	121
6319	233	69509	147
6323	261	553	199
6329	44303	619	277
6331	317	641	303
6337	359	707	381
6341	387	751	433
6343	401	773	459
6347	429	817	82511
6349	443	839	537
6353	471	883	589
6359	513	949	667
6361	527	971	693
6367	569	70037	771
6371	597	70081	823
6373	44611	103	849
6377	639	147	901
6379	653	169	927
6383	681	213	979
6389	723	279	83057
6391	737	301	83083
6397	779	367	161
6401	807	411	213
6403	821	433	239
6407	849	477	291
6409	863	499	317
6413	891	70543	369
6419	933	609	447
6421	947	631	473
6427	989	697	83551
6431	45017	741	603
6433	45031	763	629
6437	059	807	681
6439	073	829	707
6443	101	873	759
6449	143	939	837
6451	157	961	863
6457	199	71027	941
6461	227	71071	993
6463	241	093	84019
6467	269	137	84071
6469	283	159	097
6473	45311	203	149
6479	353	269	227
6481	307	291	253
6487	409	357	331
6491	437	401	383
6493	451	423	409
6497	479	467	461
6499	493	489	487
6503	521	71533	84539
6509	563	599	617
6511	577	621	643
6517	45619	687	721
6521	647	731	773
6523	661	753	799
6527	689	797	851
6529	703	819	877
6533	731	863	929
6539	773	929	85007
6541	787	951	85033
6547	829	72017	111
6551	857	72061	163
6553	871	033	189
6557	899	127	241
6559	913	149	267
6563	941	193	319
6569	983	259	397
6571	997	281	423
6577	46039	347	85501
6581	46067	391	553
6583	081	413	579
6587	109	457	631
6589	123	479	657
6593	151	72523	709
6599	46193	72589	85787

23			
I	7	II	13
6601	46207	72611	85813
6607	249	677	891
6611	277	721	943
6613	291	743	969
6617	46319	787	86021
6619	333	809	86047
6623	361	853	099
6629	403	919	177
6631	417	941	203
6637	459	73007	281
6641	487	73051	333
6643	501	073	359
6647	529	117	411
6649	543	139	437
6653	571	183	489
6659	46613	249	86367
6661	627	271	593
6667	669	337	671
6671	697	381	723
6673	711	403	749
6677	739	447	801
6679	753	469	827
6683	781	73515	879
6689	823	579	957
6691	837	601	983
6697	879	667	87061
6701	907	711	87113
6703	921	733	139
6707	949	777	191
6709	963	799	217
6713	991	843	269
6719	47033	909	347
6721	47047	931	373
6727	089	997	451
6731	117	74041	87503
6733	131	74063	529
6737	159	107	581
6739	173	129	607
6743	201	173	659
6749	243	239	737
6751	257	261	763
6757	299	327	841
6761	47327	371	893
6763	341	393	919
6767	369	437	971
6769	383	459	997
6773	411	74503	88049
6779	453	569	88127
6781	467	591	153
6787	509	657	231
6791	537	701	283
6793	551	723	309
6797	579	767	361

24

I	7	II	13
6901	48307	75911	89713
6907	48349	977	791
6911	37776021	843	
6913	39176043	869	
6917	419	087	921
6919	433	109	947
6923	461	153	999
6929	503	219	90077
6931	517	241	90103
6937	559	307	181
6941	587	351	233
6943	48601	373	259
6947	629	417	311
6949	643	439	337
6953	671	483	389
6959	713	76549	467
6961	727	571	493
6967	769	637	90571
6971	797	681	623
6973	811	703	649
6977	839	747	701
6979	853	769	727
6983	881	813	779
6989	923	879	857
6991	937	901	883
6997	979	967	961
7001	49007	77011	91013
7003	49021	77033	91039
7007	049	077	091
7009	063	099	117
7013	091	143	169
7019	133	209	247
7021	147	231	273
7027	189	297	351
7031	217	341	403
7033	231	363	429
7037	259	407	481
7039	273	429	91507
7043	49301	473	559
7049	343	77539	637
7051	357	561	663
7057	399	627	741
7061	427	671	793
7063	441	693	819
7067	469	737	871
7069	483	759	897
7073	511	803	949
7079	553	869	92027
7081	567	891	92053
7087	49609	957	131
7091	637	78001	183
7093	651	78023	209
7097	679	067	261
7099	693	089	287
7103	721	133	339
7109	763	199	417
7111	777	221	443
7117	819	287	92521
7121	847	331	573
7123	861	353	599
7127	889	397	651
7129	903	419	677
7133	931	463	729
7139	973	78529	807
7141	987	551	833
7147	50029	617	911
7151	50057	661	963
7153	071	683	989
7157	099	727	93041
7159	113	749	93067
7163	141	793	119
7169	183	859	197
7171	197	881	223
7177	239	947	301
7181	267	991	353
7183	281	79013	379
7187	50309	79057	431
7189	323	079	457
7193	351	123	509
7197	50393	79189	93587

25

I	7	II	13
7201	50407	79211	93613
7207	449	277	691
7211	477	321	743
7213	491	343	769
7217	519	387	821
7219	533	409	847
7223	561	453	899
7229	50603	79519	977
7231	617	541	94003
7237	659	607	94081
7241	687	651	133
7243	701	673	159
7247	729	717	211
7249	743	739	237
7253	771	783	289
7259	813	849	367
7261	827	871	393
7267	869	937	471
7271	897	981	94523
7273	911	80003	549
7277	939	80047	601
7279	953	069	627
7283	981	113	679
7289	51023	179	757
7291	51037	201	783
7297	079	267	861
7301	107	311	913
7303	121	333	939
7307	149	377	991
7309	163	399	95017
7313	191	443	95069
7319	233	80509	147
7321	247	531	173
7327	289	597	251
7331	51317	641	303
7333	331	663	329
7337	359	707	381
7339	373	729	407
7343	401	773	459
7349	443	839	537
7351	457	861	95563
7357	499	927	641
7361	527	971	693
7363	541	993	719
7367	569	81037	771
7369	583	81059	797
7373	51611	103	849
7379	653	169	927
7381	667	191	953
7387	709	257	96031
7391	737	301	96083
7393	751	323	109
7397	779	367	161
7399	793	389	187
7403	821	433	239
7409	863	499	317
7411	877	81521	343
7417	919	587	421
7421	947	631	473
7423	961	653	499
7427	989	697	90551
7429	52003	719	577
7433	52031	763	629
7439	073	829	707
7441	087	851	733
7447	129	917	811
7451	157	961	863
7453	171	983	889
7457	199	82027	941
7459	213	82049	967
7463	241	093	97019
7469	283	159	97097
7471	297	181	123
7477	52339	247	201
7481	367	291	253
7483	381	313	279
7487	409	357	331
7489	423	379	357
7493	451	423	409
7499	52493	82489	97487

26

I	7	II	13
7501	52507	82511	97513
7507	549	577	591
7511	577	621	643
7513	591	643	669
7517	52619	687	721
7519	633	709	747
7523	661	753	799
7529	703	819	877
7531	717	841	903
7537	759	907	981
7541	787	951	98033
7543	801	973	98039
7547	829	83017	111
7549	843	83039	137
7553	871	083	189
7559	913	149	267
7561	927	171	293
7567	969	237	371
7571	997	281	423
7573	53011	303	449
7577	53039	347	98501
7579	053	369	527
7583	081	413	579
7589	123	479	657
7591	137	83501	683
7597	179	567	761
7601	207	611	813
7603	221	633	839
7607	249	677	891
7609	263	699	917
7613	291	743	969
7619	53333	809	99047
7621	347	831	99073
7627	389	897	151
7631	417	941	203
7633	431	963	229
7637	459	84007	281
7639	473	84029	307
7643	501	073	359
7649	543	139	437
7651	557	161	463
7657	599	227	99541
7661	53627	271	593
7663	641	293	619
7667	669	337	671
7669	683	359	697
7673	711	403	749
7679	753	469	827
7681	767	491	853
7687	809	84557	931
7691	837	601	983
7693	851	623	
7697	879	667	
7699	893	689	
7703	921	733	
7709	963	799	
7711	977	821	
7717	54019	887	
7721	54047	931	
7723	061	953	
7727	089	997	
7729	103	85019	
7733	131	85063	
7739	173	129	
7741	187	151	
7747	229	217	
7751	257	261	
7753	271	283	
7757	299	327	
7759	54313	349	
7763	341	393	
7769	383	459	
7771	397	481	
7777	439	85547	
7781	467	591	
7783	481	613	
7787	509	657	
7789	523	679	
7793	551	723	
7799	54593	85789	

27

I	7	II
7801	54607	85811
7807	649	877
7811	677	921
7813	691	943
7817	719	987
7819	733	86009
7823	761	86053
7829	803	119
7831	817	141
7837	859	207
7841	887	251
7843	901	273
7847	929	317
7849	943	339
7853	971	383
7859	55013	449
7861	55027	471
7867	069	86537
7871	097	581
7873	111	603
7877	139	647
7879	153	669
7883	181	713
7889	223	779
7891	237	801
7897	279	867
7901	55307	911
7903	321	933
7907	349	977
7909	363	999
7913	391	87043
7919	433	87109
7921	447	131
7927	489	197
7931	517	241
7933	531	263
7937	559	307
7939	573	329
7943	55601	373
7949	643	439
7951	657	461
7957	699	87527
7961	727	571
7963	741	593
7967	769	637
7969	783	659
7973	811	703
7979	853	769
7981	867	791
7987	909	857
7991	937	901
7993	951	923
7997	979	967
7999	993	989
8003	56021	88033
8009	56063	88099
8011	077	121
8017	119	187
8021	147	231
8023	161	253
8027	189	297
8029	203	319
8033	231	363
8039	273	429
8041	287	451
8047	56329	88517
8051	357	561
8053	371	583
8057	399	627
8059	413	649
8063	441	693
8069	483	759
8071	497	781
8077	539	847
8081	567	891
8083	581	913
8087	56609	957
8089	623	979
8093	651	89023
8099	56693	89089

