ABHANDLUNGEN

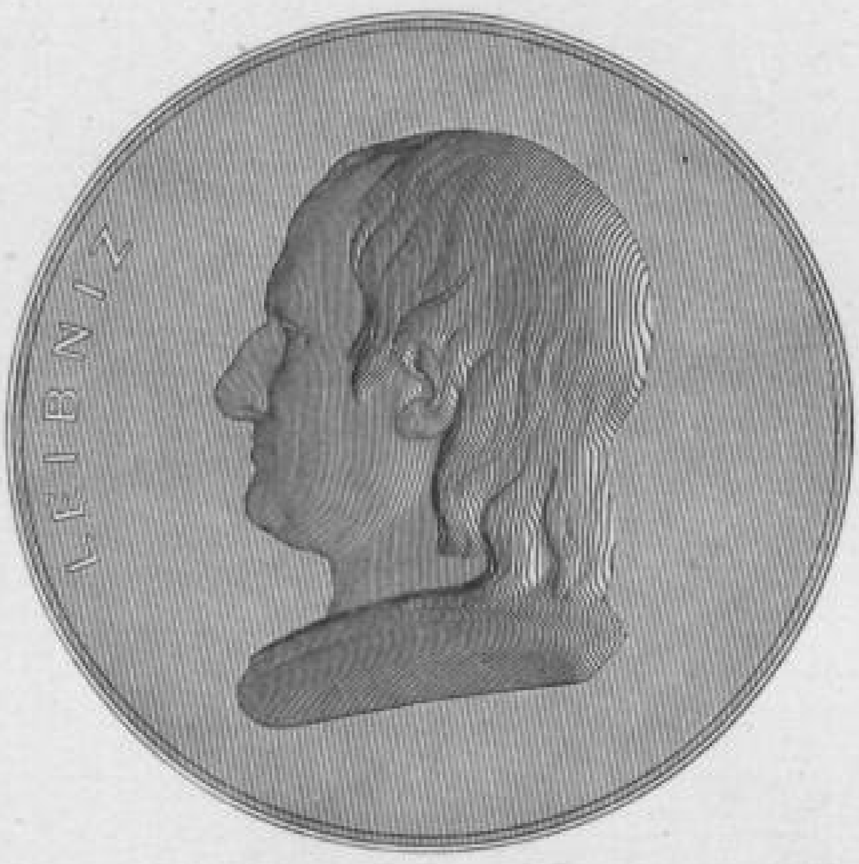
EINUNDFÜNFZIGSTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



NEUNUNDZWANZIGSTER BAND.

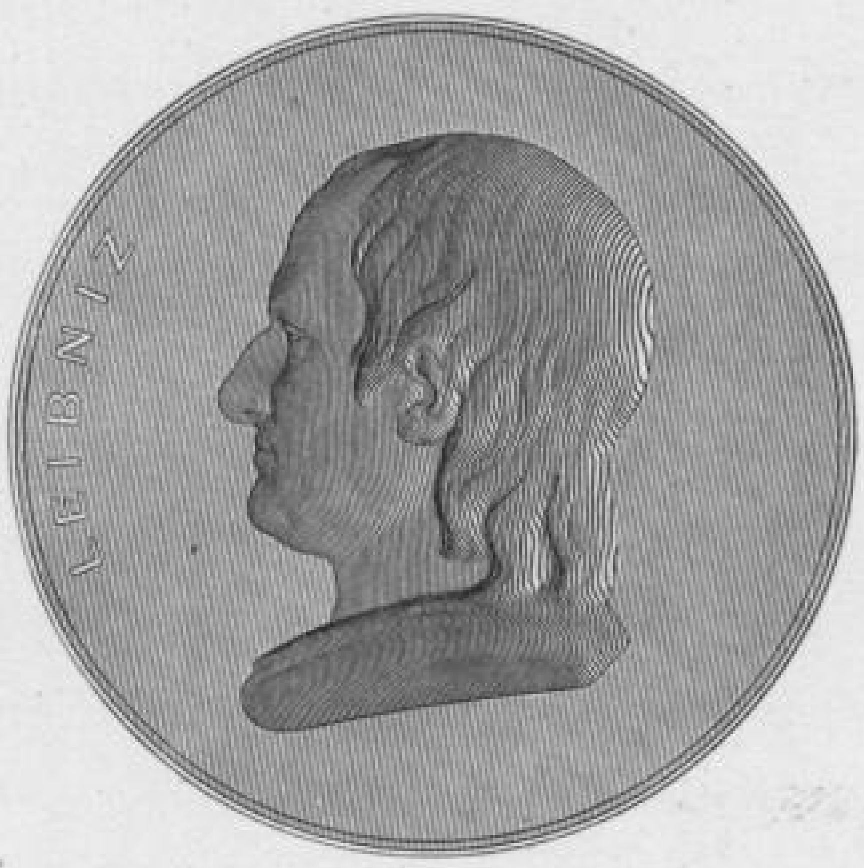
MIT 1 KARTE, 1 FAKSIMILE, 1 DOPPELTAFEL, 4 TAFELN UND 13 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1906.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



EINUNDFÜNFZIGSTER BAND.

MIT 1 KARTE, 1 FAKSIMILE, 1 DOPPELTAFEL, 4 TAFELN UND 13 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1906.

INHALT.

DAS GRUPPENSCHEMA FÜR ZUFÄLLIGE EREIGNISSE

VON

HEINRICH BRUNS

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

Nº VIII

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1906

Einzelpreis: 1 Mark 60 Pfg.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Taf. 1849. 2 ℳ 40 ₰.
P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 ₰.
A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ
C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale u. über das Windungsgesetz v. Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 2. Abdruck. 1863. 3 ℳ
F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ
M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Taf. 1852. 1 ℳ 60 ₰.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Taf. 2. Abdruck. 1867. 2 ℳ

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. Mit 1 Taf. 1852. 3 ℳ
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. I. Mit 18 Taf. 1852. 4 ℳ
P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ
— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2+r'^2-2rr'$ $(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ
O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.
— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die ellipt. Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.
C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ
A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 2 ℳ

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musikalischen Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.
P. A. HANSEN, Auseinandersetz. e. zweckm. Methode z. Berechn. d. absol. Störung. d. klein. Planeten. 1. Abhdlg. 1856. 5 ℳ
R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 2. Abdruck. 1889. 1 ℳ 60 ₰.
H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.
W. G. HANKEL, Elektr. Untersuch. 1. Abhdlg.: Ueb. d. Mess. d. atmosph. Elektricität nach absol. Maasse. M. 2 Taf. 1856. 6 ℳ
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. II. Mit 13 Taf. 1857. 4 ℳ

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetz. e. zweckm. Methode z. Berechn. d. absol. Störungen d. klein. Planeten. 2. Abhdlg. 1857. 4 ℳ
W. G. HANKEL, Elektr. Untersuchungen. 2. Abhdlg.: Ueber die thermo-elektr. Eigensch. des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.
— Elektr. Untersuch. 3. Abhdl.: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Taf. 1858. 6 ℳ
G. T. FECHNER, Ueber ein wicht. psychophys. Grundgesetz u. dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Taf. 1859. 8 ℳ

