I. Geometrische Analysis nach der Methode der Griechen. Von Professor Rogg.

II. Phonologische Erläuterungen.

Von Rektor Wocher.

Einladungsschrift

zur

Feier des Geburtsfestes Sr. Maj. des Königs

Wilhelm von Württemberg,

beim Schlusse des Studienjahrs am kön. Gymnasium zu Ehingen

1 8 4 7.

Im Anhang: **Schulnachrichten.**

Stuttgart und Ulm.
Gedruckt in der Guttenberg'schen und Wagner'schen Buchdruckerei.

Elemente

der

geometrischen Analysis.

Einleitung.

Die Analysis ist die Methode, welche eine gesuchte Sache als gefunden ansieht und dann von Folgerung zu Folgerung so lange fortschreitet, bis man sie als wahr, oder als unbestimmt, oder die Hypothese als mit einem Widerspruch behaftet erkennt. Sie ist das Instrument der Erfindung und im Wesentlichen nicht verschieden von demjenigen Verfahren, welches in der Algebra angewendet wird, um aus den Bedingungen der Aufgabe die Fundamentalgleichung herzustellen. Sie ist unentbehrlich, sobald es sich um ein methodisches Verfahren handelt die Regeln anzugeben, nach welchen sich ein vorgelegtes Problem auflösen läßt. Wie daher auch dieses beschaffen seyn mag, so hebt die Analysis damit an, daß die gesuchte Sache als gefunden angenommen wird. Um dabei der Beschränktheit der Phantasie zu Hülfe zu kommen, so entwirft man nach dem Augenmaß eine provisorische Zeichnung, welche das Gegebene und Gesuchte dem Auge darstellt. Man beginnt sodann, nicht selten unter Zuziehung gewisser Hülfslinien, den Zusammenhang der gegebenen und gesuchten Größen zu untersuchen. Dieses Geschäft wird so lange fortgesetzt bis man erkennt: ob der Punkt, die Linie, überhaupt diejenige Größe gefunden werden könne, durch welche die Aufgabe als aufgelöst anzusehen ist; ob die Aufgabe genügend bestimmt sey, oder welche genauere Bestimmung sie etwa bedürfe; ob die Auflösung nur auf eine oder mehrere Arten möglich sey u. s. w. Sey z. B. (Fig. A) über einer als Hypotenuse gegebenen Geraden AB ein rechtwinkliges Dreieck ABC so zu beschreiben, daß die Schenkelsumme einer gegebenen Geraden S gleich werde, so möge ABC das gesuchte Dreieck vorstellen. Damit die gegebene Linie S in der Zeichnung erscheine, so werde einer der beiden Schenkel, etwa BC, um den andern verlängert, nämlich CD = CA gemacht, so ergibt sich BD = S (p. h.). Zieht man von A nach D eine Gerade, so entsteht ein Dreieck ABD durch welches augenscheinlich das gesuchte ABC sich bestimmt, indem AC senkrecht auf BD steht. Es kommt daher darauf an, über AB ein Dreieck ABD so zu beschreiben, daß einerseits BD = S wird, und anderseits der von A auf BD gezogene Perpendikel AC die Seite BD in zwei Segmente zerlegt, von welchen das eine CD dem Perpendikel CA gleich ist. Um ein schiefwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck beschreiben zu können, müssen drei von einander unabhängige Stücke gegeben seyn. Wir werden also das in Rede stehende Dreieck ABD erst dann zu construiren im Stande seyn, wenn außer AB und BD (= S) die dritte Seite AD, oder einer der drei Winkel des Dreiecks, gegeben. Es ist nicht abzusehen, wie AD ohne einen Dreieckwinkel soll gefunden werden können. Die Möglichkeit der Auflösung hängt somit davon ab, ob einer der Dreieckwinkel bestimmbar ist oder nicht. Bedenken wir, daß ACB ein rechter Winkel (p. h.) und CD = CA (p. c.) ist, so ist ADB = $\frac{1}{2}$ ACB (IV, 30, Zus. 2) *), d. h. es ist ADB ein Halbrechter und somit Dreieck ABD gegeben (VIII, 17); folglich auch der Scheitelpunkt C, d. h. △ABC, welches die gesuchte Größe ist. — Uebrigens sieht man ohne Mühe ein, daß es noch ein zweites Dreieck gibt, welches den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet, wenn der Umfang des Kreises um B den Bogen des Abschnitts, welcher den Winkel D = $\frac{1}{2}$ R faßt, schneidet; und daß die Aufgabe als unmöglich erscheint, wenn S nicht größer als AB seyn sollte.

Das Umgekehrte der Analysis ist die Synthesis, indem sie von einer gegebenen Sache ausgeht und von Folgerung zu Folgerung so lange fortschreitet, bis das Gesuchte sich darstellt. Es kommt bei ihr in der Geometrie darauf an, die einzelnen Stücke in derjenigen Ordnung zu construiren, wie (nach dem Ergebniß der Analysis) das eine aus dem andern folgt. Dabei darf man freilich nicht außer Acht lassen, daß es die Natur eines guten mathematischen Vortrags mit sich bringt, daß die Synthesis möglichst kurz, einfach und zierlich durchzuführen ist.

*) Rogg's Elemente der Geometrie, Buch IV, Satz 30, Zus. 2.

Erstes Buch.

Aufgaben ohne Verhältnisse.

Erklärungen.

1. **Gegebene Größen** einer Aufgabe nennt man solche, welche durch den Inhalt der Aufgabe unmittelbar gegeben sind, oder aus Sätzen, welche als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, sich finden lassen.

2. Eine gerade Linie heißt der Lage nach gegeben, wenn die Richtung, welche sie hält, gegeben ist;

3. Der Größe nach, wenn ihre Länge, nicht aber ihre Richtung, gegeben ist;

4. Der Lage und Größe nach, wenn ihre Länge und Richtung gegeben ist.

5. Ein Kreis heißt der Größe nach gegeben, wenn sein Halbmesser der Größe nach gegeben ist;

6. Der Lage und Größe nach, wenn sein Mittelpunkt gegeben und überdieß sein Halbmesser der Größe nach.

7. Linien, Punkte, Winkel, Figuren in einer fixen Lage nennt man gegeben, wenn sie durch den Inhalt der Aufgabe unmittelbar gegeben sind, oder aber aus Sätzen, die als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, sich finden lassen.

8. Eine Linie, welche einen gesuchten Punkt enthält, heißt der **geometrische Ort** (auch schlechthin Ort) desselben.

Anmerkung. Der Kürze zu lieb sagt man gewöhnlich (schlechthin): **gegeben**, statt: **der Lage und Größe nach gegeben**.

1. Aufgabe.

Innerhalb eines gegebenen Dreiecks, ABC, einen Punkt so zu bestimmen, daß die drei von ihm aus nach den Winkelpunkten gezogenen Geraden die Figur in drei gleiche Dreiecke zerlegen.

Analysis. Sey D der gesuchte Punkt, AB in drei gleiche Theile zerlegt, hierauf CE, CF, DA, DB u. DC gezogen, so hat man $\triangle$ ACE = $\triangle$ ECF = $\triangle$ FCB (V, 7); folglich $\triangle$ ACD = $\triangle$ ACE und $\triangle$ BCD = $\triangle$ FCB (p. h.). Diese Bedingungen finden statt, wenn ED mit AC und FD mit BC parallel ist (V, 7). Nun sind die Punkte E und F gegeben (VIII, 19); folglich auch Punkt D (IV, 26).

Synthesis. Man zerlege eine der drei Seiten des Dreiecks, etwa AB, in drei gleiche Theile, ziehe ED mit AC und FD mit BC parallel, so ist D der gesuchte Punkt.

Denn zieht man DA, DB u. DC, ferner EC u. FC, so ist $\triangle$ ACE = $\triangle$ ACD u. $\triangle$ BCF = $\triangle$ BCD (V, 7), und somit $\triangle$ ECF = $\triangle$ ABD (II). Aber $\triangle$ ACE = $\triangle$ ECF = $\triangle$ BCF (V, 7); folglich auch $\triangle$ ACD = $\triangle$ ABD = $\triangle$ BCD, wzbw.

2. Aufgabe.

Innerhalb eines gegebenen Dreiecks, ABC, einen Punkt so zu bestimmen, daß die drei von ihm aus nach den Winkelpunkten gezogenen Geraden an ihrem Anfangspunkt gleiche Winkel machen.

Analysis. Sey D der gesuchte Punkt, DA, DB und DC gezogen, so hat man ADB = BDC = CDA (p. h.); folglich jeder dieser drei Winkel $^4/_3$ von Einem Rechten (IV, 18 Zus.). Sey um das Dreieck ABD ein Kreis beschrieben, so ist der Winkel des größern Abschnitts $^2/_3$ R (VI, 31), d. h. D liegt im Umfang eines Kreises, welcher um ein gleichseitiges Dreieck beschrieben ist, und das die gegebene Seite AB zur Seite hat; der Umfang dieses Kreises ist somit gegeben (IV, 7, und VI, 30). Aus den nämlichen Gründen liegt D im Umfang eines zweiten Kreises, welcher durch die Winkelpunkte eines gleichseitigen Dreiecks gelegt ist, das eine andere Seite, etwa BC, zur Grundlinie hat. Der gesuchte Punkt ist somit gegeben.

Synthesis. Man construire über AB und BC gleichseitige Dreiecke und beschreibe um jedes einen Kreis; der Durchschnitt ihrer Umfänge, D, ist der gesuchte Punkt.

Denn es ist AEB = $^2/_3$ R (IV, 30, Zus. 4); folglich ADB = $^4/_3$ R (VI, 30). Aus den nämlichen Gründen ist BDC = $^4/_3$ R. Es ist aber ADB + BDC + CDA = 4 R (IV, 18 Zus.) = $^{12}/_3$ R (II, 4, Zus. 4); folglich CDA = $^{12}/_3$ R — $^8/_3$ R (II) = $^4/_3$ R (II, 14, Zus.), d. h. es ist ADB = BDC = CDA (V), wzbw.

Anmerkung. Da die Umfänge zweier Kreise einander in mehr nicht als zwei Punkten schneiden können (VI, 16), so ist, da beide Kreislinien durch den Winkelpunkt B des gegebenen Dreiecks gehen, der Durchschnitt D der einzige Punkt, welcher den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet.

3. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis eine Sehne so zu legen, daß sie einer gegebenen Geraden, K, gleich werde, und ihre Richtung durch einen gegebenen Punkt', P, gehe.

Analysis. Sey AB die gesuchte Sehne und CD eine andere aber ihr gleiche. Sey M der Mittelpunkt des Kreises, ME und MF auf AB und CD senkrecht gezogen, so sind diese Lothe einander gleich (VI, 4), weßwegen ein Kreis um M mit MF beschrieben, die beiden Sehnen, AB, CD, berührt (VI, 9). Nun ist AB = K = CD (p. h.); folglich CD gegeben (VIII, 1), und somit auch MF (IV, 15). Demgemäß ist der Kreis, dessen Umfang die Sehne AB und CD berührt, der Lage und Größe nach gegeben, und somit auch der Punkt E (VI, 29), d. i. AB.

Synthesis. Man trage die gegebene Gerade K als Sehne in den Kreis, d. h. man mache CD = K und fälle auf sie die Senkrechte MF. Mit ihr beschreibe man um M einen Kreis und ziehe an denselben die Tangente PE. Diese schneide den Umfang des gegebenen Kreises in A und B, so ist AB die gesuchte Sehne.

Denn zieht man den Halbmesser ME, so steht dieser auf AB senkrecht (VI, 10) und ist gleich MF; folglich AB = CD (VI, 5). Aber K = CD (p. c.); folglich AB = K, wzbw.

Anmerkung. Eine andere Analyse dieser Aufgabe ist folgende: Sey (Fig. 3 b) AB die gesuchte Sehne und von P an den gegebenen Kreis eine Tangente gezogen, so hat man $PA \times PB = PC^2$ (VI, 35) $= (PB + BA) \times PB = PB^2 + BA \times PB$ (V, 16), oder, falls Punkt D die AB halbirt, $PC^2 = PB^2 + 2BD \times PB$. Hieraus $(PB + BD)^2 = PC^2 + BD^2$ (V, 18, Zus.), oder $PD^2 = PC^2 + BD^2$. Nun sind PC und BD gegebene Linien (indem $BD = \frac{1}{2}K$) (VI, 29); folglich PD gegeben (VIII, 9). Und da $PA = PD + DA = PD + \frac{1}{2}K$, so ist PA der Größe nach gegeben; folglich da Punkt D gegeben, Punkt A ebenfalls gegeben und somit auch die gesuchte Sehne AB.

Synthesis. Man ziehe von P an den Umfang des gegebenen Kreises eine Tangente PC, ferner durch den Berührungspunkt C eine Senkrechte CN. Man mache $CE = \frac{1}{2}K$, ziehe PE, verlängere sie um ein Stück $EF = EC$ und beschreibe um P mit PF einen Kreis. Die Peripherie desselben schneide den Umfang des gegebenen Kreises in A. Man ziehe PA, so ist AB die gesuchte Sehne.

Denn es ist $PE^2 = (PF - EF)^2 = PF^2 + EF^2 - 2EF \times PF$ (V, 19) $= PF^2 + EC^2 - K \times PF$; folglich $PE^2 - EC^2 = PF^2 - K \times PF$, d. i. $PC^2 = PF^2 - K \times PF$ (V, 23, Zus. 1) $= PA^2 - K \times PA$ (p. c.) $= PA \times (PA - K)$ (V, 17). Aber $PC^2 = PA \times PB$ (VI, 35); folglich $PA \times PB = PA \times (PA - K)$ und somit $PB = PA - K$ (V, 9, Zus.); folglich $PB + K = PA = PB + BA$, und somit $K = AB$, wzbw.

4. Aufgabe.

In einem gegebenen Kreis ein Dreieck so zu beschreiben, daß es mit einem gegebenen Dreieck, ABC, gleichwinklig werde.

Analysis. Sey $\triangle DEF$ das gesuchte, so ist $D = A$, $E = B$ und $F = C$ (p. h.); folglich, wenn die Gerade MN den Umfang des Kreises in D berührt, $MDF = E$ (VI, 33) $= B$ und $NDE = F = C$. Nun bringt es die Natur der Aufgabe mit sich, daß Punkt D auf dem Umfang des Kreises beliebig angenommen werden darf; die Sehnen DE und DF sind somit gegeben (VIII, 5), und folglich auch das gesuchte Dreieck.

Synthesis. Man nehme auf dem Umfang des Kreises einen beliebigen Punkt D, ziehe durch ihn eine Tangente, MN, mache $MDF = B$, $NDE = C$ und ziehe FE, so ist $\triangle DEF$ das gesuchte.

Denn es ist $MDF = B$ (p. c.) $= DEF$ und $NDE = C$ (p. c.) $= DFE$ (VI. 33); folglich $FDE = A$, und somit $\triangle DEF$ mit dem gegebenen $\triangle ABC$ gleichwinklig, wzbw.

5. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein gleichschenkliges Dreieck so zu beschreiben, daß der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises einer gegebenen Linie H gleich werde.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte, so liegt der Mittelpunkt M des einbeschriebenen Kreises in der Halbirungslinie des Winkels ACB (V, 5), folglich in der Senkrechten DC durch den Halbirungspunkt D der Linie AB (IV, 30, Zus. 1). Nun ist Punkt D gegeben (IV, 13); also auch die Richtung DC. Da MD auf AB senkrecht steht, so berührt der Kreis die AB in D; er ist folglich, weil DM = H, der Lage und Größe nach gegeben. Sey E der Berührungspunkt des Schenkels AC, so ist dieser gegeben (VI, 29); mithin auch der Scheitelpunkt C, d. h. der Durchschnitt der Richtungen DC und AE; folglich das gesuchte Dreieck gegeben.

Synthesis. Man halbire AB in D, stelle auf sie DC senkrecht, mache DM = H und beschreibe um M mit MD einen Kreis. An denselben ziehe man die Tangente AE und verlängere dieselbe. Sie treffe die Richtung der Senkrechten durch D in C. Man ziehe CB, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Denn offenbar ist ACD = BCD (IV, 35 u. 6); folglich, wenn man EM zieht und MF senkrecht auf BC stellt, ME = MF (V, 5). Der Umfang des Kreises um M geht also durch F und berührt den Schenkel BC in F (VI, 9). Auch ist AC = CB (IV, 35); folglich bewiesen, wzbw.

6. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck zu beschreiben, wenn einer der beiden spitzen Winkel, α, und der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises, H, gegeben.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte, bei C der rechte Winkel und K der Mittelpunkt des Kreises, so liegt dieser in der Halbirungslinie des Winkels CAB = α und zugleich in einer Linie NN von AB um H entfernt (V, 3 u. 5); er ist folglich gegeben (IV, 12, u. V, 13). Sey KD senkrecht auf AB gestellt, so geht der Umfang des Kreises durch D; er ist folglich der Lage und Größe nach gegeben. Sey KF senkrecht auf BC gezogen, so ist jene mit AC parallel; folglich Punkt F gegeben (IV, 26) und somit auch BC (VI, 28), d. i. das gesuchte $\triangle ABC$.

Synthesis. Man ziehe eine Gerade, AP, von unbestimmter Länge, mache PAQ = α, ferner PAM = MAQ und ziehe in der Entfernung H eine Linie NN parallel mit AP. Man stelle KD senkrecht auf AP und beschreibe um K mit KD einen Kreis. Man ziehe KF mit AQ parallel, sodann auf sie durch F die Gerade BC senkrecht, so ist $\triangle$ ABC das gesuchte.

Denn zieht man KE perpendikulär auf AC, so ist KE = KD (V, 5). Der um K beschriebene Kreis geht also nicht bloß durch D und F, sondern auch durch E und berührt die Seiten des Dreiecks in D, E und F (VI, 9). Auch ist, wegen KFB = R (p. c.), ACB = R (IV, 21), und somit bewiesen, wzbw.

7. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß der Halbmesser des umbeschriebenen Kreises einer gegebenen Linie, H, und der Abstand eines der beiden Schenkel vom gegenüber liegenden Winkelpunkt einer gegebenen Linie, K, gleich werde.

Analysis. Sey $\triangle$ ABC das gesuchte und BD der Abstand des Punkts B von AC, so ist BD = K (p. h.); folglich $\triangle$ ABD gegeben (VIII, 11). Sey F der Mittelpunkt des Kreises, so liegt dieser in der Senkrechten durch den Halbirungspunkt der AB (VI, 12) und im Umfang eines Kreises um A mit H beschrieben (p. h.); er ist somit gegeben. Der Scheitel C liegt aber auch in der Richtung der AD; er ist folglich gegeben und somit auch $\triangle$ ABC.

Synthesis. Man beschreibe über AB ein bei D rechtwinkliges Dreieck so, daß BD = K wird. Man halbire AB in E, ziehe auf sie EM senkrecht und beschreibe um A mit H einen Kreis. Der Umfang treffe EM in F. Nun beschreibe man um F mit FA einen zweiten Kreis. Der Umfang treffe die Richtung der AD in C. Man ziehe CB, so ist $\triangle$ ABC das gesuchte.

Denn zieht man AF und FB, so ist AF = H (p. c.) = BF (IV, 35), ADB = R und BD = K (p. c.); das Dreieck ABC ist folglich dasjenige, welches den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet, wzbw.

Anmerkung. Damit die Aufgabe möglich sey, darf K nicht länger als AB und H nicht kürzer als AE, d. h. nicht kürzer als die Hälfte der AB seyn.

8. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises einer gegebenen Geraden, H, und der Abstand eines Winkelpunkts von der Richtung der gegenüber liegenden Seite einer zweiten gegebenen Linie, K, gleich werde.

Analysis. Sey △ ABC das gesuchte und AD = K der Abstand des Winkelpunktes A von der Richtung der BC, so ist △ ABD gegeben (VIII, 11). Sey M der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, so liegt er in einer Linie BN, welche den Winkel ABC halbirt (V, 5) und zugleich in einer Linie PQ parallel mit AB und von ihr um H entfernt (V, 3); er ist somit (der Mittelpunkt) gegeben, so wie der Halbmesser MF (IV, 15). Der Umfang des Kreises berühre die AC in E, so ist dieser Punkt gegeben (VI, 29). Nun liegt der gesuchte Scheitelpunkt C in den Richtungen der der Lage nach gegebenen Geraden AE und BD; er ist folglich gegeben und somit auch △ ABC.

Synthesis. Man beschreibe über AB ein bei D rechtwinkliges Dreieck so, daß AD = K wird, und ziehe, im Abstand H, eine Linie PQ parallel mit AB. Man halbire den Winkel ABC. Der Durchschnitt der Richtungen BN und PQ sey M. Man ziehe MF senkrecht auf AB und beschreibe um M mit MF einen Kreis. Man ziehe an den Umfang desselben die Tangente AE und verlängere sie bis in die Richtung der BD, so ist △ ABC das gesuchte.

Denn es ist ADB = R (p. c.) und AD = K (p. c.). Man ziehe MG senkrecht auf die Richtung der BC, so ist MG = MF (IV, 29) = H (p. c.). Der mit H (= MF) beschriebene Kreis berührt also die drei Seiten des Dreiecks (VI, 9), wzbw.

9. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß die Schenkelsumme einer gegebenen Linie, PQ, die Schenkeldifferenz aber einer (dritten) geraden Linie, QR, gleich werde.

Analysis. Sey $\triangle$ ABC das gesuchte und BC $>$ AC, so ist 2 BC $=$ PQ $+$ QR und 2 AC $=$ PQ $-$ QR (I, 11); folglich, da PQ und QR gegeben, 2 BC und 2 AC gegeben (IV, 10 u. 11); folglich AC und BC gegeben (IV, 13), und somit auch $\triangle$ ABC (VIII, 13).

Synthesis. Man lege QR so an PQ, daß beide Linien einerlei Richtung halten, halbire PQ und QR in D und E, und beschreibe um D mit QE einen Kreis. Der Umfang desselben schneide die PQ in F und G. Nun beschreibe man über AB ein Dreieck so, daß AC $=$ PF und CB $=$ PG wird, so ist $\triangle$ ABC das gesuchte.

Denn es ist PD $=$ DQ und FD $=$ DG (p. c. und IV, E. 17); folglich PD $-$ FD $=$ DQ $-$ DG (II), d. i. PF $=$ GQ, und somit PF $+$ FG $=$ FG $+$ GQ, d. i. PG $=$ FQ. Nun ist aber AC $+$ CB $=$ PF $+$ PG (p. c.) $=$ PF $+$ FQ $=$ PQ; ferner BC $-$ AC $=$ PG $-$ PF (p. c.) $=$ FQ $-$ PF $=$ FQ $-$ GQ $=$ FG $=$ QR. Es ist folglich bewiesen, wzbw.

10. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß die Schenkelsumme einer gegebenen Linie, S, und der Abstand eines Schenkels vom gegenüber liegenden Winkelpunkt einer gegebenen (dritten) Linie, K, gleich werde.

Analysis. Sey $\triangle$ ABC das gesuchte, BD der Abstand des Schenkels AC vom gegenüber liegenden Winkelpunkt, B, so ist BD $=$ K (p. h.), folglich $\triangle$ ABD gegeben (VIII, 11). Sey AC um ein Stück CE $=$ CB verlängert, so ist AE $=$ S (p. h.); folglich Punkt E gegeben (IV, 11). Sey BE gezogen, so ist BEC $=$ CBE (IV, 30); folglich BC der Lage nach gegeben (IV, 25); folglich Punkt C gegeben und somit auch $\triangle$ ABC.

Synthesis. Man beschreibe über AB ein rechtwinkliges Dreieck ABD so, daß BD = K wird. Man verlängere AC, mache AE = S, ziehe BE und mache CBE = BEC, so ist △ABC das gesuchte.

Denn es ist BD = K (p. c.) und AC + CB = AC + CE (IV, 30) = S (p. c.) und ADB = R (p. c.); folglich bewiesen, wzbw.

Anmerkung. Damit ein Dreieck möglich sey, welches den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet, muß S > AB (IV, 1) und BD kleiner als AB seyn (IV, 33).

11. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß der Scheitelwinkel einem gegebenen Winkel, γ, und die Schenkelsumme einer gegebenen Geraden, S, gleich werde.

Analysis. Sey △ABC das gesuchte, AC um ein Stück CD = CB verlängert, und DB gezogen, so ist AD = AC + CB = S (p. h.) und ADB = $^1/_2$ ACB (IV, 30, Zus. 2) = $^1/_2 \gamma$; Punkt D liegt daher im Bogen eines Kreisabschnitts, welcher AB zur Sehne und $^1/_2 \gamma$ zum Winkel hat und zugleich im Umfang eines Kreises um A mit AD = S beschrieben. Nun sind AB, S und γ gegebene Größen; folglich Punkt D, d. i. △ABD gegeben (VIII, 5 u. IV, 9). Da BC = CD, so ist DBC = CDB (IV, 30); folglich BC der Lage nach gegeben (IV, 25); folglich Punkt C ebenfalls gegeben, und somit auch △ABC.

Synthesis. Man halbire den gegebenen Winkel γ und construire über AB den Kreisabschnitt des Winkels $^1/_2 \gamma$ (VIII, 5). Man beschreibe um A mit S einen Kreis. Der Umfang desselben treffe den Bogen über AB in D. Man ziehe AD und DB, und mache DBC = ADB, so ist △ABC das gesuchte.

Denn da DBC = CDB (p. c.), so ist BC = CD (IV, 30); folglich AC + CB = AC + CD = AD = S (p. c.). Auch ist, weil BC = CD, ACB = 2ADB (IV, 30. Zus. 2). Aber 2ADB = 2($^1/_2 \gamma$) (p. c.) = γ; folglich ACB = γ, und somit bewiesen, wzbw.

Anmerkung 1. Damit der Umfang des Kreises um A den Bogen über AB treffe, darf AD nicht größer als der Durchmesser des Kreises seyn,

d. h. die Aufgabe ist unmöglich, wenn die Schenkelsumme, S, größer als der Durchmesser desjenigen Kreises erscheint, an welchem der Gegenwinkel der Sehne AB gleich $\frac{1}{2}\gamma$ ist. Außerdem muß, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, $S > AB$ seyn. Ist aber wirklich $S > AB$, hingegen kleiner als der Durchmesser des Kreises zu welchem der Abschnitt über AB gehört, dann schneidet der Umfang des Kreises um A den Bogen des Kreisabschnittes noch in einem zweiten Punkt, D′, so daß in diesem Fall noch ein zweites Dreieck, ABC′, existirt, welches den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet.

Anmerkung 2. Wenn nicht ausdrücklich verlangt wird, das Dreieck über AB zu beschreiben, so kann man auch so construiren: Man ziehe eine Gerade $AD = S$, mache $ADM = \gamma$, $ADN = NDM$, und beschreibe um A mit AB einen Kreis. Der Umfang desselben schneide DN in B. Man ziehe AB und hernach BC parallel mit DM, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte. — Im Fall des Schneidens gibt es noch ein zweites Dreieck $AB'C'$, welches den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet.

12. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß die Schenkelsumme einer gegebenen Linie, S, und die Differenz der Winkel an der Grundlinie einem gegebenen Winkel, u, gleich werde.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte, BC um ein Stück $CD = CA$ verlängert, DA gezogen und $FAB = FBA$ gemacht (IV, 25), so ist $BD = S$ (p. h.) und $FAC = u$ (p. h.). Sey $ABN = u$ gemacht und E der Durchschnitt der Richtungen DA und BN, so hat man $a + \alpha + u + \beta = 2R$ (IV, 16) und $b + u' + \alpha' + D = 2R$ (IV, 28); folglich $a + \alpha + u + \beta = b + u' + \alpha' + D$ (V). Aber $\alpha = \alpha'$ (p. c.), $u = u'$ (p. c.) und $\beta = D$ (IV, 30); folglich $a = b$ (II); daher $AB = BE$ (IV, 31) und somit $\triangle ABE$ gegeben (VIII, 12). Nun liegt Punkt D in der Verlängerung der EA und im Umfang eines Kreises um B mit S beschrieben; er ist somit gegeben. Und wegen $\beta = D$ ist AC der Lage nach gegeben (IV, 25); folglich auch Punkt C, d. i. $\triangle ABC$.

Synthesis. Man mache $ABN = u$ ($= u'$) und beschreibe um B mit BA einen Kreis. Der Umfang treffe die BN in E. Man ziehe EA, verlängere sie und beschreibe um B mit S einen Kreis. Der Umfang desselben schneide die Richtung EA in D. Man mache $DAC = D$, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Denn wird $FAB = ABC = \alpha'$ gemacht, so hat man

$a + \alpha + FAC + \beta = 2R$ (IV, 16) und $b + ABE + \alpha' + D = 2R$ (IV, 28); folglich $a + \alpha + FAC + \beta = b + ABE + \alpha' + D$ (V). Aber $a = b$ (IV, 30), $\alpha = \alpha'$ und $\beta = D$ (p. c.); folglich $FAC = ABE$ (II). Nun ist $FAC = CAB - FAB = CAB - ABC$ und $ABE = u$ (p. c.); folglich $CAB - ABC = u$. Endlich ist, wegen $\beta = D$ (p. c.), $AC = CD$ (IV, 30); folglich $AC + CB = CD + CB$ (I) $= BD = S$ (p. c.). Es ist daher bewiesen, wzbw.

13. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß die Schenkeldifferenz einer gegebenen Linie, δ, der Unterschied der beiden Winkel an der Grundlinie aber, einem gegebenen Winkel, u, gleich werde.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte und vom Scheitel aus der kleinere Schenkel CA vom größern CB abgeschnitten und AD gezogen, so ist $BD = \delta$ und $u = CAB - CBA$ (p. h.) $= 2\,DAB$ (IV, 33, Zus.), oder $DAB = \frac{1}{2}u$ (IV). Das $\triangle ABD$ ist somit gegeben (VIII, 17). Nun liegt der gesuchte Scheitel C in der Verlängerung der BD und in einer Linie AN, welche mit AD einen Winkel gleich ADC macht (IV, 30); es ist somit Punkt C, folglich $\triangle ABC$, gegeben.

Synthesis. Man beschreibe über AB ein Dreieck ABD, an welchem $BD = \delta$ und $DAB = \frac{1}{2}u$ wird, verlängere BD und mache $NAD = ADC$ (IV, 25), so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Denn da $CAD = ADC$ (p. c), so ist $BC - CA = BC - CD$ (IV, 30 u. II) $= BD = \delta$ (p. c.) und $2\,DAB = CAB - ABC$ (IV, 33, Zus.). Aber $2\,DAB = 2\,(\frac{1}{2}u)$ (p. c.) $= u$; folglich $CAB - ABC = u$ (V). Es ist somit bewiesen, wzbw.

14. Aufgabe.

Von zwei gegebenen Geraden, AB, P, die größere, AB, so zu schneiden, daß das Rechteck unter den beiden Abschnitten dem Quadrat der kleinern Linie, P, gleich werde.

Analysis. Sey C der gesuchte Punkt, so hat man

$AC \times CB = P^2$ (p. h.). Sey D der Halbirungspunkt der AB, so hat man $AC = AD + DC$ und $BC = AD - DC$; folglich $AC \times BC = AD^2 - DC^2$ (V, 20); folglich $AD^2 - DC^2 = P^2$ (V), oder $AD^2 = DC^2 + P^2$, oder $DC^2 = AD^2 - P^2$. Nun sind AD und P gegebene Linien; folglich DC, d. i. Punkt C, gegeben.

Synthesis. Man halbire AB in D, beschreibe über AD ein bei E rechtwinkliges Dreieck so, daß $AE = P$ wird, ziehe ED und mache $DC = DE$, so ist dieser Punkt der gesuchte.

Denn es ist $AE^2 = AD^2 - DE^2$ (V, 23, Zus. 1) $= AD^2 - DC^2$ (p. c.) $= (AD + DC) \times (AD - DC)$ (V, 20) $= AC \times CB$, oder, da $AE = P$ (p. c.), $P^2 = AC \times CB$, wzbw.

Anmerkung 1. Damit die Aufgabe möglich sey, darf P nicht kleiner als die Hälfte der größern Linie AB seyn.

Anmerkung 2. Eine andere Behandlung der Aufgabe ist folgende (Fig. 16 b):

Analysis. Sey C der gesuchte Punkt und um C mit CB ein Kreis beschrieben. Der Umfang desselben schneide die AC in D, so ist $AC + CB = AB$ und $AC - CB = AD$; folglich $2AC = AB + AD$, ferner $2CB = AB - AD$ (I, 11) und somit $4(AC \times CB) = AB^2 - AD^2$ (V, 20), oder, da $AC \times CB = P^2$ (p. h.) $4P^2 = AB^2 - AD^2$, woraus sich leicht ergibt $AD^2 = AB^2 - (2P)^2$. Nun sind AB und P gegebene Linien; folglich AD gegeben (VIII, 11) und somit auch der gesuchte Punkt C (IV, 13).

Synthesis. Man beschreibe über AB ein bei E rechtwinkliges Dreieck ABE so, daß $BE = 2P$ wird, mache $AD = AE$ und halbire DB in C, so ist dieser Punkt der gesuchte.

Denn es ist $BE^2 = AB^2 - AE^2$ (V, 23, Zus. 1) $= AB^2 - AD^2$ (p. c.) $= (AB + AD) \times (AB - AD) = 2AC \times 2BC$. Nun ist $BE = 2P$ (p. c.), folglich $(2P)^2 = 2AC \times 2BC$, oder $4P^2 = 4AC \times CB$, d. i. $P^2 = AC \times CB$ (VI), wzbw.

15. Aufgabe.

Von zwei gegebenen Geraden, AB, P, die eine, AB, so zu verlängern, daß das Rechteck unter der vergrößerten Linie und dem angesetzten Stück gleich werde dem Quadrat der andern, P.

Analysis. Sey BC die gesuchte Verlängerung, so hat man $AC \times CB = P^2$ (p. h.). Sey AB in D halbirt, so hat man $AC = DC + DB$ und $BC = DC - DB$; folglich $AC \times CB = DC^2 - DB^2$ (V, 20), d. i. $DC^2 - DB^2 = P^2$, oder $DC^2 = P^2 + DB^2$. Nun sind P und DB gegebene Linien (IV, 13); folglich DC gegeben (VIII, 9) und somit auch BC.

Synthesis. Man halbire AB in D, stelle BN senkrecht auf AB, mache $BE = P$, und, nachdem DE gezogen, $DC = DE$, so ist BC die gesuchte Verlängerung.

Denn es ist $BE^2 = DE^2 - DB^2$ (V, 23, Zus. 1) $= DC^2 - DB^2 = (DC + DB) \times (DC - DB)$ (V, 20) $= AC \times BC$; folglich, da $BE = P$ (p. c.), $AC \times CB = P^2$, wzbw.

Anmerkung. Eine andere Behandlung dieser Aufgabe ist folgende (Fig. 15):

Analysis. Sey BC die gesuchte Verlängerung und auf der Richtung der nämlichen Geraden ein Stück $CD = CB$ abgeschnitten, so hat man $(AC + CD)^2 - (AC - CD)^2 = 4(AC \times CD)$ (V, 22), oder, da $AC + CD = AD$, $AC - CD = AB$ $AD^2 - AB^2 = 4(AC \times CB) = 4P^2$ (p. h.) $= (2P)^2$ (V, 6, Zus.) folglich $AD^2 = AB^2 + (2P)^2$ (XVI). Nun sind AB und P gegebene Linien; folglich AD gegeben (VIII, 9) und somit auch der gesuchte Punkt C (IV, 13).

Synthesis. Man stelle auf AB eine Senkrechte $BF = 2P$, verlängere AB, ziehe AF, mache $AD = AF$, und halbire BD in C, so ist dieser Punkt der gesuchte.

Denn es ist $BF^2 = AF^2 - AB^2$ (V, 23, Zus. 1) $= AD^2 - AB^2$ (p.c.) $= (AD + AB) \times (AD - AB)$ (V, 20) $= 2AC \times 2BC = 4(AC \times CB)$ (V, 6, Zus.); folglich, da $BF^2 = (2P)^2$ (p.c.) $= 4P^2$ (V, 6, Zus.), $4(AC \times BC) = 4P^2$, und somit $AC \times BC = P^2$, wzbw.

16. Aufgabe.

Von zwei gegebenen Geraden, AB und P, die eine, AB, so zu schneiden, daß das Rechteck unter dem einen Abschnitt und der andern Linie P gleich werde dem Quadrat des andern Abschnitts.

Analysis. Sey C der gesuchte Punkt, so hat man $AC^2 = P \times BC$ (p. h.) $= P \times (AB - AC) = AB \times P - P \times AC$ (V, 17), oder $AC^2 + P \times AC = AB \times P$. Sey BA um ein Stück $AD = P$ verlängert und dieses in E halbirt, so hat man $AC^2 + 2AE \times AC = AB \times P = Q^2$, falls man $AB \times P = Q^2$ setzt; folglich $(AC + AE)^2 = Q^2 + AE^2$ (V, 18, Zus.), oder $EC^2 = Q^2 + AE^2$. Nun ist Punkt E gegeben (IV, 13); folglich, da auch Q gegeben (VIII, 31), EC, d. i. Punkt C gegeben (VIII, 9).

Synthesis. Man verlängere BA, mache $AD = P$, halbire sie in E, beschreibe über BD einen Halbkreis und stelle auf sie AF senkrecht. Man ziehe EF und beschreibe um E mit EF einen

Kreis. Der Umfang desselben schneide die AB in C, so ist dieser Punkt der gesuchte, d. h. er fällt zwischen A und B und es ist zugleich $AC^2 = P \times CB$.

Denn sollte C auf B oder auf die Verlängerung der AB fallen, so hätte man $EF =$ oder $> EB$; folglich $EB^2 =$ oder $< EA^2 + AF^2$, d. i. $EB^2 =$ oder $> EA^2 + AD \times AB$ (VIII, 31). Aber $EB^2 = (EA + AB)^2 = EA^2 + 2EA \times AB + AB^2$ (V, 18) $= EA^2 + AD \times AB + AB^2$, und somit $EA^2 + AD \times AB + AB^2 =$ oder $< EA^2 + AD \times AB$ was ein Widerspruch ist (XIV). Es fällt somit Punkt C nothwendig zwischen A und B, was erstens zbw.

Da $EC = EF$ (p. c.), so hat man $EC^2 = EA^2 + AF^2 = EA^2 + DA \times AB$ (VIII, 31), oder $EC^2 - EA^2 = DA \times AB = P \times AB$ (p. c.). Nun ist einerseits $EC^2 - EA^2 = (EC + EA) \times (EC - EA)$ (V, 20) $= DC \times AC = (P + AC) \times AC = P \times AC + AC^2$ (V, 16), und anderseits $P \times AB = P \times (AC + CB) = P \times AC + P \times CB$ (V, 16); folglich $P \times AC + AC^2 = P \times AC + P \times CB$ (V). Hieraus $AC^2 = P \times CB$, wzbw.

Anmerkung 1. Auf die nämliche Construction führt die Aufgabe: Von zwei gegebenen Geraden, AB und P die eine, AB, so zu schneiden, daß der eine der beiden Abschnitte, AC, die mittlere Proportionale werde zwischen dem andern und der gegebenen Linie P.

Denn aus $P : AC = AC : CB$ (p. h.) folgt $AC^2 = P \times CB$ (VII, 5), woraus die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung sogleich erhellet.

Anmerkung 2. Die Aufgabe (Fig. 16 b) (der sogenannte goldene Schnitt der Alten): eine gegebene Gerade AB so zu schneiden, daß das Rechteck unter der ganzen Linie und dem einen Abschnitt gleich werde dem Quadrat des andern Abschnitts, ist nur ein specieller Fall des obigen Problems, und die Construction ist einfacher, indem jetzt kein Rechteck vorkommt, welches in ein Quadrat zu verwandeln ist. Um daher in diesem Fall den Punkt C zu finden, so verlängere man BA, mache $AD = AB$ und halbire jene in E. Man stelle $AF = AB$ senkrecht auf DB, ziehe FE und beschreibe um E mit EF einen Kreis. Der Umfang schneide die AB in C, so ist C der gesuchte Punkt.

Anmerkung 3. Durch die nämliche Construction löst sich die Aufgabe: eine gegebene Gerade AB stetig proportionirt, d. h. so schneiden, daß einer der beiden Abschnitte, AC, die mittlere Proportionale werde, zwischen der ganzen Linie AB, und dem andern Abschnitt, CB. — Denn aus $AB : AC = AC : CB$ (p. h.) folgt $AC^2 = AB \times CB$ (VII, 5), woraus die

Richtigkeit der Behauptung sogleich erhellet. Auch ist gewiß, daß die beiden Abschitte stets ungleich und der größere die mittlere Proportionale ist. Denn da $AB : AC = AC : CB$ (p. h.) und $AB > AC$, so ist auch $AC > CB$ (III, 13).

17. Aufgabe.

Von zwei gegebenen Geraden, AB, P, die eine, AB, so zu verlängern, daß das Rechteck unter der vergrößerten und zweiten Linie gleich werde dem Quadrat der Verlängerung.

Analysis. Sey BC die gesuchte Verlängerung, so hat man $BC^2 = AC \times P$ (p. h.). Sey von der Verlängerung der AB ein Stück $BD = P$ abgeschnitten und in E halbirt, so hat man, wegen $P = 2BE$, $BC^2 = AC \times 2BE = (AB + BC) \times 2BE = AB \times 2BE + 2BE \times BC$. Hieraus $BC^2 - 2BE \times BC = AB \times 2BE$, oder $AB \times 2BE$, d. j. $AB \times P = Q^2$ gesetzt, $BC^2 - 2BE \times BC = Q^2$; folglich $(BC - BE)^2 = Q^2 + BE^2$ (V, 19, Zus.), oder, da $BC - BE = EC$ ist, $EC^2 = Q^2 + BE^2$. Nun ist Punkt E gegeben (IV, 13); folglich, da Q gegeben (VIII, 31) auch EC, d. i. Punkt C gegeben (VIII, 9).

Synthesis. Man verlängere AB, schneide von BM ein Stück $BD = P$ ab und halbire dasselbe in E. Man beschreibe über AD einen Halbkreis, und stelle BF senkrecht auf AD. Man ziehe EF und mache $EC = EF$, so ist BC die gesuchte Verlängerung.

Denn es ist $EC^2 = EF^2 = BF^2 + BE^2$ (V, 23). Aber $EC^2 = (BC - BE)^2 = BC^2 + BE^2 - 2BE \times BC$ (V, 19) $= BC^2 + BE^2 - P \times BC$, und $BF^2 = AB \times BD$ (VIII, 31) $= AB \times P$; folglich $BC^2 + BE^2 - P \times BC = P \times AB + BE^2$. Hieraus $BC^2 - P \times BC = P \times AB$ (11), somit $BC^2 = P \times AB + P \times BC = P \times (AB + BC) = P \times AC$ (V, 16), wzbw.

Anmerkung. Die Aufgabe: eine gegebene Gerade, AB, so zu verlängern, daß das Rechteck unter der vergrößerten und gegebenen Linie gleich werde dem Quadrat der Verlängerung, ist nur ein specieller Fall des obigen Problems, nämlich derjenige, wo $P = AB$ ist.

18. Aufgabe.

Von zwei gegebenen Geraden, AB, MN, die Richtung der einen, AB, so zu schneiden, daß die Summe der Quadrate beider, von den Punkten A und B aus genommenen, Abschnitte, gleich werde dem Quadrat der andern Linie.

Analysis. Sey C der gesuchte Punkt, so hat man $AC^2 + CB^2 = MN^2$ (p. h.). Seyen D und P die Halbirungspunkte der AB und MN, so hat man einerseits $AC^2 + CB^2 = 2(BD^2 + DC^2)$ (V, 21) und anderseits $MN^2 = (2MP)^2 = 4MP^2$ (V, 6, Zus.); folglich $2(BD^2 + DC^2) = 4MP^2 = 2(2MP^2)$, und somit $BD^2 + DC^2 = 2MP^2$, oder $2MP^2 = Q^2$ gesetzt, $BD^2 + DC^2 = Q^2$ oder $DC^2 = Q^2 - BD^2$ (II). Nun sind die Linien Q und BD gegeben (VIII, 7 u. IV, 13); folglich DC, d. i. Punkt C gegeben (VIII, 11).

Synthesis. Man halbire AB in D, MN in P, und beschreibe über MP ein bei O gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck MOP. Sodann beschreibe man über AD ein rechtwinkliges Dreieck ADE so, daß die Hypotenuse $AE = MO$ wird und mache $DC = DE$, so ist C der gesuchte Punkt.

Denn es ist $AE^2 = AD^2 + DE^2$ (V, 23) $= BD^2 + DC^2$ (p. c.); folglich $2AE^2 = 2(BD^2 + DC^2) = AC^2 + CB^2$ (V, 21). Aber $2AE^2 = 2MO^2$ (p. c.) $= 2(2MP)_2$ (V, 23, Zus. 2) $= 4MP^2 = (2MP)^2$ (V, 6, Zus.) $= MN^2$ (p. c.); folglich $AC^2 + CB^2 = MN^2$, wzbw.

Anmerkung 1. Damit die Aufgabe möglich sey, darf MO nicht kleiner als AD, d. h. nicht kleiner als die Hälfte der AB seyn. Ist $MO > AD$, d. h. $MO > \frac{1}{2}AB$, dann fällt C stets auf die Verlängerung der AD. Ist aber $MO = AD$, d. h. $MO = \frac{1}{2}AB$, dann ist C der Halbirungspunkt der AB.

Anmerkung 2. Ist $MO < AB$, hingegen $MO > \frac{1}{2}AB$, alsdann hat man $AC + CB = AB$ und zugleich $AC^2 + CB^2 = MN^2$, weßwegen in diesem Fall die Aufgabe auch so ausgedrückt werden kann: ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Kathetensumme einer gegebenen Geraden, AB, die Hypotenuse aber einer gegebenen geraden Linie, MN, gleich werde.

Analysis. Sey wiederum (Fig. 16 b) C der gesuchte Punkt, eine Senkrechte $CD = CB$ errichtet, sodann AD und DB gezogen, so ist $AD^2 = AC^2 + CD^2$ (V, 23) $= AC^2 + CB^2$ (p. c.). Aber $AC^2 + CB^2 = MN^2$ (p. h.); folglich $AD^2 = MN^2$, d. i. $AD = MN$. Man kennt also an dem Dreieck ABD zwei Seiten, nämlich AB und AD

(= MN), und einen Winkel $ABD = \frac{1}{2} R$ (IV, 28 u. 30, Zus.); es ist folglich gegeben und somit auch der gesuchte Punkt C (IV, 15).

Synthesis. Man stelle BK senkrecht auf AB, halbire ABK und beschreibe um A mit MN einen Kreis. Der Umfang desselben schneide die den Winkel B halbirende Linie BL in D. Man ziehe nun DC senkrecht auf AB, so ist C der gesuchte Punkt (und im Fall der Kreis um A mit MN die Richtung der BL schneidet gibt es noch einen zweiten Punkt, welcher den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet, während sie unmöglich ist, wenn der Abstand des Punkts A von der Richtung der BL größer als MN ist).

Denn es ist $BDC = \frac{1}{2} R$ (IV, 28, Zus.); folglich $CD = CB$ (IV, 31), und somit $AD^2 = AC^2 + CD^2$ (V, 23) $= AC^2 + CB^2$, oder, da $AD = MN$ (p. c.), $MN^2 = AC^2 + CB^2$, wzbw.

Anmerkung 3. Ist $MN > AB$, d. h. fällt C auf die Verlängerung der AB, dann ist $AC - CB = AB$ und zugleich $AC^2 + BC^2 = MN^2$ weßwegen die Aufgabe in diesem Fall auch so ausgesprochen werden kann: ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Kathetendifferenz einer gegebenen Geraden AB, die Hypotenuse aber einer gegebenen geraden Linie MN gleich werde.

19. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, als Hypotenuse, ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Differenz der Quadrate beider Katheten dem Quadrat einer gegebenen Linie, MN, gleich werde.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte, E der Halbirungspunkt der Hypotenuse AB, so ist $AD = AE + ED$ und $BD = AE - ED$; folglich $AD^2 - BD^2 = 4(AE \times ED)$ (V, 21). Sey P der Halbirungspunkt der MN, so ist $MN^2 = 4 MP^2$ (V, 6, Zusatz). Es ist aber einerseits $AC^2 - CB^2 = AD^2 - BD^2$ (VI, 25, Zus.) und anderseits $AC^2 - CB^2 = MN^2$ (p. h.) $= 4 MP^2$ (V); folglich $AD^2 - BD^2 = 4 MP^2$ (V), oder $4(AE \times ED) = 4 MP^2$ (V), d. i. $AE \times ED = MP^2$ (IV). — Nun sind AE und MP gegeben (IV, 13), folglich auch ED, d. i. Punkt D (VIII, 29). Und was den gesuchten Scheitel anbelangt, so liegt dieser im Umfang eines Kreises über AB, als Durchmesser, und in einer Senkrechten durch D auf AB; er ist folglich gegeben und somit auch $\triangle ABC$.

Synthesis. Man halbire AB in E, ferner MN in P, und bestimme Punkt D so, daß $AE \times ED = MP^2$ wird. Man beschreibe über AB einen Halbkreis, stelle DC senkrecht auf AB und ziehe AC, CB, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Denn es ist $AC^2 - CB^2 = AD^2 - DB^2$ (VI, 25, Zus.) $= 4(AE \times ED)$ (V, 22). Aber, $AE \times ED = MP^2$ (p. c.), oder $4(AE \times ED) = 4MP^2$ (III) $= (2MP)^2$ (V, 6, Zus.) $= MN^2$ (p. c.); folglich $AC^2 - CB^2 = MN^2$ (V), wzbw.

20. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck zu beschreiben, wenn die Kathetensumme, S, und die auf die Hypotenuse genommene Höhe, H, gegeben sind.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte, AB die Hypotenuse und auf sie vom Scheitel das Loth CD gezogen, so ist $AC + CB = S$ und $CD = H$ (p. h.). Man hat somit $AB^2 = AC^2 + CB^2$ (V, 23) und $AB \times CD = AC \times CB$ (VI, 25), oder $2(AB \times CD) = 2(AC \times CB)$; folglich $AB^2 + 2(AB \times CD) = AC^2 + CB^2 + 2(AC \times CB)$ (I) $= (AC + CB)^2$ (V, 18) $= S^2$. Sey nun BA um ein Stück $AE = 2CD = 2H$ verlängert, so hat man $2(AB \times CD) = 2CD \times AB$ (V, 6, Zus.) $= AE \times AB$; folglich $AB^2 + AE \times AB = S^2$, oder $(EA + AB) \times AB = S^2$ (V, 16), d. i. $EB \times AB = S^2$.

Nun sind EA und S gegebene Linien; folglich auch AB gegeben (15). Was nun den Scheitelpunkt C anbelangt, so liegt dieser im Umfang eines Kreises über AB als Durchmesser (VI, 24) und in einer Linie MN, parallel zu AB in der Entfernung H; er ist folglich gegeben (V, 13) und somit auch $\triangle ABC$.

Synthesis. Man ziehe eine Gerade EK von unbestimmter Länge, mache $EA = 2H$ und bestimme AB so, daß $EB \times AB = S^2$ wird (15). Man beschreibe über AB, als Durchmesser, einen Halbkreis, und ziehe MN parallel zu AB in der Entfernung H. Diese schneide den Bogen in C. Man ziehe AC und CB, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Denn zieht man CD auf AB senkrecht, so ist $EB \times AB = (EA + AB) \times AB = (2CD + AB) \times AB$ (p. c.) $= AB^2 + 2CD \times AB$ (V, 16). Ferner ist $CD \times AB = AC \times CB$ (VI, 25), oder $2CD \times AB = 2(AC \times CB)$ (III); folglich

$EB \times AB = AB^2 + 2(AC \times CB)$. Aber $AB^2 = AC^2 + CB^2$ (V, 23); folglich $EB \times AB = AC^2 + CB^2 + 2(AC \times CB) = (AC + CB)^2$ (V, 18), und somit, da $EB \times AB = S^2$ (p. c.), $(AC + CB)^2 = S^2$ (V), d. i. $AC + CB = S$, wzbw.

21. Aufgabe.

Das gleichschenklige Dreieck zu beschreiben, wenn das am Scheitel liegende Schenkelsegment, CD, und die Grundlinie, G, der Größe nach gegeben.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte und AD senkrecht auf BC gezogen, so hat man $2(CB \times BD) = AB^2$ (V, 28); folglich $\frac{1}{2} AB^2 = Q^2$ gesetzt, $CB \times BD = Q^2$ (IV). Nun ist Q gegeben (VIII, 8, Zus.) folglich, da CD gegeben, auch CB gegeben (15), d. i. $\triangle ABC$ (VIII, 12).

Synthesis. Man bestimme eine Linie Q so, daß $Q^2 = \frac{1}{2} G^2$ wird (VIII, 8, Zus.) und verlängere die gegebene Gerade CD um ein Stück DB so, daß $CB \times BD = Q^2$ wird (15). Durch D ziehe man auf BC eine Senkrechte DN, und beschreibe um B mit G einen Kreis. Der Umfang desselben schneide DN in A. Man ziehe AB und AC, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Denn es ist $AC^2 + 2(CB \times BD) = AB^2 + BC^2$ (V, 26). Aber $2(CB \times BD) = 2Q^2$ (p. c.) $= 2(\frac{1}{2} AB^2) = AB^2$ (p. c.); folglich $AC^2 = BC^2$ (II), d. i. $AC = CB$, wzbw.

22. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein gleichschenkliges Dreieck so zu beschreiben, daß der Winkel an der Grundlinie doppelt so groß werde als der am Scheitel.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte und BD die Halbirungslinie des Winkels ABC, so hat man DBC = DCB (p. h.); folglich BD = DC (IV, 31), und somit ADB = 2 ACB (IV, 30, Zus.). Es ist aber auch DAB = 2 ACB (p. h.); folglich ADB = DAB (V), und somit AB = BD (IV, 31) = DC (V). Sey um das Dreieck BDC ein Kreis beschrieben (VI, 30), so ist, weil ABD = ACB, AB eine Tangente (VI, 34); folglich $AC \times AD$

$= AB^2$ (VI, 35). Sey AB um ein Stück $BE = AD$ verlängert (IV, 10), so hat man, wegen $AB = DC$, $AE = AC$ (I); folglich $AE \times BE = AB^2$. Nun ist AB gegeben, folglich BE (15) d. i. $AE = AC$ ebenfalls, und somit auch das gesuchte Dreieck.