28

I	7	II
8101	56707	89111
8107	749	89177
8111	777	221
8113		

29		
I	7	II
8401	58807	92411
8407	849	477
8411	877	92521
8413	891	543
8417	919	587
8419	933	609
8423	961	653
8429	59003	719
8431	59017	741
8437	059	807
8441	087	851
8443	101	873
8447	129	917
8449	143	939
8453	171	983
8459	213	93049
8461	227	93071
8467	269	137
8471	297	181
8473	59311	203
8477	339	247
8479	353	269
8483	381	313
8489	423	379
8491	437	401
8497	479	467
8501	507	511
8503	521	93533
8507	549	577
8509	563	599
8513	591	643
8519	59633	709
8521	647	731
8527	689	797
8531	717	841
8533	731	863
8537	759	907
8539	773	929
8543	801	973
8549	843	94039
8551	857	94061
8557	899	127
8561	927	171
8563	941	193
8567	969	237
8569	983	259
8573	60011	303
8579	60033	369
8581	067	391
8587	109	457
8591	137	94501
8593	151	523
8597	179	567
8599	193	589
8603	221	633
8609	263	699
8611	277	721
8617	60319	787
8621	347	831
8623	361	853
8627	389	897
8629	403	919
8633	431	963
8639	473	95029
8641	487	95051
8647	529	117
8651	557	161
8653	571	183
8657	599	227
8659	60613	249
8663	641	293
8669	683	359
8671	697	381
8677	739	447
8681	767	491
8683	781	95513
8687	809	557
8689	823	579
8693	851	623
8699	60893	95689

30		
I	7	II
8701	60907	93711
8707	949	777
8711	977	821
8713	991	843
8717	61019	887
8719	61033	909
8723	061	953
8729	103	96019
8731	117	96041
8737	139	107
8741	187	151
8743	201	173
8747	229	217
8749	243	239
8753	271	283
8759	61313	349
8761	327	371
8767	369	437
8771	397	481
8773	411	96503
8777	439	547
8779	453	569
8783	481	613
8789	523	679
8791	537	701
8797	579	767
8801	61607	811
8803	621	833
8807	649	877
8809	663	899
8813	691	943
8819	733	97009
8821	747	97031
8827	789	097
8831	817	141
8833	831	163
8837	859	207
8839	873	229
8843	901	273
8849	943	339
8851	957	361
8857	999	427
8861	62027	471
8863	62041	493
8867	069	97337
8869	083	559
8873	111	603
8879	153	669
8881	167	691
8887	209	757
8891	237	801
8893	251	823
8897	279	867
8899	293	889
8903	62321	933
8909	363	999
8911	377	98021
8917	419	98087
8921	447	131
8923	461	153
8927	489	197
8929	503	219
8933	531	263
8939	573	329
8941	587	351
8947	62629	417
8951	637	461
8953	671	483
8957	699	98527
8959	713	549
8963	741	593
8969	783	659
8971	797	681
8977	839	747
8981	867	791
8983	881	813
8987	909	857
8989	923	879
8993	951	923
8999	62993	98989

31		
I	7	II
9001	63007	99011
9007	63049	077
9011	077	121
9013	091	143
9017	119	187
9019	133	209
9023	161	253
9029	203	319
9031	217	341
9037	259	407
9041	287	451
9043	63301	473
9047	329	99517
9049	343	539
9053	371	583
9059	413	649
9061	427	671
9067	469	737
9071	497	781
9073	511	803
9077	539	847
9079	553	869
9083	581	913
9089	63623	979
9091	637	
9097	679	
9101	707	
9103	721	
9107	749	
9109	763	
9113	791	
9119	833	
9121	847	
9127	889	
9131	917	
9133	931	
9137	959	
9139	973	
9143	64001	
9149	64043	
9151	057	
9157	099	
9161	127	
9163	141	
9167	169	
9169	183	
9173	211	
9179	253	
9181	267	
9187	64309	
9191	337	
9193	351	
9197	379	
9199	393	
9203	421	
9209	463	
9211	477	
9217	519	
9221	547	
9223	561	
9227	589	
9229	64603	
9233	631	
9239	673	
9241	687	
9247	729	
9251	757	
9253	771	
9257	799	
9259	813	
9263	841	
9269	883	
9271	897	
9277	939	
9281	967	
9283	981	
9287	65009	
9289	65023	
9293	051	
9299	65093	

32	
I	7
9301	65107
9307	65149
9311	177
9313	191
9317	219
9319	233
9323	261
9329	65303
9331	317
9337	359
9341	387
9343	401
9347	429
9349	443
9353	471
9359	513
9361	527
9367	569
9371	597
9373	65611
9377	639
9379	653
9383	681
9389	723
9391	737
9397	779
9401	807
9403	821
9407	849
9409	863
9413	891
9419	933
9421	947
9427	989
9431	66017
9433	66031
9437	059
9439	073
9443	101
9449	143
9451	157
9457	199
9461	227
9463	241
9467	269
9469	283
9473	66311
9479	353
9481	367
9487	409
9491	437
9493	451
9497	479
9499	493
9503	521
9509	563
9511	577
9517	66619
9521	647
9523	661
9527	689
9529	703
9533	731
9539	773
9541	787
9547	829
9551	857
9553	871
9557	899
9559	913
9563	941
9569	983
9571	997
9577	67039
9581	67067
9583	081
9587	109
9589	123
9593	151
9599	67193

33	
I	7
9601	67207
9607	67249
9611	277
9613	291
9617	67319
9619	333
9623	361
9629	403
9631	417
9637	459
9641	487
9643	501
9647	529
9649	543
9653	571
9659	67613
9661	627
9667	669
9671	697
9673	711
9677	739
9679	753
9683	781
9689	823
9691	837
9697	879
9701	907
9703	921
9707	949
9709	963
9713	991
9719	68033
9721	68047
9727	089
9731	117
9733	131
9737	159
9739	173
9743	201
9749	243
9751	257
9757	299
9761	68327
9763	341
9767	369
9769	383
9773	411
9779	453
9781	467
9787	509
9791	537
9793	551
9797	579
9799	593
9803	68621
9809	663
9811	677
9817	719
9821	747
9823	761
9827	789
9829	803
9833	831
9839	873
9841	887
9847	929
9851	957
9853	971
9857	999
9859	69013
9863	69041
9869	083
9871	097
9877	139
9881	167
9883	181
9887	209
9889	223
9893	251
9899	69293

34	
I	7
9901	69307
9907	349
9911	377
9913	391
9917	419
9919	433
9923	461
9929	503
9931	517
9937	559
9941	587
9943	69601
9947	629
9949	643
9953	671
9959	713
9961	727
9967	769
9971	797
9973	811
9977	839
9979	853
9983	881
9989	923
9991	937
9997	979
10001	70007
10003	70021
10007	049
10009	063
10013	091
10019	133
10021	147
10027	189
10031	217
10033	231
10037	259
10039	273
10043	70301
10049	348
10051	357
10057	399
10061	427
10063	441
10067	469
10069	483
10073	511
10079	553
10081	567
10087	70509
10091	637
10093	65

35		36		37		38		39		40		41	
I	7	I	7	I	7	I	7	I	7	I	7	I	7
10201	71407	10501	73507	10801	75607	11101	77707	11401	79807	11701	81907	12001	84007
10207	449	10507	549	10807	649	11107	749	11407	849	11707	949	12007	84049
10211	477	10511	577	10811	677	11111	777	11411	877	11711	977	12011	077
10213	491	10513	591	10813	691	11113	791	11413	891	11713	991	12013	091
10217	519	10517	73619	10817	719	11117	819	11417	919	11717	82019	12017	119
10219	533	10519	633	10819	733	11119	833	11419	933	11719	82033	12019	133
10223	561	10523	661	10823	761	11123	861	11423	961	11723	061	12023	161
10229	71603	10529	703	10829	803	11129	903	11429	80003	11729	103	12029	203
10231	617	10531	717	10831	817	11131	917	11431	80017	11731	117	12031	217
10237	659	10537	759	10837	859	11137	959	11437	059	11737	159	12037	259
10241	687	10541	787	10841	887	11141	987	11441	087	11741	187	12041	287
10243	701	10543	801	10843	901	11143	78001	11443	101	11743	201	12043	84301
10247	729	10547	829	10847	929	11147	78029	11447	129	11747	229	12047	329
10249	743	10549	843	10849	943	11149	043	11449	143	11749	243	12049	343
10253	771	10553	871	10853	971	11153	071	11453	171	11753	271	12053	371
10259	813	10559	913	10859	76013	11159	113	11459	213	11759	82313	12059	413
10261	827	10561	927	10861	76027	11161	127	11461	227	11761	327	12061	427
10267	869	10567	969	10867	069	11167	169	11467	269	11767	369	12067	469
10271	897	10571	997	10871	097	11171	197	11471	297	11771	397	12071	497
10273	911	10573	74011	10873	111	11173	211	11473	80311	11773	411	12073	511
10277	939	10577	74039	10877	139	11177	239	11477	339	11777	439	12077	539
10279	953	10579	053	10879	153	11179	253	11479	353	11779	453	12079	553
10283	981	10583	081	10883	181	11183	281	11483	381	11783	481	12083	581
10289	72023	10589	123	10889	223	11189	78323	11489	423	11789	523	12089	84623
10291	72037	10591	137	10891	237	11191	337	11491	437	11791	537	12091	637
10297	079	10597	179	10897	279	11197	379	11497	479	11797	579	12097	679
10301	107	10601	207	10901	76307	11201	407	11501	507	11801	82607	12101	707
10303	121	10603	221	10903	321	11203	421	11503	521	11803	621	12103	721
10307	149	10607	249	10907	349	11207	449	11507	549	11807	649	12107	749
10309	163	10609	263	10909	363	11209	463	11509	563	11809	663	12109	763
10313	191	10613	291	10913	391	11213	491	11513	591	11813	691	12113	791
10319	233	10619	74333	10919	433	11219	533	11519	80633	11819	733	12119	833
10321	247	10621	347	10921	447	11221	547	11521	647	11821	747	12121	847
10327	289	10627	389	10927	489	11227	589	11527	689	11827	789	12127	889
10331	72317	10631	417	10931	517	11231	78617	11531	717	11831	817	12131	917
10333	331	10633	431	10933	531	11233	631	11533	731	11833	831	12133	931
10337	359	10637	459	10937	559	11237	659	11537	759	11837	859	12137	959
10339	373	10639	473	10939	573	11239	673	11539	773	11839	873	12139	973
10343	401	10643	501	10943	76601	11243	701	11543	801	11843	901	12143	85001
10349	443	10649	543	10949	643	11249	743	11549	843	11849	943	12149	85043
10351	457	10651	557	10951	657	11251	757	11551	857	11851	957	12151	057
10357	499	10657	599	10957	699	11257	799	11557	899	11857	999	12157	099
10361	527	10661	74627	10961	727	11261	827	11561	927	11861	83027	12161	127
10363	541	10663	641	10963	741	11263	841	11563	941	11863	83041	12163	141
10367	569	10667	669	10967	769	11267	869	11567	969	11867	069	12167	169
10369	583	10669	683	10969	783	11269	883	11569	983	11869	083	12169	183
10373	72611	10673	711	10973	811	11273	911	11573	81011	11873	111	12173	211
10379	653	10679	753	10979	853	11279	953	11579	81053	11879	153	12179	253
10381	667	10681	767	10981	867	11281	967	11581	067	11881	167	12181	267
10387	709	10687	809	10987	909	11287	79009	11587	109	11887	209	12187	85309
10391	737	10691	837	10991	937	11291	79037	11591	137	11891	237	12191	337
10393	751	10693	851	10993	951	11293	051	11593	151	11893	251	12193	351
10397	779	10697	879	10997	979	11297	079	11597	179	11897	279	12197	379
10399	793	10699	893	10999	993	11299	093	11599	193	11899	293	12199	393
10403	821	10703	921	11003	77021	11303	121	11603	221	11903	83321	13203	421
10409	863	10709	963	11009	77063	11309	163	11609	263	11909	363	13209	463
10411	877	10711	977	11011	077	11311	177	11611	277	11911	377	13211	477
10417	919	10717	75019	11017	119	11317	219	11617	319	11917	419	13217	519
10421	947	10721	75047	11021	147	11321	247	11621	81347	11921	447	13221	547
10423	961	10723	061	11023	161	11323	261	11623	361	11923	461	13223	561
10427	989	10727	089	11027	189	11327	289	11627	389	11927	489	13227	589
10429	73003	10729	103	11029	203	11329	79303	11629	403	11929	503	13229	85603
10433	73031	10733	131	11033	231	11333	331	11633	431	11933	531	13233	631
10439	073	10739	173	11039	273	11339	373	11639	473	11939	573	13239	673
10441	087	10741	187	11041	287	11341	387	11641	487	11941	587	13241	687
10447	129	10747	229	11047	77329	11347	429	11647	529	11947	83629	13247	729
10451	157	10751	257	11051	357	11351	457	11651	557	11951	657	13251	757
10453	171	10753	271	11053	371	11353	471	11653	571	11953	671	13253	771
10457	199	10757	299	11057	399	11357	499	11657	599	11957	699	13257	799
10459	213	10759	75313	11059	413	11359	513	11659	81613	11959	713	13259	813
10463	241	10763	341	11063	441	11363	541	11663	641	11963	741	13263	841
10469	283	10769	383	11069	483	11369	583	11669	683	11969	783	13269	883
10471	297	10771	397	11071	497	11371	597	11671	697	11971	797	13271	897
10477	73339	10777	439	11077	539	11377	79639	11677	739	11977	839	13277	939
10481	367	10781	467	11081	567	11381	667	11681	767	11981	867	13281	967
10483	381	10783	481	11083	581	11383	681	11683	781	11983	881	13283	981
10487	409	10787	509	11087	77609	11387	709	11687	809	11987	909	13287	86009
10489	423	10789	523	11089	623	11389	723	11689	823	11989	923	13289	86023
10493	451	10793	551	11093	651	11393	751	11693	851	11993	951	13293	051
10499	73493	10799	75593	11099	77693	11399	79793	11699	81893	11999	83993	13299	86093
I	7	I	7	I	7	I	7	I	7	I	7	I	7