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ

W. G. HANKEL, Elektr. Untersuch. 4. Abhdlg.: Ueber das Verhalten d. Weingeistflamme in elektr. Beziehung. 1859. 2 ℳ
P. A. HANSEN, Auseinandersetz. e. zweckm. Meth. z. Berechn. d. absol. Störung. d. klein. Planeten. 3. Abhdlg. 1859. 7 ℳ 20 ₰.
G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.
G. METTENIUS, 2 Abhdlgen.: I. Beitr. z. Anatomie d. Cycadeen. Mit 5 Taf. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ
W. HOFMEISTER, Neue Beitr. z. Kenntn. d Embryobildung d. Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Taf. 1861. 8 ℳ

SECHSTER BAND (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

W. G. HANKEL, Elektr. Untersuch. 5. Abhdl.: Maassbestimmungen der elektromotor. Kräfte. 1. Theil. 1861. 1 ℳ 60 ₰.
— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.
P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechn. d. in d. Mondtafeln angewandten Störungen. 1. Abhdl. 1862. 9 ℳ
G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Taf. 1863. 4 ℳ 40 ₰.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. Preis 17 ℳ

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechn. d. in d. Mondtafeln angewandten Störungen. 2. Abhdl. 1864. 9 ℳ
G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Taf. 1864. 3 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Relationen einestheils zw. Summen u. Differenzen u. anderntheils zw. Integralen u. Differentialen. 1865. 2 ℳ
W. G. HANKEL, Elektr. Untersuch. 6. Abhdl.: Maassbestimmungen der elektromotor. Kräfte. 2. Theil. 1865. 2 ℳ 80 ₰.

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1869. brosch. Preis 24 ℳ

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 ℳ 60 ₰.
— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 ℳ 80 ₰.
W. G. HANKEL, Elektr. Untersuch. 7. Abhdl.: Ueber die thermoelektr. Eigensch. d. Bergkrystalles. M. 2 Taf. 1866. 2 ℳ 40 ₰.
P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der K. S. Ges. d. Wiss. in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 ℳ 80 ₰.
— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 ℳ

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 ℳ

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 ℳ 40 ₰.
— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 ℳ
— Supplem. z. d. geodät. Untersuch benannten Abhdlg., die Reduction d. Winkel eines sphäroid. Dreiecks betr. 1869. 2 ℳ
W. G. HANKEL, Elektr. Untersuch. 8. Abhdl.: Ueber die thermoelektr. Eigensch. des Topases. Mit 4 Taf. 1870. 2 ℳ 40 ₰.
P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit 2 Planigloben. 1870. 3 ℳ
G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. 1. Theil. 1871. 2 ℳ

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874 brosch. Preis 21 ℳ

W. WEBER, Elektrodynam. Maassbestimmungen, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Untersuch. d. Weges e. Lichtstrahls durch e. belieb. Anzahl v. brechenden sphär. Oberflächen. 1871. 3 ℳ 60 ₰.
C. BRUHNS und E. WEISS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 ℳ
W. G. HANKEL, Elektr. Untersuch. 9. Abhdl.: Ueber die thermoelektr. Eigensch. d. Schwerspathes. M. 4 Taf. 1872. 2 ℳ
— Elektr. Untersuch. 10. Abhdl.: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Taf. 1872. 2 ℳ
C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynam. Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 ℳ 80 ₰.
P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 ℳ
— Ueber d. Darstell. d grad. Aufsteig. u. Abweich. d. Mondes in Funktion d. Länge in d. Bahn u. d. Knotenlänge. 1874. 1 ℳ
— Dioptr. Untersuch. mit Berücksicht. d. Farbenzerstreuung u. d. Abweich. wegen Kugelgestalt. 2. Abhdlg. 1874. 2 ℳ

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 ℳ

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 ℳ
C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 ℳ
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. 11. Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Taf. 1875. 2 ℳ
P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 ℳ
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. 12. Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Taf. 1875. 2 ℳ
W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 ℳ
C. NEUMANN Das Weber'sche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 ℳ
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbes. über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Taf. 1878. 2 ℳ

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

DAS GRUPPENSCHEMA FÜR ZUFÄLLIGE EREIGNISSE

VON

HEINRICH BRUNS

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

N° VIII

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1906

Vorgetragen für die Abhandlungen am 25. Mai 1906.
Das Manuskript eingeliefert am 14. Juni 1906.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 17. Juli 1906.

DAS GRUPPENSCHEMA FÜR ZUFÄLLIGE EREIGNISSE

VON

HEINRICH BRUNS

1. In meinem vor kurzem erschienenen Lehrbuche „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre“ habe ich dem Urnenschema, das zur Untersuchung von gruppenweise gezählten Ereignissen zu dienen hat, einen besonderen Abschnitt gewidmet und bei dieser Gelegenheit den einfachsten Fall, nämlich die zweigliedrigen Gruppen, durchgerechnet. Für die höheren Gruppen beschränkte ich mich darauf, einige allgemeine Ergebnisse auszusprechen, weil das a. a. O. benutzte Verfahren vorderhand auf weitläufige und schwerfällige Formeln führte. Bei der weiteren Verfolgung des Gegenstandes bin ich nun dahin gelangt, die gesuchte Lösung in eine hinreichend übersichtliche Gestalt zu bringen: es genügte dazu, an dem ursprünglichen Verfahren einige Kleinigkeiten abzuändern, wozu im besonderen die Einführung der zyklischen Gruppenbildung und die Aufstellung einer bestimmten Gruppenordnung zu rechnen ist.

Da die nachstehenden Entwicklungen sich dem Inhalte des genannten Buches eng anschließen, so verweise ich wegen der Namen und Zeichen auf die betreffenden Abschnitte meiner früheren Darstellung; dies gilt namentlich von der Bedeutung und dem Verhalten der $\mathfrak{D}$-Operation.

2. Als Ausgangspunkt der Untersuchung dient die übliche Vorstellung von einer Urne, die mit Kugeln verschiedener Farbe gefüllt ist. Aus der Urne wird n-mal mit jedesmaliger Zurücklegung der Kugel gezogen, so daß eine aus n Zügen zusammengesetzte „Zugreihe“ $Z(n)$ oder ein „Versuch“ $Z(n)$ entsteht. Bedeutet hierbei z_h den h-ten Zug, so läßt sich der Versuch $Z(n)$ in Gestalt der Kombination

$$Z(n) = z_1 z_2 \ldots z_n \tag{1}$$

schreiben. Faßt man ferner in der vorstehenden Zugreihe die Züge mit den Nummern

$$1 \text{ bis } s, \quad 2 \text{ bis } s+1, \quad 3 \text{ bis } s+2, \quad \text{usw.}$$

40*

zusammen, so entstehen s-gliedrige „Gruppen“, für die wir zur Abkürzung das Zeichen $G(s)$ benutzen wollen.