Synthesis. Man verlängere AB um ein Stück BE so, daß $AE \times BE = AB^2$ wird (15); sodann beschreibe man über AB ein gleichschenkliges Dreieck ABC so, daß $AC = CB = AE$ wird, so ist diese Figur die gesuchte.

Denn macht man $AD = BE$ und beschreibt um das Dreieck BDC einen Kreis (VI, 30), so hat man $AB^2 = AE \times BE$ (p. c.) $= AC \times AD$ (p. c.); folglich AB eine Tangente (VI, 36) und somit $ABD = BCD$ (VI, 33). Aber $ADB = BCD + DBC$ (IV, 28) $= ABD + DBC = ABC = DAB$ (IV, 30); folglich $BD = AB$ (IV, 31). Und da $AC = AE$, $AD = BE$ (p. c.), so ist $AC - AD = AE - BE$ (II), d. i. $DC = AB$; folglich $BD = DC$ (V), und somit $ADB = 2\,ACB$ (IV, 30, Zus.). Aber $ADB = DAB = ABC$; folglich $ABC = 2\,ACB$, wzbw.

Zusatz. An jedem gleichschenkligen Dreieck dessen Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist als der am Scheitel, beträgt jener $4/5$, dieser dagegen $2/5$ von Einem Rechten (IV, 28).

Anmerkung. Ist der Schenkel, $AC = CB$, statt der Grundlinie, AB, gegeben, dann nimmt die Analyse folgenden Gang. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte und Winkel ABC halbirt, so besteht die Proportion $BC : AB = DC : AD$ (VII, 10). Man überzeugt sich aber leicht (s. oben), daß $AB = BD = DC$; folglich, da $AC = BC$, $AC : DC = DC : AD$. Nun ist AC gegeben; folglich Punkt D gegeben (Satz 16, Anm. 3), und somit $DC = AB$, d. i. $\triangle ABC$ gegeben.

Synthesis. Man schneide AC in einem Punkt D so, daß die Proportion besteht $AC : DC = DC : AD$ (Satz 16, Anm. 3), und beschreibe über AD ein gleichschenkliges Dreieck ABD so, daß $AB = BD = DC$ wird. Man ziehe BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Denn da einerseits $AB = DC$ (p. c.) und anderseits (wegen $AC : DC = DC : AD$) $AC \times AD = DC^2$ (VII, 5), so hat man $AB^2 = AC \times AD$, und somit, wie oben gezeigt wurde, $ABC = 2\,ACB$.

23. Aufgabe.

Die Sehne des regulären Fünfecks zu finden.

Analysis. Sey AB die gesuchte Sehne, C der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, AC und CB gezogen, so ist, weil

Bogen AB fünfmal genommen den Umfang des Kreises gibt (VI, 17), $ACB = \frac{4}{5}R$ (IV, 18, Zus.). Hiernach ist ACB der Winkel desjenigen gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist, als der am Scheitel (22, Zus.); folglich gegeben (22) und somit auch AB.

Synthesis. Man ziehe eine beliebige Gerade DE und beschreibe über ihr ein gleichschenkliges Dreieck so, daß der Winkel an der Basis doppel so groß als der am Scheitel wird (22). Auf dem Umfang des gegebenen Kreises nehme man einen beliebigen Punkt A, ziehe den Halbmesser AC und mache $ACB = FDE$ (IV, 25). Man ziehe AB, so ist diese Linie die gesuchte Sehne.

Denn es ist $ACB = FDE$ (p. c.) $= \frac{4}{5}R$ (22, Zus.) $= \frac{4R}{5}$, d. h. ACB ist der fünfte Theil von vier rechten Winkeln, und somit Bogen AB der fünfte Theil vom Umfang des Kreises (VI, 17). Nun gehören zu gleichen Bogen gleiche Sehnen (VI, 20); folglich die gerade Linie AB die Sehne des regulären Fünfecks, wzbw.

24. Aufgabe.

Die Sehne des regulären Fünfzehnecks zu finden.

Analysis. Sey AB die gesuchte Sehne, C der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, AC und CB gezogen, so ist der Centriwinkel ACB der fünfzehnte Theil von vier Rechten (IV, 18, Zus.), d. h. es ist $ACB = \frac{4}{15}R$. Nun ist $\frac{4}{15}R = (\frac{10}{15} - \frac{6}{15})R = (\frac{2}{3} - \frac{2}{5})R = \frac{2}{3}R - \frac{2}{5}R$ (II, 14), d. h. der Centriwinkel des regulären Fünfzehnecks ist die Differenz zwischen dem Winkel des gleichseitigen Dreiecks und dem Scheitelwinkel desjenigen gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist, als der am Scheitel. Nun sind diese zwei Winkel gegeben (22 u. IV, 7) und somit auch ACB, d. i. die gesuchte Sehne AB.

Synthesis. Man ziehe eine beliebige Gerade EF, beschreibe über ihr ein gleichseitiges Dreieck EFG und zugleich ein gleichschenkliges EFH so, daß Winkel $EFH = 2\,EHF$ wird (22).

Auf dem Umfang des Kreises nehme man einen beliebigen Punkt D, ziehe den Halbmesser DC, mache DCB = EFG und DCA = EHF. Man ziehe AB, so ist diese Linie die gesuchte Sehne.

Denn es ist $ACB = DCB - DCA = \frac{2}{3}R - \frac{2}{5}R = (\frac{2}{3} - \frac{2}{5})R = \frac{4}{15}R$ (II, 14, Zus.) $= \frac{4R}{15}$ (I, 10); folglich Bogen AB der fünfzehnte Theil von einer Rechten (VI, 17), und somit die Gerade AB die gesuchte Sehne, wzbw.

Zweites Buch

Aufgaben mit Verhältnissen.

Erklärungen.

1. Ein Verhältniß heißt gegeben, wenn es dem Verhältniß zweier gegebenen Größen gleich ist.

2. Ein Dreieck heißt der Gattung nach gegeben, wenn diejenigen Größen gegeben sind, die man nöthig hat, um ein Dreieck zu zeichnen, das mit dem fraglichen Dreieck in den Winkeln übereinstimmt.

---

1. Aufgabe.

Die Schenkel eines gegebenen Winkels, MCN, so zu schneiden, daß die vom Scheitel aus genommenen Abschnitte ein gegebenes Verhältniß, P : Q, beobachten und die Schneidende durch einen, außerhalb der Schenkelrichtungen, gegebenen Punkt K gehe.

Analysis. Sey AB die gesuchte Schneidende, so hat man AC : CB = P : Q (p. h.). Macht man daher CD = P, CE = Q und zieht DE, so hat man AC : CB = CD : CE; folglich DE parallel mit AB (VII, 9, Zus.). Nun sind die Punkte D und E, d. i. DE gegeben (IV, 11), und somit auch die, durch den gegebenen Punkt K gezogene, Gerade AB (IV, 26).

Synthesis. Man mache CD = P, CE = Q, ziehe DE und durch den Punkt K mit ihr AB parallel, so ist diese Linie die gesuchte.

Denn es ist AC : DC = BC : EC (VII, 8, Zus.), oder AC : BC = DC : EC (III, 19) = P : Q (p. c.), wzbw.

2. Aufgabe.

Die Schenkel eines gegebenen Winkels, MCN, vermittelst einer Geraden so zu schneiden, daß sie durch einen zwischen den Schenkelrichtungen gegebenen Punkt, K, gehe und dieser Abschnitte mache, welche ein gegebenes Verhältniß, P : Q, beobachten.

Analysis. Sey AKB die gesuchte Linie, so hat man AK : KB = P : Q (p. h.), oder, KD zu NC parallel gezogen, AK : KB = AD : DC (VII, 8); folglich P : Q = AD : DC, oder Q : P = DC : AD. Nun ist Punkt D gegeben (IV, 26); folglich nicht nur Q und P, sondern auch DC gegeben und somit die ihnen correspondirende vierte Proportionale AD bestimmt (VIII, 28). Es ist daher AK gegeben und somit auch Punkt B, d. i. AB.

Synthesis. Man ziehe KD parallel mit NC, mache CE = Q, EF = P, ziehe ED, FA parallel mit ED, ziehe AK und verlängere sie nach B, so ist AB die gesuchte Gerade.

Denn es ist einerseits (da DK mit NC parallel) AK : KB = AD : DC und anderseits (da FA parallel mit ED) FE : EC = AD : DC (VII, 8), folglich AK : KB = FE : EC (III, 4), oder (da FE = P, EC = Q) AK : KB = P : Q, wzbw.

3. Aufgabe.

Es sind zwei Parallelen, MM, NN, gegeben; ferner auf jener ein Punkt A, auf dieser ein Punkt B und überdieß außerhalb ihrer Richtungen ein Punkt K. Man soll durch diesen eine Gerade so legen, daß sie auf den Parallelen, von A und B aus genommen, Abschnitte macht, die ein gegebenes Verhältniß, P : Q, beobachten.

Analysis. Sey KC die gesuchte Linie und E der Durchschnitt der Richtungen AB und CK, so hat man AC : BD = P : Q (p. h.). Aber AC : BD = AE : BE (VII, 12); folglich P : Q = AE : BE (III, 4), oder P — Q : Q = AE — BE : BE (III, 16), d. i. P — Q : Q = AB : BE. Nun sind P, Q und AB gegebene Linien; folglich BE gegeben (VII, 27), d. i. EK, und somit auch KC.

Synthesis. Man mache AF = P, BG = Q, ziehe FG und verlängere sie bis in die Richtung der AB nach E. Man ziehe EK und verlängere sie bis in die Richtung der MM, so ist KC die gesuchte Linie.

Denn trifft die Richtung der KC die NN in D, so hat man AC : AF = BD : BG (VII, 16), oder AC : BD = AF : BG (III, 19), d. i., weil AF = P und BG = Q (p. c.), AC : BD = P : Q, wzbw.

4. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt, P, eine gerade Linie so zu ziehen, daß, wenn man auf sie von drei gegebenen Punkten, A, B, C, Lothe zieht, eines davon der Summe der beiden andern gleich werde.

Analysis. Sey MN die Richtung der gesuchten Linie, AB in E halbirt, AF, BG und CH die gesuchten Lothe, CE gezogen und EJ senkrecht auf MN gestellt, so hat man CD : CH = ED : EJ (VII, 12) = 2 ED : 2 EJ (III, 15), oder da 2 EJ = AF + BG (V, 12), CD : CH = 2 ED : (AF + BG). Nun hat man aber, vermöge der Bedingungen der Aufgabe, CH = AF + BG; folglich CD = 2 ED (III, 11, Zus.), und somit CD + ED = 3 ED (I), d. i. CE = 3 ED. Nun ist EC gegeben (IV, 13), folglich ED, d. i. Punkt D gegeben und somit auch die gesuchte Richtung MN.

Synthesis. Man ziehe AB, halbire sie in E, ziehe EC, mache ED = ⅓ EC (VIII, 31), so bezeichnet die Linie DP die gesuchte Richtung.

Denn zieht man AF, BG, CH und EJ jede senkrecht auf die Richtung der DP, so hat man CH : EJ = CD : ED (VII, 12) = 2 : 1; folglich CH = 2 EJ (III, 1) = AF + BG (V, 12), wzbw.

Anmerkung. Fällt D mit P zusammen, dann ist die Aufgabe völlig unbestimmt, d. h. es gibt unzählig viele Punkte, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten. — Auch mag im Vorbeigehen bemerkt werden, daß, falls A, B, C materielle Punkte seyn sollten, D alsdann der Schwerpunkt des Systems seyn würde.

5. Aufgabe.

Eine im Punkt C beliebig geschnittene Gerade AB so zu verlängern, daß die vergrößerte Linie zur Verlängerung sich verhalte wie der erste Abschnitt, AC, zum zweiten, CB.

Analysis. Sey BD die gesuchte Verlängerung, so hat man AC : CB = AD : BD (p. h.); folglich AC — CB : CB = AD — BD : BD (III, 16), oder, CE = CB gemacht, AE : CB = AB : BD, d. i., weil CE = CB, AE : EC = AB : BD. Nun sind AE, EC und AB gegebene Linien, folglich BD gegeben (VIII, 28).

Synthesis. Man mache CE = CB, verlängere AB, ziehe AN unter einem Winkel MAN, mache AF = AE, AG = AC, ziehe BF und zu ihr GD parallel, so ist BD die gesuchte Verlängerung.

Denn es ist AF : FG = AB : BD (VII, 8); folglich AF + FG : FG = AB + BD : BD (III, 16), d. i. AG : FG = AD : BD. Aber AG = AC (p. c.) und FG = AG — AF = AC — AE = CB (p. c.); folglich AC : CB = AD : BD, wzbw.

Anmerkung. Da AD > BD, so muß auch seyn AC > CB. Wäre aber AC < CB, dann müßte BA verlängert werden, d. h. in diesem Fall würde D links an den Punkt A fallen.

6. Aufgabe.

Eine gegebene Gerade, AB, so zu schneiden, daß die beiden Abschnitte sich verhalten, wie ihre Summe zu ihrem Unterschied.

Analysis. Sey C der gesuchte Punkt, so hat man $AC : CB = AC + CB : AC - CB$ (p. h.); folglich $AC : AC + CB = AC + CB : 2AC$ (III, 16), oder $AC : AB = AB : 2AC$. Hieraus $2AC^2 = AB^2$ (VII, 5). Nun ist AB gegeben; folglich auch AC (VIII, 8).

Synthesis. Man construire über AB als Hypotenuse ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABD (VIII, 8) und beschreibe um A mit AD einen Kreis. Der Umfang desselben schneide die AB in C, so ist dieser Punkt der gesuchte.

Denn es ist $AB^2 = 2AD^2$ (V, 23, Zus. 2), oder, da $AD = AC$, $AB^2 = 2AC^2 = 2AC \times AC$; folglich $AC : AB = AB : 2AC$ (VII, 6), oder $AC : AB - AC = AB : 2AC - AB$ (III, 16). Aber $AB - AC = BC$ und $2AC - AB = 2AC - (AC + CB) = AC - CB$ (I, 1); folglich $AC : CB = AC + CB : AC - CB$, wzbw.

7. Aufgabe.

Eine gegebene Gerade, AB, so zu schneiden, daß der Unterschied beider Abschnitte die mittlere Proportionale werde zwischen den Theilen der Linie.

Analysis. Sey C der gesuchte Punkt und D der Halbirungspunkt der AB, so hat man $AC = AD + DC$ und $BC = AD - DC$; folglich $AC - BC = 2DC$ (I, 11), und somit $AC : 2DC = 2DC : CB$ (p. h.). Hieraus $4DC^2 = AC \times CB = (AD + DC) \times (AD - DC) = AD^2 - DC^2$ (V, 20), oder $5DC^2 = AD^2$. Sey daher DE der fünfte Theil von DB, d. h. $5DE = DB = DA$, so hat man $5DC^2 = 5DE \times AD$, oder $5DC^2 = 5(DE \times AD)$, d. i. $DC^2 = DE \times AD$ (VI); folglich $AD : DC = DC : DE$ (VII, 6). Nun ist AD gegeben und auch DE (VIII, 34); folglich DC gegeben (VIII, 35), und somit auch, da Punkt D gegeben, der gesuchte Punkt C.

Synthesis. Man halbire AB in D, schneide von DB den fünften Theil ab und bestimme zu AD und DE die mittlere Proportionale DF. Man mache $DC = DF$, so ist C der gesuchte Punkt.

Denn es ist $DC^2 = DF^2$ (p. c.) $= DE \times AD$ (VI, 25); folglich $5DC^2 = 5DE \times AD$, oder, da $5DE = DB = AD$, $5DC^2 = AD \times AD = AD^2$. Hieraus $4DC^2 = AD^2 - DC^2$ (II) $= (AD + DC) \times (AD - DC)$ (V, 20). Aber $4DC^2 = (2DC)^2$ (V, 6, Zus.) $= (AC - CB)^2$ (I, 11); folglich $(AC - CB)^2 = (AD + DC) \times (AD - DC) = AC \times CB$, oder $AC : (AC - CB) = (AC - CB) : CB$ (VII, 6), wzbw.

8. Aufgabe.

Ein gleichseitiges Dreieck so zu beschreiben, daß die Fläche desselben dem Quadrat einer gegebenen Geraden, Q, gleich werde.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte, $AD = Q$ und ADEF ein Quadrat. Sey $DH = AD$ gemacht und GH gezogen, so hat man $\triangle AGH = ADEF = Q^2$ (V, 10), oder, da $\triangle ABC = Q^2$ (p. h.), $\triangle AHG = \triangle ABC$ (V) und somit $AH : AB = AC : AG$ (VII, 18), oder, da $AC = AB$ (p. h.), $AH : AB = AB : AG$. Nun sind AH und AG gegebene Linien; folglich AB gegeben (VIII, 32), d. i. $\triangle ABC$ (IV, 7).

Synthesis. Man ziehe eine Gerade, AM, von unbestimmter Länge, mache $AD = Q$, $DH = AD$ und beschreibe das Quadrat ADEF. Man mache $GAH = \frac{2}{3} R$, ziehe GH und suche zu AG und AH die mittlere Proportionale AB. Man schneide von der Richtung der AG ein Stück $AC = AB$ ab und ziehe CB, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Denn da $AH = 2Q$ (p. c.), so ist $\triangle AHG = ADEF$ (V, 10) $= Q^2$ (p. c.). Und da $AH : AB = AC : AG$ (p. c.), so ist $\triangle ABC = \triangle AHG$ (VII, 19) $= Q^2$. Auch ist, wegen $GAB = \frac{2}{3} R$ (p c.) und $AC = BC = AB$, $\triangle ABC$ gleichseitig; folglich bewiesen, wzbw.

Anmerkung. Die vorliegende Aufgabe ist nur ein specieller Fall von der fünfzehnten dieses Buches, deren Auflösung wir absichtlich auf eine Analyse gegründet haben, welche von der oben mitgetheilten wesentlich verschieden ist.

9. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden AB ein gleichschenkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Grundlinie zum Abstand des Schenkels vom gegenüber liegenden Winkelpunkt ein gegebenes Verhältniß, M : N, beobachte.

Analysis. Sey △ ABC das gesuchte und AD senkrecht auf die Richtung der BC gezogen, so hat man AB : AD = M : N (p. h.); es ist folglich △ ABD gegeben (VIII, 11, Zus.), und somit auch BAC = ABC (IV, 30). Der gesuchte Scheitelpunkt ist folglich, da er in der Richtung der BD liegt, gegeben.

Synthesis. Man beschreibe über M ein bei F rechtwinkliges Dreieck BEF so, daß BF = N wird. Sodann beschreibe man über AB einen Halbkreis und mache DAB = FBE. Man ziehe BD und mache GAB = ABD. Der Durchschnitt der Richtungen BD und AG sey C, so ist △ ABC das gesuchte.

Denn da ADB = R (VI, 23) und DAB = FBE (p. c.), so hat man AB : AD = BE : BF (VII, 12) = M : N (p. c.), und AC = CB (IV, 30), wzbw.

Anmerkung. Diese Aufgabe läßt sich auch auf folgende Weise behandeln (Fig 9 b):

Analysis. Sey △ ABC das gesuchte, BD senkrecht auf die Richtung der AC gezogen, so hat man AB : BD = M : N (p. h.), oder M : N = AB : BD. Nun sind M, N und AB gegebene Linien; folglich BD (VIII, 27), und somit △ ABD gegeben (VIII, 11); folglich auch △ ABC.

Synthesis. Man verlängere AB, ziehe eine Gerade AL unter einem beliebigen Winkel KAL, mache AE = M, EF = N, ziehe EB, sodann FG parallel mit EB und beschreibe über AB einen Halbkreis. In denselben trage man eine Gerade BD = BG (VIII, 1), ziehe AD und durch den Halbirungspunkt H der AB eine Senkrechte. Die Richtung dieser schneide die der AD in C. Man ziehe CB, so ist △ ABC das gesuchte.

Denn es ist einerseits AC = CB (IV, 35) und anderseits AB : BD = AB : BG (III, 10, Zus.) = AE : EF (VII, 8) = M : N (p. c.), wzbw.

10. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Seiten desselben eine arithmetische Proportion bilden und AB die größere der beiden Katheten werde.

Analysis. Sey △ ABC das gesuchte und AD = AC gemacht, so ist BC = AB + DB und AC = AB — DB, (p. h. und I, 14, Zus.). Aber $AB^2 = BC^2 - AC^2$ (V, 23) = $(AB + DB)^2 - (AB - DB)^2 = 4(AB \times DB)$ (V, 22), oder

$AB \times AB = AB \times 4 DB$ (V, 6, Zus.); folglich $4 DB = AB$ (V, 9, Zus.), oder $DB = 1/4 AB$ (IV). Nun ist AB gegeben; folglich auch DB (IV, 13, oder VIII, 31). Aber $BC = AB + DB$; folglich BC, d. i. $\triangle ABC$ gegeben (VIII, 9).

Synthesis. Man halbire AB in E, AE in F, verlängere BA, mache $AG = AF$, stelle AN senkrecht auf AB und beschreibe um B mit BG einen Kreis. Der Umfang desselben schneide AN in C. Man ziehe CB, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Denn es ist $BC = BG = 5 AG$ (p. c.) und $AB = 4 AF = 4 AG$. Aber $AC^2 = BC^2 - AB^2$ (V, 23, Zus. 1) $= (5 AG)^2 - (4 AG)^2 = 25 AG^2 - 16 AG^2$ (VII, 29, Zus.) $= 9 AG^2 = (3 AG)^2$ (VII, 28, Zus.); folglich $AC = 3 AG$. Demgemäß ist $BC - AB = 5 AG - 4 AG = AG$, und $AB - AC = 4 AG - 3 AG = AG$; folglich $BC - AB = AB - AC$ (V), wzbw.

Anmerkung. Eine andere Analysis ist folgende: Sey (Fig. b) $\triangle ABC$ das gesuchte, so hat man $BC - AB = AB - AC$ (p. h.); folglich $AC + BC = 2 AB$. Die Aufgabe ist folglich darauf zurückgeführt: über AB ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Summe aus der Hypotenuse und der andern Kathete gleich werde dem doppelten der gegebenen Kathete AB. Sey daher AC um ein Stück $CD = CB$ verlängert und DB gezogen, so ist, weil $AD = 2 AB$, $\triangle ABD$ gegeben (VIII, 9) und somit auch, da $DBC = ADB$ (IV, 30), Punkt C (IV, 25).

Synthesis. Man ziehe durch AB eine Senkrechte AN, verlängere AB um ein Stück $BE = AB$ und beschreibe um A mit AE einen Kreis. Der Umfang desselben treffe die AN in D. Man ziehe DB, halbire sie in F, stelle FC senkrecht auf BD und ziehe CB, so ist dieses Dreieck das gesuchte.

Denn es ist $AE = AD$ (p. c.) $= AC + CD = AC + CB$ (IV, 35), oder, da $AE = 2 AB$ (p. c.), $AC + CB = 2 AB$. Hieraus ergibt sich leicht $BC - AB = AB - AC$, wzbw.

11. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Seiten desselben eine geometrische Proportion bilden und AB die kleinere der beiden Katheten werde.

Analysis. Sey $\triangle ABC$ das gesuchte, so hat man $AB : AC = AC : BC$ (p. h.); folglich $AC^2 = AB \times BC$ (VII, 5). Aber $AC^2 = BC^2 - AB^2$ (V, 23, Zus. 1); folglich $BC^2 - AB^2 = AB \times BC$ (V), oder $BC^2 = AB^2 + AB \times BC$, oder $BC^2 - AB \times BC = AB^2$ (II). Sey daher D der Halbirungspunkt der AB, so hat man: $BC^2 - 2 AD \times BC = AB^2$ und somit $(BC - AD)^2 = AB^2 + AD^2$ (V, 19, Zusatz). Nun sind AB und AD gegebene Linien; folglich BC — AD gegeben (VIII, 9) und somit auch BC, d. i. $\triangle$ ABC (VIII, 10).

Synthesis. Man halbire AB in D, stelle AN senkrecht auf AB, mache AE = AD, ziehe BE, verlängere sie um ein Stück EF = AE und beschreibe um B mit BF einen Kreis. Der Umfang desselben schneide die AN in C. Man ziehe CB, so ist $\triangle$ ABC die gesuchte Figur.

Denn es ist einerseits $BE^2 = AB^2 + AE^2 = AB^2 + AD^2$ und anderseits $BE^2 = (BF - EF)^2 = (BC - AD)^2 = BC^2 - 2\,AD \times BC + AD^2$ (V, 19), folglich $AB^2 + AD^2 = BC^2 - 2\,AD \times BC + AD^2$ (V) und somit $AB^2 = BC^2 - AB \times BC$ (II), oder aber $AB^2 + AB \times BC = BC^2 = AB^2 + AC^2$ (V, 23). Hieraus $AB \times BC = AC^2$ (II); folglich $AB : AC = AC : BC$ (VII, 6), wzbw.

12. Aufgabe.

Ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Summe aus Hypotenuse und einer Kathete einer gegebenen Geraden, S, gleich werde, und überdieß die andere Kathete zur Hypotenuse ein gegebenes Verhältniß, M : N, beobachte.

Analysis. Sey $\triangle$ ABC das gesuchte, so hat man AB : BC = M : N (p. h.); es ist folglich der Gattung nach gegeben (VIII, 11, Zus.). Sey AC um ein Stück CD = CB verlängert und DB gezogen, so ist AD = AC + CB (p. c.) = S (p. h.) und ADB = ½ ACB (IV, 30, Zus.); folglich $\triangle$ ABD gegeben (VIII, 10). Und da DBC = ADB (IV, 30), so ist der Scheitelpunkt C, nämlich das gesuchte Dreieck ABC, gegeben (IV, 25).

Synthesis. Man beschreibe über M = EF ein bei E rechtwinkliges Dreieck so, daß die Hypotenuse FG = N wird. Sodann ziehe man eine Gerade AX von unbestimmter Länge und auf sie eine Senkrechte AD = S, mache ADK = G und ziehe eine Gerade DB, welche den Winkel ADK halbirt. Endlich mache man DBC = ADB, so ist $\triangle$ ABC das gesuchte.

Denn es ist ACB = ADB + DBC (IV, 28) = 2 ADB

(p. c.) = ADK (p. c.) = G (p. c.) und somit AB : BC = EF : FG (VII, 12) oder, da EF = M und FG = N, AB : BC = M : N, wzbw.

Anmerkung. Eine andere Analyse ist folgende: Sey (Figur 12 ᵇ) △ ABC das gesuchte, BC + CA = S (p. h.), folglich AB : BC = M : N (p. h.). Sey die Hypotenuse BC um ein Stück CD = CA verlängert, DA gezogen und DE senkrecht auf die Richtung der BA gestellt, so hat man AB : BC = EB : BD (VII, 8, Zus.); folglich, da AB : BC = M : N, N : M = BD : BE. Nun sind N, M und BD = S gegebene Linien; folglich BE gegeben (VIII, 28) und somit auch △ EBD (VIII, 10). Es ist aber ADC = DAC (IV, 30) und somit, da EDA = DAC (IV, 21), EDA = ADC. Demgemäß ist Punkt A gegeben (IV, 25); folglich auch Punkt C (IV, 14), das ist △ ABC.