42		43		44		45		46		47		48	
I	7	I	7	I	7	I	7	I	7	I	7	I	7
12301	86107	12601	88207	12901	90307	13201	92407	13501	94507	13801	96607	14101	98707
12307	149	12607	249	12907	349	13207	449	13507	549	13807	649	14107	749
12311	177	12611	277	12911	377	13211	477	13511	577	13811	677	14111	777
12313	191	12613	291	12913	391	13213	491	13513	591	13813	691	14113	791
12317	219	12617	88319	12917	419	13217	519	13517	94619	13817	719	14117	819
12319	233	12619	333	12919	433	13219	533	13519	633	13819	733	14119	833
12323	261	12623	361	12923	461	13223	561	13523	661	13823	761	14123	861
12329	86303	12629	403	12929	503	13229	92603	13529	703	13829	803	14129	903
12331	317	12631	417	12931	517	13231	617	13531	717	13831	817	14131	917
12337	359	12637	459	12937	559	13237	659	13537	759	13837	859	14137	959
12341	387	12641	487	12941	587	13241	687	13541	787	13841	887	14141	987
12343	401	12643	501	12943	90601	13243	701	13543	801	13843	901	14143	99001
12347	429	12647	529	12947	629	13247	729	13547	829	13847	929	14147	99029
12349	443	12649	543	12949	643	13249	743	13549	843	13849	943	14149	043
12353	471	12653	571	12953	671	13253	771	13553	871	13853	971	14153	071
12359	513	12659	88613	12959	713	13259	813	13559	913	13859	97013	14159	113
12361	527	12661	627	12961	727	13261	827	13561	927	13861	97027	14161	127
12367	569	12667	669	12967	769	13267	869	13567	969	13867	069	14167	169
12371	597	12671	697	12971	797	13271	897	13571	997	13871	097	14171	197
12373	86611	12673	711	12973	811	13273	911	13573	95011	13873	111	14173	211
12377	639	12677	739	12977	839	13277	939	13577	95039	13877	139	14177	239
12379	653	12679	753	12979	853	13279	953	13579	053	13879	153	14179	253
12383	681	12683	781	12983	881	13283	981	13583	081	13883	181	14183	281
12389	723	12689	823	12989	923	13289	93023	13589	123	13889	223	14189	99323
12391	737	12691	837	12991	937	13291	93037	13591	137	13891	237	14191	337
12397	779	12697	879	12997	979	13297	079	13597	179	13897	279	14197	379
12401	807	12701	907	13001	91007	13301	107	13601	207	13901	97307	14201	407
12403	821	12703	921	13003	91021	13303	121	13603	221	13903	321	14203	421
12407	849	12707	949	13007	049	13307	149	13607	249	13907	349	14207	449
12409	863	12709	963	13009	063	13309	163	13609	263	13909	363	14209	463
12413	891	12713	991	13013	091	13313	191	13613	291	13913	391	14213	491
12419	933	12719	89033	13019	133	13319	233	13619	95333	13919	433	14219	533
12421	947	12721	89047	13021	147	13321	247	13621	347	13921	447	14221	547
12427	989	12727	089	13027	189	13327	289	13627	389	13927	489	14227	589
12431	87017	12731	117	13031	217	13331	93317	13631	417	13931	517	14231	99617
12433	87031	12733	131	13033	231	13333	331	13633	431	13933	531	14233	631
12437	059	12737	159	13037	259	13337	359	13637	459	13937	559	14237	659
12439	073	12739	173	13039	273	13339	373	13639	473	13939	573	14239	673
12443	101	12743	201	13043	91301	13343	401	13643	501	13943	97601	14243	701
12449	143	12749	243	13049	343	13349	443	13649	543	13949	643	14249	743
12451	157	12751	257	13051	357	13351	457	13651	557	13951	657	14251	757
12457	199	12757	299	13057	399	13357	499	13657	599	13957	699	14257	799
12461	227	12761	89327	13061	427	13361	527	13661	95627	13961	727	14261	827
12463	241	12763	341	13063	441	13363	541	13663	641	13963	741	14263	841
12467	269	12767	369	13067	469	13367	569	13667	669	13967	769	14267	869
12469	283	12769	383	13069	483	13369	583	13669	683	13969	783	14269	883
12473	87311	12773	411	13073	511	13373	93611	13673	711	13973	811	14273	911
12479	353	12779	453	13079	553	13379	653	13679	753	13979	853	14279	953
12481	367	12781	467	13081	567	13381	667	13681	767	13981	867	14281	99967
12487	409	12787	509	13087	91609	13387	709	13687	809	13987	909		
12491	437	12791	537	13091	637	13391	737	13691	837	13991	937		
12493	451	12793	551	13093	651	13393	751	13693	851	13993	951		
12497	479	12797	579	13097	679	13397	779	13697	879	13997	979		
12499	493	12799	593	13099	693	13399	793	13699	893	13999	993		
12503	521	12803	89621	13103	721	13403	821	13703	921	14003	98021		
12509	563	12809	663	13109	763	13409	863	13709	963	14009	98063		
12511	577	12811	677	13111	777	13411	877	13711	977	14011	077		
12517	87619	12817	719	13117	819	13417	919	13717	96019	14017	119		
12521	647	12821	747	13121	847	13421	947	13721	96047	14021	147		
12523	661	12823	761	13123	861	13423	961	13723	061	14023	161		
12527	689	12827	789	13127	889	13427	989	13727	089	14027	189		
12529	703	12829	803	13129	903	13429	94003	13729	103	14029	203		
12533	731	12833	831	13133	931	13433	94031	13733	131	14033	231		
12539	773	12839	873	13139	973	13439	073	13739	173	14039	273		
12541	787	12841	887	13141	987	13441	087	13741	187	14041	287		
12547	829	12847	929	13147	92029	13447	129	13747	229	14047	329		
12551	857	12851	957	13151	92057	13451	157	13751	257	14051	98357		
12553	871	12853	971	13153	071	13453	171	13753	271	14053	371		
12557	899	12857	999	13157	099	13457	199	13757	299	14057	399		
12559	913	12859	90013	13159	113	13459	213	13759	96313	14059	413		
12563	941	12863	90041	13163	141	13463	241	13763	341	14063	441		
12569	983	12869	083	13169	183	13469	283	13769	383	14069	483		
12571	997	12871	097	13171	197	13471	297	13771	397	14071	497		
12577	88039	12877	139	13177	239	13477	94339	13777	439	14077	539		
12581	88067	12881	167	13181	267	13481	367	13781	467	14081	567		
12583	081	12883	181	13183	281	13483	381	13783	481	14083	581		
12587	109	12887	209	13187	309	13487	409	13787	509	14087	98609		
12589	123	12889	223	13189	92323	13489	423	13789	523	14089	623		
12593	151	12893	251	13193	351	13493	451	13793	551	14093	651		
12599	88193	12899	90293	13199	92393	13499	94493	13799	96393	14099	98693		
I	7	I	7	I	7	I	7	I	7	I	7	I	7

# Tafel der Primzahlen von 1 bis 100000.

## Bedeutung der Buchstaben,

01 03 07 09 11 13 17 19 21 23 27 29 31 33 37 39 41 43 47 49 51 53 57 59 61 63 67 69 71 73 77 79 81 83 87 89 91 93 97 99  
a b c d e f g h i k l m n o p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i k l m n o p