Denkt man sich die n Züge, wie es gewöhnlich geschieht, der Reihe nach auf einer Zeile hingeschrieben, so lassen sich im ganzen $n - s + 1$ Gruppen $G(s)$ abteilen. Demnach muß bei einer derartigen Gruppenbildung die Zahl n mindestens gleich s sein, da man andernfalls überhaupt keine Gruppe $G(s)$ erhält. Man kann aber auch die Züge auf einem Kreise eintragen, und zwar derart, daß sich beim Durchlaufen des Kreises in der Richtung $z_1 z_2$ an den letzten Zug z_n wieder die Züge $z_1, z_2, \ldots$ anschließen. In diesem Falle läßt sich offenbar das Abteilen von Gruppen $G(s)$ unbeschränkt nach vorwärts und ebenso auch nach rückwärts fortsetzen, nur daß sich dann die einzelnen Gruppen nach jedem auf dem Kreise vollführten Umlaufe periodisch wiederholen.

Wenn die Züge auf einem Kreise eingetragen werden, so empfiehlt es sich, die Numerierung der Züge nach vorwärts über n hinaus und ebenso nach rückwärts über $0, -1, \ldots$ hinaus unbeschränkt fortzusetzen, mit der Maßgabe, daß zwei Züge z_h und z_k identisch sind, wenn ihre Nummerndifferenz $h - k$ durch n teilbar ist. Man erhält hierbei zu einem Zuge z_k, dessen Nummer k außerhalb des Intervalls 1 bis n liegt, die eigentliche Zugnummer h, wenn man zu k den modulo n genommenen Rest h aufsucht und hierbei vorschreibt, daß dieser Rest h der Reihe der Zahlen 1 bis n angehören soll. Faßt man dann die Züge mit den Nummern

$$(2) \qquad 1 \text{ bis } s, \quad 2 \text{ bis } s + 1, \ldots, \quad n \text{ bis } n + s - 1$$

zusammen, so entstehen n voneinander verschiedene Gruppen $G(s)$. Dieselbe Gruppenreihe, wenn auch mit zyklischer Verschiebung der einzelnen Glieder, wird erhalten, wenn man bei dem Abteilen der Gruppen nicht wie in (2) mit dem Zuge z_1, sondern mit irgend einem andern Zuge z_h beginnt und auf dem Kreise einmal vollständig herumgeht. Zugleich erkennt man, daß n jetzt auch kleiner als s sein darf. So liefert z. B. selbst für $n = 1$ der Ansatz (2) verbunden mit der Regel von der Bedeutung der oberhalb n gelegenen Nummern eine Gruppe $G(s)$, die offenbar durch das n-malige Setzen des Zuges z_1 entsteht.

3. Die beiden vorstehend beschriebenen Arten der Gruppenbildung — auf der Zeile und auf dem Kreise — kann man als die „lineare“ und die „zyklische“ unterscheiden. Handelt es sich

um Auszählungen, die innerhalb beobachteter Zugreihen an den Gruppen vorgenommen werden, so werden die beiden Bildungsweisen in ihren numerischen Ergebnissen um so weniger voneinander abweichen, je größer n gegen s ist. Da nun die zyklische Gruppenbildung, wie sich später zeigen wird, die einfacheren Formeln liefert, so empfiehlt es sich, die zyklische Rechnung überall da zu bevorzugen, wo nicht triftige Gründe das Gegenteil fordern.

4. Von den in der betrachteten Urne enthaltenen Kugeln wollen wir voraussetzen, daß sie sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Im ganzen mögen F verschiedene Farben vorhanden sein, die wir uns auf irgend eine Weise geordnet und durch laufende Nummern unterschieden denken. Die relative Häufigkeit, mit der die Kugeln der f-ten Farbe an der Urnenfüllung beteiligt sind, bezeichnen wir mit p_f, so daß p_f nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der das Ziehen der f-ten Farbe zu erwarten ist. Der Kürze halber werden wir das Symbol p_f auch zur Bezeichnung der dazu gehörigen Farbe benutzen.

5. Nach diesen Festsetzungen entsteht aus (1) der Ausdruck für ein bestimmtes beobachtetes $Z(n)$, wenn man in (1) jedes z_h durch das p-Zeichen derjenigen Farbe ersetzt, die bei dem Zuge z_h herausgekommen ist. Jedes beobachtete $Z(n)$ erscheint also als eine Kombination von n Elementen, die der Reihe der F Größen p_f entnommen sind. Ebenso erscheinen die Gruppen $G(s)$, die sich aus dem betrachteten $Z(n)$ bilden lassen, als Kombinationen von je s Elementen aus der Reihe der p_f.

Je nach der Art, wie die Elemente p_f in eine Gruppe $G(s)$ eingehen, nimmt diese Gruppe andre und andre Formen an. So können z. B. für drei Farben bei den Gruppen $G(2)$ die neun Formen

$$(3) \qquad p_1p_1,\ p_1p_2,\ p_1p_3,\ p_2p_1,\ p_2p_2,\ p_2p_3,\ p_3p_1,\ p_3p_2,\ p_3p_3$$

auftreten. Allgemein gesprochen ist die Anzahl der möglichen Formen von $G(s)$ bei F Farben durch die Potenz F^s gegeben, da jede Farbe unabhängig von der andern als erstes, zweites usw. Element in die Gruppe $G(s)$ eingehen kann.

6. Bei der Formulierung der zu lösenden Aufgabe möge für den Augenblick der einfachste Fall vorangestellt werden. Wenn

der Urnenversuch $Z(n)$ m-mal ausgeführt wird, so entsteht dadurch eine Kollektivreihe von dem Umfange m, deren Glieder die m beobachteten $Z(n)$ bilden. Als Argument dieser Kollektivreihe soll zunächst die Häufigkeit x gelten, mit der eine vorgeschriebene Form der Gruppe $G(s)$ in jedem $Z(n)$ auftritt. Sind beispielsweise drei Zugreihen von der Gestalt $Z(7)$, nämlich die Reihen

$$(4) \qquad p_1p_2p_1p_2p_2p_2p_1, \quad p_1p_2p_1p_1p_2p_1p_1, \quad p_1p_1p_1p_2p_1p_1p_1$$

beobachtet worden, so tritt darin bei linearer Zählung von den Gruppen $G(2)$ die Form p_1p_1 mit den Häufigkeiten

$$x = 0, \quad x = 2, \quad x = 4$$

auf, während bei den Gruppen $G(3)$ zu der Form $p_1p_2p_1$ die Häufigkeiten

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 1$$

gehören. Bei zyklischer Zählung erhielte man dagegen zu p_1p_1 die Argumentwerte $1, 3, 5$ und zu $p_1p_2p_1$ wieder die früheren Werte $1, 2, 1$.

Allgemein wird, wenn es sich um die Gruppen $G(s)$ handelt, das Argument x — je nach der Art der Zählung — der Reihe der Zahlen 0 bis $n-s+1$ oder 0 bis n angehören, da ja einerseits die vorgeschriebene Gruppenform in einem $Z(n)$ ganz ausfallen kann, und da andrerseits jedes $Z(n)$ nicht mehr als $n-s+1$ oder n verschiedene Gruppen $G(s)$ liefern kann.