Synthesis. Man suche zu N, M und S (= BD) die vierte Proportionale BE. Man beschreibe über ihr ein bei E rechtwinkliges Dreieck so, daß BD = S wird und halbire den Winkel BDE. Man stelle AC senkrecht auf AB, so ist △ ABC das gesuchte.

Denn es ist AC parallel mit ED (IV, 23); folglich ADE = DAC (IV, 21) = ADC (p. c.) und somit DC = CA (IV, 30); DC + CB = CA + CB (I) = S (p. c.). Ferner ist BD : EB = BC : AB (VII, 8, Zus.); folglich, da N : M = BD : EB (p. c.), N : M = BC : AB, oder AB : BC = M : N, wzbw.

13. Aufgabe.

Das Dreieck zu beschreiben, wenn die Schenkelsumme, S, und das Verhältniß der Grundlinie zu jedem der beiden Schenkel, gegeben.

Analysis. Sey △ABC das gesuchte, der Schenkel AC um den Schenkel BC verlängert, d. h. CD = CB gemacht und BD gezogen, so ist AD = AC + CB = S (p. h.). Seyen M : N und M : K (respective K : M : N) die gegebenen Verhältnisse, nämlich AB : BC = M : N und AB : AC = M : K, so ist das Dreieck ABC der Gattung nach gegeben (VIII, 13, Zus.). Nun ist ADB = $\frac{1}{2}$ ACB (IV, 30, Zus.); folglich AD, so wie die Winkel A und ADB gegebene Größen; folglich △ ABD gegeben (VIII, 15), und somit, da DBC = ADB, auch der Scheitel C, d. i. △ ABC.

Synthesis. Man ziehe eine Gerade, EX, von unbestimmter Länge, mache EF = M und beschreibe über dieser Linie ein Dreieck EFG so, daß FG = N und EG = K wird. Auf der FX nehme man einen beliebigen Punkt A, mache LAX = E, AD = S und

ADP = G. Man halbire mit DB den Winkel ADP und ziehe BC parallel mit DP, so ist △ ABC das gesuchte.

Denn da A = E (p. c.) und ACB = ADP (IV, 21) = G (p. c.), so sind die Dreiecke ABC und EFG gleichwinklig und somit AB : BC = EF : FG, ferner: AB : AC = EF : EG (VII, 12), oder, da EF = M, FG = N und EG = K (p. c.), AB : BC = M : N und AB : AC = M : K. Auch ist CDB = BDP (p. c.) = CBD (IV, 21); folglich BC = CD, und somit AC + CB = AC + CD (I) = AD = S. Es ist somit bewiesen, wzbw.

Anmerkung. Da N : M = BC : AB und K : N = AC : CB, so hat man K + N : N = AC + CB : CB = S : CB und die Aufgabe kann folglich auch so gelöst werden: Man suche zu (K + N), N und S die vierte Proportionale und schneide sie von S ab, so ist der eine Abschnitt = AC, der andere = CB. Sodann suche man zu N, M und BC die vierte Proportionale, AB, und construire über ihr mit AC und BC, als Schenkel, das Dreieck ABC.

14. Aufgabe.

Das Dreieck zu beschreiben, wenn der Ueberschuß der Schenkelsumme über die Grundlinie, U, der Scheitelwinkel, γ, und das Verhältniß beider Schenkel, M : N, gegeben.

Analysis. Sey △ ABC das gesuchte, so ist es, da C = γ und AC : CB = M : N (p. h.), der Gattung nach gegeben (VIII, 14, Zus.). Sey AC um ein Stück CD = CB verlängert und AH = AB gemacht, so ist HD = U, ferner ADB = ½ ACB (IV, 30, Zus.) und AHB gleich dem halben Nebenwinkel des Winkels BAC. Man kennt somit an dem Dreieck HBD eine Seite, DH (= U), und zwei Winkel, nämlich D und H; es ist folglich gegeben (VIII, 15). Nun liegt der Winkelpunkt A in der Richtung DH und ist somit, da HBA = BHA, gegeben. Es ist aber, da DBC = ADB (IV, 30), der Punkt C (IV, 25), d. i. △ ABC gegeben.

Synthesis. Man ziehe eine Gerade EG = M, mache EGF = γ, GF = N, und ziehe EF. Sodann ziehe man eine Gerade DH = U, mache HDK = G und DHL = E. Man halbire die Winkel ADK und AHL. Der Durchschnitt der Halbirungslinien sey B. Man verlängere DH und mache HBA gleich dem Nebenwinkel des Winkels BHD. Endlich ziehe man BC parallel mit DK, so ist $\triangle$ ABC das gesuchte.

Denn es ist $ACB = ADK$ (IV, 21) $= G$ (p. c.) und $DHL + 2\,AHB = 2\,R$ (p. c. und IV, 16). Aber $AHB = ABH$ (p. c.); folglich auch $A + 2\,AHB = 2\,R$ (IV, 28) und somit $DHL + 2\,AHB = A + 2\,AHB$ (V). Hieraus $DHL = A$ (II) $= E$ (p. c.). Die Dreiecke ABC und EFG sind daher gleichwinklig und somit $AC : CB = EG : GF$ (VII, 12) $= M : N$. Und da $CDB = BDK$ (p. c.) $= CBD$ (IV, 21), so ist $CB = CD$; folglich $AC + CB = AC + CD$ (I) $= AD$ und somit $AC + CB - AB = AD - AB$ (II) $= AD - AH$ (IV, 31) $= DH = U$ (p. c.), wzbw.

15. Aufgabe.

Das Dreieck zu beschreiben, wenn zwei Winkel desselben, α, β, und die Linie Q, deren Quadrat dem Dreieck gleich ist, gegeben sind.

Analysis. Sey $\triangle$ ABC das gesuchte, CD senkrecht auf AB gezogen und diese in E halbirt, so hat man $\triangle ABC = AE \times CD$ (V, 10) $= Q^2$ (p. h.). Da $A = \alpha$ und $B = \beta$ (p. h.), so ist das gesuchte Dreieck der Gattung nach gegeben. Sey daher über einer beliebigen Linie KL ein Dreieck KLM so beschrieben, daß $K = \alpha$, $L = \beta$, ferner KL in P halbirt und MO auf sie senkrecht gezogen, so hat man $\triangle KLM = PK \times MO$ (V, 10). Nun ist einerseits $\triangle ABC : \triangle KLM = AB^2 : KL^2$ (VII, 24) $= (2\,AE)^2 : (2\,KP)^2 = 4\,AE^2 : 4\,KP^2 = AE^2 : KP^2$ und anderseits $\triangle ABC : \triangle KLM = Q^2 : KP \times MO$ (III, 10); folglich $AE^2 : KP^2 = Q^2 : KP \times MO$, oder $AE^2 : Q^2 = KP^2 : KP \times MO = KP : MO$ (VI, 2, Zus.). Nun sind Q, KP und MO gegebene Linien, folglich AE gegeben (VIII, 36); folglich AB ($= 2\,AE$) gegeben, und somit auch das gesuchte Dreieck ABC (VIII, 15).

Synthesis. Man ziehe eine Gerade, KL, von beliebiger Länge und beschreibe über ihr ein Dreieck so, daß $K = \alpha$ und

$L = \beta$ wird. Man halbire KL in P und ziehe auf sie MO senkrecht. Sodann bestimme man eine Gerade AE so, daß die Proportion besteht $AE^2 : Q^2 = KP : MO$ (VIII, 36), verlängere AE um ein Stück $EB = AE$ und beschreibe über AB ein Dreieck ABC so, daß $A = \alpha$ und $B = \beta$ wird, so ist dieses die gesuchte Figur.

Denn es ist $AE^2 : Q^2 = KP : MO$ (p. c.) $= KP^2 : KP \times MO$ (VII, 2, Zus.), oder $Q^2 : KP \times MO = AE^2 : KP^2 = 4\,AE^2 : 4\,KP^2 = (2\,AE)^2 : (2\,KP)^2 = AB^2 : KL^2$. Aber $\triangle\, ABC : \triangle\, KLM = AB^2 : KL^2$ (VII, 24); folglich Dreieck $ABC : \triangle\, KLM = Q^2 : KP \times MO$. Nun ist $\triangle\, KLM = KP \times MO$ (V, 10); folglich $\triangle\, ABC = Q^2$ (III, 11, Zus.), wzbw.

16. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß der Scheitelwinkel einem gegebenen Winkel, γ, und die Fläche dem Quadrat einer gegebenen Geraden, K, gleich werde.

Analysis. Sey $\triangle\, ABC$ das gesuchte, CD senkrecht auf AB gezogen und diese in E halbirt, so hat man $\triangle\, ABC = AE \times CD$ (V, 10); anderseits aber $\triangle\, ABC = K^2$ (p. h.); folglich $AE \times CD = K^2$ (V), oder $AE : K = K : CD$ (VII, 6). Nun sind AE und K gegebene Linien; folglich CD gegeben (VIII, 30). Augenscheinlich liegt Punkt C im Umfang eines gegebenen Kreises (VIII, 4) und zugleich in einer Geraden, parallel mit AB und von ihr um die gefundene Linie CD entfernt; er ist folglich gegeben (V, 13), und somit auch das gesuchte Dreieck.

Synthesis. Man beschreibe über AB einen Kreisabschnitt so, daß er den gegebenen Winkel, γ, fasse, halbire AB in E und suche zu AE und K die dritte Proportionale. Um diese entfernt ziehe man eine Gerade MN parallel mit AB. Sie schneide den Bogen in C. Man ziehe AC und CB, so ist $\triangle\, ABC$ das gesuchte.

Denn zieht man CD senkrecht auf AB, so hat man $AE : K = K : CD$ (p. c.); folglich $AE \times CD = K^2$ (VII, 5). Aber

△ ABC = AE × CD (V, 10); folglich △ ABC = K^2 und ACB = γ (p. c.), wzbw.

17. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Sehne AB ein Dreieck so in den gegebenen, der Sehne zugehörigen, Kreis zu beschreiben, daß die Schenkel ein gegebenes Verhältniß, M : N, beobachten.

Analysis. Sey △ ABC das gesuchte, so hat man AC : CB = M : N (p. h.). Nun ist aber, wenn CD den Winkel ACB halbirt, AC : CB = AD : DB (VII, 11); folglich M : N = AD : DB (III, 4). Nun sind AB, M und N gegebene Linien; folglich Punkt D gegeben (VIII, 33). Sey CD nach E verlängert, so ist, da ACE = ECB, Bogen AE = EB (VI, 22); der Peripheriepunkt E ist daher gegeben (VIII, 2) und somit auch der gesuchte Punkt C, indem er in der Richtung der gegebenen Geraden ED und zugleich im Umfang des gegebenen Kreises liegt.

Synthesis. Man halbire den Bogen AB in E und zerlege die Sehne AB so in zwei Theile, daß die Proportion besteht, AD : DB = M : N. Man ziehe ED und verlängere sie nach C, ziehe AC und CB, so ist △ ABC das gesuchte.

Denn da ACE = ECB (VI, 18 und 22), d. i. ACD = DCB; so hat man AC : CB = AD : DB (VII, 10) = M : N (p. c.), wzbw.

Anmerkung. Eine andere Analysis ist folgende: Sey △ ABC das gesuchte (Fig. 17 b), so hat man AC : CB = M : N (p. h.); folglich, da der Winkel ACB der Größe nach gegeben (VI, 22), △ ABC der Gattung nach gegeben (VIII, 14, Zus.). Man kennt also von dem gesuchten Dreieck die Grundlinie AB, so wie den Winkel CAB; es ist folglich, da der Scheitel C im Umfang des gegebenen Kreises liegt, gegeben.

Synthesis. Man nehme auf dem Bogen einen beliebigen Punkt C′ ziehe C′A und C′B, mache C′F = M, C′G = N und ziehe FG. Man mache BAC = GFC′ und ziehe CB, so ist △ ABC das gesuchte.

Denn da AC′B = ACB und C′FG = CAB (VI, 22 u. p. c.), so sind die Dreiecke ABC und FGC′ gleichwinklig; folglich AC : CB = FC′ : C′G (VII, 12) = M : N (p. c.), wzbw.

18. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß die Schenkelsumme einer gegebenen Geraden, HJ

(= S), gleich werde und der Höhenperpendikel durch einen in der Richtung der AB gegebenen Punkt D gehe.

Analysis. Sey $\triangle$ ABC das gesuchte, CD gezogen und mit dem kleinern Schenkel CB um C ein Kreis beschrieben, dessen Umfang die Richtungen AF und AB in E, F und G schneidet, so hat man $AB \times AG = AF \times AE$ (VI, 37); folglich, da $AF = AC + CB = S$ (p. h.), $S : AG = AB : AE$ (VII, 4). Demgemäß ist AE gegeben (VIII, 28) und somit auch der Durchmesser EF, oder der Halbmesser BC des Kreises um C; der Mittelpunkt desselben ist folglich, da er in der durch den Halbirungspunkt der BG gezogenen Senkrechten DM liegt, gegeben, und somit auch das gesuchte Dreieck ABC.

Synthesis. Man mache $DG = DB$ und suche zu S, AG, AB die vierte Proportionale. Diese schneide man von HJ ab. Sie sey HK. Man halbire KJ in L. Jetzt ziehe man DM senkrecht auf AB und beschreibe um B mit KL einen Kreis. Der Umfang desselben schneide die DM in C. Man ziehe AC und CB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Denn es ist $S : AG = AB : HK$ (p. c.); folglich $AG \times AB = HK \times S$ (VII, 3). Und beschreibt man jetzt um C mit CB einen Kreis, dessen Umfang die Richtungen AB und AC in B und G, E und F schneidet, so hat man $AG \times AB = AE \times AF$ (VI, 37); folglich $HK \times S = AE \times AF$. Aber $HK = HL - LJ$ und $S = HL + LJ$, ferner $AE = AC - CF$ und $AF = AC + CF$; folglich $(HL - LJ) \times (HL + LJ) = (AC - CF) \times (AC + CF)$, d. i. $HL^2 - LJ^2 = AC^2 - CF^2$ (V, 20). Nun ist $LJ = CF$ (p. c.); folglich $HL = AC$ (I, 12, Zus.) und somit $HL + LJ = AC + CB$, oder, da $HL + LJ = HJ$, $AC + CB = HJ = S$, wzbw.

19. Aufgabe.

Unter einem gegebenen Winkel, MBN, ein Dreieck so zu beschreiben, daß die Summe aus der ersten und dritten Seite einer gegebenen Geraden, S, die aus der zweiten und dritten hingegen einer zweiten gegebenen Linie, S′, gleich werde.

Analysis. Sey △ ABC das gesuchte, BA um ein Stück AD = AC und BC um ein Stück CE = AC verlängert, so ist AD = S, BE = S′ (p. h.). Sey DE gezogen und mit ihr parallel durch einen beliebigen Punkt F in der AD, FP, welche die Diagonale AE in H schneidet. Sey endlich HG parallel zu AC gelegt, so hat man, wegen GHE = CAE (IV, 21) = AEC (IV, 30), HG = GE (IV, 31). Aber AF : FD = AH : HE (VII, 8) und CG : GE = AH : HE (VII, 8); folglich AF : FD = CG : GE (III, 4), oder AF + FD : FD = CG + GE : GE (III, 16), d. i. AD : FD = CE : GE. Aber AD = AC = CE (p. c), folglich FD = GE (III, 11) = GH. Nun ist, da Punkt F auf der BD beliebig angenommen werden darf, FD als eine gegebene Linie anzusehen; es ist somit Punkt P gegeben (IV, 26). Wegen GE = FD (= GH), ist Punkt G gegeben. Nun liegt H in der FP und im Umfang eines Kreises um G mit GE; er ist folglich gegeben. Und da A in der Richtung der EH liegt, so ist auch dieser Punkt gegeben. Endlich ist, wegen AC parallel mit HG, auch Punkt C (IV, 26), d. i. Dreieck ABC gegeben.

Synthesis. Man schneide von BM ein Stück AD = S, von BN ein Stück BE = S′ ab und ziehe DE. Auf der BD nehme man einen beliebigen Punkt F und ziehe FP parallel mit DE. Man mache EG = DF und beschreibe um G mit GE einen Kreis. Der Umfang desselben schneide die FP in H. Man ziehe EH und verlängere sie nach A. Man ziehe GH und mit ihr parallel die Linie AC, so ist Dreieck ABC das gesuchte.

Denn zieht man HK parallel mit FD, so hat man, wegen HK = FD (V, 2) = GE (p. c.), AD : AE = GE : HE (VII, 8, Zus.). Aber CE : AE = GE : HE (VII, 8, Zus.); folglich AD : AE = CE : AE (III, 4), und somit AD = CE (III, 18). Aber HG = GE (p. c.) und AC : CE = HG : GE; folglich AC = CE, d. h. AC = CE = AD, und somit BA + AC = BA + AD = S und BC + CA = BC + CE = S′, wzbw.

20. Aufgabe.

Den geometrischen Ort des Scheitelpunktes eines Dreiecks zu finden, wenn die Grundlinie, AB, und das Verhältniß der Schenkel, M : N, gegeben.

Analysis. Sey C ein beliebiger Punkt des gesuchten Ortes, AC und CB gezogen, so hat man AC : CB = M : N (p. h.); folglich, wenn AB in D so geschnitten wird, daß AD : DB = M : N ist, AC : CB = AD : DB (III, 4). Sey M > N; alsdann ist AC > CB (III, 18). Sey CF = CB gemacht, BF und CD gezogen, BG mit DC parallel gelegt und auf diese (CD) die Linie CE senkrecht gestellt, so hat man AC : CG = AD : DB (VII, 8) folglich, da AC : CB = AD : DB, AC : CG = AC : CB (III, 4) und somit CB = CG (III, 11, Zus.) = CF (p. c.), woraus FBG = R folgt (VI, 23) = DCE (p. c.). Aber CBG = BCD (IV, 21); folglich FBG — CBG = DCE — BCD (II), d. i. FBC = BCE, somit BF mit CE parallel (IV, 20), und eben deßwegen AC : CF = AE : EB (VII, 8, Zus.), oder, weil CF = CB, AC : CB = AE : EB. Nun ist AC : CB = AD : DB; folglich AD : DB = AE : EB.

Wegen AD + DB = AB und AD : DB = M : N ist der Punkt D gegeben (VIII, 33). Und wegen AD : DB = AE : EB ist der Punkt E gegeben (Satz 5); folglich auch der Umfang desjenigen Kreises, welcher DE zum Durchmesser hat; dieser (Umfang) ist aber, weil DCE = R, der gesuchte Ort des Punkts C (VI, 23).

Synthesis. Man schneide die gegebene Gerade, AB, in einem Punkt D so, daß AD : DB = M : N, und verlängere sie um ein Stück BE so, daß AD : DB = AE : EB (Satz 5). Man beschreibe über DE als Durchmesser einen Kreis, so ist der Umfang desselben der gesuchte geometrische Ort.

Um dieß zu beweisen nehme man auf dem Umfang des Kreises einen beliebigen Punkt C, ziehe CA, CB, CD, CE, ferner BF parallel mit EC und mache CG = CF, so hat man AE : BE = AC : CF (VII, 8, Zus.), oder, wegen CF = CG (p. c.)

AE : BE = AC : CG. Anderseits ist aber auch AE : BE = AD : DB (p. c.), folglich AC : CG = AD : DB (III, 4) und somit DC parallel mit BG (VII, 9). Und da auch BF mit EC parallel (p. c.), so hat man CBG = BCD und FBC = BCE (IV, 21), d. i. CBG + FBC = BCD + BCE (I), oder FBG = DCE = R (VI, 23). Demgemäß geht ein um C mit CF beschriebener Kreis durch B (und G); folglich CF = CB = CG. Es wurde aber bewiesen, daß AC : CG = AD : DB = M : N (p. c.), daher AC : CB = M : N, wzbw.

Anmerkung. Mit leichter Mühe wird man sich überzeugen, daß CE nur dann mit AB parallel seyn könnte, wenn AC = CB und in diesem Fall wäre die Senkrechte durch den Halbirungspunkt der AB der geometrische Ort des Scheitelpunkts.

21. Aufgabe.

Ein gegebenes Dreieck, ABC, so in zwei Theile zu zerlegen, daß die Theile ein gegebenes Verhältniß, M : N, beobachten und zugleich die Theilungslinie durch einen in der Grundlinie, AB, gegebenen Punkt, D, gehe.

Analysis. Sey DF die gesuchte Theilungslinie, so hat man $\triangle$ ADF : DBCF = M : N (p. h.); folglich $\triangle$ ABC : DBCF = M + N : N (III, 16). Sey die Grundlinie AB in einem Punkt E so geschnitten, daß AE : EB = M : N (VIII, 33), so hat man, da Dreieck AEC : Dreieck EBC = AE : EB (VII, 1), $\triangle$ AEC : $\triangle$ EBC = M : N (III, 4); folglich $\triangle$ ABC : $\triangle$ EBC = M + N : N (III, 16), und somit $\triangle$ ABC : DBCF = $\triangle$ ABC : $\triangle$ EBC. Hieraus DBCF = $\triangle$ EBC (III, 11, Zus.); daher $\triangle$ ABC — DBCF = $\triangle$ ABC — $\triangle$ EBC, d. i. $\triangle$ ADF = $\triangle$ AEC; folglich $\triangle$ ADF — $\triangle$ AEF = $\triangle$ AEC — $\triangle$ AEF, d. i. $\triangle$ EFD = $\triangle$ EFC, und somit EF parallel mit CD (V, 8). Nun ist Punkt E gegeben (VIII, 33); folglich auch Punkt F (IV, 26), d. i. DF.

Synthesis. Man bestimme auf der Grundlinie AB einen Punkt E so, daß AE : EB = M : N, ziehe CD, lege EF mit jener parallel und ziehe FD, so ist diese Linie die gesuchte Theilungslinie.

Denn zieht man EC, so ist $\triangle$ EFC = $\triangle$ EFD (V, 7); folglich $\triangle$ EFC + $\triangle$ AEF = $\triangle$ EFD + $\triangle$ AEF, das ist $\triangle$ AEC = $\triangle$ ADF, und somit $\triangle$ ABC — $\triangle$ AEC = $\triangle$ ABC — $\triangle$ ADF, d. i. $\triangle$ EBC = DBCF. Es besteht demnach die Proportion $\triangle$ AEC : $\triangle$ EBC = $\triangle$ ADF : DBCF = AE : EB (VII, 1) = M : N (p. c.), wzbw.

Anmerkung. Soll ein gegebenes Dreieck, ABC, in mehrere Theile so zerlegt werden, daß sie gegebene Verhältnisse beobachten, etwa K : M : N, und daß zugleich sämmtliche Theilungslinien, CD, CE, die Grundlinie vom Scheitel ausgezogen schneiden, so wird es bloß darauf ankommen, die Grundlinie AB in drei Theile so zu zerlegen, daß AE : K = ED : M = DB : N (VIII, 35).

22. Aufgabe.

Ein gegebenes Dreieck, ABC, so in zwei Theile zu zerlegen, daß die Theile ein gegebenes Verhältniß, M : N, beobachten und zugleich die Theilungslinie zur Grundlinie, AB, parallel werde.

Analysis. Sey DE die gesuchte Theilungslinie, so hat man ABED : $\triangle$ DEC = M : N (p. h.); folglich $\triangle$ ABC : $\triangle$ DCE = M + N : N (III, 16). Es ist aber auch $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEC = $AC^2 : DC^2$ (VII, 24); folglich M + N : N = $AC^2 : DC^2$ (III, 4). Nun sind M, N, und AC gegebene Linien; folglich CD (VIII, 36) gegeben und somit auch die gesuchte Theilungslinie DE (IV, 26).

Synthesis. Man bestimme eine Linie U so, daß die Proportion besteht: M + N : N = $AC^2 : U^2$ (VIII, 33), und mache CD = U. Man ziehe DE parallel mit AB, so ist jene die gesuchte Theilungslinie.

Denn es ist $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEC = $AC^2 : DC^2$ (VII, 24) einerseits und M + N : N = $AC^2 : DC^2$ anderseits (p. c.); folglich $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEC = M + N : N (III, 4) und somit ABED : $\triangle$ DEC = [(M + N) — N] : N (III, 16) = M : N, wzbw.

23. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden, AB, ein Dreieck so zu beschreiben, daß es einem gegebenen Dreieck, DEF, gleich werde und mit ihm einen Winkel, D, gleich habe.

Analysis. Sey △ ABC das gesuchte und A = D, so hat man AB : DE = DF : AC (VII, 18). Nun sind AB, DE, DF, gegebene Linien; folglich AC gegeben (VIII, 28) und somit auch Dreieck ABC (VIII, 14).

Synthesis. Man mache MAB = D, suche zu AB, DE, DF die vierte Proportionale, schneide sie von AM ab und ziehe CB, so ist Dreieck ABC das gesuchte.

Denn da A = D (p. c.), und AB : DE = DF : AC (p. c.), so ist △ ABC = △ DEF (VII, 19), wzbw.

24. Aufgabe.

Von zwei gegebenen Dreiecken, ABC, NPQ, welche einen Winkel gleich haben, A = N, soll das eine, ABC, in ein anderes so verwandelt werden, daß es dem andern gegebenen Dreieck ähnlich werde.

Analysis. Sey △ AED das gesuchte und BF parallel mit ED gezogen, so hat man AC : AD = AE : AB (VII, 18). Aber AD : AF = AE : AB (VII, 8, Zus.); folglich AC : AD = AD : AF (III, 4). Nun ist AED = ABF (IV, 21) = NPQ (p. h.), folglich Punkt F gegeben (IV, 25). Es ist daher Punkt D gegeben (VIII, 32) und folglich auch E (IV, 26), d. i. △ AED.

Synthesis. Man mache ABF = NPQ, suche zu AC und AF die mittlere Proportionale, U, mache AD = U und ziehe DE parallel mit FB, so ist Dreieck AED das gesuchte.

Denn die Dreiecke AED und NPQ sind gleichwinklig (p. c.) und AC : AD = AD : AF (p. c.), ferner AE : AB = AD : AF (VII, 8, Zus.); folglich AC : AD = AE : AB (III, 4) und somit △ AED = △ ABC (VII, 19), wzbw.

25. Aufgabe.

Ein gegebenes Dreieck, ABC, unter Beibehaltung eines Winkels A in ein anderes so zu verwandeln, daß die Seiten, welche den beizubehaltenden Winkel einschließen, ein gegebenes Verhältniß, M : N, beobachten.