1, 2, 3, 5, 7 e f g h k m n p r s t w y z b d e g i l o 1 a b c d f l n p q u v x a b e g h m n o p 2 e k l m o q r v x a c d h i n 3 c e f g n p t w y b e g i l o  
4 a d h i n o q s u x z a b g k m p 5 b d i k r t x a c d f k n p 6 a c f g h n r s t w y z e f i m 7 a d h l o q s v x z c e k o 8 d e i k l m q w x y a f a i k 9 c e h m p r t w b d f i m o  
- 10 - d f h i n o q u v z a c k m n a 1 b d g k m v w a d h k n 2 a f g k m n p u y f g i l m o 3 a b c h i l z b e h p 4 d k l m o q t v w y d h i k l n p 5 e k n s u w y  
6 d g i a 6 a c d f h i l p x a b c n o p 7 d i k o r t w y f i k l 8 a e k n z b d e f g l 9 a c f n o u v e g k n o p - 20 - b e g l m q w a d i k l p 1 e f m n p r s w z g  
a b c f i p q s v b c e h k n o 3 d e o q r t v x d h i l n p 4 e g k p r t y b e f 5 b i n q s u v x g m n 6 d g i o t x y a d f i k l n p 7 c e f h m n u w b f i m o 8 a b h o p  
f v x z g k o 9 b d g l q w x a c d p - 30 - a e h k p r u z b g i l 1 d h i p a b c h k m 2 b d g i m v w x y d p 3 a c f h k m n s t y z d e l n 4 c f o u x z a b c m p  
5 e g l m o q r t x y d h i n 6 c f g k n p s y d e f m o 7 a d h l o q z b c g n o 8 b i k o t v w a f h l 9 c e g h k m n s t b l - 40 - a b c f h i l u v 1 g m n p 1 e l m  
o q w x y f 2 a e g h m n r s f w y z d e i l 3 l p q u x a e m o 4 d i k r t v x a h i n 5 e f g h k t u z b i m o 6 b i p q s u v x a e g m 7 b i k m o v y i k n p 8 a f g n z  
d f l 9 b d h n o p l v x b e c k n p - 50 - b d e i k q v y f h k p 1 a c f h t w b d g l o 2 d l n o p z e g h o 3 b d k o t v h k n p 4 c f g h n p r s u d f g i 5 a c h i l n x a c e  
h m 6 k q r t v w x y c i l n 7 a e g p r f u g i m 8 a c f i l q s u v x z b c g h o 9 b k l q w h k - 60 - c e m p s t w b e g l m 1 a f i n o s v a e o p 2 b e g i m t x a c f k p 3 a e  
g k m p s w y z b e g l o 4 i l u v c e h m 5 i m t v w a c d f h p 6 c h p w y z e g l m 7 a b d h o p z a g h m n 8 b k l m o r x a c d i p 9 c e g t u y z b d f i m o - 70 - a f h  
l q s x e g 1 b d i l m v y f k n 2 e c e f h m p s t w i o 3 e d i n o u v e n 4 e g o v x y f h k l p 5 c g k m p r t u y z e f i l m 6 b c i q f u e h k m p 7 b g k l r w x y l n 8 a m  
r w b e f g i 9 a c h l o p u v a n - 80 - d e g q w y c h k l n 1 a e g k t z b d g m 2 d h i n o p s a c e k m n o 3 e g m w a c f k l 4 h k m n s t z b 5 a f i l p q s a e h o p 6 d a  
m r t a c f h l n p 7 c f h n p r t w z g i 8 b c h i n p q u z a b k n 9 k m o r v a c d p - 90 - a c e f m r s u y b m 1 b d l o p v x z e h k p 2 b d i l q r x f h i n 3 e h k p r s u d f m o  
4 b f h i n o p q z a b e g m o 5 e i o q t v k 6 a f h k m n s u z f g l o 7 h i o q s u b c h k m 8 b e g m o q v x y d i k 9 a c k m n r u b e - 100 - c d p q z b c g m n p 1 b e o q  
r v y a c f h n 2 e k s t w y b d e l 3 a b f i n o p s x c m p 4 l m o w x y a f k p 5 a f m n y b l o 6 a c f l n q v x a b k m 7 d e k m o q w d h l p 8 n p t w y z b i l m 9 b d p  
q u x e g k n - 110 - b l t x y c d i k n 1 f g h n u y z d e f o 2 f q s v x z e g k p 3 e g i m v w c i n p 4 e k p t b d i l m o 5 b h l u v g k n o 6 g i o x f h l p 7 a g h n s f g i l  
8 a c f i l n o q a b k o 9 b d k l o q r w y c d h k - 120 - c e p r f u d e o 1 a c d f h s u x z a o 2 b e l q r v w a c f h l 3 a k m s t e f g m 4 a d f i o p v x e g k m o 5 b e g l q r t  
w c f i l 6 a e f h p r t w y d l o 7 b f i q s a h a m p 8 d i k m r w l n p 9 c e g h k r w y b e g i - 130 - a b c d o p s u a n p 1 b d i l t v y a d f i k 2 g h m r u y b m o 3 d f l n  
p q b h o p 4 e g i r v x a c f k p 5 f k p w b f m o 6 f h l o u e c h k m n o 7 d e i k m v x y a h l p 8 e m n r y e f g i 9 a b c f i n o a b o p - 140 - d e m o u x d h i k 1 c f u  
w y e f o 2 c i f u v h n 3 b i k l r t o k l 4 a c e h k n p t u z g l 5 b h o p s u v x z a m n 6 i l m o q w x c i p 7 f g k n p r t w y b d g i o 8 f i l n s v b c g k m o 9 k m q t v x c  
i - 150 - f g n w z e f i m 1 a c i n p q u z e k n p 2 g l o r y a c d f k l p 3 c f h m n u y z e f i m 4 a f l q s v z b e n o 5 e l r v y c h i 6 a c h m r s t u z b d g i 7 l n o p q u z b  
e k m o 8 b d g k y f h k l 9 a c f h k p y d e m - 160 - a c o x z a b c e k m o 1 b e l q r i k l n 2 g k m n u w b e 3 a h o q u z a c h 4 e g i l o t v w f h k n 5 h m t w z k n  
6 b c h i n o u v x z e m n p 7 b i m r t y a k 8 e k m n s d g i l 9 a b i l n p s a g h k n - 170 - e i l m o r t w f n p 1 e g k p y b i l m 2 b c d n q x m n p 3 g i l o r v y f i k l n  
4 a g h n s u b d f i l m o 5 d h q v c e g h o p 6 d k l x y c h i 7 c f m p t u z i l m 8 e l p q v a h m 9 b d e i k m q x y d f h k l - 180 - f r s t u y z f l o 1 h i l n o s u c h m p  
2 e g k m o v w x c k l 3 a c e f m r w b d g o 4 a f l o q s v x z h n 5 b g i k q r w i k n 6 g p z d g m 7 a f h n s u x e k n o 8 b q y c p 9 e f g h t y e g - 190 - a d f n p v c e  
g h k 1 i q r x a h i 2 c e f h n p u y b e l 3 a d h o e g h k m 4 b g i k l m o r t x a c d f i l 5 a c n r s f w y d f i o 6 b d z h k o p 7 d g l q v w y a f n 8 a f h r s w z b l m 9 f h l  
p u z a e g m n o - 200 - e i k m t y a d l 1 a c f g k m s t u z e f i 2 a h n o u z e k o 3 k l o r t w x y c l n p 4 c e n r s f g i 5 c d i o s u v a n p 6 e l q r a h n 7 c e g h n s t u w  
y d e l 8 c d u x e g k o p 9 b i m q t y a h i - 210 - a e f g h k n y z b l 1 a c i q s u x a c g k m n 2 e i l t c f i 3 f g h k r t f g i m o 4 a c h o b h k m n p 5 b g i k m x y a c f k l p  
6 a e f g t u z e i 7 a f l p q v x b e k p 8 b g i q r v y a d h n 9 e m p s z f m o - 220 - b f l n p q v a b e g m n 1 d e k m o t w x y d l n 2 m t y d e f g i m 3 b c f u b c h m o  
4 d o r t w e h i 5 a e n r s u b d e 6 f h i p q s v c g m o p 7 d g i l q r v c f i k 8 c e g w y z d f 9 a c i p s z a e n - 230 - b e g i l m q r w x y a d h k p 1 g n f y b e l o 2 a b d l  
v e g m n o 3 e i l o q x c d p 4 g n t y e o 5 d n p q u x z a b h n p 6 b d k l m o a c d f k l 7 h r s t w z b e l 8 a f h l n o x c e g k n p 9 d e g m x d f h n - 240 - a c h k m s u  
z d f i m o 1 b c d f i o p v c g h o 2 b k m q t v h 3 g m p y d e g m 4 c f h i q s e c h p 5 d g l o t v d n 6 e k n y d f i m o 7 d o u a b h n p 8 d i r t v y f l 9 c e g h k f w b d f  
g l - 250 - f n o p x e k o 1 e g i l t w a c d i l 2 h m p s t w z 3 a b c d i q s u x b e m 4 d e k q t w x a c d 5 k p r z f g i l 6 a b d i o q f x b e g n 7 b g o r t y a d n p 8 a h r t  
u b e l 9 b f h n o q s v c h o p - 260 - b g i m r w i p 1 c e f h r w z d f i l 2 a b d l p u v z a b n o 3 d g i q t x d k n p 4 e g k n p u y g l o 5 a f q x z m o 6 l o r t c h i k n p  
7 a e f g k m n p y f i 8 a f i o q u z a g h m n 9 b i l t v w y h k n - 270 - e g n f y z b e f m 1 b c d l f g m o 2 e q r w y d f h i p 3 m p z b o 4 c d l n p u x g h k 5 d l m q  
r v h i 6 e g n t w e l m o 7 a o p q s u v a b e g m n p 8 b d g k l t v i n 9 a g h r s t w z b i o - 280 - a h l n v x c h k o p 1 d e k v a h i 2 a e h m f g i l o 3 c d h u v k n 4 b  
d e m o q t a f n p 5 f g p r t u y d e g m o 6 b c h i l n s u x z a c k o 7 b e k m v w y d l n 8 c f g p s y b d g 9 a d i l o u z g 290 d g i k l o y a f 1 a k m n p t w b e g m 2  
a c d i n f v c k o 3 b e l o q t a i k l p 4 a e k m p s w e i 5 a l n p b c e h k p 6 e m o r a c d i 7 g k r w y z l 8 b h o p v a b e g h 9 g i l t y i l - 300 - e f m t y d l m o 1 b d f h  
o p q z c h k o 2 b e k r w y c d n 3 e f h k r t b l m 4 b l n u b e m n o 5 d g m q w x y f n 6 n p s u z d f l o 7 b c f i x a e h 8 b d g m q r v w y c d h n 9 e n p r u d f i  
310 - f h o q v a c g h m 1 i k q t v w y f h i l n 2 h k n p t u w y b d f 3 e h i l o p x g k m n o 4 e f i d 5 e f g n r s t b e i 6 a c l f u x a b k p 7 i k l m r v c d n p 8 g t u y e i  
m 9 e x a e h m - 320 - b d l m v x y a c f i l p 1 g h r s y e i l m 2 b f o p v x z o p 3 b d i k l r w y a c d f h 4 a e f k m r s b g m o 5 b c n o p z a c e g k 6 b d e i o t w k n  
7 c f g h u d g i l o 8 a b n o q s e k 9 d e g o q r x e d i k n p - 330 - f k m p u w d e i m 1 c f h u v z g h m p 2 b e k t k l 3 a e g m n s t u w y f m 4 b d f l x z e g k n 5 b i  
m o t a c f h k l p 6 a f g h k m p r t g 7 b f i q u v x b c e m o 8 d e l m v x a d l n 9 e k n p r z b o - 340 - h n o q x z 1 k l m r t x y d i 2 e f g n w y z b e i o 3 a b f h l p v  
z b c h 4 b i m q x c d i k p 5 a e f h p s u i l m 6 b c f n u v b e g k n 7 b i m q t x y a h 8 c h r s t u d f i o 9 f h q u z a h - 350 - k l v w y c h i l p 1 c e g m r u w y d 2 a  
i l v x b g h m 3 e g k l q w a h n 4 a c h k p t u z m 5 e d i l n o p s c e m n o 6 b g d f 7 m n t w y d o 8 a b d n p q v a c g o p 9 e k o v a c f i n p - 360 - c e f g p z b e i o  
1 c d n p v z k m 2 d e m r v a c f n p 3 c f h r s w e i l 4 o v x b c e g n o 5 k l m r v y a d i k p 6 c m p s w d f i m o 7 d f i q u z b g h k m n 8 d i o t x d f k p 9 a f h k m u  
s t e g o - 370 - b f h i q u x z k o 1 g k q y d h l p 2 a g k s w e f 3 c d f i p q x z a c g o 4 d k r t a i l n 5 a c e g m p t u z b d e g l m 6 c h o s u x a m n p 7 g t h i p 8 e f n  
t w z d g l o 9 c v x a b k m n o - 380 - e q t w c i 1 f h u w b f i l o 2 a h n p q z e h k p 3 b g i l m o v d f n 4 n t u w y z 5 a f x z b c n 6 b d e m q v w c d f n p 7 c e f k  
m p t u b i m 8 b i o q v z b e m 9 b g i k o w y d f n - 390 - h k r s t g l o 1 b c f h o q x a h a m p 2 d g l m o q r v n 3 a f g k r s y b d e i o 4 d h q f v z p 5 b d e i r v a c h  
6 e h k n y b d g 7 b d h l o u z c g m p 8 i l m q r t x a c f i k 9 a m p w d g i l - 400 - d f n p q a k n p 1 n k l m v w a c f l n 2 f n p r w f i l 3 f v x z k 4 k l m o y d i k n p 40  
g h m n s y f i m o 6 d l p q n o p 7 d q v y a d k 8 a f h k m r t u w b g i o 9 b l o q u z e n - 410 - e g k q t v x f h 1 f g n r s u z f g i l 2 a b f i l n o s x a c h p 3 o r v x h  
k l p 4 e f f w b g m 5 c f h i q s u g n o 6 b d e g i l r t v y c h k 7 h m p y z d f 8 a d f s u v a g k n o 9 b e l r t w x y c h i p - 420 - f g h k f z d e i l 1 a n q x c g h k n o 2 d  
i k l q x h i n p 3 e k u p u y e g m o 4 b c d o p s v x z a b e k m p 5 d o x c d f l 6 e r s u b f i l o 7 a b d h l p s v b r k n o 8 i m q r w y a p 9 a k m p s w z b g l - 430 - b f h  
p u v a b n 1 b g o v y f l 2 a c k p z d i m 3 f h i n m o p 4 b e l r v x h k p 5 g r s e f g m o 6 c d f l o u v z c m 7 e g i w y f h i k l n 8 a w b l m 9 f o s y z a c e k m o - 440 -  
g i l m r w y d k l 1 a e h k m n y d g l 2 a b c i u x a b c e g h n 3 v x d h i l 4 g u w i m o 5 a c h n o p s u a g k 6 g i k o r t v x i k p 7 a e m r w d e f l o 8 d h q s v b g k n  
9 d g l q w y a d i k - 450 - c f w z f i 1 h i l n p q z g h m o 2 o t y a h l n 3 e g h m p r s z f l 4 b f l o q h m o 5 b k o r w x c k l p 6 f n r y b e f m o 7 c p v x a b g  
8 g i k l o r w a c h n 9 f u w y d g l - 460 - i l u v z e m n p 1 b o r t w d h i k p 2 h m p z d e g 3 a c d l p u v h p 4 e q r t v x d f l p 5 c e k u y b e l m 6 a h o q s u a g k  
k m 7 b k l t v x e d 8 c e g h m n w z b f l 9 a h o x n o - 470 - g r v x y k n 1 e h k m p s t u z l 2 c i p v c g k n o 3 b d g q v w a h k l 4 c g h n r y m o 5 a c f i l o s a  
c h m p 6 d k m q w x y h p 7 a e f g p r f f g m o 8 c d h p s x e h 9 b e g o q t v a c f h - 480 - g k m u e g m 1 d h i n x a g k n o 2 i q t y d h p 3 e f p r w d i o 4 o  
d f p u a e g h k m o 5 k l o q r a d l n 6 e h k t u z e f g 7 n o v x z b g h k p 8 d g i k t x y c d i l 9 c t w e l m - 490 - b d h n o p s x c h 1 b d g i k q x c d f n p 2 a c e k