Die betrachtete Kollektivreihe liefert des weitern eine bestimmte beobachtete Verteilung $U(x)$, wobei $U(x)$ die relative Häufigkeit ausdrückt, mit welcher der Argumentwert x in der Kollektivreihe auftritt. Gesucht wird dann zur Vergleichung mit dem beobachteten Verlaufe von $U(x)$ die entsprechende theoretische Verteilung $\mathfrak{U}(x)$, d. h. diejenige Verteilung, die man beobachten würde, wenn bei unbegrenzter Wiederholung der Versuche $Z(n)$ eine vollständige Ausgleichung des den Urnenzügen anhaftenden Zufalls eintritt. Die Wertreihe der $\mathfrak{U}(x)$ läßt sich mit Hilfe der $\mathfrak{D}$-Operation übersichtlich in den Ausdruck

$$(5) \qquad \mathfrak{D}(u^x) = \mathfrak{U}(0) + \mathfrak{U}(1)u + \mathfrak{U}(2)u^2 + \cdots$$

zusammenfassen, worin u einen willkürlichen Parameter bedeutet, und $\mathfrak{D}(u^x)$ den nach der Verteilung $\mathfrak{U}(x)$ genommenen Durchschnitt der Werte von u^x bezeichnet.

Statt der vorstehend gebrauchten Zeichen werden wir im folgenden auch die Symbole $\mathfrak{D}(u^x,n)$ und $\mathfrak{U}(x,n)$ benutzen, wenn die Anzahl der Züge in den zur Auszählung vorgelegten Zugreihen $Z(n)$ besonders ersichtlich gemacht werden soll.

7. Die angegebene Aufgabe läßt sich nun nach verschiedenen Richtungen hin erweitern. Zunächst kann man bei der Auszählung, die für jedes $Z(n)$ den zugehörigen Wert von x liefert, statt einer einzigen Gruppenform mehrere Formen gleichzeitig berücksichtigen. So erhält man in dem Beispiel (4), wenn man die Formen p_1p_1 und p_2p_2 vereint zählt, bei der linearen Gruppenbildung die Argumentwerte

$$x = 2, \quad x = 2, \quad x = 4.$$

Berücksichtigt man dagegen gleichzeitig die Formen p_1p_2, p_2p_1 und $p_1p_2p_2$, so wird

$$x = 5, \quad x = 4, \quad x = 2.$$

Man kann die Gruppenformen, die bei der Auszählung berücksichtigt werden, kurz als die „zählenden" Formen bezeichnen, im Gegensatze zu den übrigen „nichtzählenden".

Die Scheidung in zählende und nichtzählende Formen läßt sich noch etwas anders einkleiden. Man denke sich die Formen, die bei den betrachteten Gruppen überhaupt auftreten können, irgendwie geordnet und der Reihe nach mit G_1, G_2, ... bezeichnet. Ferner ordne man jeder Form G_h als „Gewicht" eine bestimmte Zahl a_h zu und bezeichne mit x_h die Häufigkeit, mit der die Form G_h in der vorgelegten Zugreihe auftritt. Endlich wähle man als Argument x den Ausdruck

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots, \tag{6}$$

den wir als die „mit den Gewichten a_h gebildete Formenmenge" bezeichnen wollen. Dann erhält man offenbar wieder den vorhin betrachteten Fall, wenn man vorschreibt, daß als Gewichte nur die Zahlen Eins und Null Verwendung finden sollen, wobei den zählenden Formen das Gewicht Eins, den nichtzählenden das Gewicht Null zu geben ist. Zugleich erkennt man aber auch, daß kein Hindernis besteht, die Aufgabe in der durch (6) ausgedrückten allgemeineren Gestalt aufzustellen, also für die Gewichte irgendwelche positive oder negative Zahlen anzusetzen.

8. Eine andere Erweiterung der zuerst gestellten Aufgabe entsteht, wenn man bei der Auszählung die gezählten Formen nicht zusammenfaßt, sondern innerhalb jeder Zugreihe ganz oder teilweise getrennt hält. Bezeichnet man z. B. in der Reihe (4) mit x die Häufigkeit der Form p_1p_1, mit y die Häufigkeit der Form p_2p_2, endlich mit z die Häufigkeit der vereint gezählten Formen p_1p_2 und p_2p_1, so erhält man für diese Argumente bei linearer Gruppenbildung aus den drei Zugreihen die drei Wertsysteme

$$x = 0,\ y = 2,\ z = 4; \quad x = 2,\ y = 0,\ z = 4; \quad x = 4,\ y = 0,\ z = 2.$$

Durch eine solche Zählungsweise gelangt man offenbar zu Kollektivreihen, die von mehreren Argumenten abhängen.

Die verschiedenen Gestalten der getrennten Zählung lassen sich auf folgende Art einheitlich zusammenfassen. Man denke sich wieder wie vorhin die Formenreihe $G_1, G_2, \ldots$ aufgestellt und zunächst mit den Gewichten $a_1, a_2, \ldots$ nach (6) für jede Zugreihe die Formenmenge

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots$$

berechnet. Darauf wiederhole man diese Operation mit den neuen Gewichten $b_1, b_2, \ldots$, so daß zu jeder Zugreihe die Formenmenge

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots$$

entsteht. In dieser Weise fahre man fort, bis die verschiedenen Gewichtssysteme, die man benutzen will, erschöpft sind. Dann liefern die vorgelegten Zugreihen eine Kollektivreihe, deren Glieder von den Argumenten $x, y, \ldots$ abhängen. Man kann diese Behandlung der Zugreihen als „wiederholte Zählung mit abgeänderten Gewichten" bezeichnen. Sie schließt, wie man ohne weiteres erkennt, die getrennte Zählung einzelner Formen als Sonderfall in sich.

9. Der in (6) aufgestellte Ausdruck der Formenmenge verlangt, daß die vorhandenen Gruppenformen in eine bestimmte Ordnung gebracht worden seien. Um eine für unseren Zweck geeignete Reihenfolge herzustellen, benutzen wir die folgende Bemerkung.

Wenn in dem dekadischen Zahlensystem beispielsweise alle vierziffrigen Zahlen aufgestellt werden sollen, die sich mit den sechs Ziffern 2, 4, 5, 7, 8, 9 bilden lassen, so gibt es eine bekannte einfache Regel, mit der man die verlangten Zahlen, und zwar sogleich nach ihrer Größe geordnet, unmittelbar hinschreiben kann. Diese Regel kommt darauf hinaus, daß man, von der niedrigsten Zahl 2222 ausgehend, zunächst die letzte Ziffer bis zu dem größten zulässigen Werte aufsteigen läßt. Darauf erhöht man die vorhergehende Ziffer und läßt wiederum die letzte Ziffer die zulässigen Werte durchlaufen, und so fort, bis die Gesamtheit der verlangten Zahlen hergestellt ist.

Um die vorstehende Regel auf unsern Fall anzuwenden, betrachten wir die F Farbengrößen $p_1, \ldots p_F$ als ebensoviele, ihrer Größe nach geordnete Ziffern eines Q-adischen Zahlensystems, wobei Q eine Zahl oberhalb F bedeutet. Darauf setzt man, wenn es sich um das Ordnen der Gruppenformen $G(s)$ handelt, alle s-ziffrigen Zahlen des Q-adischen Systems an, die sich mit den genannten F Ziffern bilden lassen. Hierbei erhält man, wenn man die genannte Regel beachtet, die einzelnen Zahlen nach ihrer Größe geordnet und gewinnt zugleich die gesuchte Formenordnung, da ja jeder Zahl eine Form und jeder Form eine Zahl entspricht. Ein einfaches Beispiel hierzu ist die in (3) aufgestellte Formenreihe der Gruppen $G(2)$ für drei Farben.