Analysis. Sey △ ADE das gesuchte, so hat man, wegen

$\triangle ADE = \triangle ABC$ (p. h.), $AB : AD = AE : AC$ (VII, 18) Aber $AD : AE = M : N$ (p. h.); folglich $AB : AE = M \times AE : N \times AC$ (VII, 7). Aber $AB \times AE : AE \times AE = AB : AE$ (VII, 2, Zus.); folglich $AB \times AE : AE \times AE = M \times AE : N \times AC$ (III, 4), oder $AB \times AE : M \times AE = AE^2 : N \times AC$ (III, 19), oder da $AB \times AE : M \times AE = AB : M$ (VII, 2, Zus.), $AB : M = AE^2 : N \times AC$; folglich, $N \times AC = Q^2$ gesetzt, $AB : M = AE^2 : Q^2$. — Nun sind AC und N gegebene Linien; folglich Q gegeben (VIII, 30). Und da AB und M ebenfalls gegebene Linien sind, so ist AE gegeben (VIII, 36). Endlich ist, wegen $N : M = AE : AD$ (p. h.), AD gegeben und somit auch Dreieck ADE (VIII, 14).

Synthesis. Man suche zu AC und N die mittlere Proportionale, Q, und bestimme hernach eine Linie AE so, daß die Proportion besteht: $AE^2 : Q^2 = AB : M$ (VIII, 33). Sodann bestimme man zu N, M und AE die vierte Proportionale und schneide sie auf der Richtung der AB von A aus ab, hingegen die früher gefundene AE auf der Richtung der AC. Man ziehe DE, so ist Dreieck ADE das gesuchte.

Denn es ist $AE^2 : Q^2 = AB : M$ und $AC : Q = Q : N$ (p. c.); folglich $AE \times AE : N \times AC = AB : M$ (VII, 3). Aber $AB \times AE : M \times AE = AB : M$ (VII, 2, Zus.); folglich $AE \times AE : N \times AC = AB \times AE : M \times AE$ (III, 4), oder $AE \times AE : AB \times AE = N \times AC : M \times AE$ (III, 19), d. i. $AE : AB = N \times AC : M \times AE$ (VII, 2, Zus.). Nun ist $N : M = AE : AD$ (p. c.); folglich $M \times AE = N \times AD$ (VII, 3), und somit $AE : AB = N \times AC : N \times AD = AC : AD$ (VII, 2, Zus.); daher $\triangle ABC = \triangle ADE$ (VII, 19), wzbw.

26. Aufgabe.

Von einem außerhalb des Kreises gegebenen Punkt, A, eine Sekante so zu ziehen, daß eine gegebene Gerade K die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten jener werde.

Analysis. Sey AB die gesuchte Sekante, so hat man $AC : K = K : CB$ (p. h.); folglich $K^2 = AC \times CB$ (VII, 5) und somit $K^2 + AC^2 = AC^2 + AC \times CB = AC \times (AC + CB) = AC \times AB$ (V, 16). Nun ist aber, wenn AD den Kreis berührt, $AD^2 = AC \times AB$ (VI, 35); folglich $K^2 + AC^2 = AD^2$, oder $AC^2 = AD^2 - K^2$; folglich da AD und K gegeben (VI, 29) AC gegeben (VIII, 11), und somit auch die Punkte C und B.

Synthesis. Man ziehe die Tangente AD, beschreibe über ihr ein bei E rechtwinkliges Dreieck ADE so, daß $DE = K$ wird, mache $AC = AE$ und verlängere jene nach B, so ist AB die gesuchte Sekante.

Denn es ist $AB \times AC = AD^2$ (VI, 35), folglich, da $AE = AC$, $AD^2 - AE^2 = AB \times AC - AC^2 = (AB - AC) \times AC$ (V, 17) $= CB \times AC$. Aber $AD^2 - AE^2 = DE^2 = K^2$ (V, 23, Zus.); folglich $CB \times AC = K^2$, oder $AC : K = K : BC$ (VII, 6), wzbw.

27. Aufgabe.

Es ist ein Kreis gegeben und eine Gerade AB. Man soll auf dem Umfang desselben einen Punkt so bestimmen, daß die von ihm nach A und B gezogenen Richtungen einen Bogen abschneiden, dessen Sehne mit AB parallel wird.

Analysis. Sey C der gesuchte Punkt, DE die zu AB parallele Sehne und durch D eine Tangente gelegt, welche die Richtung der AB in F trifft, so hat man $FDE = C$ (VI, 33) oder seinem Supplement (d. h. demjenigen Winkel, welcher C zu zwei Rechten ergänzt). Aber, da AB zu DE parallel (p. h.), $AFD = FDE$ oder seinem Supplement; folglich $AFD = C$. Die Dreiecke ABC und AFD sind daher gleichwinklig (IV, 28); folglich $AD : AF = AB : AC$ (VII, 12), oder $AD \times AC = AF \times AB$ (VII, 3). Nun ist aber, falls man durch A eine Tangente legt, oder, wenn A innerhalb des Kreises liegt, auf den durch A gezogenen Durchmesser eine Senkrechte AG errichtet, $AD \times AC = AG^2$ (VI, 35, oder VI, 25), folglich $AG^2 = AF \times AB$, oder $AB : AG = AG : AF$ (VII, 6). Nun sind AB und AG gegeben; folglich auch AF, d. i. Punkt F. Dadurch ist der Punkt D gegeben (VI, 29); folglich auch der gesuchte Punkt C, indem dieser in der Richtung AD oder DA und zugleich im Umfang des gesuchten Kreises liegt.

Synthesis. Man ziehe durch A eine Tangente, oder, falls der Punkt innerhalb des Kreises liegt, durch ihn einen Durchmesser, sodann auf diesen die Senkrechte AG. Hierauf suche man zu AB und AG die dritte Proportionale und schneide sie von AB ab (= AF). Man lege durch F die Tangente FD, ziehe AD und verlängere sie nach C, so ist dieser Punkt der gesuchte.

Denn zieht man BC (und verlängert sie nöthigenfalls), ferner die Sehne DE, so hat man $AB : AG = AG : AF$ (p. c.); folglich $AG^2 = AB \times AF$ (VII, 5), oder, da $AG^2 = AC \times AD$ (VI, 35), $AB \times AF = AC \times AD$, d. i. $AB : AC = AD : AF$ (VII, 4). Demgemäß sind die Dreiecke ABC und ADF gleichwinklig (VII, 14) und somit AB parallel mit DE, wzbw.

28. Aufgabe.

Um den Mittelpunkt A eines mit AB beschriebenen Kreises einen zweiten Kreis concentrisch so zu beschreiben, daß er zu dem Ring zwischen den Umfängen ein gegebenes Verhältniß, M : N beobachte.

Analysis. Sey AC der gesuchte Halbmesser und es bezeichne K den gegebenen, K' hingegen den gesuchten Kreis, so bestehen die Proportionen

$K' : K - K' = M : N$, oder $K' : K' - K = M : N$,
folglich $K' : K = M : M + N$, „ $K' : K = M : M - N$.
Aber $K' : K = AC^2 : AB^2$ „ $K' : K = AC^2 : AB^2$ (VII, 28),
daher $M : M + N = AC^2 : AB^2$ „ $M : M - N = AC^2 : AB^2$.

Nun sind M, N und AB gegebene Linien, folglich AC gegeben (VIII, 36), und somit der gesuchte Kreis der Lage und Größe nach gegeben.

Synthesis. Man bestimme eine Linie AC so, daß die Proportion besteht: $M : M \pm N = AC^2 : AB^2$ (VIII, 36), schneide sie von der Richtung der AB ab, und beschreibe um A mit AC einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Denn es ist $K' : K = AC^2 : AB^2$ (VII, 28) anderseits aber $M : M \pm N = AC^2 : AB^2$ (p. c.); folglich $K' : K = M : M \pm N$ und somit $K' : K - K' = M : N$, oder $K' : K' - K = M : N$, wzbw.

Drittes Buch.

Kreisaufgaben mit Berührungen.

Erklärungen.

1. Eine Gerade, welche die Mittelpunkte zweier Kreise mit einander verbindet, heißt die Centrale dieser Kreise.

2. Zwei Kreise (Kreisumfänge) berühren sich, wenn sie nur einen Punkt gemein haben;

3. sie berühren sich von außen, wenn der eine Berührungskreis außerhalb des andern liegt;

4. von innen, wenn der eine Berührungskreis innerhalb des andern liegt.

---

1. Lehrsatz.

Sind zwei Tangenten, MN, KL, mit einander parallel, dann liegt der Mittelpunkt des Kreises in der geraden Linie, welche die Berührungspunkte A und B mit einander verbindet.

Beweis. Man nehme auf den Umfang des Kreises einen beliebigen Punkt C, ziehe die Sehnen AC und CB, so hat man $a + \beta + \alpha + b = 2R$. Aber $a = b$ und $\alpha = \beta$ (VI, 33) und somit $b + \beta + \beta + b = 2R$, d. i. $2(b + \beta) = 2R$;

folglich $b + \beta = R$. Es ist daher $ACB = R$ und somit AB ein Durchmesser des Kreises (VI, 24).

2. Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise, der eine um A, der andere um B beschrieben, sich schneiden: so halbirt die Centrale, AB, die beiden Kreisen gemeinschaftliche Sehne DE unter rechten Winkeln; auch ist die Centrale kleiner als die Summe, hingegen größer als der Unterschied der beiden Halbmesser.

Beweis. Man ziehe die Halbmesser DA und AE, DB und BE, so ist $DAB = EAB$ (IV, 6); folglich $ACD = ACE$ und $DC = CE$ (IV, 3), was erstens zbw.

Sodann ist $AB < AD + DB$, hingegen $AB + DB > AD$, d. i. $AB > AD - DB$; folglich bewiesen, was zweitens zbw.

3. Lehrsatz.

Zwei Kreise, die sich berühren, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Beweis. Sollten sie A zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, so ziehe man AB beliebig, ferner nach dem Berührungspunkt C den Halbmesser AC. Alsdann hätte man einerseits $AB = AC$ und anderseits $AD = AC$; folglich $AD = AB$, was ein Widerspruch ist. Es ist folglich bewiesen, wzbw.

4. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise berühren, so geht die Centrale durch den Berührungspunkt C.

Beweis. Sey A der Mittelpunkt des einen Kreises. Sollte nun der des andern außerhalb der Richtung der AC, etwa in B liegen, so ziehe man AB und BC.

Erster Fall: Die Kreise berühren sich von außen. Alsdann hat man $AC = AD$ und $CB = BE$ (als Halbmesser); folglich $AC + CB = AD + BE$, und somit $AC + CB < AD + DE + EB$, d. i. $AC + CB < AB$, was ein Widerspruch ist (IV, 1).

Zweiter Fall: Die Kreise berühren sich von innen. Alsdann hat man $AB + BC > AC$, oder, da $AC = AD$ und $BC = BE$ (als Halbmesser), $AB + BE > AD$, d. i. $AE > AD$, was ein Widerspruch ist.

Die Centrale geht also in beiden Fällen durch den Berührungspunkt C, wzbw.

Zusatz. Sey nun F der Mittelpunkt des zweiten Kreises, so ist die Centrale $AF = AC \pm CF$, d. h. gleich der Summe der Halbmesser, wenn die Kreise sich von außen, dem Unterschied dagegen, wenn die Kreise sich von innen berühren.

5. Lehrsatz.

Zwei Kreise, der eine um A, der andere um B, berühren sich von außen, wenn die Centrale, AB, der Summe der Halbmesser gleich ist.

Beweis. Man schneide von AB den Halbmesser AC, des Kreises um A ab, so ist BC der Halbmesser des Kreises um B, folglich C beiden Umfängen gemeinschaftlich. Sollten sich nun die beiden Kreise nicht von außen berühren, so müßten sie sich entweder von innen berühren oder sich schneiden. Jenes ist nicht möglich, indem der Mittelpunkt B auf der Verlängerung der AC d. h. außerhalb des Kreises um A liegt. Aber auch schneiden können sich die beiden Kreise nicht, indem sonst $AB < AC + CB$ seyn müßte (Lehrsatz 2), was der Annahme widerspricht. Somit bewiesen, wzbw.

6. Lehrsatz.

Zwei Kreise, der eine um A, der andere um B beschrieben, berühren sich von innen, wenn die Centrale, AB, dem Unterschied der Halbmesser gleich ist.

Beweis. Sey A der Mittelpunkt des größern Kreises. Man verlängere AB bis in den Umfang desselben, so ist $AB = AC - BC$, folglich BC der Halbmesser des kleinern Kreises, und somit C beiden Peripherieen gemeinschaftlich. Sollten sich nun die Kreise von außen berühren, oder sich schneiden, so hätte man im erstern

Falle AB = AC + BC (Lehrsatz 4, Zus.), im zweiten aber AB < AC — BC (Lehrsatz 2). Beides widerspricht der Annahme. Die Kreise berühren sich daher von innen, wzbw.

7. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise von außen berühren und man zieht vom Berührungspunkt C in beliebigen Richtungen die Geraden AD und BE, so schneiden sie Bogen ab deren Sehnen parallel sind.

Beweis. Man ziehe durch C an einen der beiden Kreise eine Tangente MN, so berührt sie auch den andern und man hat deßhalb ACM = B (VI, 33) = DCN (IV, 18) = E (VI, 33), und somit Sehne AB parallel mit DE (IV, 20), wzbw.

8. Lehrsatz.

Schneidet man in einem Dreieck ABC die Verlängerungen der Schenkel durch eine Gerade DE parallel mit der Grundlinie AB, so berühren sich die Kreise, welche um die Dreiecke ABC und DEC beschrieben werden, im Punkt C.

Beweis. Man ziehe durch C an einen der beiden Kreise, etwa an den um △ ABC, eine Tangente MN, so ist ACM = B (VI, 33) = DCN (IV, 18). Aber B = E (IV, 21); folglich DCN = E und somit MN auch eine berührende für den Kreis um △ DEC (VI, 34), woraus die oben aufgestellte Behauptung sich sogleich ergibt.

9. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise von innen berühren und man zieht durch den Berührungspunkt C beliebige Richtungen CD und CE, so schneiden sie Bogen ab, deren Sehnen AB und DE zu einander parallel sind.

Beweis. Man ziehe an den äußern Kreis eine Tangente MN, so ist sie auch für den innern eine Berührende und man hat MCA = B (VI, 33) = E; folglich AB parallel mit DE (IV, 20), wzbw.

10. Lehrsatz.

Werden die Schenkel eines Dreiecks DEC durch eine Gerade AB parallel mit der Grundlinie DE geschnitten, so berühren sich die Kreise um die Dreiecke ABC und DEC im Scheitel C.

Beweis. Zieht man durch C an den Kreis um $\triangle$ DEC eine Tangente MN, so ist MCA = B (VI, 33) = E (IV, 21); MN berührt also auch den Kreis um $\triangle$ ABC (VI, 34), wzbw.

11. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise, der eine um A, der andere um B beschrieben, in einem Punkt C berühren, und wenn überdieß irgend zwei Halbmesser der beiden Kreise, etwa AE und BD, zu einander parallel sind: dann liegt der Berührungspunkt C in der Richtung der Geraden DE.

Beweis. Man ziehe die Centrale AB, so geht diese durch den Berührungspunkt C (Lehrsatz 4); folglich A = B (IV, 21). Nun ist AC = AE und BC = BD; folglich AC : AE = BC : BD und somit ACE = BCD. Aber ACE + ECB = 2 R (IV, 16); folglich auch BCD + ECB = 2 R, d. h. CD und CE fallen in eine und dieselbe Richtung (IV, 17), wzbw.

12. Lehrsatz.

Wenn die Umfänge zweier Kreise, der eine um A, der andere um B, einen Punkt C gemein haben, die Halbmesser AE und BD zu einander parallel sind, und überdieß die Sehnen DC und CE einerlei Richtung halten, so berühren sich die Kreise in C.

Beweis. Man ziehe AC und CB, so hat man E = D (IV, 21) und, weil CA = AE, CB = BD, CA : AE = CB : BD; folglich ACE = BCD (VII, 15). Aber BCD + BCE = 2 R (IV, 16); also auch ACE + BCE = 2 R. Es halten somit auch AC und CB einerlei Richtung (IV, 17); folglich AB = AC + CB und somit C ein Berührungspunkt der beiden Kreise (Lehrsatz 5 und 6), wzbw.

13. Aufgabe.

An einen gegebenen Kreis drei Tangenten so zu ziehen, daß eine von ihnen die beiden übrigen unter gegebenen Winkeln α, β, schneidet.

Analysis. Seyen KK, MM, NN die gesuchten Tangenten, A, B, C die Berührungspunkte, D und E die Durchschnitte der MM und NN mit KK, ferner die Halbmesser AF, BF und CF gezogen, so ergänzt D den Winkel AFC und E den Winkel AFB zu zwei Rechten. Nun ist $D = \alpha$ und $E = \beta$ (p. h.); folglich AFC und AFB gegeben (IV, 16). Die Natur der Aufgabe bringt es aber mit sich, daß einer der drei Berührungspunkte, etwa A, beliebig angenommen werden darf; es sind folglich die Punkte B und C gegeben (IV, 25), und somit auch die Richtungen KK, MM, NN (VI, 28).

Synthesis. Man nehme auf dem Umfang des Kreises einen beliebigen Punkt A, ziehe den Halbmesser AF, mache AFC gleich dem Nebenwinkel von α, und AFB gleich dem Nebenwinkel von β, lege durch A, B und C Tangenten KK, MM, NN, so sind diese die gesuchten Richtungen.

Denn da AFC gleich dem Nebenwinkel von α und $AFC + D = 2R$, so ist $D = \alpha$. Aus den nämlichen Gründen ist $E = \beta$; folglich bewiesen, wzbw.

Anmerkung 1. Ergänzen sich die beiden Winkel α und β zu zwei Rechten, dann wird NN mit MM parallel, und in diesem Fall kann der Kreis auch so gefunden werden: Man nehme auf dem Umfang des Kreises einen beliebigen Punkt B und ziehe durch ihn einen Durchmesser BC; sodann auf ihn durch C und B die MM und NN senkrecht. Auf der MM nehme man einen beliebigen Punkt D′, mache $MD'E' = \alpha$ und stelle FG senkrecht auf D′E′. Die Richtung FG treffe den Umfang des Kreises in A. Man ziehe nun durch A die Tangente KK, so sind diese die gesuchten Richtungen.

Anmerkung 2. Sind zwei Kreise (Fig. 24), der eine um C, der andere um J, gegeben, von welchen der eine ganz außerhalb des andern liegt, dann können zwei Paar beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangenten gezogen werden, von welchen (vorausgesetzt daß die Kreise ungleich sind) das eine auf der Verlängerung der Centralen, das andere zwischen C und J sich schneidet. Um das erstere Tangentenpaar zu finden beschreibe man über der Centralen CJ einen Halbkreis, trage in denselben von C aus eine Sehne CL′, welche dem Unterschied der beiden Halbmesser, $CE - JF$, gleich ist, verlängere CL′ nach E, ziehe JF parallel mit CE, so ist EF eine der beiden Tangenten. Sey K der Durchschnitt der Richtungen EF und CJ. Man ziehe an den Kreis um J die Tangente KH und verlängere sie, so berührt KN auch den Kreis um C in einem Punkt B, und es ist KE = KB, KF = KH. — Durch die nämliche Construction findet man das andere Tangentenpaar nur mit dem Unterschied, daß CL' = CE + JF, statt gleich CE — JF gemacht werden muß.

14. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Richtungen, MM, NN, KK, berühre.

Analysis. Sey DEF der Umfang des gesuchten Kreises, A und B der Durchschnitt der Richtungen NN und KK mit MM, so liegt der Mittelpunkt desselben in den Richtungen, welche die Winkel A und B halbiren (V, 5), und ist folglich gegeben (IV, 25). Das Loth von ihm auf eine der beiden Richtungen, nämlich KK oder MM, ist der Halbmesser des gesuchten Kreises; dieser ist folglich der Lage und Größe nach gegeben.

Synthesis. Man halbire die Winkel A und B. Der Durchschnitt der Halbirungslinien sey G. Man stelle GD senkrecht auf MM und beschreibe um G mit GD einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Denn zieht man GE und GF senkrecht auf KK und NN, so hat man einerseits GF = GD und anderseits GE = GD (IV, 39); folglich GD = GE = GF. Und da die Winkel bei D, E, F rechte sind, so berührt der Kreis die gegebenen Richtungen (VI, 9), wzbw.

15. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade, MN, in einem vorgegebenen Punkt, A, berühre, und dessen Umfang zugleich durch einen gegebenen Punkt B gehe.

Analysis. Sey ABQ der Umfang des gesuchten Kreises und AB gezogen, so liegt der Mittelpunkt in der Senkrechten durch A (VI, 11), und zugleich in der Senkrechten durch den Halbirungspunkt der AB (VI, 12); er ist somit gegeben. Nun ist A ein Punkt im Umfang des Kreises; es ist somit auch der Halbmesser des gesuchten Kreises gegeben.

Synthesis. Man ziehe die Gerade AB, halbire sie in D und ziehe die Senkrechten DL und AK. Ihr Durchschnitt sey C.

Man beschreibe um C mit der Weite CA einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Denn zieht man CB, so ist CB = CA (IV, 35). Und da KAM = R (p. c.), so geht der Umfang des Kreises nicht bloß durch B, sondern berührt die MN in A (VI, 9), wzbw.

16. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis, K, in einem vorgegebenen Punkt, A, berühre und dessen Umfang zugleich durch einen gegebenen Punkt, B, gehe.

Analysis. Sey ABQ der Umfang des gesuchten Kreises und C der Mittelpunkt des gegebenen, so liegt der Mittelpunkt von ABQ in der Richtung der AC (Lehrs. 4) und zugleich in der Senkrechten durch den Halbirungspunkt der Weite AB (VI, 12); der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist somit gegeben. Und da A im Umfang desselben liegt, so ist auch der Halbmesser gegeben.

Synthesis. Man ziehe CA und verlängere sie nöthigenfalls. Man ziehe AB, halbire sie in D und stelle DM senkrecht auf AB. Ihr Durchschnitt mit der Richtung der AC sey E. Man beschreibe mit der Weite EA einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Denn zieht man EB, so ist AE = EB (IV, 35). Und da $EC = AC \pm AE$, so geht der Umfang des Kreises um E nicht bloß durch B, sondern er berührt auch den gegebenen Kreis in A, wzbw.

17. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade MN berühre und dessen Umfang durch zwei außerhalb der MN gegebene Punkte A und B gehe.

Analysis. Sey ABE der Umfang des gesuchten Kreises, E der Berührungspunkt, und F der Durchschnitt der Richtungen AB und MN, so hat man $AF \times BF = FE^2$ (VI, 35), oder $AF : FE = FE : BF$ (VII, 6). Es ist folglich, da der Durchschnitt F gegeben, der Berührungspunkt E gegeben (VIII, 29 und IV, 11), und somit auch der gesuchte Kreis (VI, 30).

Synthesis. Man verlängere AB bis in die Richtung der MN nach F und suche zu AF und BF die mittlere Proportionale. Sie sey P. Man schneide von FM ein Stück FE = P ab und lege durch A, B, E den Umfang eines Kreises, so ist dieser der gesuchte.

Denn da AF : FE = FE : BF (p. c.), so ist $AF \times BF = FE^2$ (VII, 5); folglich EF, d. i. MN eine Tangente (VI, 36), wzbw.

Anmerkung. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn B jenseits der MN liegt, löst sich aber, falls AB mit MN parallel läuft, auf folgende Weise: Man halbire (Fig. b) AB in D, stelle DE senkrecht auf jene, ziehe BE, halbire sie in F und ziehe durch diesen Punkt eine Senkrechte. Sie treffe DE in C. Man ziehe CA und beschreibe mit ihr um C einen Kreis, so ist dieser der gesuchte. — Denn es ist CA = CB = CE (IV, 35) und MN eine Tangente (VI, 9).

18. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis, K, berühre, und dessen Umfang zugleich durch zwei gegebene Punkte A und B gehe.

Analysis. Sey C der gesuchte Berührungspunkt, und seyen D und E die Durchschnitte der Richtungen CA und CB mit dem Umfang des gegebenen Kreises, so ist AB parallel mit DE (7 u. 9). Nun ist AB gegeben und folglich auch C (II, 27), d. i. der gesuchte Kreis, welcher durch A und B geht und K in C berührt.

Synthesis. Man ziehe AB, bestimme auf dem Umfang des gegebenen Kreises einen Punkt C so, daß die Richtungen AC und BC einen Bogen ED abschneiden, dessen Sehne mit AB parallel wird (II, 27), und beschreibe um das Dreieck ABC einen Kreis, so ist dieser der gesuchte (Lehrs. 8).

Anmerkung. Liegen die Punkte A und B innerhalb des Kreises und fällt der Mittelpunkt E des Kreises K in die Richtung AB (Fig. c), dann läßt sich die Aufgabe auch so behandeln: Sey ABC der Umfang des gesuchten Kreises, so liegt der Mittelpunkt desselben in der Senkrechten DM durch den Halbirungspunkt der AB und zugleich in der der Richtung EC, welche durch den Berührungspunkt C und den Mittelpunkt des gesuchten Kreises geht. Sey AF gezogen, so hat man AF + FE = FE + FC = EC, d. h. die Schenkelsumme des Dreiecks AEF ist dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich. Und da die Grundlinie AE, so wie der Segmentenpunkt D gegeben, so ist der Mittelpunkt F des gesuchten Kreises gegeben (II, 18), und daher auch sein Halbmesser FA.

19. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Richtung NN überhaupt, eine andere MM aber in einem gegebenen Punkt A berühre.

Analysis. Sey AQB der Umfang des gesuchten Kreises und C der Durchschnitt der Richtungen MM und NN, so liegt der Mittelpunkt in der Senkrechten AL auf MM (VI, 11) und in der Halbirungslinie des gegebenen Winkels MCN (V, 5); er ist folglich gegeben, und somit, da auch der Berührungspunkt A gegeben, der gesuchte Kreis der Lage und Größe nach.

Synthesis. Man ziehe auf MM die Senkrechte AL und halbire den Winkel MCN. Die Halbirungslinie treffe die AL in E. Man ziehe EA und beschreibe um E mit EA einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Denn zieht man EB senkrecht auf NN, so ist EB = EA (IV, 36). Der beschriebene Kreisumfang geht daher nicht bloß durch A sondern auch durch B, und berührt die gegebenen Richtungen in A und B (VI, 9), wzbw.

Anmerkung. Sind die gegebenen Richtungen parallel, dann ziehe man AB senkrecht auf NN, halbire sie in E und beschreibe um E mit EA einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

20. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Richtung, MN, überhaupt, einen um C beschriebenen Kreis K aber in einem gegebenen Punkt A berühre.

Analysis. Sey EAQ der gesuchte Kreis, welcher F zum Mittelpunkt hat und MN in E berührt. Sey der Halbmesser FE und die Centrale FC, welche durch den Berührungspunkt A geht (Lehrs. 4), gezogen. Sey endlich CB senkrecht auf MN gestellt, sodann BC nach D verlängert, DA und AE gezogen, so halten diese, da die Halbmesser EF und CD parallel sind, einerlei Richtung (Lehrs. 11). Nun sind A und D gegebene Punkte; folglich der Durchschnitt, E, der Richtungen DA und MN gegeben. Der Mittelpunkt F des gesuchten Kreises liegt nun einerseits in der

Richtung CA und anderseits in der Senkrechten durch E; er ist folglich gegeben und somit auch sein Halbmesser EF.