les 0

10

20

30

40

50 wzfgo 3cnoqabcmn 4degmovyafhp 5kmnptuyo 6bfloqabcho 7elqrtxikl 8aceknswdfm 9hilpqxsmnp - 500 - ikotwvcl  
kn 1aehkmntwyf 2cilnzaekm 3eimoryafik 4egkryzo 5bfllqsvhkmnp 6ltvdi 7ckrwbeft 8ioquxbemn 9dkmvxcdln-  
510 - anstyzd 1dnopvxcnop 2bgmqrxaik 3cmrstuzi 4cfhilnpquzeghk 5begiqvafhnp 6cfnptyegim 7fhiubcko 8bglmqw  
ycdnp 9cfmrudefm - 520 - dilvxbch 1biltwafhil 2akpuwyblm 3afizacgkm 4owxl 5aegmrswzbdgi 6dlngbemo 7deilot  
xci 8cfcgpyzgil 9abhpxabehp - 530 - bgtvefkl 1afgmtuzdelo 2anoqbcghp 3dklwyfh 4acehprwg 5beluvcmmo 6degk  
moqxwzhp 7ghnyefim 8fhnuxzhkmp 9gklqvyn - 540 - aefpuyim 1aioqvabh 2gvckn 3ehkntzbd 4abdfhipfucn  
op 5bgiqrtyafhi 6agkmntbeg 7dfilvbeqk 8movcfh 9cghruyegi - 550 - adiuvxzeg 1bdgltd 2acfgmfsuym 3fnopqve  
hp 4eqrxck 5aemrtgl 6bdhinoqzabehmo 7egioaknp 8cfghkmpudlo 9abilnoubko - 560 - bdqrwhknp 1afknubdgo 2cdp  
quabcp 3eoycfm 4agnpfbefgl 5abdhlnosemop 6emoyadhk 7aefnptbegi 8cdfilxemno 9deikmrvtailnp - 570 - prtiefi  
o 1chnqstaegmn 2bikrvycdik 3amntubeilo 4flxbkn 5blmxydkn 6apruwbglo 7dfhlnpvehkmn 8bdmqtwyhp 9agkftfem  
580 - flnuxzbp 1demtvwcdlnp 2cegmnpfd 3dfipabegmn 4beglqrwfh 5epfubeg 6abfnxzgknp 7eloxadkl 8nlo 9acd  
fipabgm - 590 - deikmvwacfin 1cfhkruybio 2cdhioqfah 3orvxycknp 4cghrftwbdeo 5dfqxzbh 6egilmvyaednp 7o  
60 kmstwdgno 8doagk 9mvxdhp - 600 - fgmpfilm 1abcloquzbc 2dgkvxydl 3gnpfsweio 4flsuxno 5dilql 6acegnptuyz  
gl 7bhlopzxaezn 8eivcklp 9afghkpswz - 610 - acnsvxmp 1imrvwo 2eknwzimo 3noqfxagh 4bdgradikn 5cehstwyzi 6b  
dfilnpsvxbekl 7bgkvnxb 8fbpsfdg 9dlouzbghkm - 620 - begqtwdhp 1hmnprfdm 2acfhoeop 3bekltvi 4agkybefio 5a  
coquahmo 6bglorwyik 7aknswzem 8ahlvzceo 9bilmqcdhikl - 630 - mnybego 1bfinugop 2ertfhp 3efgnptwzbfimo  
4dhiqlabeknp 5doryfklp 6acegmtuybdlmo 7bdhlpszehnp 8bdkqrwxa 9acfsufo - 640 - cfhopabhm 1dkvwxdkl 2gkn  
pdgi 3abhlop 4boqvwilp 5fwbfgm 6adfilozabgn 7dgtahin 8eguwdfgm 9ahilpvc - 650 - belmowadlp 1aehkmrtbde  
gi 2bfqxbm 3dklwxhdn 4cfhkptugo 5hipqsvxaghk 6dgmotvxkfp 7acfglmnzfl 8dlnpqsvbhp 9ilmvxahin - 660 - m  
prtbdil 1cdpzcegmn 2iqdn 3apstyzeft 4bfnuabmp 5dkmorwcdkn 6agmfwio 7afioquvamo 8dirvwafil 9hknstuyef -  
670 - voluxzeg 1himqrwxchl 2efghntzdel 3cqsucmp 4deilmotwfhlnp 5eknptybfgl 6achnvgp 7dkorvxyafil 8achmf  
wbi 9alnoqfzbgn - 680 - krwydkp 1ertzd 2cdfhlqzgh 3emvdlp 4pftuefilm 5acinqsbho 6eoqycikp 7efmpsubdfm  
8oiaghmop 9bdgltan - 690 - aehmnzbe 1dhlsuvamno 2bioqtxya 3fgprdgil 4ablnqxabehmop 5qxn 6kwzfm 7dpqz  
70 1bg 8dilmotxyfp 9emnyemo - 700 - abdhqvzbgp 1egikqrxfhip 2ackmprudlo 3dfilveghn 4kmqvxyhkl 5acmpudeil 6o  
hilqxabk 7dgmwcin 8krfwbfgm 9afhipuvxeghmop - 710 - ekqychl 1hmstwbzdm 2dopuxzakn 3glmoqrtyaklp 4ef  
hmpfwdegi 5blpuvacno 6otadnp 7cefhrzfl 8cdipfuzbghk 9dgortadiknp - 720 - hntweflm 1abdqbce 2eiklvwcdfk  
3cfprwbg 4inzbcno 5botvyf 6fgkstuzdegl 7achloqabo 8gkycdiln 9aceknpuwyefo - 730 - dfhpqfzgm 1ilorhl 2pdyf  
m 3bdlnvzacgk 4giowydfi 5gkmtwzdilo 6cdfpfveglnp 7dilvxd 8hktuybfio 9cqvzep - 740 - giltvdfnp 1anfuyzbffo  
2abdhnxgkno 3egkwxfhi 4efhruwdl 5cdilnvzbeke 6dekwp 7cghmntydzgo 8ilnfxzcekmo 9bkmory - 750 - efgmprgi  
1douzbchn 2degklqwfcl 3ckmptwbflm 4abcnpg 5beiloqrwxfi 6eghmwygil 7bedinsbehkno 8iowci 9fnpbrgilmo -  
760 - abnqghmp 1bkmtxya 2cfnsuwyzil 3bofbcgk 4bikradhkn 5cehprfzgo 6bcnuvbego 7gowxdfh 8ahmnpidei 9cfhl  
uzam - 770 - bgkmrtchn 1aprwbdm 2afpqfuzabegm 3gkqtvycti 4ghntdfglm 5dfilsvxacekm 6egirtyhklp 7efhknstze  
io 8afquabnp 9movcfip - 780 - cgnruyg 1aipqxabegmn 2bmoryfi 3acegrtb 4alpqbgko 5degqrwcdfin 6ckluwmo 7cfip  
ghkmo 8bdkqwxfln 9ahmrfgl - 790 - nqlak 1beoqvwyhkn 2amnyegi 3adhopuxbgnop 4eklovhn 5npuyzgi 6adfil  
80 noxckmnp 7xf 8aefgkmrtzbel 9abcqfbegkop - 800 - iqvdf 1certuwbeft 2cdinoqvaegk 3dgmrtack 4cmtudelm 5fl  
pxbp 6beilmvxcdfhik 7afptuzfgil 8bdhnouao 9degkmowal - 810 - afghknrtudfio 1ahnxachop 2bkoqhinp 3cnfuywde  
4adiqxa 5dglotvwyac 6ehmptubdfi 7abelpuzcep 8gqtweip 9ahmnpfwbde - 820 - bedfinpqvbe 1mqrwadiln 2cghknpr  
zbg 3acqvzckn 4ixacdiknp 5cmnuyzbdm 6adhovxp 7iklmxyahknp 8efptilm 9bfqaho - 830 - bdktyadfln 1agpf 2be  
hilnofxcep 3eqrxilp 4acgknpfuydfo 5pxzagmo 6dgiqrwal 7aghpfzem 8fofxcem 9beioqck - 840 - egtwyzbl 1ilnpsa  
ghmp 2eikmtap 3cfghtufm 4acinpfluxabhp 5bdikovyl 6mnuwyemo 7afhnvzkn 8delxyed 9fhtzbfgm - 850 - dilpu  
zhkmm 1bdiotynp 2afkmpftyo 3bfnozach 4elmqvfwck 5fgknudfo 6achilqzbecm 7begovhn 8ghmnpftwl 9bdnomp -  
860 - eglmefi 1efgnpfdgio 2adqluxackmno 3ekrvwcdhlp 4fkrwzbfm 5adnoqzegk 6lmfln 7ehmfwbdi 8fpfsvzc 9k  
lmqvychn - 870 - efprudi 1bchiouvghk 2eikvwxfhnp 3fgkpyi 4bcilofehm 5degkqrwxyikl 6fkmmrfudgimo 7ahiqsvb  
no 8beowcfhk 9egnfyzefm - 880 - abchpcgn 1gmc 2ekpryzl 3ailpqgo 4ekladnp 5fklm 6cdfvxzabh 7imrtdlnp 8ace  
fghfwzbeio 9bhpveno - 890 - bdgvrxdik 1acfhkpw 2bdflnpcen 3bgmadhkn 4fgnfyf 5afhilozabmop 6belowxy  
90 cdhl 7wybgio 8dhioqubmop 9dgkqyafil - 900 - aceghknwybdel 1ciluaekmop 2bglqtadh 3fwydego 4abcpcqehp 5ekl  
motip 6ghnrtyfgo 7bdnukn 8bikortak 9acegntdflo - 910 - dhoghop 1ilmqrwyannp 2mpfwwimo 3bdnbcehkn 4ekow  
xyannp 5mrdefim 6inqem 7beowxdh 8acefkprbe 9diqfvzbc - 920 - bdorvfi 1cehwefgl 2bhilopsvco 3egotwxacfhi  
4afhnzbg 5bcvxbchn 6klrtxcdhinp 7cgpwzbgm 8adinuzabnp 9ilrvxykn - 930 - atwyfio 1bfnqvckp 2mqrv  
wxahik 3chkmpdfi 4chlaghkmno 5bkmwxyah 6acmpi 7abhqzak 8delvdikn 9aefkprubdgio - 940 - cdouxagp 1degiv  
wo 2achmwzem 3cdilnsvgop 4iloqrtafi 5fmrstyzeio 6bfuivkn 7dkltdfi 8ehkprtuel 9bcouvznp - 950 - bdiladikn  
1acnfwflm 2bfhnoqzbeqk 3eglqcin 4afhmrfzbdgi 5clnquzcho 6bgimov 7acfgknpftelm 8abfhxchm 9egkmtxydkl -  
960 - afgfwygo 1puxbghp 2eikoyachln 3kmpw 4ahnsvxzcgkno 5glwxbkl 6afzbd 7bnpqxacgkop 8iktvx 9cenw  
yeglo - 970 - abciqeh 1bglvxyedf 2fnryi 3ablbcgk 4krmwyap 5aektuwzdfgi 6cdfvek 7emdfkl 8fmrstuyzdfgi 9  
lnzbek - 980 - degtrhx 1akmfg 2cfilvxcop 3giklctfkl 4cehmfwybegm 5chofzaeo 6ilqracl 7efgmnppeg 8acdpubckeno  
p 9delmqtwahnp - 990 - fgkrwgil 1bdhnopquehm 2korvxyfl 3gtubdfmo 4adnqcko 5klmvyadh 6cekfzbg 7cdfhioz  
bkn 8dgkmoqdyfh 9ackmzdlm.

Anmerkung. Man bemerke, ob ein Buchstabe im ersten oder zweiten Alphabet vorkommt (siehe Vorrede, und den Text p. 12).  
Auf der vorigen Seite steht cursiv (oder schieffstehend) 4cfhl, dazu gehören die Zahlen des andern Alphabets 69, 77, 81, 89.  
Weiter ist keine Zweideutigkeit, denn auf dieser Seite Zeile 6 von unten in: bgimov sieht man aus v, das alle zum ersten Alpha-  
bet gehören.

# A n h a n g.

## In Decimaltheilen des Thalers geben

Groschen	Groschen	Groschen	Groschen	Pfennige	Pfennige	Pfennige
1 0.0416..	7 0.2916..	13 0.5416..	19 0.7916	1 0.003472..	7 0.024305..	13 0.001157404 etc.
2 0.083..	8 0.3..	14 0.583..	20 0.83..	2 0.00694..	8 0.027..	14 0.002314808 etc.
3 0.125	9 0.375	15 0.625	21 0.875	3 0.010416..	9 0.031249..	15 0.003472212 etc.
4 0.16..	10 0.416..	16 0.66..	22 0.916..	4 0.0138..	10 0.03472..	16 0.004629616 etc.
5 0.2083..	11 0.4583..	17 0.7083	23 0.9583..	5 0.017361..	11 0.038194..	17 0.005785020 etc.
6 0.25	12 0.5	18 0.75	24 1	6 0.02083..	12 0.041666..	18 0.006944024 etc.

Anmerkung. Die Punkte bedeuten, das die letzte Zahl ins Unendliche fortläuft. (Siehe im Text S. 19 u. 20.)