Wenn die zu $G(s)$ gehörige Formenreihe — in der angegebenen Weise geordnet — vorliegt, so ist damit auch ihre laufende Numerierung von 1 bis F^s gegeben. Es findet dann ein wechselweise eindeutiges Entsprechen zwischen den Formen von $G(s)$, den aus den p-Größen gebildeten s-ziffrigen Zahlen des Q-adischen Systems und den laufenden Formennummern statt.

10. Um die vorbereitenden Bemerkungen abzuschließen, ist noch an die Bedeutung der $\mathfrak{D}$-Operation zu erinnern. In der Zugreihe

$$Z(n) = z_1 z_2 \ldots z_n$$

spielen die Bestandteile z_i die Rolle von unabhängigen Veränderlichen, deren Wertvorrat durch die p-Größen gegeben ist. Wird die Reihe der Versuche unbegrenzt fortgesetzt, so tritt jedes z_i mit einer bestimmten Verteilung auf, deren Verlauf, entsprechend den möglichen Werten von z_i, durch die Gleichungen

$$\mathfrak{U}(p_1) = p_1, \quad \mathfrak{U}(p_2) = p_2, \; \ldots \; \mathfrak{U}(p_F) = p_F$$

bestimmt ist. Bedeutet ferner $A(z_i)$ irgend einen von z_i abhängenden Ausdruck, so erscheint der Durchschnitt von A, genommen nach der Verteilung von z_i, in der Gestalt

$$\mathfrak{D}(A) = \sum_a \mathfrak{U}(a) A(a) = \sum_a a A(a),$$

worin der Buchstabe a bei der Summation die Reihe der p-Größen zu durchlaufen hat. In ähnlicher Weise nimmt für einen von mehreren Zügen abhängenden Ausdruck $A(z_i, z_k, \ldots)$ der nach sämtlichen darin vorkommenden Zügen genommene Durchschnitt die Gestalt

$$\mathfrak{D}(A) = \sum_a \sum_b \ldots ab \ldots A(a, b, \ldots)$$

an, worin bei der Summation die $a, b, \ldots$ unabhängig voneinander die Reihe der p-Größen zu durchlaufen haben.

Da wir es im folgenden fortwährend mit solchen Summen zu tun haben, so soll der Kürze halber das Summenzeichen nur einfach und ohne angehängte Indizes geschrieben werden, wenn die Summation über alle hinter dem Summenzeichen stehenden beweglichen Nummern auszudehnen ist. Ferner kann auch die Angabe der Summengrenzen fortbleiben, denn die Summationen gehen, von besonderen Fällen abgesehen, stets über denselben Bereich, nämlich bei den p-Größen von p_1 bis p_F, bei den Zugnummern von 1 bis n oder auch — bei zyklischer Rechnung — über den ganzen Kreisumfang, endlich bei den Formennummern der Gruppen $G(s)$ von 1 bis F^s.

II. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nunmehr zu der Untersuchung der zyklisch gebildeten Gruppen $G(s)$, wobei wir sogleich nach der in (6) enthaltenen Vorschrift die mit den Gewichten $e_1, e_2, \ldots$ angesetzte Formenmenge

$$x = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \cdots$$

zugrunde legen. Dieser Ansatz ist hinreichend allgemein, denn das Zusammenfassen von Formen ungleicher Gliederzahl würde, wie sich am raschesten an einem einfachen Falle zeigen läßt, nichts wesentlich neues liefern. Wenn z. B. die Urnenfüllung aus den drei Farben p, q, r besteht, und wenn ferner die Formen pp, ppr und pqr mit den Gewichten a, b, c gezählt werden sollen, während alle übrigen Gewichte null sind, so kann man zunächst die Zählung von pp durch die Zählung der drei Formen ppp, ppq und ppr ersetzen, da ja, wie unmittelbar ersichtlich, das Vorkommen dieser drei Formen bei der zyklischen Rechnung mit dem Vorkommen der Form pp äquivalent ist. Man hätte also statt der angegebenen zwei- und dreigliedrigen Formen die vier durchweg dreigliedrigen Formen

$$ppp, \; ppq, \; ppr, \; pqr$$

mit den Gewichten

$$a, \ a, \ a + b, \ c$$

zu zählen. Ebenso könnte man die Zählung von pp auch durch die Zählung der Formen ppp, qpp, rpp ersetzen, so daß man auf die fünf Formen

$$ppp, \ qpp, \ rpp, \ ppr, \ pqr$$

mit den Gewichten

$$a, \quad a, \quad a, \quad b, \quad c$$

geführt wird.

Das angeführte Beispiel läßt erkennen, wie man bei der zyklischen Gruppenbildung die Zählung von Formen ungleicher Gliederzahl durch angemessene Erweiterung der niedrigeren Formen und durch entsprechende Änderung der Gewichtszahlen auf den Fall reduzieren kann, wo sämtliche Formen dieselbe Gliederzahl besitzen.

12. Bei der Behandlung der gestellten Aufgabe wollen wir in $G(s)$ die Gliederzahl s als fest ansehen, dagegen bei der Zahl n in $Z(n)$ sogleich die Gesamtheit der für n zulässigen Werte ins Auge fassen. Hierbei ist zu beachten, daß für $n < s$ die aus $Z(n)$ zu bildenden Gruppen $G(s)$ nicht die sämtlichen Formen liefern, die an und für sich bei den Gruppen $G(s)$ möglich sind. So erhält man z. B. für $n = 1, 2, 3$ als Gruppen $G(4)$ die nachstehenden viergliedrigen Zugreihen:

$$n = 1, \quad z_1 z_1 z_1 z_1,$$
$$n = 2, \quad z_1 z_2 z_1 z_2, \ z_2 z_1 z_2 z_1,$$
$$n = 3, \quad z_1 z_2 z_3 z_1, \ z_2 z_3 z_1 z_2, \ z_3 z_1 z_2 z_3,$$

und man erkennt sofort, daß aus diesen Gruppen niemals eine Form wie etwa $p_1 p_1 p_2 p_2$ entspringen kann.

13. Die bei den Gruppen $G(s)$ möglichen Formen denken wir uns, wie früher angegeben, als s-ziffrige Q-adische Zahlen geordnet und zugleich mit den von 1 bis $M = F^s$ laufenden Nummern versehen. Zu jeder Form G_h gehört dann eine bestimmte s-ziffrige Q-adische Zahl, die wir ebenfalls kurz mit G_h bezeichnen können, ferner die laufende Nummer h, sowie ein Gewicht e_h, das vorläufig ganz beliebig angesetzt werden mag. Weiter führen wir ein Gewichtssymbol E ein, das von den s Zügen einer Gruppe $G(s)$ abhängt, und das wir je nach Umständen in einer der beiden Gestalten

(7) $$E(z_{i+1} z_{i+2} \ldots z_{i+s}) \quad \text{oder} \quad E(i + 1, i + s)$$

schreiben wollen. Dieses Symbol soll den Wert e_h annehmen, sobald die hinter dem E-Zeichen stehende Gruppe $G(s)$ in die Form G_h übergeht.