Synthesis. Man stelle CB senkrecht auf MN, verlängere BC nach D, ziehe DA und verlängere sie bis in die Richtung der MN, lege EL parallel mit BD, ziehe CA und verlängere sie bis in die Richtung EL. Man beschreibe um den Durchschnittspunkt F mit FA einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Denn die Dreiecke ACD und AFE sind gleichwinklig; folglich, da ADC = DAC, auch FEA = FAE, und somit EF = FA. Der Umfang des um F mit FA beschriebenen Kreises geht also auch durch E und dieser Punkt ist zugleich der Berührungspunkt der MN (indem LEN ein Rechter). Und da FC = FA + AC, so berührt der Kreis um F den gegebenen Kreis K in A (Lehrs. 5); folglich bewiesen, wzbw.

Anmerkung. Soll (Figur b) ein Kreis beschrieben werden, welcher einen gegebenen um C beschriebenen Kreis K überhaupt, eine gegebene Richtung MN aber in einem gegebenen Punkt A berühre, dann stelle man AL senkrecht auf MN, ziehe CE parallel mit AL, sodann die Gerade AE. Diese schneide den Umfang des gegebenen Kreises in D. Man ziehe CD. Die Richtung dieser treffe AL in B. Man beschreibe um B mit BA einen Kreis, so ist dieser der gesuchte (Lehrs. 11).

21. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen um B beschriebenen Kreis K, und eine gegebene Richtung, NN, berühre, und dessen Umfang überdieß durch einen gegebenen Punkt A gehe,

Analysis. Sey ACM der Umfang des gesuchten Kreises, BE senkrecht auf NN gezogen, G der Durchschnitt der Richtung BE mit dem Umfang des gegebenen Kreises. Sey C der Berührungspunkt zwischen den beiden Kreisen, DC gezogen, und M ihr Durchschnitt mit der Richtung NN. Es werde GC gezogen und der Durchschnitt dieser Richtung mit dem Umfang des gesuchten Kreises sey L. Endlich werde LM gezogen, so ist diese Linie ein Durchmesser des gesuchten Kreises (weil DCG = MCL = R) (VI, 23), und es besteht, wegen Gleichheit der Winkel in den Dreiecken MED und GCD, die Proportion; MD : DE = GD : DC (VII, 12), oder MD $\times$ DC = DE $\times$ GD (VII, 3); also, wenn die Richtung AD den Umfang des gesuchten Kreises in H schneidet, MD $\times$ DC = AD $\times$ DH (VI, 37) = DE $\times$ GD (V); folglich AD : DE = GD : DH (VII, 4). Nun sind AD, DE, GD gegebene Linien; folglich DH, d. i. Punkt H gegeben (VIII, 28). Demgemäß ist die Aufgabe darauf zurückgeführt: einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Richtung NN berühre und dessen Umfang durch zwei gegebene Punkte A und H gehe; er ist somit gegeben (Satz 17).

Synthesis. Man ziehe AD, stelle DE senkrecht auf NN und suche zu AD, DE und GD die vierte Proportionale DH. Man beschreibe einen Kreis, welcher die NN in M berührt und dessen Umfang durch A und H geht (17), so ist dieser der gesuchte.

Denn zieht man den Durchmesser ML, sodann DM, deren Richtung den Umfang des gegebenen Kreises in C schneidet, so ist DCG = MCL = R (VI, 23), oder, da DEM = R (p. c.), DCG = DEM. Die Dreiecke DEM und DCG sind daher gleichwinklig; folglich MD : DE = GD : DC (VII, 12), oder MD $\times$ DC = DE $\times$ GD (VII, 3); also, da AD : DE = GD : DH (p. c.) oder AD $\times$ DH = DE $\times$ GD, MD $\times$ DC = AD $\times$ DH, woraus sogleich hervorgeht, daß C im Umfang des Kreises durch die Punkte A, H, M liegt (VI, 37). Wegen DCG = MCL = R ist DG ein Durchmesser des Kreises (VI, 25) und, wie leicht einzusehen, parallel mit ML. Der Kreis, dessen Umfang durch die Punkte A, H, M geht, berührt daher den gegebenen Kreis in C, wzbw.

22. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Kreise K und K′, der eine um A, der andere um B beschrieben, berühre, und zugleich der Mittelpunkt desselben in die Centrale, AB, der gegebenen Kreise, falle.

Analysis. Sey D der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, C und C′ die beiden Berührungspunkte, so fallen alle diese Punkte in die Richtung der AB (p. h. und Lehrs. 4). Nun sind C und

C′ gegeben; folglich der Durchmesser, CC′, und der Mittelpunkt, D, des gesuchten Kreises ebenfalls gegeben.

Synthesis. Man ziehe die Centrale AB. Sie schneide die Kreisumfänge in C und C′. Man halbire CC′ in D und beschreibe um D mit DC einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Denn es ist einerseits AD = AC + CD und anderseits BD = BC′ + C′D. Der Kreis um D berührt also K in C und K′ in C′, wzbw. (Lehrs. 5).

Anmerkung. Es gibt noch drei weitere Kreise, α, β, γ, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten. Sollten sich jedoch die Kreise K und K′ berühren, dann wäre die Aufgabe unbestimmt.

23. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis K überhaupt, einen andern K′ aber in einem gegebenen Punkt A berühre.

Analysis. Sey der um D beschriebene Kreis K″ der gesuchte, welcher K in E berührt. Seyen B und C die Mittelpunkte der gegebenen Kreise und CF parallel mit BA, so geht die Richtung FA durch den Berührungspunkt E (Satz 11); dieser ist folglich gegeben (IV, 26). Nun ist D der Durchschnitt der Richtungen CE und BA (Satz 4); folglich gegeben und somit auch der Halbmesser DA (= DE).

Synthesis. Man ziehe den Halbmesser BA, sodann mit ihm CF parallel, und hierauf AF. Die Richtung dieser treffe den Umfang des Kreises um C in E. Man ziehe CE und verlängere sie bis in die Richtung der BA nach D. Endlich beschreibe man um D mit DA einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Denn verlängert man FA nach G und zieht BG, so sind die gleichschenkligen Dreiecke ECF und ABG gleichwinklig; folglich auch DAE = DEA und somit DA = DE (IV, 31). Der Umfang des Kreises um D mit DA geht also auch durch E. Und da CD = DE ± CE, so ist E ein Berührungspunkt, und aus dem nämlichen Grund A, (Lehrsatz 5 und 6); folglich bewiesen, wzbw.

24. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Richtungen, MM, NN, berühre und dessen Umfang durch einen zwischen MM und NN gegebenen Punkt A gehe.

Analysis. Sey ABE der Umfang des gesuchten Kreises, C der Mittelpunkt, B und E die Berührungspunkte und K der Durchschnitt der Richtungen MM und NN, so liegt C in der Halbirungslinie, KL, des Winkels MKN (V, 5). Sey J ein beliebiger (von C verschiedener) Punkt in der KL, JF senkrecht auf MM gezogen, und um J mit JF ein Kreis beschrieben, so berührt dieser die NN in H. Die Richtung AK schneide den Umfang dieses Kreises in G und es seyen AC und GJ gezogen, so hat man $KJ : KC = JH : CB$, oder da $JH = JG$ und $CB = CA$, $KJ : KC = JG : CA$. Nun haben die Dreiecke BCK und HJK den Winkel LKN gemein, und sind folglich gleichwinklig; also AC parallel mit GJ. Demgemäß ist, da die Punkte G, J und A gegeben, der Punkt C gegeben; folglich auch B, d. i. der Halbmesser CB des gesuchten Kreises (daher dieser der Lage und Größe nach gegeben).

Synthesis. Man halbire vermittelst der Geraden KL den Winkel MKN, nehme auf ihn einen beliebigen Punkt J, stelle JF senkrecht auf MM, beschreibe um J mit JF einen Kreis und ziehe AK. Diese schneide der Kreis in G (und G'). Man ziehe GJ, sodann AC mit ihr parallel und beschreibe um C mit CA einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Denn stellt man JH senkrecht auf NN, so ist $JH = JF$ (V, 5). Der Umfang des Kreises geht folglich durch H und berührt die gegebenen Richtungen in F und H. Man ziehe CE und CB senkrecht auf MM und NN, so hat man

$$KJ : KC = JG : CA = JH : CB = JF : CE \text{ (VII, 12)}.$$

Nun sind JG, JH und JF als Halbmesser desselben Kreises einander gleich; folglich $CA = CB = CE$ (III, 11). Der Kreis um C mit CA geht also auch durch B und E und berührt in diesen Punkten die MM und NN, wzbw.

Anmerkung 1. Da AK den Umfang des Kreises um J nicht nur in G, sondern auch in G' schneidet, so gibt es noch einen zweiten Kreis, welcher den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet. — Denn zieht man G′J, sodann AC′ parallel mit G′J und beschreibt um C′ mit C′A einen Kreis, so berührt auch dieser die Richtungen MM, NN.

Anmerkung 2. Sind MM und NN zu einander parallel (Figur b), dann ist die Auflösung der Aufgabe ungemein einfach. Man nimmt nämlich auf der MM einen beliebigen Punkt C, zieht CD senkrecht auf NN, halbirt jene in E und zieht durch diesen Punkt eine Senkrechte KK. Um A beschreibt man mit CE = ED einen Kreis. Der Umfang desselben schneidet die Richtung KK in B. Man beschreibt um B mit der Weite BA einen Kreis, so berührt er die MM und NN. Und da der Kreis um A mit CE die KK noch in einem zweiten Punkt B′ schneidet, so gibt es augenscheinlich noch einen zweiten Kreis um B′ mit CE, welcher den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet.

25. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Richtungen, MM, NN, und zugleich einen um A beschriebenen Kreis berühre.

Analysis. Sey B der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher die gegebenen Richtungen in D und E, den gegebenen Kreis aber in C berühre. Sey um B mit BA ein Kreis beschrieben, sodann bis in seinen Umfang die Halbmesser BD und BE verlängert, endlich durch D′ und E′ Tangenten gezogen, so ist M′M′ mit MM und N′N′ mit NN parallel und man überzeugt sich leicht, daß DD′ = EE′ = AC. Die Richtungen M′M′ und N′N′ sind daher gegeben (V, 3), und folglich auch der Kreis, welcher M′M′ und N′N′ berührt und dessen Umfang durch A geht (Satz 24). Es sind folglich die Punkte B und C gegeben und somit auch der gesuchte Kreis um B mit BC.

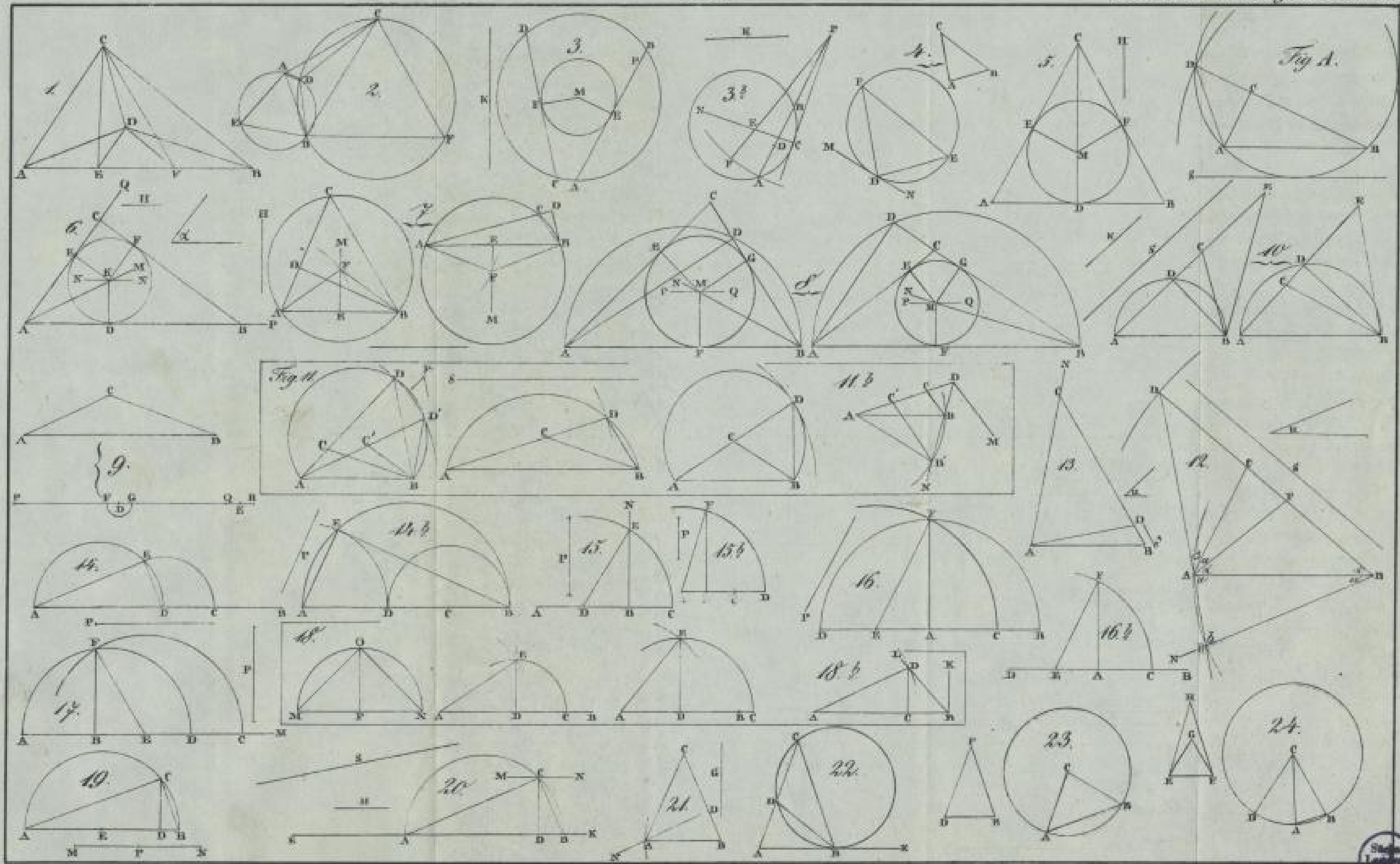
Synthesis. Man ziehe M′M′ und N′N′ parallel mit MM und NN, jede um den Halbmesser AC des gegebenen Kreises entfernt. Sodann beschreibe man einen Kreis, dessen Umfang durch A geht und zugleich M′M′ und N′N′ berührt (Satz 24). Sey B der Mittelpunkt desselben. Alsdann ziehe man die Centrale BA, deren Richtung den Umfang des gegebenen Kreises in C trifft, und beschreibe um B mit BC einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

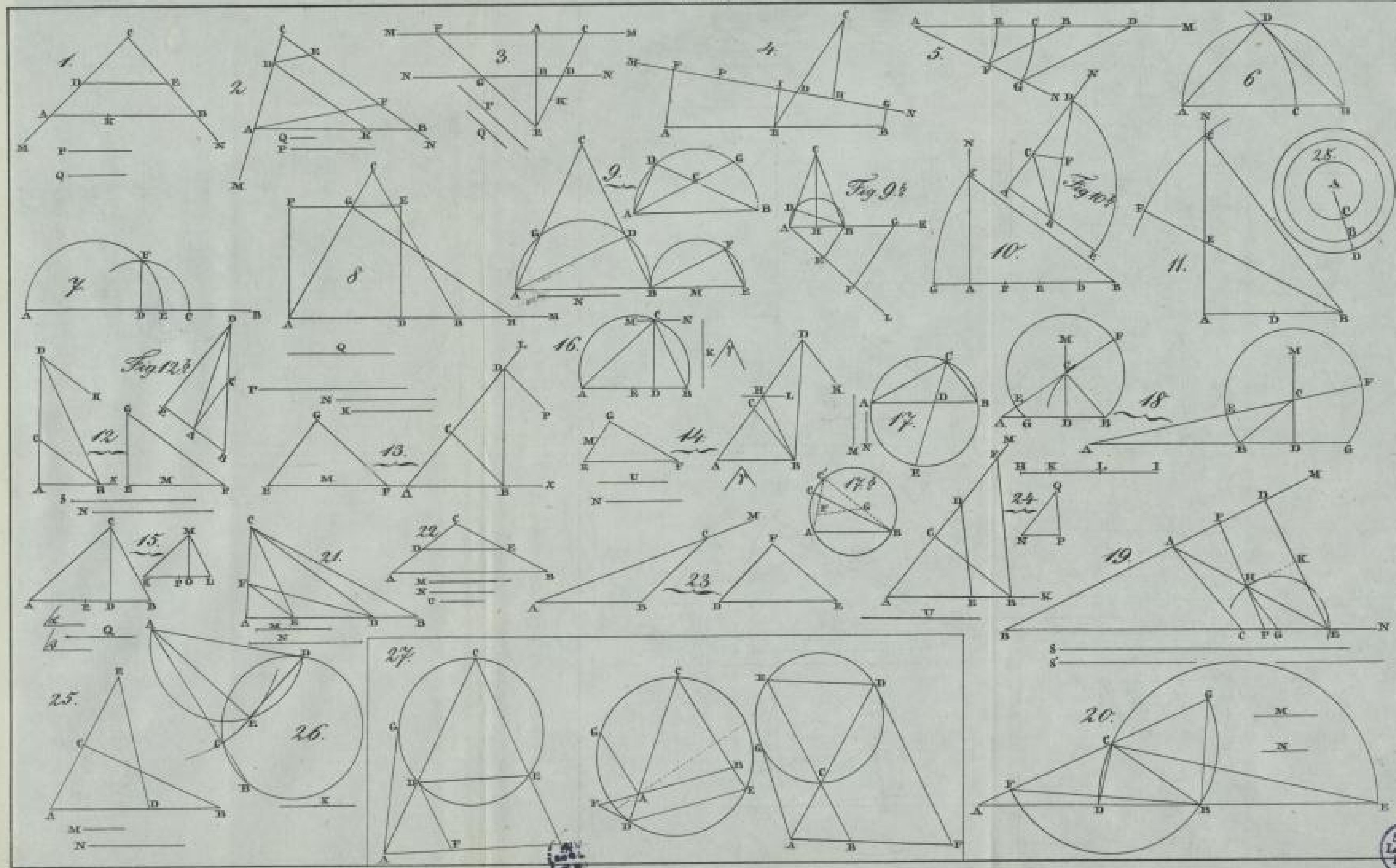
Denn zieht man nach den Berührungspunkten D′ und E′ die Halbmesser BD′ und BE′, so sind die Winkel bei D′ und E′ rechte (VI, 9); folglich auch die bei D und E (IV, 21). Und da DD′ = EE′ = AC (p. c.), so ist BD = BE = BC. Der Umfang des Kreises um B mit BC geht also durch D und E und berührt die MM und NN. Ueberdieß ist die Centrale AB = AC + CB, oder gleich BC — AC, weßwegen der in Rede stehende Kreis auch den gegebenen Kreis in C berührt (Satz 5 und 6), wzbw.

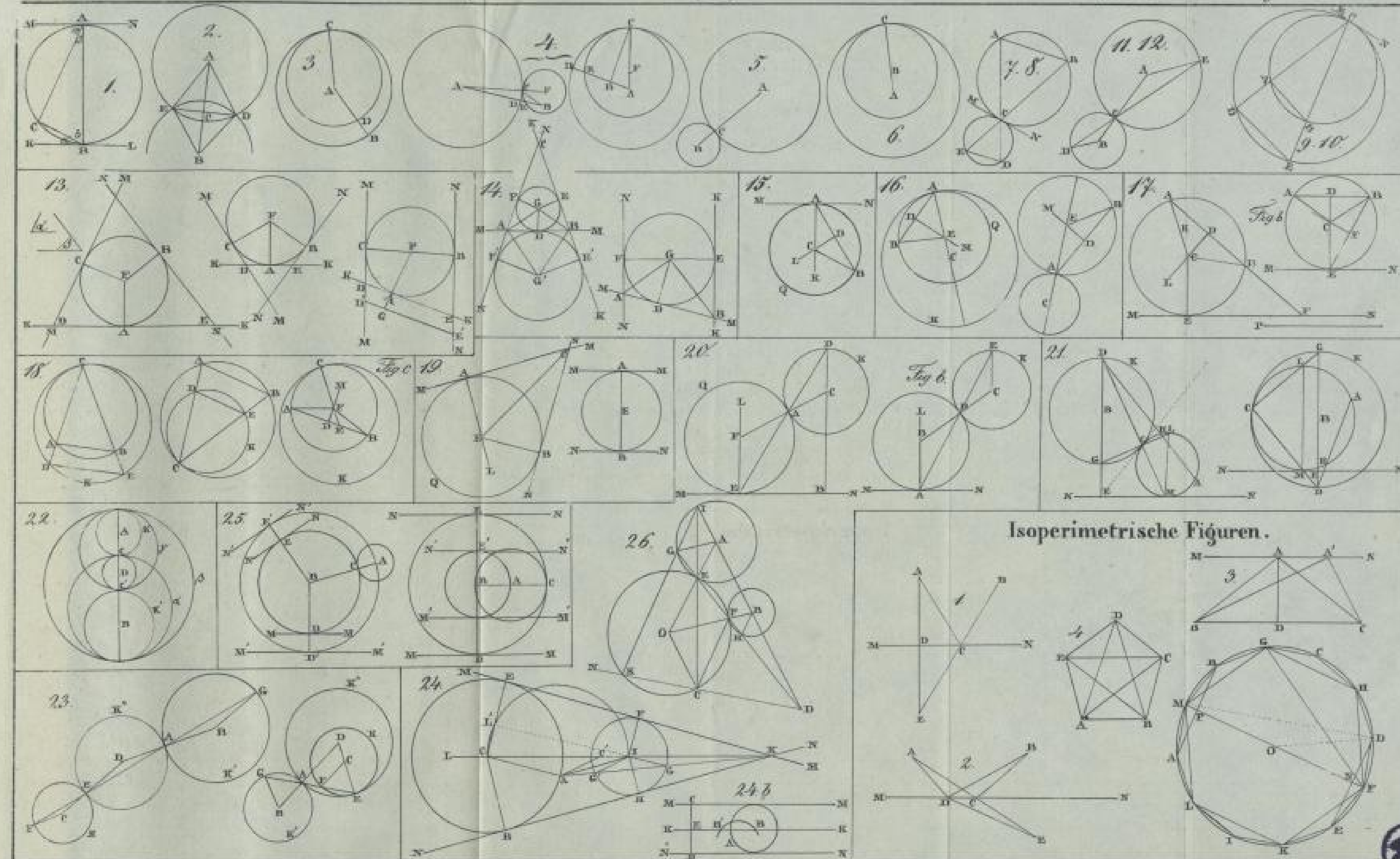
26. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, dessen Umfang durch einen gegebenen Punkt C gehe und zwei gegebene Kreise, von denen der eine um A und der andere um B beschrieben, berühre.

Analysis. Sey CFE der Umfang des gesuchten Kreises, welcher den einen der gegebenen Kreise in E, den andern in F berührt, so ist der Durchschnitt O der Richtungen AE und BF der Mittelpunkt des gesuchten Kreises (Satz 4). Sey D der Durchschnitt der Richtungen AB und EF, ferner treffe die Richtung BA den Umfang des Kreises um A in J, FE in G und überdieß EF die Peripherie um B in H; endlich treffe die Richtung JG die der DC in K. Wird nun BH und CF gezogen, so entstehen drei gleichschenklige, unter einander gleichwinklige Dreiecke EOF, EAG und FBH; es ist deßhalb AG mit BF und AE mit BH parallel, ferner FC mit JK und somit AG : BF = DG : DF = DK : DC (VII, 8, Zus.), oder BF : AG = DC : DK. Nun besteht auch die Proportion AE : BH = AD : BD (VII, 12); folglich, da AE, BH und AD der Größe nach gegeben sind, BD gegeben und daher auch Punkt D (I, 10); ferner DC, und somit auch (wegen BF : AG = DC : DK) DK, d. i. Punkt K. Die Aufgabe ist daher darauf zurückgeführt: einen Kreis zu beschreiben, dessen Umfang durch zwei gegebene Punkte C und K geht und einen um A beschriebenen Kreis berührt (Satz 18).






Isoperimetrische Figuren.

II.

Einige phonologische Erläuterungen.

Frühere Schulprogramme, worin ich die Anwendung der phonologischen Principien auf das Hebräische, auf die Entwicklung der deutschen Sprache (Gothisch, Altdeutsch ꝛc.) und später auch die gleiche Anwendung auf die neuern Sprachen (Englisch, Italienisch und Französisch) zu veranschaulichen suchte, sind mit theilweise bedeutender Erweiterung und Ausführung auf dem Weg des Buchhandels einem größern Publikum übergeben worden.

Die „Allgemeine Phonologie“ enthält auch ziemlich ausführlich die anologe Nachweisung an den klassischen Sprachen. Bei der natürlichen Schwierigkeit einer Verständigung auf diesem Gebiet (sie wäre auf mündlichem Wege ein Leichtes!) wurden hierauf, neben erfreulichen Beweisen von Anerkennung des phonologischen Princips, auch gar sonderbare Mißverständnisse laut, worüber ich in der Vorrede zur „Neuern Phonologie“ mich des Nähern auszusprechen Anlaß nahm. — Nun mögen hier, da ich zu Weiterm nicht Muße fand, wenigstens einige kurze Erläuterungen noch Raum finden, um damit einige der wichtigern Fragen und Zweifel zu lösen, die indeß erhoben worden sind. Mehrfache durch das Bedürfniß der Deutlichkeit gebotene Wiederholung bereits an anderm Ort vorgetragener Sätze wird man entschuldigen!

§. 1. Die „Phonologie“ ist keineswegs eine blose „Lautlehre,“ oder „Lautwissenschaft,“ wie man einseitig diese neue Disciplin benannt wissen wollte. Wohl hat sie zunächst die natürlichen Lautgesetze und deren tief eingreifende Anwendung auf die mannigfaltigsten Spracherscheinungen (in Wortbildung, Aussprache, Flexion und Satzbau) im Zusammenhang darzulegen: aber wesentlich hat sie auch das in alle dem wahrnehmbare Walten und Weben des Sprachgeistes und das innige Verhältniß des phonetischen und des logischen (resp. psychologischen) Elements in der Gesammtentwicklung eines jeden Sprachorganismus zum Gegenstand. Die Phonetik muß sich zur Phonologie erweitern. Das Phonetische wäre für sich ganz und gar nichts, oder nur wie eine formlose träge Masse, wenn es der Geist nicht belebt, beherrscht und bildet, wobei er sich freilich (wie ein Kunstbildner) nothwendig nach der Natur des Stoffes richten und die naturnothwendigen Gesetze desselben auch unbewußt wahrnehmen muß. Solche Gesetze, die sich nicht wegdisputieren lassen und deren Wahrnehmung überall von großer Wichtigkeit sein wird, liegen insbesondre (weit mehr als im Ohr) in der Einrichtung des Sprachorgans: was man bei der gewöhnlichen grammatischen Behandlungsweise allzu wenig beachtet, wo nicht ganz unbeachtet läßt.