II.										III.										IV.										V.										VI.										VII.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
a	g	l	n	r	t	x	δ	φ	μ	a	g	l	n	r	t	a	g	l	n	a	g	l	a	g	a	g	a	g	a	g	a	g	a	g																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
bnf4	af	it	7w	f7	af	ft	wφ	dl	3β	9v	if	εμ	ma	f8	sv	hio	ha	ig	fl	kira	m4	lm	fi	on	w7	kr	hc	iv	sh	k7	rs	mw	ma	fl	vβ	w	hf	hg	iy	tβ	ka	rg	m5	mδ	fr	vt	rμ	lv	hi	fn	t7	kg	xy	m7	ml	fy	v	w	f	mx	hn	l4	tf	kl	ηβ	mamp	fx	5l	vc	m7	ht	fh	ui	kn	η4	minn	fb	5w	v5	nb	hv	fw	uf	kr	vt	ml	nβ	fd	5c	vt	nβ	hb	lw	v5	kt	vh	mr	nt	fh	5f	vn	nd	hf	lr	vq	kr	zl	m3	nw	fo	6x	d	og	hh	lf	wn	kd	ze	my	ol	fq	6μ	aa	oh	hm	mi	wg	kf	zr	mb	ow	fw	7d	ar	pl	ho	mx	wd	km	ai	md	oc	ga	6g	bl	qn	hf	ma	xx	kq	ap	mh	of	gc	7v	b	q	w	hy	m	fx	o	kf	aa	mopx	gg	77	bb	qq	ia	ng	yl	kw	ad	mqq	μ	gi	7n	b	yr	r	ign	7	y	b	ky	af	mwpd	gn	7q	c	s	r	t	il	nb	lc	bv	na	gg	gt	9η	d	i	j	5	inn	q	li	bn	nc	qv	gv	95	d	φ	fr	iro	t	ll	bb	ng	q7	gβ	90	d	w	t	a	it	ey	lr	ct	ni	qn	gφ	ar	e4	uc	ix	ol	lv	c5	nn	qq	gη	aφ	en	ud	i	δ	pc	lx	cl	nr	ry	gμ	ai	fg	uf	i	φ	pr	lβ	co	nr	r5	gω	ar	fδ	vg	i	π	pi	lδ	dc	nβ	ro	gs	ba	fx	vi	i4	pm	ly	dφ	nφ	fr	g7	bs	gw	wμ	i	s	qa	lw	dr	nη	jφ	ga	bg	gl	wn	i	5	qδ	l4	dm	nμ	fi	gg	by	hβ	x4	i7	qs	l5	eδ	nw	/r	gl	cβ	hv	xf	ia	qv	la	eg	ns	ta	gn	e4	hf	yt	ii	rn	lc	ev	n7	ts	gr	et	iμ	yv	il	rβ	lg	ey	na	tβ	gt	ch	ii	yw	ir	rt	li	fn	ng	ty	gr	dl	ke	iv	rw	lf	n4	f4	nl	uβ	gd	bc	ki	ir	sl	lt	fh	nn	u4	gf	dr	kq	ib	fw	lv	fw	nr	ut	gm	ei	lg	i	δ	fc	lb	gw	nt	uh	gq	εμ	ma	i	h	ff	lf	gr	nr	vl	gφ	ea	mx	i	o	tx	lh	gf	nd	vc	gw	ed	mr	i	q	tμ	lm	hi	nf	vr	gy	fe	mo	i	w	t	l	o	hx	nm	wi	he	fv	nη	ka	ug	l	sha	ng	wμ	hi	fn	ny	ke	uv	l	y	h	f	nf	wa	hl	fb	ov	kg	u7	ma	ig	mw	d	hr	gt	om	ki	un	m	gi	7	ny	w	f	hv	g5	pφ	kn	uq	m	lib	oc	xv	hx	gl	pc	ke	vη	m	ni	q	oi	xn	hβ	g0	pw	kv	v5	m	r	kt	ol	xb	hδ	bc	qt	kβ	vo	m	t	ky	or	yt	hη	hφ	qn	kφ	wr	m	x	kl	ov	y5	hw	hr	rδ	kη	wφ	m	δ	lc	ox	yl	h4	hm	ra	kμ	wi	m	φ	lr	oβ	y0	h5	iδ	fr	kω	wr	m	μ	li

III.

Tafel aller Factoren der durch 2, 3, 5, untheilbaren Zahlen von 1 bis 10000.

Bedeutung der Buchstaben.

01 03 07 09 11 13 17 19 21 23 27 29 31 33 37 39 41 43 47 49 51 53 57 59 61 63 67 69 71 73 77 79 81 83 87 89 91 93 97 99  
a b c d e f g h i k l m n φ p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i l m n o p

u7.7f7.11m7.13 — 1 — h7.17i11.11φ7.19f11.13z7.23c13.13f11.17 — 2 — b7.29d11.19g7.31i13.17t13.19w11.23y7.37

f7.41l17.17p13.23 — 3 — a7.43h11.29k17.19m7.47r11.31f7.7.49z19.19d7.53f13.29m17.23 — 4 — b13.31c11.37f7.59l7.

561p19.23v11.41c7.67e11.43h13.37n17.29o7.71 — 5 — e7.73g11.47l17.31m23.23φ13.41q7.7.11.77.49v19.29w7.79y13.43

h7.83i11.53l19.31 — 6 — e13.47k7.89m17.37p7.7.13.91.49u11.59b23.29d11.61g7.97l13.53o17.41 — 7 — b19.37c7.101f23.

31.17.103n17.43p11.67u7.107a7.109b13.59g19.41h11.71m7.113n13.61p17.47 — 8 — b11.73g19.43φ7.7.17.119.49r29.29t7.

11.11.121.77v23.37c11.79d13.67l7.127n19.47p29.31 — 9 — a17.53f11.83g7.131k13.71n7.7.19.133.49f23.41u13.73y7.137

10z31.31e7.139g11.89l23.43 — 10 — a7.11.13.143.91.77b17.59c19.53l13.79p17.61f7.149x7.151b11.97e29.37g13.83h23.47p7.

157 — 11 — e11.101i19.59l7.7.23.161.49φ11.103q17.67r7.163t31.37x13.89y19.61c7.167f11.107i7.13.13.169.91l29.41p11.