Mit den Symbolen E bilden wir nun den Ausdruck

$$(8) \qquad x = E(z_1 \ldots z_s) + E(z_2 \ldots z_{s+1}) + \cdots + E(z_n \ldots z_{n+s-1}),$$

wobei die oberhalb n gelegenen Indizes in der früher angegebenen Weise durch ihren modulo n genommenen Rest zu ersetzen sind. Für einen bestimmten ausgeführten Versuch $Z(n)$ ist dann in (8) jeder Zug z_i durch die Farbe p_h zu ersetzen, die bei dem Zuge z_i zum Vorschein gekommen ist. Tritt hierbei in (8) eine Gruppenform G_h mit der Häufigkeit x_h auf, so entspringt daraus der Beitrag $x_h e_h$, d. h. der Ausdruck x ist nichts anderes, als die mit den Gewichten e_h gezählte Formenmenge des betrachteten Versuches, die zugleich das Argument der zu untersuchenden Verteilung liefert.

Weiter führen wir die Veränderlichen $u = \exp U$ nebst dem Symbol

$$(9) \qquad C(z_{i+1} z_{i+2} \ldots z_{i+s}) = \exp[UE(z_{i+1} z_{i+2} \ldots z_{i+s})]$$

ein. Daraus folgt der Reihe nach

$$u^x = \exp[UE(z_1 \ldots z_s) + \cdots + UE(z_n \ldots z_{n+s-1})],$$
$$u^x = C(z_1 \ldots z_s) C(z_2 \ldots z_{s+1}) \ldots C(z_n \ldots z_{n+s-1}).$$

Nimmt man hiermit die $\mathfrak{D}$-Operation vor, die sich rechts auf die Verteilung der z_i und links auf die daraus entspringende Verteilung des Arguments x bezieht, so entsteht die Gleichung

$$(10) \qquad \mathfrak{D}(u^x, n) = \mathfrak{D}[C(z_1 \ldots z_s) \ldots C(z_n \ldots z_{n+s-1})].$$

Ersetzt man dann noch, wo nötig, die Indizes durch ihre modulo n genommenen Reste und führt auf der rechten Seite die $\mathfrak{D}$-Operation nach der in Artikel 10 entwickelten Vorschrift durch, so entsteht der Ausdruck

$$(11) \qquad \Sigma a_1 a_2 \ldots a_n C(a_1 a_2 \ldots a_s) C(a_2 a_3 \ldots a_{s+1}) \ldots C(a_n a_1 \ldots a_{s-1}),$$

worin bei der Summation die Nummern a_i — jede für sich — die Reihe der Farbengrößen p_1 bis p_F zu durchlaufen haben.

14. Die Gleichungen (10) und (11), sowie die weiterhin daraus abzuleitenden Folgerungen, bleiben ihrem Wesen nach bestehen, wenn statt der einmaligen Zählung der Formenmenge eine mehrmalige Zählung mit abgeänderten Gewichten vorliegt. Es wird genügen, dies für den Fall nachzuweisen, wo es sich um zwei Argumente handelt.

Wenn sich an die erste, mit den Gewichten e_h ausgeführte Zählung eine zweite mit den Gewichten f_h anschließt, so führt man neben den E-Symbolen, die für die Gewichte e_h gelten, in ähnlicher Weise noch die Symbole

$$F(z_{i+1} z_{i+2} \ldots z_{i+s})$$

ein, die den Wert f_h annehmen, wenn die hinter dem F-Zeichen stehende Gruppe $G(s)$ in die Form G_h übergeht. Ferner setzt man mit den Veränderlichen

$$u = \exp U, \quad v = \exp V$$

den Ausdruck

$$C(z_{i+1} \ldots z_{i+s}) = \exp[UE(z_{i+1} \ldots z_{i+s}) + VF(z_{i+1} \ldots z_{i+s})]$$

nebst den Argumenten

$$x = E(z_1 \ldots z_s) + E(z_2 \ldots z_{s+1}) + \cdots + E(z_n \ldots z_{n+s-1}),$$
$$y = F(z_1 \ldots z_s) + F(z_2 \ldots z_{s+1}) + \cdots + F(z_n \ldots z_{n+s-1})$$

an. Dann erhält man statt (10) die Gleichung

$$\mathfrak{D}(u^x v^y, n) = \mathfrak{D}[C(z_1 \ldots z_s)\, C(z_2 \ldots z_{s+1}) \ldots C(z_n \ldots z_{n+s-1})],$$

worin der Durchschnitt rechterhand nach der Verteilung der Züge z_i, linkerhand nach der Verteilung der Argumentpaare x, y zu nehmen ist.

Es bedarf keiner besonderen Darlegung, wie sich die angegebene Beziehung gestaltet, wenn mehr als zwei Argumente in Betracht kommen.

15. Um den Ausdruck (11) umzugestalten ziehen wir jetzt noch die Gruppen $G(s-1)$ heran. Die dazu gehörigen Formen denken wir uns Q-adisch als $(s-1)$-ziffrige Zahlen geordnet und mit den von 1 bis $N = F^{s-1}$ laufenden Nummern versehen. Ferner führen wir das Zeichen $\mathfrak{e}(a,b)$ ein, das den Wert Eins oder Null besitzen soll, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind. Sodann greifen wir aus den Nummern des Formensystems $G(s-1)$ irgend zwei beliebig heraus und bezeichnen sie mit h_i und h_{i+1}, während die Ziffern der dazu gehörigen $(s-1)$-ziffrigen Zahlen von links nach rechts durch die Zeichen

$$1_i,\ 2_i,\ \ldots (s-1)_i \quad \text{und} \quad 1_{i+1},\ 2_{i+1},\ \ldots (s-1)_{i+1}$$

ausgedrückt werden sollen. Damit setzen wir dann die Größen

$$(12) \qquad [h_i, h_{i+1}] = \mathrm{I} \times \mathrm{II},$$

$$\mathrm{I} = 1_i C(1_i 1_{i+1} 2_{i+1} \ldots (s-1)_{i+1}),$$

$$\mathrm{II} = \mathfrak{e}(2_i, 1_{i+1}) \mathfrak{e}(3_i, 2_{i+1}) \ldots \mathfrak{e}((s-1)_i, (s-2)_{i+1})$$

an, wobei zu bemerken ist, daß für $s = 2$ der Faktor II zu unterdrücken ist, weil in diesem Falle zu den h-Nummern einziffrige Zahlen gehören, in denen nur die Ziffern 1_i und 1_{i+1} auftreten.

Läßt man den Fall $s = 2$ für den Augenblick beiseite, so ist der Ausdruck (12) nur dann von Null verschieden, wenn keiner der $\mathfrak{e}$-Faktoren verschwindet, wenn also

$$(13) \qquad 2_i = 1_{i+1}, \ 3_i = 2_{i+1}, \ \ldots (s-1)_i = (s-2)_{i+1}$$

ist. Oder anders ausgedrückt: wenn man bei h_i die erste Ziffer und bei h_{i+1} die letzte Ziffer unterdrückt und die übrig bleibenden Ziffern als zwei $(s-2)$-ziffrige Zahlen A und B liest, so ist der Ausdruck (12) von Null verschieden oder null, je nachdem A mit B übereinstimmt oder nicht.