§. 2. Wenn man in der Regel abgeneigt ist, auf irgend eine neue Theorie und Methode einzugehen und sich auf dornigem Weg durch dieselbe durchzuarbeiten, so lang man sie irgend entbehren zu können glaubt: so hat man bei dem Eingehen auf die phonologische Methode solche Unlust und Mühe nicht zu besorgen. Ohne sich mit den theoretischen (nur dem strengern wissenschaftlichen Interesse dienenden) Nachweisungen viel aufzuhalten, kann, wer nur einige sprachliche Bildung besitzt, in allen Sprachstudien, wie spielend, alsbald die angenehme Frucht der eigenen speciellen Anwendung genießen; man hat sich nur über einige wenige Sätze zu verständigen, deren einleuchtende Naturwahrheit schon dem eigenen prüfenden Sprachgefühl leicht wahrnehmbar werden kann.

§. 3. Um hier, soweit es in Kürze möglich, diese leitenden Grundsätze übersichtlich zusammenzustellen, so ist im Allgemeinen das Bedürfniß des Wohl- und Bequemlauts (für das Sprachorgan) derjenige Zug des Naturlebens, welchem unwillkürlich die Sprache folgt und folgen muß. Je mehr alles Laut- und Wortgefüg auch diesem Naturgesetz genügt, um so mehr eignet sich die Sprache zum geschmeidigen und leichtbeweglichen Organ des Geistes; und der Geist der sich darin zu verkörpern sucht, kann nichts verlieren, sondern nur gewinnen, wenn er so dem physischen Zug der Lautgesetze folgt und nicht nur das Härteste und Widrigste, sondern (was wohl zu beachten) auch schon das minder Fügsame vermeidet.

a) Wie nun jeder artikulierte Laut (Buchstabe) und jede Nüançe desselben auf einer bestimmten Mundstellung beruht und es daher besonders im raschen Uebergang von einem Laut zum andern, im Gewebe von Konsonanten und Vokalen gar nicht gleichgültig ist, wie diese aufeinander folgen: so ist schon in dem festern Bestandtheil der Sprache, in den Konsonanten, wenn sie lautbar werden sollen, eine besondere vokalische Affektion sowohl im Anlaut als im Auslaut, ein Hinneigen zu einem bestimmten Vokal wahrzunehmen; z. B. daß wir schon in Alphabet das l, m, nicht mit al oder ol, am oder om, sondern lieber mit el, em lautbar werden lassen; vgl. ha, ka, be, ce, de, te 2c.

b) Diese physische Gebundenheit der Lautqualität im Einzelnen (Gesetz der Qualität) — übt aber ihre Wirkung nur im innigen Zusammenhang mit zwei anderen Gesetzen; und zwar für's erste immer nur nach dem besonderen Einfluß, welchen eine raschere oder gedehntere Aussprache übt (Gesetz der Quantität); auch zeigt sich die Wirkung nicht so im Einzelnen, wo ohnehin oft kaum merkbare Unterschiede im Bequemlaut sich ergäben; sondern

c) im lebendigen Geweb der Wörter und Sätze (Gesetz der Symphonie), wornach im verschiedenen Zusammentreffen möglicher Lautgebilde das mannigfaltigste Naturspiel wahrzunehmen ist. — Ein breitgedehntes *bá* oder *bé* läßt sich behaglicher aussprechen, als etwa bei gleicher Breite und Dehnung *bí* oder *bú*; während umgekehrt im raschen, flüchtigen Aussprechen bi mit i bequemer wäre (wie im englischen to be vor Alters bei einer gedehnten Aussprache fügsam e lautbar wurde und die moderne flüchtige Aussprache nun das e als i ausspricht). Am fühlbarsten werden freilich die Unterschiede im Vergleich der größten Dehnung und der flüchtigsten Kürze: doch hat man nicht blos Länge und Kürze zu unterscheiden, als ob etwa jede Länge nur eine doppelte Kürze wäre; sondern es ist eine ganze Abstufung in Länge und Kürze, wie im ganzen Tempo der Aussprache, und da machen sich auch die, wenn schon minder fühlbaren, analogen Einflüsse des Bequemlauts immerhin geltend. — Höchst wichtig ist aber überall die symphonische lebendige Verwebung, die organische Wechselwirkung nicht nur sämmtlicher Silben eines Wortes, sondern auch der im Satz verbundenen Wörter; „der Satz ist die Wiege des Wortes"; wer dieses wichtige tiefeingreifende Sprachgesetz übersieht, kann tausend Spracherscheinungen nicht begreifen, oder muß da nur auf Willkür und Laune des Sprachgebrauchs zurückkommen.

Anm. Wer einiges Interesse an unserm Gegenstande nimmt, wird über alles was hier noch dunkel oder zweifelhaft sein möchte genügende Aufschlüsse finden in der „Neuern Phonologie", besonders §§. 39. 40. 45. 51; ich bitte auch Anm. 3. zu §. 48. und Anm. 1 zu §. 59 zu beachten. (Ueber das logische Moment s. unten §. 8.) — Zu einiger Erläuterung mögen aus Tausenden die zu Gebot stünden, folgende Beispiele hier aufzunehmen sein.

1. Wenn eine ältere Form des latein. Perfekts von mordere mit e in der Vorsilbe *me*mordi gelautet hat (ein Beweis, daß es nicht „aus *mor*mordi" entstanden) wofür dann später momordi üblich wurde: so fragen wir doch gewiß, woher dieser Unterschied? Und leicht finden wir dann das organische Verständniß nach phonologischer Wahrnehmung, mittelst Belauschung nicht des Ohrs, sondern des eigenen Sprachgefühls; in behaglicher Dehnung der (wiederholt zu versuchenden) Aussprache finden wir nämlich *me*mordi ganz bequem, wie auch für das Ohr gefällig; im raschen Aussprechen dagegen springt unwillkürlich *mo*mordi hervor, mit mo- in der Vorderfilbe; nicht so fügsam wäre mumordi, mamordi. — 2. Mit feiner Wahrnehmung des Bequemlauts sind auch andere Perfektformen gewählt, bald mit s, bald mit u, zum Anfügen der Endung u. s. w.; z. B. adlicio-adlexi, elicio-elicui; rego-rexi, lĝgo-lēgi, collĕgo (rasch collĭgo)-collēgi, diligo-dilexi, intelligo-intellexi; imminui, remansi; remanuimus wäre nicht so fügsam als remansimus. Verschiedene Wortstämme da anzunehmen, hat man hienach gar nicht Ursache. — 3. Recht gefällig und geschickt ist die Wahl des Bindevokals (o oder e) in der Flexion der lat. Neutra: corpus-corp**o**ris, onus-on**e**ris; vgl. fœn**o**ra, fun**e**ra, mun**e**ra &c. Und so durch alle Nominal- und Verbalflexion hindurch. — 4. Im

Griechischen hat die gewöhnliche Redupl. des Perf. stets nur den e-Laut; nur die attische Redupl. (ὄλωλα) nimmt den Stammvokal auf: warum nicht z. B. auch κόκοπα, κοχώρηκα, δουδούλωκα, sondern κέκοπα &c.!? Es ist die Rückwirkung auch der Flexionsendungen und die Euphonie des bequemen Wortganzen! Wie fügsam und gefällig lautet z. B. κεκό-παμεν, γεγόναμεν κτλ. mit ε in der Vorsilbe! — 5. Warum wechselt die Biegung des Adjektivs im deutschen, so abweichend von andern Sprachen; z. B. ein guter Mann, ein gutes Kind, der gute Mann, das gute Kind!? Es ist das organische Verwachsen der Artikelform mit dem betr. Substantiv und Adjektiv, die überhaupt auch bei der Wahl des grammatischen Genus wesentlich Einfluß übt; wie ungefüg wäre im raschen Ineinandersprechen z. B. das gutes Kind, dem gutem Muth. In der breitern Aussprache des Alt- und Mitteldeutschen war das anders und es fügte im langsamen Tempo noch ganz wohl: dem guotem man, der listiger man &c. (Vergl. Deutsche Phonol. §. 52. Allg. Phonol. §. 26.) — So gibt es unzählige Fragen, auf welche eine blos historische Grammatik keine Antwort zu geben vermag, während die phonologische Methode die nahe liegenden Aufschlüsse gibt.

§. 4. Eine interessante thatsächliche Bestätigung für das heimliche Walten der oben bezeichneten Lautgesetze liegt gewiß in der von mir sehr oft gemachten Erfahrung, daß, wenn ich bei thunlicher Gelegenheit in mannigfaltigen Fällen auf gestellte Doppelfragen, (ob in bestimmtem Kontext von 2—3 Wörtern die Aussprache einer einzelnen Silbe so oder so bequemer sein würde,) auch fremdes Sprachgefühl zu befragen und zu belauschen Anlaß nahm, — bei rechtem ruhigem Abwägen in der Regel die ganz richtige Antwort erfolgte, und zwar in dem Gebiet von Sprachen, die dem Befragten selbst fremd waren; wie ich selbst auch Freunden, die je mein Sprachgefühl auf die Probe setzen wollten, das Richtige errieth. So fragte ich einmal über die Ableitung vom hebräischen Worte rôsch Haupt, ob etwa barroschit jabô (im Anfang kommt er) oder ob barreschit jabô im lauten und stillen wiederholten Aussprechen bequemer wäre? Bald war die richtige Wahrnehmung getroffen, barreschit füge besser, ähnlich bei der Frage über *rí*schôn oder *ré*schôn: (lamma rischona jabô), n*í*scho oder n*a*scho (ahabti n...); atta m*a*lki oder atta m*i*lki? &c. &c. Ebenso im Griechischen, z. B. bei der Frage, ob γελᾶν oder γελεῖν, τιμώμενοι oder τιμούμενοι, πεινοῦντες oder πεινῶντες, ὁ νόσος oder ἡ νόσος u. m. a.

besser füge? — — im Latein. z. B. ob amemus oder amamus, debemus oder debamus, ob *hic* ratio oder *haec* ratio &c. fügsamer wäre? — — im Italienischen und Spanischen ob z. B. *il* mundo oder *il* mondo, ob *el* mundo oder *el* mondo, ob *il* ricorso oder *il* recurso, ob di *molta* fede oder di *multa* fede, molti *rimettono* oder molti *remittono*, ob etwa pasa el *lobo* y el oso, oder pasa el *lubo* y el oso (lupus et ursus) &c. &c. gefälliger und leichter auszusprechen wäre? im Gothischen z. B. ob eis *vesun* hairdjos oder eis *vasun* h.., eis *namun* thos gibos oder eis *nemun* thos gibos (sie waren Hirten, sie nahmen die Gaben) &c.? — — im Englischen z. B. ob in extremity, sincerity die 2te Silbe besser mit i oder mit e lauten möchte &c.? — Nimmer wäre es möglich, so durch ein wohlachtsames Belauschen des Sprachgefühls in fremden Mundarten das Richtige zu treffen, wenn nicht der (freilich zunächst zu befragende) Sprachgebrauch im lebendigen Verkehr eines Volkes unter dem unwillkürlichen Einfluß der angedeuteten Lautgesetze sich gebildet hätte.

Anm. Thöricht wäre es, allemal gleich in der nächsten Minute schon die absolut bequemste Lautbildung treffen zu wollen, die der Sprachgebrauch durch tausendfältige Verwebungen hindurch in allmäliger Entwicklung suchen und finden mochte. Auch können wohl manche Fragen, in obiger Weise gestellt, leicht zu treffen sein, während andere vielleicht sehr schwer sind und eine längere, ruhige Abwägung und auch ein feineres, geübtes Sprachgefühl erfordern. (Vergleiche Neuere Phonol. §. 39).

§. 5. Nach allem Obigen ergibt sich die nothwendige Anwendung der phonologischen Methode auf alle Studien über Mundarten und über den Gang der Sprachentwicklung; es sind gerade hier über gar viele Fragen die sonst völlig räthselhaft bleiben, die interessantesten Aufschlüsse zu gewinnen. Nicht nur daß sich in der lautlichen Fortbildung einer Sprache, z. B. der deutschen, der griechischen, wenn man die ältern und die spätern Formen vergleicht, der geistige Fortschritt und eigenthümliche Bildungsgang eines Volkes darstellt, so sind auch die lautlichen Differenzen der ältesten, spätern und neuern Mundart nur mit Beachtung der darin waltenden Sprachgesetze zu begreifen. Im Allgemeinen wird als leitender Grundsatz (wie ich es in meinen phonologischen Schriften genugsam nachgewiesen zu haben glaube) gelten müßen: daß die Sprachentwicklung von volltönigen, stark ausgeprägten Wortformen und überhaupt wohlgedehnter Aussprache ausgehend (bei Kulturvölkern) allmälig zu geschmeidigern Formen und zu rascherer Beweglichkeit, bis am Ende zu größtmöglicher Geschmeidigkeit und praktischer Abschleifung mancher frühern Laute fortgeschritten sei: wenn auch das logische oder wissenschaftliche Bedürfniß besonders der Schriftsprache und vielfältig auch Geschmack und ästhetisches Bedürfniß der Lieblichkeit und Schönheit **für das Ohr** im Ausbau einzelner Wortformen und Flexionen manches aufzunehmen gut fand, was man früher entbehrte.

Da das Tempo der Aussprache (§. 3.) auf Vokale und Konsonanten gar wichtigen Einfluß übt, so muß bei jeder alten oder neuen Mundart auf Silbenmessung und Tempo der ganzen Aussprache das erste Augenmerk gerichtet sein. Bei lebenden Sprachen ist diese Frage meistens bald gelöst; in Betreff des Französischen, des Englischen und Italienischen z. B. spricht die lebendige Thatsache, daß diese Idiome sich ungemein rasch bewegen; ebenso wird das Hochdeutsche in sehr raschem Tempo gesprochen, besonders in Norddeutschland, in der Regel viel rascher auch in Bayern als in Schwaben. Woran aber hat man sich zu halten bei ältern, nur in todten Buchstaben überlieferten Sprachen? und wie ist hier wenigstens annäherungsweise das ursprüngliche Tempo und die in demselben wirksame Symphonie auszumitteln? Antwort: nach dem Grundsatz, daß alle Sprache ein reges, organisches Leben ist mit inniger Wechselwirkung aller Theile und zugleich mit Rücksicht auf die naturgemäße logische Abgliederung darin (§. 8.) — muß man das Todte mit gutem Takt und mit eigenem Sprachgefühl neubeleben; eine sehr umsichtige Beobachtung im Vergleich der ältern und jüngern Sprachformen und im Belauschen des eigenthümlichen Wohl- und Bequemlauts wird wohl ziemlich bald den Schlüssel finden, ob die betr. Mundart oder Sprache bequemer und leichter in gedehnter Aussprache oder in schnellerem Tempo sich nachbilden lasse; und es werden hiebei im Vokal- und Konsonanten-Bestand gewiße Merkzeichen zu Statten kommen. Zeigt z. B. die ältere Mundart in auffallender Häufigkeit und auf eine durch etwaiges Ueberwiegen des symphonischen Einflusses nicht erklärbare Weise ein Vorherrschen des a- und o-Lautes, wo später i, u, oder e eingetreten, oder der e-Laut, wofür man in der jüngern Mundart i findet: so wäre (nach der phonologischen Wahrnehmung, daß i und besonders u für große Dehnung unfügsam werde) der Schlüssel gefunden, daß eben jenes Ueberwiegen des a- und o-Lautes auf eine wohlgedehnte Aussprache, der Umlaut in e, i, u aber auf einen Fortschritt zu rascherem Tempo hinweise.

Hiernach ist z. B. die verhältnißmäßig große Breite der dorischen Mundart gegenüber der attischen wohl nachzufühlen, z. B. *ἁ μῶσα, ἁ νᾶσος, τᾶς νάσω*; was in volltöniger Aussprache ebensowohl fügt und lebendig ineinander greift, wie das attische *ἡ μοῦσα, ἡ νῆσος, τῆς νήσου* &c. Man kann freilich wohl ohne arge Härte auch flüchtig hier aussprechen, was die Dorier breit genug dehnten: aber es ist doch minder bequem und fehlt es dann an der organischen lebendigen Lautgliederung; für's rasche Aussprechen eignet sich viel besser das Neugriechische, 'i musa, 'i nisos &c. — So im Lateinischen **en navebos** (**navebous**) im Vergleich zum spätern Laut in navibus; vgl. oben über memordi, kecurri. — Vom Gothischen bis zum Neuhochdeutschen findet sich nicht blos ein ungemein häufiges Abschleifen und Verkürzen der Wortformen und Flexionen, (welches selbst schon bedeutsam ist) sondern auch vokalische, wie konsonantische Umlautungen, die ebenso die oben ausgesprochene Betrachtungsweise über den Gang der Sprachentwicklung bestätigen. Man vergleiche z. B. thata auso, thaz ora, daz or, das Ohr; thata basi, thaz beri, daz ber, die Beere; er wap, wosch — er wob, wusch; — und was weiter in ausführlicher Ueberschau die deutsche Phonologie enthält. Aus dem Mangel eines Dehnzeichens in der alten ungenauen Schreibung von or, ber, folgt gar nicht, daß es nicht breiter lautete als jetzt unsere Aussprache von Ohr, Beere; an aa, ee, oo fehlte es auch der altdeutschen Schrift in manchen Fällen nicht, wo später einfaches a, e, o erscheint. — Im Italienischen zeigt z. B. der Umlaut des ältern Fut. amarò in amerò ähnlichen Verlauf und Fortschritt. Was hier nur (in einzelnen Beispielen) angedeutet werden konnte, zeigt sich in durchgreifender Wahrnehmung des Gesammteindrucks.

Anm. 1. Um auch nur einiges Wenige zu berühren, was man gegen diese Betrachtungsweise eingewendet hat, so hat ein Recensent in der Lit. Ztg. v. 1844 Nr. 9 auf die „streng erwiesenen, unantastbaren" Ergebnisse der deutschen und vergleichenden Sprachforschung hingewiesen, und sein nicht geringes Befremden ausgedrückt, daß ich dieser unfehlbaren Autorität gegenüber das direkte Gegentheil von dem behaupten wolle, was man seit Grimm's Grammatik für unzweifelhaft hielt. (Der hochverdiente Gelehrte wies doch selbst darauf hin, es könne noch kommen, daß man neue wichtige Sprachgesetze entdecke! Nicht alles sei ausgemacht, noch manches dunkel!) Es sei das eine ununterbrochene Petitio principii. Sogar das a im Prät. welches wie i, u, im Gothischen „bekanntlich" nur kurz sei, wolle ich als Länge betrachtet wissen! Bei solchem Gegensatz der Principien erklärte dieser Rec. des wiederholten Lesens überhoben gewesen zu sein (!) und so wenig gieng er auf die zum Theil aus Grimm's Grammatik selbst genommene Beweisführung ein, daß er einen der allerersten Grundsätze der Phonologie, der alles weitere Verständniß bedingt, die Wahrnehmung der Lautgesetze für das Sprachorgan, gänzlich übersah und nur darauf hinwies, auch das gebildetste Ohr könne solche Unterschiede des Symphonismus, wie ich sie finden wolle, nicht finden. Sollte es nicht der Wissenschaft würdig sein, vor Allem mit der ruhigsten und umsichtigsten Forschung ihre Principien nach der Natur der Sache bestimmen zu lassen? (Gegen die alles beirrende Hypothese von den 3 kurzen Urvokalen a, i, u, hat sich wiederholt Bäumlein treffend ausgesprochen.) — Nicht sehr hat es mich gewundert, daß ebenso in den Heidelb. Jahrbb. l. J. Nr. 9., ein Recensent (dessen frühere Besprechung der Sache mir leider nicht zu Gesicht kam) über die Annahme des lebendigen Symphonismus seinen Unglauben ausspricht. Wenn ich sage, bei flüchtigem Aussprechen wäre vielleicht *ga* oder *gè* nahezu gleich bequem; anders aber im Wort: der Gast, die Gäste; *diu galauba*, *der geloube*; da wirke Endung und Artikel; — so folgt hierauf die Frage: „Aber wenn der Artikel der daran Schuld sein solle, daß „es Gast heiße, und wiederum der pluralische Artikel die den Umlaut „Gäste „bewirken solle, woher es denn komme, daß es auch im Genitiv Plural der „Gäste und nicht der Gaste heißt? Und wie! wenn man mir umgekehrt „*diu gelouba* und *der geloube* nachweise?!"

Die Antwort hierauf hätte der Recensent leicht finden können, wenn es ihm gefallen hätte, auch nur einen der wichtigsten §§. der Neuern Phonologie (die er ja eben vor sich hatte) nämlich §. 15. das innige Verhältniß des Logischen und Phonetischen, mit einiger Aufmerksamkeit zu beachten; auch fände sich in der Allgem. Phonologie schon Antwort genug, namentlich §. 26a Anm. 3. und §. 27, Anm. 3. Einmal ist es nicht blos der Artikel was da Einfluß übt (vergl. oben §. 4.: el mundo, il mondo, dat Salt, das Salz) sondern auch zugleich die Endung und die ganze Wortform, durch alle Kasus hindurch, wobei es sich von selbst verstehen sollte, daß für die logische Auszeichnung von Genitiv und Dativ mit thunlich einfachen Mitteln etwas kräftigere Lautformen gesucht werden: also ist eben im Genit. der Gäste eine logisch-phonetische Intension, worüber unten §. 8 noch einiges zu bemerken sein wird. Im Deutschen mußte hiezu der Artikel mithelfen, wo die alten flexivischen Sprachen bestimmtere Flexionen hatten, um die logische Abgliederung auszuprägen. (Ueber das Verhältniß von Gäste zum altd. kesti s. unten §. 6.) — Was den Umlaut kalauba in geloube, gloube anbetrifft, so ist es freilich interessant, auch die allmäligen Uebergänge von der ältesten bis zur jüngsten Form zu vergleichen, besonders mit Hülfe von Graff's Althochdeutschem Sprachschatz, wo gerade die chronologische Anordnung des Stoffes bei genauer Scheidung des Kasus ꝛc. die wichtige Bestätigung der phonologischen Ergebnisse darbietet. Man übersehe nicht, in welchem Kontext, in welcher Mundart und aus welcher Zeit eine Sprachform sich findet: und wie auch das logische Bedürfniß sich geltend macht und z. B. im Accus. diu gelouba̅ (noch mit ziemlicher Breite des Tempo) setzen mochte, während der Nominativ — im Schwanken einer Uebergangs-Periode bald lieber mit der geschmeidigern männlichen Form der geloube, sich bildete. Wichtig ist es, die Einflüsse des organischen Formenwechsels zu beachten, die ich §§. 24 und 42 der Deutsch. Phonol. veranschaulicht habe. (Ueber das Schwankende der Sprachgestaltung vergleiche man Neuere Phonol. S. 27 und 127.) In recht voller Breite ergab sich im Genit. z. B. thera galaupa; mit dem Umlaut des Artikels, der mit dem Wort verschmolz, mochte auch dieses umlauten: dero gilouba, deru geloubo &c. Mittelst solcher organischen Neubelebung der alten Mundart können wir auch die reichen Schätze der deutschen Grammatik von J. Grimm erst recht genießen, ohne uns beirren zu lassen von abweichenden Ansichten und Theorieen; auch in all dem, was häufig genug diesem nicht gemäß erscheint und als unorganische Bildung oder als Ausnahme bezeichnet wird, die heimliche Gesetzmäßigkeit zu erkennen, gewährt ein eigenthümliches Vergnügen. Die in herrlicher Gesammtüberschau hier vorgeführten Spracherscheinungen reden und zeugen am besten von sich selbst, so daß jeder aufmerksame und umsichtige Forscher Alles prüfen und sein eigenes Urtheil bilden kann.

Anm. 2. Bei der in der Deutschen Phonol. versuchten Nachweisung, wie der gothische Sprachbau selbst auf bedeutende Gedehntheit der Aussprache und namentlich des a-Lauts sicher schließen lasse, hatte ich unter Anderm hervorgehoben, daß gewiß in der Wortbetonung die Stammlaute nicht von den so breiten flexivischen Endungen und auch weder Nomen noch Verbum von den zum Theil breiten untergeordneten Pronominalien verschlungen worden sind; so wäre S. 23 als Beispiel noch beizufügen gewesen: is qam mith thamma *managamma* launa (er kam mit dem „manchen" Lohn), is *gaf* ita thamma *fadar* (er gab es dem Vater). Wie sollte in **manag** — das *a* ganz von der Endung verschlungen, und im zweiten Satz das a im Verbum und in adar ganz flüchtig und tonlos sein gegen das logisch untergeordnete volltönige thamma!? Und soll doch der Plural veis gebum, mit e gedehnt sein, wo doch die Personalendung auf den Stamm eine abschwächende Wirkung übt; so ist dann viel mehr noch der Singular gaf, nam, qam, mit Dehnung ausgesprochen worden. Wie soll man auch glauben, daß z. B. Luc. 18, 42: galaubeins theina *ganasida* thuk, dein Glaube ließ dich genesen, das gothische Verbum nur mit ganz kurzen a-Lauten gesprochen worden sei! oder daß Luc. 19, 3 in dem Satze ni mahta *faura* manag*ein*, nicht vermochte er es vor (der) Menge, im Kontext mit der breittönigen Präposition, dem blosen Formwort, das logisch-gewichtige managein nur mit kurzem a und vollbetonter Endung gelautet hätte; und daß Luc. 2, 8 in dem Satze hairdjos vesun thairhv*a*kandans Hirten waren „durchwachende", das a des Stammes vakan bei dem Gewicht der gewaltigen Vorsilbe und der Endungen sollte kurz gewesen sein!? — Ein sonderbares Versehen aber nur war es, (für die Sache selbst ganz ohne Belang,) daß ich dortmals, um das Unnatürliche von lauter kurzen a-Lauten im Goth. zu zeigen, das Wort fadar mit der adjektivischen Flexion als Beispiel setzte, was ich nun zu berichtigen bitte. (Uebrigens wolle man auch S. VI. & VII. der Vorrede zur Neuern Phonol. freundlich beachten.)

Anm. 3. Auch die sonst sehr lichtvolle und treffliche gothische Grammatik von Gabelentz und Loebe geht von dem sonderbaren Vokalsystem der drei Kürzen a, i, u, aus; einen Beleg, daß a, obwohl es auch für langes griech. a stehe, stets nur kurz sei, soll unter Anderm die Umwandlung von Romani in *rumoneis* liefern, auch der Umlaut von tho hair*t*ona, (die Herzen) in thize hair*t*ane (der Herzen). Wie aber! wenn es nur das einfache Streben nach symphonischen und gefälligen Lautformen wäre, z. B. faura rumonim fügsamer als faura *romonim*! und im Genitiv *hairtane* zugleich eine logische Lautverstärkung im Gegensatz zu Nominativ und Accusativ!? Unverkennbar ist der Wohllaut in hairtona wie in hairtāne. Gut ist es indeß, in der Schreibung des Altdeutschen alle Prosodie-Zeichen wegzulassen und nicht irgend besondere Theorieen hineintragen zu wollen.

§. 6. Es mag dienlich sein, noch einige weitere Punkte, soweit es in Kürze möglich, zu erörtern.

1. In dem Entwicklungsgang des Sprachlebens hat man nicht selten den spätern Perioden den ächten organischen Bildungstrieb absprechen wollen, als wäre die Sprache verkommen und entartet und eine Menge unorganische Bildungen eingedrungen; dafür erklärte man besonders, was sich unter vorgezeichnete Regeln nicht fügen wollte. Je mehr man aber mit eigenem Sprachgefühl das rege organische Leben auch in den jüngern Sprachbildungen und Mundarten wahrnimmt

und belauscht, um so mehr wird man als Grundsatz anerkennen, daß auch diese neuern Bildungen ihr gutes Recht haben.