01 03 07 09 11 13 17 19 21 23 27 29 31 33 37 39 41 43 47 49 51 53 57 59 61 63 67 69 71 73 77 79 81 83 87 89 91 93 97 99  
a b c d e f g h i k l m n o p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i k l m n o p  
109 - 12 - c 17.71 e 7.173 h 23.53 r 17.73 f i l. i i 3 t 29.43 w 7.179 z 13.97 b 7.181 d 31.41 e 19.67 - 13 - d 7.11.17.187.119.77 f 13.101  
n 11.11.11.121 q 31.43 p 7.191 q 13.103 f 17.79 u 19.71 v 7.193 x 23.59 a 29.47 c 37.37 g 7.197 f 19.73 m 13.107 n 7.199 o 11.127 - 14 -  
b 23.61 e 17.83 g 13.109 i 7.29.203.49 r 11.131 x 31.47 a 7.11.19.209.133.77 c 13.113 f 7.211 - 15 - a 19.79 e 11.137 f 17.89 g 37.41 h 7.  
7.31.217.49 m 11.139 p 29.53 r 23.67 t 7.13.17.221.119.91 z 7.223 e 11.11.13.143.121 f 19.83 f 7.227 m 37.43 - 16 - b 7.229 n 7.233 q 23.  
71 q 13.149 f 31.53 u 17.97 v 13.127 z 11.151 e 7.239 g 23.73 h 41.41 f 7.241 m 19.89 - 17 - b 13.131 e 29.59 g 17.101 d 11.157 m 7.13.19.  
247.133.91 q 37.47 v 17.103 x 7.231 a 41.43 c 29.61 d 7.11.23.253.161.77 h 13.137. n 11.163 p 7.257 - 18 - c 13.139 f 7.7.37.259.49 g 23.  
29 h 17.107 m 31.59 p 11.167 f 7.263 f 19.97 u 43.43 w 17.109 y 11.18.13.169.143 f 7.269 m 31.61 o 7.271 - 19 - b 11.173 d 23.83 h 19.  
101 i 17.113 l 41.47 p 13.149 q 7.277 f 29.67 x 19.103 z 37.53 a 13.151 b 7.281 c 11.179 h 7.283 m 11.181 - 20 - d 7.7.41.287.49 i 43.47  
k 7.17.17.289.119 q 19.107 r 13.157 t 23.89 v 7.293 x 11.11.17.187.121 y 29.71 d 19.109 f 31.67 n 7.13.23.299.161.91 - 21 - a 11.191 c 7.7.  
43.301.49 g 29.73 h 13.163 k 11.193 t 19.113 u 7.307 y 17.127 b 11.197 d 13.167 e 41.53 f 7.311 f 37.59 l 11.199 m 7.313 o 13.13.13.169  
- 22 - a 31.71. d 47.47 h 7.317 i 17.131 n 23.97 q 7.11.29.319.203.77 u 13.173 x 37.61 z 7.17.19.323. 133. 119 a 31.73 g 43.53 m 29.79  
p 11.19.209.121 - 23 - b 7.7.47.329.49 g 7.331 i 11.211 k 23.101 l 13.179 m 17.137 w 13.181 y 7.337 a 17.139 c 23.163 f 7.11.31.341.  
217.77 - 24 - a 7.7.7.343 c 29.83 f 19.127 h 41.59 m 7.347 n 11.13.17.221.187.143 f 7.349 u 31.79 w 11.223 z 23.107 d 7.353 g 37.67  
f 13.191 f 19.131 m 47.53 o 11.227 - 25 - a 41.61 c 23.109 d 13.193 f 7.359 h 11.229 l 7.19.19.361.133 q 17.149 p 43.59 z 13.197 a 11.  
233 b 17.151 c 7.367 e 31.83 h 29.89 f 13.199 o 7.7.53.371.49 p 23.113 - 26 - b 19.137 e 7.373 k 43.61 l 37.71 m 11.239 q 7.13.29.377.203.  
91 r 19.139 v 11.241 w 7.379 c 17.157 h 7.383 - 27 - a 37.73 g 11.13.19.247.209.143 k 7.389 p 7.17.23.391.161.119 f 13.211 t 41.67 y 31.  
89 z 11.251 d 17.103 e 47.59 g 7.397 i 11.11.23.253.121 - 28 - c 7.401 d 53.53 f 29.97 i 7.13.31.403.217.91 l 11.257 n 19.149 q 17.167  
u 7.11.37.407.259.77 a 7.409 b 47.61 c 19.151 e 13.13.17.221.169 h 43.67 m 7.7.59.413.49 n 11.263 p 13.223 - 29 - e 41.71 i 23.127 k 37.  
79 m 29.101 q 7.419 r 17.173 t 7.421 v 13.227 y 11.269 f 13.229 h 11.271 f 19.157 f 29.103 f 7.7.61.427.49 n 41.73 - 30 - c 31.97 f 23.131  
g 7.431 m 13.233 n 7.433 f 17.179 t 11.277 w 43.71 y 7.19.23.437.161.133 d 37.83 e 7.439 f 17.181 m 11.281 o 19.163 - 31 - a 7.443 b 29.  
107 c 13.239 f 11.283 l 53.59 n 31.101 q 13.241 q 43.73 f 7.449 u 47.67 v 23.137 x 7.11.41.451.287.77 z 29.109 e 19.167 g 11.17.17.289.187  
n 31.103 o 23.139 p 7.457 - 32 - e 13.13.19.247.169 k 11.293 l 7.461 q 53.61 q 41.79 r 7.463 t 17.191 a 13.251 c 7.467 f 29.113 h 17.193 i 7.  
7.67.469.49 f 19.173 l 11.13.23.299.253.143 n 37.89 - 33 - e 7.11.43.473.801.77 g 31.107 p 47.71 r 13.257 u 17.197 w 7.479 b 7.13.37.  
48 l 259.91 f 11.307 g 31.109 i 17.199 o 43.79 - 34 - a 19.179 b 41.83 d 7.487 h 13.263 i 11.311 t 23.149 n 47.73 p 7.491 q 19.181 f 11.  
313 v 7.17.29.493.263.119 e 23.151 g 7.7.71.497.49 h 59.59 f 11.317 n 7.499 o 13.269 - 35 - b 31.113 d 11.11.29.319.121 i 7.503 k 13.271  
v 63.67 w 11.17.19.323.209.187 a 7.509 c 43.83 f 7.7.73.511.49 f 17.211 f 37.97 p 51.61 - 36 - a 13.277 e 23.157 h 7.11.47.517.329.77  
m 19.191 r 11.331 t 7.521 u 41.89 w 13.281 z 7.523 b 19.193 g 13.283 i 29.127 l 7.17.31.527.217.119 - 37 - b 7.23.23.529.161 c 11.337  
f 47.79 i 61.61 n 7.13.41.533.287.91 p 37.101 f 19.197 u 23.163 v 11.11.31.341.121 x 13.17.17.289.221 a 53.71 e 7.7.7.11.539.343 h 19.199  
f 7.541 m 17.223 p 29.131 - 38 - d 13.293 e 37.103 g 11.347 l 43.89 m 7.547 q 11.349 r 23.167 x 7.19.29.551.203.133 v 17.227 c 53.73 d 7.7.  
79.553.49 f 11.353 f 13.13.23.299.109 n 17.229 p 7.557 - 39 - a 47.83 i 7.13.43.559.301.91 p 31.127 r 7.503 u 11.359 w 59.67 y 37.107  
z 17.283 b 11.19.19.361.209 e 29.137 f 41.97 g 23.173 i 7.569 m 13.307 o 7.571 - 40 - a 19.211 n 29.139 q 37.109 p 11.367 q 7.577 f 13.  
311 z 31.131 a 17.239 b 7.7.83.581.49 c 13.313 h 7.11.53.583.371.77 f 61.67 o 17.241 - 41 - b 11.373 d 7.587 g 23.179 i 13.317 k 7.19.31.  
589.217.133 r 41.101 t 11.13.29.377.319.143 v 7.593 a 23.181 c 11.379 d 43.97 h 37.113 i 47.89 f 53.79 l 50.71 n 7.599 p 13.17.19.3.3.247  
221 - 42 - c 7.601 f 11.383 k 41.103 p 19.223 l 31.137 u 7.607 b 17.251 f 7.13.47.611.529.91 g 11.389 m 7.613 - 43 - a 11.17.23.391.  