Für $s = 2$ führt die Formenreihe $G(s-1)$ auf einziffrige Zahlen, d. h. auf die Reihe der p_h. Infolgedessen fällt die Formennummer von p_h mit h, und die erste Ziffer der zur Formennummer h gehörigen Zahl mit p_h zusammen. Da nun h_i und h_{i+1} zwei beliebig herausgegriffene Formennummern bedeuten, und da überdies der Faktor II fortfällt, so nimmt für $s = 2$ der Ausdruck (12) die einfache Gestalt

$$(14) \qquad [h, k] = p_h C(p_h p_k)$$

an. Das Fehlen des Faktors II bewirkt offenbar, daß von den Größen $[h, k]$ keine verschwindet.

16. Da in (12) die Nummern h_i und h_{i+1} — jede für sich — von 1 bis N laufen, so liefert der Ausdruck (12) ein System von $N \cdot N$ oder F^{2s-2} Größen $[h, k]$, die, soweit sie nicht verschwinden, als das Produkt aus einer Farbengröße p_h und einer C-Größe auftreten. Die C-Größe enthält eine s-ziffrige Zahl, d. h. eine Gruppenform von $G(s)$, deren Ziffern wir für den Augenblick mit $1_g, 2_g, \ldots s_g$ bezeichnen wollen, so daß

$$(15) \qquad 1_g = 1_i, \ 2_g = 1_{i+1}, \ \ldots s_g = (s-1)_{i+1}$$

wird. Soll nun der Ausdruck (12) von Null verschieden sein, so müssen die Gleichungen (13) erfüllt sein, die mit (15) verbunden zu den Gleichungen

$$1_i = 1_g,\ 2_i = 2_g \ \ldots (s-1)_i = (s-1)_g,$$

$$1_{i+1} = 2_g,\ 2_{i+1} = 3_g,\ \ldots (s-1)_{i+1} = s_g$$

führen. Demnach erhält man in diesem Falle die Ziffern zu h_i und h_{i+1}, wenn man von den Ziffern in der C-Größe die erste bis vorletzte und die zweite bis letzte zusammenfaßt. Ferner kommt in dem System der nichtverschwindenden $[h,k]$, wenn es für sich betrachtet wird, jede C-Größe nur einmal vor, denn die Nummern h und k sind in diesem Falle durch die Ziffern der C-Größe bereits vollständig bestimmt: wenn man in der C-Größe auch nur eine Ziffer ändert, so muß sich mindestens eine der beiden Nummern h,k ändern. Diese Bemerkung gilt auch noch für $s = 2$, wie sich unmittelbar aus (14) ablesen läßt.

Da die Anzahl der C-Größen gleich F^s, die der Größen $[h,k]$ gleich F^{2s-2} ist, so enthält das vollständige System der $[h,k]$ im ganzen $F^{2s-2} - F^s$ Nullglieder. Diese Zahl reduziert sich für $s = 2$ auf Null, wie bereits zu (14) erwähnt worden ist.

17. Die Gleichung (12) setzen wir jetzt n-mal an, indem wir für i der Reihe nach die Zahlen 1 bis n schreiben und hierbei die oberhalb n gelegenen Indizes durch ihren modulo n genommenen Rest ersetzen. Sodann multiplizieren wir die n erhaltenen Gleichungen miteinander und summieren das Produkt über das ganze Formensystem von $G(s-1)$, wobei die Ziffern 1_i, 1_{i+1} usw. — jede für sich — die Farbenreihe p_1 bis p_F, die h-Nummern hingegen — ebenfalls jede für sich — die Zahlen 1 bis N zu durchlaufen haben. Dadurch entsteht aus der linken Seite von (12) die Produktsumme

$$\Sigma [h_1, h_2][h_2, h_3] \ldots [h_{n-1}, h_n][h_n, h_1].$$

Auf der rechten Seite tritt aus jedem Summengliede zunächst das Produkt $1_1 1_2 \ldots 1_n$ als Faktor heraus. Ferner liefern wegen des Faktors Π nur diejenigen Produkte einen von Null verschiedenen Beitrag, in denen die Bedingungen (13) erfüllt sind. Diese Bedingungen besitzen nun aber, wenn man zusammenfaßt, die Gestalt

$$r_i = (r-1)_{i+1},$$

aus der die Beziehungen

$$r_i = (r-1)_{i+1} = (r-2)_{i+2} = \cdots = 2_{i+r-2} = 1_{i+r-1}$$

folgen. Infolgedessen liefert die rechte Seite von (12) unter Fortlassung der Nullglieder die Produktsumme

$$\Sigma 1_1 1_2 \ldots 1_n C(1_1 1_2 \ldots 1_s) C(1_2 1_3 \ldots 1_{s+1}) \ldots C(1_n 1_1 \ldots 1_{s-1}).$$

Dieser Ausdruck ist aber, wenn man die verschiedene Bezeichnung der p-Größen berücksichtigt, nichts andres, als die in (11) angesetzte Summe, stimmt also auch mit der rechten Seite von (10) überein. Folglich wird

$$(16) \qquad \mathfrak{D}(u^x, n) = \Sigma[h_1, h_2][h_2, h_3] \ldots [h_{n-1}, h_n][h_n, h_1],$$

woraus im besonderen noch

$$\mathfrak{D}(u^x, 1) = \Sigma[h_1, h_1],$$
$$\mathfrak{D}(u^x, 2) = \Sigma[h_1, h_2][h_2, h_1],$$
$$\mathfrak{D}(u^x, 3) = \Sigma[h_1, h_2][h_2, h_3][h_3, h_1],$$
usw.

folgt. Wenn es sich um mehrere Argumente $x, y, \ldots$ handelt, so ist auf der linken Seite von (16) die Potenz u^x durch das Produkt $u^x v^y \ldots$ zu ersetzen.

18. Die Gleichung (16) ist jetzt weiter umzuformen. Der hierzu dienende Determinantensatz ist, wie ich aus einer freundlichen Mitteilung von Herrn Frobenius erfahren habe, bereits von C. W. Borchardt auf einem einfachen Wege abgeleitet worden, und zwar in der Abhandlung „Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hilfe man die sekulären Störungen der Planeten bestimmt“, (Crelles Journal Band 30). Hier will ich eine andere Herleitung geben, die ebenfalls hinreichend einfach ist.