So wollte man im Deutschen den eigenthümlichen und schönen Umlaut im Innern der Wortstämme, wo die analoge Fortbildung über das Alt- oder Mittelhochdeutsche hinausgieng, für etwas Unbegründetes, Unorganisches erklären; während man dem i der Endung eine auf den Wortstamm zurückwirkende Kraft einräumt (z. B. diu last, dera lesti, der gast, diu gesti, Gast, die Gäste), soll das spätere e der Endung eine ähnliche Wirkung nimmer haben! Allerdings üben die prägnantern Endungen a, o, i, eine fühlbarere Rückwirkung: aber es übt doch das e einen organischen Einfluß, der in manchen Stämmen bei rascherem Aussprechen den Umlaut von a, o, u, angeregt hat; z. B. diə stat, die Stätte, diə wolfe, diə korbe, die Wölfe, die Körbe. Vgl. romesch, loblich, bruderlich, römisch, löblich, brüderlich und Aehnliches (Deutsche Phonol. S. 76). — Hiernach wird auch die Schreibung deutsch, Deutschland, mit d (wofür einige teutsch, Teutschland geschrieben wissen wollen) als eine vollkommen gesunde und naturgemäße Entwicklung gelten dürfen.

So gut wir statt kepan jetzt leicht und bequem mit g, b, geben setzen, statt thenkan — denken: so ist in aller deutschen Mundart, für das schnelle Geweb der Rede, im Anlaut des Wortes Deutsch — als Rückwirkung des ziemlich kräftigen Quetschlautes tsch — das d merklich bequemer als t. Im langsamern Tempo war teutsch wohlfügsam, nimmer so im raschern Aussprechen. Ein Anderes wäre es auch noch, wenn es nach thiudisc etwa teutisch, mit i vor sch, gesprochen würde, oder teutonisch. Die neuern Gründe, welche Hattemer (Schafhausen 1847) zusammengestellt, werden den herrschenden Schreibgebrauch nicht beirren; am wenigsten, was da etwa nicht das ruhige Ergebniß der Wissenschaft wäre, und zu deutscher Einigung nicht dienen könnte. Daß mit der Berufung auf die s. g. Lautverschiebung, die freilich der Schreibung mit d günstig ist, nichts Sicheres zu ermitteln, glaube ich §. 40 der deutschen Phonologie gezeigt zu haben.

Anm. Daß man in dem Worte Deutsch einen Eigennamen zu erkennen habe, den man nicht „verunstalten“ dürfe, diese Annahme und Schlußfolgerung dürfte sehr zu modificieren sein! Oder man müßte auch zu der alterthümlichen Form anderer Volksnamen zurückkehren und es gäbe z. B. keine Schwaben, keine Schweizer, keine Hessen mehr, sondern Sueven, Schwizer, Katten, auch keine Franzosen, Engländer, Griechen, Römer, sondern etwa Frankesen, Anglander, Gräken, Romer! Das wird nicht Beifall finden, und ich denke, wo doch bereits von der großen Mehrzahl die Schreibung mit d deutsch aufgenommen ist, dürfte es eher zur orthographischen Einigung kommen, wenn die Minderzahl sich dem überwiegenden Gebrauche bequemen wollte, etwa mit dem unausgesprochenen Gedanken: „Der Klügere gibt nach!" Dann könnte am Ende jeder Theil Recht zu haben sich getrösten!

In Beziehung auf die romanischen Sprachen, deren organische, bewundernswerthe Ausbildung bereits mehr und mehr Anerkennung findet, kann ich hier nicht unbemerkt lassen, wie über die Bildung des Futurums in diesen Sprachen, auch Dr. Knebel in Köln in der einem Schulprogramm beigegebenen gründlichen Ausführung nachweist, daß amerò, j'aimerai, keineswegs durch Zusammensetzung von amare habeo (wie man nach Diez angenommen) sondern einfach und unmittelbar aus der organischen Umbildung der latein. Flexionsendungen: am*ave*ro, ama*r*em entstanden ist; ganz dieselbe Ansicht, die ich in der Neuern Phonologie dargelegt habe (§. 69).

2. Man hat den Einwurf gemacht: „Sprachorgane und Ohr „sind bei jedem Volke anders gewöhnt, und sehen wir allein auf das „deutsche Volk, so weichen sie in jedem Gau wieder von einander ab, „daß man sogar den Hochdeutsch-Redenden nach seiner Heimathgegend kennt. Wie will man nun gar aus dem Gothischen, Alt- und „Mittelhochdeutschen, Angelsächsischen, Altsächsischen u. s. w. urtheilen, „wo man nichts hat, als den eingefangenen Laut (Sic!) und weder „des Gothen Sprachorgan noch Ohr genau kennt, sondern nur erschließen kann!" Wir sagen, allerdings mag das Sprachorgan und Ohr bei jedem Volke anders gewöhnt sein; an auffallenden Beispielen fehlt es nicht. Aber gerade darin zeigt sich die ungemeine Wirkung, welche von der Einrichtung, Uebungsweise und Gewöhnung des Sprachorgans ausgeht. Und wie man im Allgemeinen die gleichmäßige Einrichtung desselben wohl nicht läugnet und füglich voraussetzen kann, auch wo uns nur todte Sprachen vorliegen, so machen sich nothwendig die §. 3 bezeichneten Lautgesetze geltend; und wir übersehen nicht, wie es gerade darauf ankommt, sich recht in alle Eigenthümlichkeit jeder

besondern Sprache und Mundart hineinzuleben. Im Uebrigen dürfen wir dem wol Glück wünschen, der eine Sprache „in Schriftzeichen einzufangen" im Stande ist.

3. Es wurde vorgeschlagen, statt des von mir versuchten phonologischen Verfahrens lieber sämmtliche deutsche Wurzeln zu verzeichnen, sie nach den Sprachorganen abzutheilen, mit verwandten Sprachen zu vergleichen u. s. w. Was mit einem solchen Verzeichniß gewonnen wäre, wo ja eben die symphonischen Einflüsse Alles durchkreuzen, ist leicht abzusehen, und wird sich noch im Folgenden genugsam herausstellen. Vgl. oben ik vas, veis vesum, ich war, wir waren, (auch Neuere Phonol. §. 12).

§. 7. Bei aller Sprachvergleichung muß, wie aus allem Bisherigen sich ergibt, der erste Grundsatz sein, nie zu vergessen, daß jede Sprache oder Mundart einen eigenthümlichen Organismus bildet, wo alle einzelnen Bestandtheile — in tausendfältiger Verwebung ausgeprägt — die lebendige Zusammengehörigkeit darstellen und gegen etwaige Vermischung mit fremdartigen Bestandtheilen sich sträuben. Dieß wird allerdings am fühlbarsten, wenn man recht scharf und verschieden ausgeprägte Mundarten vergleicht und es versucht, Bestandtheile derselben willkürlich zusammenzufügen; z. B. das baierische dos is glaich aus — mit Alemannischem zu mischen: dos ist glîch aus (glaich us)! Aber auch, wo es minder fühlbar wäre, muß doch die assimilierende Kraft des lebendigen Symphonismus sich geltend machen; wie verschieden ist die Umbildung des Lateinischen im Italienischen und Französischen! Näher ist das Ital. und Spanische; aber es sind doch Differenzen, die der Vermischung widerstreben. Interessant ist es zu sehen, wie namentlich die Griechen mit feinem Sprachgefühl die lateinischen Wörter behandelt und im lebendigen Geweb ihres Idioms diesem assimiliert haben, wenn sie auch in manchen Fällen den fremden Laut thunlich noch gelten ließen; wie es umgekehrt auch mit griech. Wörtern im Lat. ergieng. Man vergleiche z. B. Ὀμβρίκιος Umbricius, Κλοέντιος Cluentius, Σπόριος Spurius, Κορνίκολον Corniculum, Φαίσολα Fæsulæ, Σατίκολα Saticulum, Σικελία Sicilia, Βρενδέσιον Brundusium, ὁ Σκηπίων, hic Scipio (ὁ σκόπελος hic scopulus.) Schon die bedeutend abweichende Form und Flexion des Artikels und der Kasus-

Endungen mußte den Symphonismus afficieren, häufig stärker und stetiger; bisweilen nicht so fühlbar und stetig (Δομέτιος und Δομίτιος). Um den griechischen Symphonismus zu gewinnen, kann z. B. *καί* dienen: *καὶ Σπόριος, καὶ τὸν Σπόριον.* (§. 4). Eine sehr schätzbare Zusammenstellung der gräcisierten Lateinwörter gibt das Posener Schulprogramm von Wannowski (1843); daß jedoch, wie der Verf. S. 20 halb vermuthen wollte, der unstete Wechsel in manchen Fällen ganz ohne Ursache statt fand, wird bei phonologischem Abwägen nicht zu glauben sein. Wie besonders die Endung o auf den Inlaut des Wortstammes rückwirkt, fühlt man analog beim Italienischen, z. B. *il secolo* sæculum, *il maestro* magister, *spettacolo* spectaculum. (Vgl. den schönen Umlaut von Trapezunt in Trebisonda.)

So geht also jede Sprache in all ihren Gebilden ihren eigenen Weg; jede Verschiedenheit in deren Gestaltung muß wieder unberechenbare Nachwirkungen haben und so fort ins Unendliche. Es ist daher jede Sprache vor Allem aus sich selbst zu erklären, und wie belehrend und anziehend auch die Vergleichung anderer verwandter Sprachen ist, so wird da immer die größte Umsicht und Vorsicht nöthig sein, um nicht Fremdartiges zu übertragen. — Und nun ergibt sich wol auch einleuchtend genug, daß es nur zu den größten Irrungen und Fehlschüssen führen kann, wenn man gewiße Analogieen der Lautbildung (wären sie auch in dem einen Sprachgebiet ohne Ausnahme begründet) ohne Weiteres auf ein anderes Sprachgebiet anwenden will oder sie gar als allgemeine Sprachgesetze aufstellt. Dieß Verfahren war es, wenn man z. B. die Aussprache des Gothischen geradezu aus den entsprechenden griechischen Wörtern hat bestimmen wollen. Ebenso wenn das Neugriechische oder die röm. Aussprache von griech. Wörtern als maaßgebend genommen wurde für die altgriechische Aussprache. Der letztere Punkt ist noch gar nicht so ausgemacht, wie es einigen Reuchlinianern geschienen hat; man übersehe nicht das gute Schriftchen von Henrichsen über die neugriech. Aussprache, aus dem Dän. von Friedrichsen. Parchim 1839.

Anm. Dem Deutschen assimiliert sich die latein. Aussprache von Griechischen Eigennamen eher als die neuerlich versuchte altgriechische, z. B. Aischylos, Aitoler, Aitolien, statt Aeschylus &c.

§. 8. (Das logische Moment.) Wenn so das natürliche Bedürfniß waltet, alle Sprache möglichst mundgerecht zu machen, so ist es doch kein bloses Naturleben; sondern der Geist ist es, der, im Laute spielend, schaffend und gestaltend, alle logische Gliederung der Gedanken und was irgend die Seele bewegt darin auszuprägen sucht.

Ist der erste Grundsatz: Die Sprache will Alles mundgerecht und bequem: so ist der andere von gleicher Wichtigkeit: der Geist waltet im Laut! Der natürliche Artikulationssinn schuf all die sinnige Lautvertheilung, all die Ordnung und Oekonomie in Wortbildung und Flexion, wie schon das ursprüngliche Schaffen der Wörter Symbolik des Gedankens sein mußte. Beim Auseinandergehen der Sprachen und ihrer allmäligen Entwicklung machte sich auch die nationale Eigenthümlichkeit geltend, und je nachdem das einmal eingeschlagene Verfahren in der Wahl der zur Flexion benützten Vokale und Konss. mehr oder weniger glücklich war und mehr oder weniger Schönheitssinn und auch der Wohllaut für das Ohr dabei waltete: so wirkte auch der einmal vorhandene Sprachstoff auf das logische Verfahren zurück und es erhielt die Sprache ihr verschiedenes nationales Gepräge und ihre eigenthümliche Harmonie und Schönheit. (Allg. Phonol. §. 66.)

So prägte sich der freie, schöpferische Kunstsinn des griechischen Volksstammes, wie der strengere Ordnungssinn des Römervolkes im ganzen Bau der Sprache aus. So bemerken wir im Gothischen vielfältig noch rauhe und harte Formen mit grandiosem Klange; auch im Altdeutschen noch ziemlich rauhe, urkräftige und einfache Formen, die allmälig mehr und mehr für das praktische Bedürfniß sich abschleifen und beweglicher und geschmeidiger werden für den Fortschritt des geistigen Lebens. Analog prägte sich der romanische Sprachstoff in neuer lebenskräftiger Umbildung zu der ungemeinen Beweglichkeit und Schönheit des italienischen und zu der größern Feierlichkeit und Fülle des spanischen Idioms aus; der leichtschwebende Sinn und Charakter der Gallofranken schuf eine Sprache mit gar vielen flüchtig verschwebenden Lauten; während das Englische auf allen Ueberfluß von sonoren Lauten verzichtend, recht den praktischen Sinn des engl. Volkes wahrnehmen läßt.

Suchen wir mit Anwendung der phonologischen Methode in alle die Heimlichkeit des Sprachlebens tiefer und tiefer einzudringen: so können wir überall nur die geschickte und sinnige Wahl der Lautformen für die Abstufung der Wortbedeutung bewundern, auch da, wo sonst nur Zufall und Willkür erscheinen müßte. Beispiele:

1. Wie erst im Kontrast der Wortformen gegeneinander die besondere Auszeichnung der gewichtigern Bedeutung zum Bedürfniß wurde, so haben die Flexionen des Plural am Nomen und Verbum kräftigern Laut, als die des Singulars; ebenso die obliquen Kasus — dem Nominativ und Accus. gegenüber. Dieß tritt besonders in den alten Sprachen hervor.

Anm. 1. Besonderes Interesse hat gewiß auch die Frage über das grammatische Geschlecht der Nomina. Wie natürlich, daß auch hier die organische Wechselwirkung den wichtigsten Einfluß übt, wie oben schon angedeutet ist. (Allg. Phonol. §. 26.) So begreifen wir unter Anderm auch die vielen Nomina generis comm. in den alten Sprachen; auch den Genuswechsel, z. B. im Französ. (*la douleur* il dolore, *la peur* pavor, la paura, *le bonheur* &c.); im Deutschen (eck, schneck, luft, der wac Woge.)

Bei der oben berührten Frage über die Kürze oder Dehnung des *α* im gothischen Präteritum qam, nam, dürften als eine wichtige Analogie von Bedeutung sein die grandiosen Reduplikationen im Prät., z. B. graigrot von gretan weinen, lailot von letan lassen. Welch' eine Lautfülle zeigt hier z. B. das Impf. Konj.: ik lailotjau, veis lailoteima ich ließe, wir ließen)!

Anm. 2. Wir lassen bei Wahrnehmung der phonetischen Einflüsse das logische Moment gar nicht aus dem Auge: aber daß im Sprachleben alle Art und Ordnung von Satzgefüg einzig und allein nach logischen Rücksichten erklärbar sei, muß doch sehr bezweifelt werden. Was z. B. den Unterschied von *οὐ* und *μὴ* betrifft, so ist ohne Frage *μὴ* die gewichtigere Partikel, die namentlich bei *ἵνα, ὅπως, ἐὰν, ὅταν* — der logischen Verstärkung gemäß und auch für die vollere Betonung phonetisch besser geeignet ist, als *οὐ, οὐκ*, (vgl. *οὐκ ἔστι, εἰ μή ἐστιν, ἔστιν δὲ οὔ.*) Allein in gar manchen Fällen, wo der Sinn schon im Kontext der Rede gesichert war, konnten dem logischen Moment unbeschadet die lautlichen Einflüsse die Wahl mit bestimmen; und wirklich ist es fühlbar bequem, daß z. B. beim Inf. mit Artikel (*τὸ μὴ δοκιμάζειν*), dann auch nach *εἰ* (*εἰ μή τις οἶδεν· εἰ οὐχ ἡδύ*) und beim Partic. (*ὁ μὴ δοκιμάζων, τοῦ μὴ δοκιμάζοντος, τῆς οὐ δοκιμαζούσης*) gern die Partikel *μὴ* gewählt wird; besonders im Fall eines größern Nachdrucks (*ἀληθεῦσαι τὰ μὴ ὄντα ὡς οὐκ ὄντα*). Wenn nun auch bei den Relativ-Sätzen bald *οὐ*, bald *μὴ* sich findet, so wird man nicht so ohne Weiteres nur logische Unterschiede statuieren dürfen, woran die Sprachbildung im einfachen Kontext wol nicht gedacht hat, als werde durch μὴ eine allgemeine Nothwendigkeit, ein innigeres Verhältniß ausgedrückt ꝛc. Vgl. οἵτινες οὐδὲν δέονται· οἵ μηδὲν δέονται. — Die Freiheit eines euphonischen Wechsels im Satzbau konnte je und je auch logische Vortheile gewähren, z. B. ἀρξαμένου αὐτοῦ οἰκοδομεῖν. Φασὶν αὐτὸν ἄρξασθαι οἰκοδομοῦντα. Hominum *iis* similium, qui &c. Hominibus *eorum* similibus, qui &c.

Anm. 3. Im Gebiet der romanischen Sprachen ist es eine nicht unwichtige Frage, wie die flexivischen Endungen sich gebildet, ob z. B. im ital. gl*i* amic*i*, der lat. Nominat.; im span. *los* amig*os* der Accus. Pl. zu Grunde liege? Daß eine solche Annahme nicht begründet sei, glaube ich nachgewiesen zu haben (N. Phonol. §. 64). Wie sollte etwa beim Verbum *ser* (esse) der Accus. als solcher, je aufgenommen worden sein!? z. B. nosotr*os* somos amigos! somos amados! Offenbar ist in somos der Umlaut aus sumus ein organisches Gebilde, das keinen Accus. voraussetzt und welchem sich die Nominalflexion assimilierte. Wie im Franz. nous somm*es* aimé*s*, wurde zur span. Pluralbildung das s benützt, analog wie im Verbum.

2. In der Verbalflexion ist Aehnliches von der lautlichen Abgliederung der (Personal-,) Tempus- und Modusformen wahrzunehmen; es ist die Symbolik der grammatischen Verhältnisse. Passend war das Streben durch vollere Betonung, oder breitere oder irgend abweichende Form das Präteritum gegen das Präsens auszuzeichnen; z. B. sie nehmen, sie nahmen; war schon a im Wortstamm, so war das einfache Mittel es in einen andern Vokal umzulauten (z. B. schlagen, schlugen.) — Analog erhielt der Konjunktiv die vergleichungsweise etwas kräftigern Lautformen, so gut es der Bau einer Sprache zuließ (z. B. du nimmst, — nehmest.) War in der 1. Konjug. des Lat. schon der a-Laut (als der dem Wortstamm fügsamste) gewählt (amare, amandum, amamus,) so war für den Konj. das Ausweichen in *e* (am*e*mus) das Auskunftsmittel, während sonst das a zur Intensivform paßte (reddimus—redd*a*mus.) So drückt die phonetische Differenz z. B. von reddunt—reddent—reddant, auch das logische Verhältniß aus: das Fut. steht hier dem Präsens nahe. — Aehnliches gilt von den Intensiv- oder Kausativformen (Piël u. dgl.) sitzen — setzen, wachen — wecken; יָקוּם — יָקִים, יִטֶּה — יַטֶּה.

Ueberdieß wird man vieles Syntaktische auch mit Rücksicht auf die Einflüsse des Wohllauts zu erklären haben, obwohl hier immer die logische Erklärung obenan stehen muß. Von dieser Art ist z. B. der thunliche Wechsel der Wortfolge (N. Phonol. §. 73); die Attraktion des Relativs im Griech.; die Wahl des Kasus bei σύνοιδα (σύνοιδα ἐμαυτῷ ὄντι θνητῷ. σύνοιδα ἐμαυτῷ θνητὸς ὤν); die verstärkende Kraft der Partikel ἄν, die auch mit εἰ verschmilzt; εἰ bisweilen mit Konjunktiv; Konstruktion mit Inf. oder Partic. z. B. bei ἄρχομαι; in manchen Fällen, wo der Sinn nicht litt, die Wahl des Tempus; der Kasus bei plenus, similis, refertus („simillimum *Deo* judico," „simile *vero* videbatur"); ob es vir bonus oder bonus vir heiße („Vendat aedes *vir bonus*. Sic *bonus vir* et fortis et sapiens miser esse non potest. Officio *boni viri* functus. Ab uno justo et *bono viro* consequebatur." *Cic.*) Wie hart wäre die Stellung von enim, autem z. B. nach Magn*um*, wenn es hieße: Magnum *enim* est, statt Magnum est enim &c.! — Im Hebr. fügt unter Anderm sonderbar das Zahlwort im Fem. zum Pl. Masc. auf — im, z. B. sch'lôschet jamim (3 Tage), wie das Masc. zum Fem. auf — ot: *schalosch banot* (3 Töchter): das Phonetische überwog. Und so könnte gar Vieles noch erwähnt werden.

§. 9. So mag die phonologische Methode mit der gewöhnlichen grammatischen und philologischen Behandlung der Sprachen sich wie spielend verbinden, ohne dem logischen Moment irgend Eintrag zu thun; und in nicht wenigen Beziehungen und Fällen, wo die blos historische und logische Behandlung keine genügende Antwort zu geben vermöchte, wird sie wesentlich zur Ergänzung dienen.*) Schon nach allem Bisherigen dürfte die Phonologie sowohl in wissenschaftlicher als praktischer Beziehung an wichtigen Ergebnissen nicht so gar unfruchtbar sein; wie es freilich dem erscheinen müßte, der nicht auch mit eigenem Sprachgefühl die lebendige Anwendung zu machen geneigt wäre.

---

*) Es ist besonders eine wichtige Spracherscheinung, deren Verständniß ohne die lebendige phonologische Behandlung gewiß unmöglich ist, die ungemeine Häufigkeit des organischen Formenwechsels, besonders in den alten Sprachen; aber auch, wie ich es genugsam veranschaulicht zu haben glaube,

Im Uebrigen darf ich wol getrost annehmen, daß, wer mit einigem Interesse an der in kurzem Umriß hier dargelegten phonologischen Methode auch die eigene Anwendung versucht, sich bald und leicht damit zurecht finden und wohl auch Vieles noch wahrnehmen werde, was mir entgangen sein mag.

---

in neuern Sprachen. Vergleicht man z. B. כִּי נַעֲשָׂה und מַה־נַּעֲשֶׂה, so fühlt man es sogleich im Gewebe der Wörter, wie dort a hier e im Bequemlaut überwiegt und daß der Unterschied seinen guten Grund hat. — Ueberaus praktisch erweist sich die lebendige symphonische Auffassung der Sprache im Englischen. Warum z. B. declare, region, in der Vordersilbe in i umlautet, nicht aber auch regiment, während doch de- im Wort declaration den e-Laut behält, und de- beidemal tonlos ist?! Mit symphonischem Nachfühlen (zumal im Kontext,) haben wir alsbald die Antwort gefunden, (mit der Annahme verschiedener Silbentheilung wäre die Frage noch nicht gelöst) und wir können überall nur die Feinheit des Sprachgefühls bewundern, womit der stetig gewordene Sprachgebrauch (in Regeln und Ausnahmen) den Wohl- und Bequemlaut wahrgenommen hat. Manche andere Beispiele sind auch oben schon angeführt.

Um nun aber zu dem fröhlichen Festanlasse überzugehen, wozu die voranstehenden Abhandlungen nur die Einleitung bilden wollten, so liegt mir noch ob, die besondere Feier des hohen Geburtsfestes unsres allergnädigsten Königs an unserm Gymnasium anzukünden. Es wird dieselbe zunächst mit einem Redeakt begangen, indem Professor Aberle

„über einige Unterrichtsweisen des Mittelalters"

sprechen wird.

Hierauf folgt die Verlesung der Lokationen und die Preisevertheilung. Zu diesem feierlichen Akte, womit bei uns das Studienjahr geschlossen wird, lade ich nun, zugleich im Namen des Lehrerkollegiums, alle Freunde und Gönner unsres Gymnasiums geziemendst ein.

Rektor **Wocher.**

Schulnachrichten.

Der Lehrplan blieb im Wesentlichen unverändert. Für die zahlreichen beiden jüngern Kurse des obern Gymnasiums wurde die Trennung des Unterrichts auch im Deutschen dringend nothwendig. — Wie bereits für die Konviktszöglinge und Stipendiaten längst deklamatorische Uebungen bestanden, so wurden auf höhere Weisung zu Anfang des Sommerhalbjahrs auch für die übrigen Schüler des obern Gymnasiums solche Uebungen eingeführt, deren Leitung einstweilen Professor Aberle übernommen hat.

Im Personalstand der Lehrer gab es einige Veränderungen. Unterm 23. Sept. v. J. wurde Präceptor Feyl von der untern auf die mittlere Lehrstelle des untern Gymnasiums (3. und 4. Kl.) befördert; derselbe trat also gerade mit dem Anfang des Studienjahrs in diese Stelle ein. Den Unterricht in der 1. und 2. Klasse hatte hierauf Präceptoratsverweser Baur zu übernehmen, bis zum 14. Januar, wo sodann der inzwischen für diese Lehrstelle neuernannte Präceptor W. Schwarz das Amt antrat.

Dem Oberpräceptor Erhardt ist der Titel eines Professors mit dem Rang in der 8. Stufe gnädigst verliehen worden.

Schüler zählte die Lehranstalt zu Ende des Winterhalbjahrs noch 234 (109 am untern, 125 am obern Gymnasium); drei waren schwerer Krankheit erlegen, nämlich Anselm Gegenbaur (von Herlazhofen) und Johann Ciolina (aus Ulm) vom obern Gymnasium, sodann Leonhard Kreutle (von Donaurieden), Schüler der II. untern Klasse.

Noch weitere Opfer einer Krankheit, die noch gar manchen befiel, sind im Sommerhalbjahr geworden: im April Leopold Schutzbach von Mahlstetten, Schüler des 3ten, im Mai während der Ferien Eligius Schmid von Gmünd, Schüler des 4ten obern Kurses. (Nach den Frühlingsferien kehrte bald wieder der frühere gute Gesundheitsstand zurück, wie sich seit vielen Jahren die Anstalt dessen zu erfreuen gehabt hatte.)

Die Zahl der Schüler, von welchen außerdem mehrere entlassen wurden und einige das Gymnasium selbst verließen, betrug zu Ende des Sommerhalbjahrs

am untern Gymnasium: 103;	in der I. Klasse	12.
	in der II. „	16.
	in der III. „	15.
	in der IV. „	15.
	in der V. „	22.
	in der VI. „	23.

Am obern Gymnasium: 120; nämlich
im Iten Kurs (Kl. VII.): 38; im IIIten (Kl. IX.): 24;
im IIten „ (Kl. VIII.): 30; im IVten (Kl. X.): 28.

Also an beiden Abtheilungen in Summa 223 Schüler.

Königl. Rektoratamt.
Wocher.