253.187 b 13.331 c 59.73 d 31.139 f 19.227 h 7.617 i 29.149 n 61.71 q 7.619 l 43.101 v 19.229 z 7.7.89.623.49 b 11.397 c 17.257 g 29.151  
h 13.337 k 41.107 n 23.191 p 53.83 - 44 - b 7.17.37.629.259.119 e 11.401 g 7.631 l 19.233 m 43.103 q 11.13.31.403.341.143 q 23.193  
w 61.73 y 7.7.7.13.637.343 c 41.109 d 17.263 f 11.11.37.407.121 f 7.641 l 67.67 p 11.409 - 45 - a 7.643 e 13.347 m 7.647 n 23.197 p 13.349  
19.239 f 7.11.59.649.413.77 w 29.157 y 47.97 d 7.653 e 17.269 f 23.199 g 19.241 l 13.353 - 46 - a 43.107 c 17.271 d 11.419 f 7.659  
h 31.149 l 7.661 n 13.421 q 41.113 z 59.79 b 13.359 c 7.23.29.667.203.161 h 31.151 f 41.159 n 13.19.19.361.247 o 7.11.61.671.427.  
77 p 37.127 - 47 - d 17.277 e 7.673 g 53.89 l 29.163 q 7.677 r 11.431 t 47.101 w 7.7.97.679.49 x 67.71 a 11.433 c 19.251 d 13.367 f 17.281  
h 7.683 - 48 - e 11.19.23.437.253.209 e 17.283 h 61.79 k 7.13.53.689.371.91 m 11.439 p 7.691 r 47.103 f 29.167 i 37.131 u 13.373 w 23.211  
y 43.113 b 31.157 e 11.443 g 7.17.41.697.287.119 i 19.257 m 67.730 59.83 - 49 - a 13.13.29.377.169 e 7.701 f 17.17.17.289 i 7.19.37.703.259.133  
l 13.379 q 11.449 u 7.7.101.707.49 z 11.11.41.451.121 a 7.709 g 13.383 h 17.293 i 23.221 m 7.23.31.713.217.161 o 19.263 - 50 - g 29.173  
l 11.457 m 47.107 q 7.719 r 71.71 t 7.7.103.721.49 w 31.163 x 13.389 a 61.83 c 37.137 b 11.461 i 13.17.23.391.299.221 f 7.727 n 11.463  
- 51 - e 19.269 g 7.17.43.731.301.119 k 47.109 m 23.223 n 7.733 p 11.467 r 53.97 f 37.139 u 19.271 y 7.11.67.737.469.77 z 31.397 e 7.  
739 f 31.167 i 71.73 m 29.179 - 52 - a 7.743 b 11.11.43.473.121 c 41.127 f 13.401 h 17.307 i 23.227 q 13.13.31.403.169 f 7.7.107.749.49  
u 29.181 v 59.89 x 7.751 a 19.277 b 23.229 c 11.479 f 17.311 m 11.13.37.481.407.143 n 67.79 p 7.757 - 53 - e 47.113 g 13.409 i 17.313  
l 7.761 m 73.73 q 19.281 r 7.7.763 w 53.101 x 11.487 y 23.233 a 31.173 c 7.13.59.767.413.91 d 41.131 f 19.283 i 7.769 l 17.317 - 54 - a 11.  
491 e 7.773 k 11.17.29.493.319.187 m 61.89 t 13.419 w 7.19.41.779.287.133 y 53.103 z 43.127 b 7.11.71.781.497.77 e 13.421 f 11.499 m 17.  
17.19.323.289 o 23.239 - 55 - d 7.787 f 37.149 q 11.503 p 7.7.113.791.49 q 29.191 f 23.241 u 31.179 v 7.13.61.793.427.91 z 67.83 b 19.  
293 g 7.797 f 37.151 n 7.17.47.799.329.119 o 29.193 p 11.509 - 56 - b 13.431 d 71.79 e 31.181 g 41.137 i 7.11.73.803.511.77 l 17.331  
m 13.433 q 43.131 a 7.809 d 53.107 f 7.811 h 13.19.23.437.299.247 f 11.11.47.517.121 p 41.139 - 57 - c 13.439 f 29.197 h 7.19.43.  
817.301.133 k 59.97 m 17.337 n 11.521 t 7.821 w 11.523 y 11.443 z 7.823 b 73.79 d 29.199 e 23.251 f 53.109 l 7.827 o 11.17.31.527.341.187  
- 58 - b 7.829 d 37.157 h 11.23.23.529.253 n 7.7.7.17.833.343 q 19.307 p 13.449 a 11.13.41.533.451.143 e 7.839 f 7.29.29.841.203 m 43.  
137 n 71.83 p 17.347 - 59 - d 19.311 e 23.257 g 61.97 i 31.191 m 7.7.11.11.847.539 q 17.349 r 13.457 l 19.313 v 11.541 x 7.23.37.851.259.  
161 y 59.101 a 67.89 c 47.127 d 7.853 f 43.139 i 31.193 l 53.113 n 13.461 p 7.857 - 60 - a 17.353 f 7.859 g 11.547 h 13.463 k 19.317 n 37.  
163 r 7.863 u 23.263 y 73.83 z 11.19.29.551.319.209 d 13.467 f 59.103 i 7.11.79.869.553.77 o 7.13.67.871.469.91 - 61 - b 17.359 c 31.  
197 d 41.149 h 29.211 l 11.557 p 17.19.19.361.323 q 7.877 u 11.13.43.559.473.143 x 47.131 z 61.101 b 7.881 c 31.199 g 37.167 h 7.883 f 23.  
269 m 41.151 n 11.563 - 62 - d 7.887 k 7.7.127.889.49 l 13.479 q 23.271 q 17.367 r 79.79 v 7.19.47.893.329.133 w 13.13.37.481.169 y 11.569  
h 11.571 i 61.103 l 19.331 n 7.29.31.899.217.203 - 63 - c 7.17.53.901.371.119 f 59.107 h 71.89 n 13.487 r 17.373 t 11.577 u 7.907 d 23.277 f 7.  
911 i 13.491 m 7.11.83.913.581.77 - 64 - a 37.173 b 19.337 c 43.149 d 13.17.29.493.377.221 f 11.11.53.583.121 h 7.7.131.917.49 n 59.  
109 q 7.919 p 41.157 q 47.137 f 17.379 x 11.587 z 7.13.71.923.497.91 a 23.281 b 29.223 g 11.19.31.589.341.209 f 13.499 n 43.151 o 73.89  
p 67.97 - 65 - b 7.929 d 23.283 e 17.383 g 7.7.7.19.931.343 k 11.593 l 61.107 q 47.139 q 13.503 r 31.211 x 79.83 y 7.937 i 29.227 f 7.941  
l 13.599 n 19.347 - 66 - a 7.23.41.943.287.161 e 11.601 f 17.389 g 13.509 k 37.179 m 7.947 n 19.349 r 29.229 f 7.13.73.949.511.91 t 17.  
17.23.391.289 u 61.109 b 59.113 d 7.953 f 11.607 i 41.163 o 37.181 - 67 - c 19.353 f 7.7.137.959.49 i 11.13.47.611.517.143 l 7.31.31.961.  
217 n 53.127 q 23.293 f 11.613 u 17.397 v 43.157 x 29.233 b 67.101 c 7.967 e 13.521 f 11.617 o 7.971 p 13.523 - 68 - d 11.619 e 7.7.139.  
973.49 g 17.401 i 19.359 q 7.977 t 41.167 v 13.17.31.527.403.221 w 7.11.89.979.623.77 y 19.19.361 f 13.23.23.529.299 h 7.983 f 71.971 83.83  
n 61.113 - 69 - a 67.103 f 31.223 h 11.17.37.629.407.187 k 7.23.43.989.301.161 m 13.13.41.533.169 n 29.239 p 7.991 r 11.631 f 53.131  
w 17.409 e 19.367 g 7.997 l 29.241 - 70 - b 47.149 c 7.7.11.13.1001.637.539 d 43.163 i 7.17.59.1003.413.119 n 79.89 q 13.541 p 31.227 70

15  
20  
25  
30  
35  
40  
45  
50  
55  
60  
65  
70







Datum der Entleihung bitte hier einstempeln!

df - db - 001857

SLUB DRESDEN



3 1701958

(204) 76 162/

Mass. 524