Es mögen, indem wir für den Augenblick von der Entstehungsweise der Größen $[h,k]$ ganz absehen, die Buchstaben $h, k, \ldots$ Nummern bedeuten, die von 1 bis zu der beliebig gewählten festen Nummer N zu laufen haben. Ferner setze man in ganz beliebiger Weise die von dem Nummernpaar h, k abhängenden $N \cdot N$ Größen $[h,k]$ an und bilde daraus die zyklischen Produktsummen

$$(17) \qquad S(n) = \Sigma[h_1, h_2][h_2, h_3] \ldots [h_{n-1}, h_n][h_n, h_1],$$

in denen jedes h_i für sich von 1 bis N läuft. Die Nummer h_n tritt in (17) zweimal auf, nämlich einmal als hintere Nummer in $[h_{n-1}, h_n]$ und dann als vordere Nummer in $[h_n, h_1]$. Ersetzt man nun das vordere und das hintere h_n durch die vorläufig als fest gedachten Nummern f und g, so entsteht ein Ausdruck, den wir in der Gestalt

$$(18) \qquad S(f,g,n) = \Sigma[h_1,h_2]\ldots[h_{n-1},g][f,h_1]$$

schreiben wollen, wobei die Summation nur noch nach den übrig gebliebenen h-Nummern auszuführen ist. Ferner ist für $n = 1$

$$(19) \qquad S(f,g,1) = [f,g].$$

Will man aus (18) wieder $S(n)$ erhalten, so hat man f für g zu schreiben und rechterhand auch noch nach f zu summieren, d. h. es ist

$$(20) \qquad S(n) = \sum_f S(f,f,n).$$

Führt man ferner in (18) die Summation nach h_{n-1} explizite durch und schreibt hierbei für h_{n-1} kurz h, so wird mit der in (18) eingeführten Bezeichnung

$$(21) \qquad S(f,g,n) = \sum_h [h,g] S(f,h,n-1).$$

Diese Gleichung gilt für $n = 2, 3, \ldots$ Multipliziert man sie mit t^n und summiert darauf nach n von $n = 2$ an, so entsteht mit der Abkürzung

$$(22) \qquad S(f,g) = S(f,g,1)t + S(f,g,2)t^2 + \cdots$$

die Gleichung

$$S(f,g) - tS(f,g,1) = \sum_h [h,g] t S(f,h),$$

woraus mit der weiteren Abkürzung

$$(23) \qquad H(h,g) = \mathfrak{e}(h,g) - [h,g]t$$

wegen (19) die Gleichung

$$(24) \qquad \sum_h H(h,g) S(f,h) = [f,g]t$$

entspringt. Bildet man nun aus den $N \cdot N$ Elementen $H(h,g)$ die Determinante H nebst den Unterdeterminanten

$$G(f,g) = \partial H : \partial H(f,g)$$

und multipliziert (24) mit $G(f,g)$, so entsteht daraus durch Summation nach g die Gleichung

$$HS(f,f) = \sum_g G(f,g)[f,g]t$$

und weiter durch Summation nach f

$$H\sum_f S(f,f) = \sum_f \sum_g G(f,g)[f,g]t.$$

Andrerseits erhält man, wenn man H nach t differentiiert, die Gleichung

$$dH : dt = -\sum_f \sum_g G(f,g)[f,g],$$

die mit der vorhergehenden verbunden die Beziehung

$$(25) \qquad H\sum_f S(f,f) = -dH : d\log t$$

liefert. Ersetzt man endlich noch in (22) die Nummer g durch f und summiert nach f, so entsteht unter Berücksichtigung von (20) der Ausdruck

$$S = \sum_f S(f,f) = S(1)t + S(2)t^2 + \cdots,$$

woraus dann wegen (25) die Darstellung

$$S = \sum_n S(n)t^n = -d\log H : d\log t$$

hervorgeht.

Für $t = 0$ gehen die Elemente $H(h,g)$ in $\mathfrak{e}(h,g)$ über, d. h. die Elemente der Determinante H werden außerhalb der Diagonale null und nehmen auf der Diagonale den Wert Eins an, so daß $H = 1$ wird. Da nun H, als Funktion von t betrachtet, ein Polynom N-ten Grades ist, so kann man die Zerlegung

$$H = (1 - X_1 t)(1 - X_2 t)\ldots(1 - X_N t)$$

ansetzen, aus der

$$\sum_n S(n)t^n = -d\log H : d\log t = \sum_m [X_m t : (1 - X_m t)]$$

folgt. Entwickelt man jetzt die Brüche rechterhand nach t und spaltet darauf die Gleichung nach den Potenzen von t, so erhält man wegen der in (17) angegebenen Bedeutung von $S(n)$

$$S(n) = \sum [h_1,h_2]\ldots[h_{n-1},h_n][h_n,h_1] = \sum_m X_m^n.$$

Mit den vorstehenden Formeln ist das, was wir zur Umformung von (16) brauchen, bereit gestellt.

19. Kehrt man zu der in (12) angegebenen Bedeutung der Größen $[h,k]$ zurück, so läßt sich die Lösung unserer Aufgabe folgendermaßen fassen. Als Ausgangspunkt dient die mit F Farben gefüllte Urne, ferner die Zugreihe $Z(n)$ nebst der Reihe der innerhalb $Z(n)$ zyklisch gebildeten Gruppen $G(s)$. Zu dem Zeichen $G(s)$

gehören $M = F^s$ Q-adisch geordnete Gruppenformen, denen die Nummern 1 bis M und die Gewichte e_1 bis e_M beigelegt werden. Die mit den e-Gewichten gebildete Formenmenge x besitzt eine gewisse Verteilung $\mathfrak{U}(x,n)$ nebst der Durchschnittsgleichung

$$\mathfrak{D}(u^x,n) = \sum_x \mathfrak{U}(x,n) u^x,$$

worin die Summation über alle zulässigen Werte von x auszudehnen ist. Die vorstehenden Größen lassen sich vermittelst der Gleichung

$$(26) \qquad \sum_n \mathfrak{D}(u^x,n) t^n = \sum_n \sum_x \mathfrak{U}(x,n) u^x t^n = - d \log H : d \log t$$

aus einer erzeugenden Funktion H herleiten. Um H zu bilden setzt man das System der C-Größen an, deren Anzahl M ist, ferner stellt man die Reihe der $(s-1)$-ziffrigen Q-adischen Zahlen nebst ihren von 1 bis $N = F^{s-1}$ laufenden Nummern auf und erhält damit nach der Vorschrift von (12) die $N \cdot N$ Ausdrücke $[h,k]$ nebst den $N \cdot N$ Verbindungen

$$(27) \qquad H(h,k) = \mathfrak{e}(h,k) - [h,k] t,$$

in denen t einen willkürlichen Parameter bedeutet. Die aus den Elementen $H(h,k)$ zusammengesetzte Determinante ist das gesuchte H. Außerdem liefern die in der Zerlegung

$$(28) \qquad H = (1 - X_1 t)(1 - X_2 t) \ldots (1 - X_N t)$$

auftretenden Wurzelgrößen X_m den Ausdruck

$$(29) \qquad \mathfrak{D}(u^x, n) = X_1^n + X_2^n + \cdots + X_N^n.$$

Damit sind die Grundformeln der Lösung gegeben.

Wenn es sich um eine mehrmalige Auszählung der Zugreihen $Z(n)$ mit den Argumenten $x, y, \ldots$ handelt, so treten die Verteilungszahlen $\mathfrak{U}(x,y,\ldots,n)$ nebst dem Durchschnitt

$$\mathfrak{D}(u^x v^y \ldots, n) = \sum \mathfrak{U}(x,y,\ldots,n) u^x v^y \ldots$$

auf. Ferner ändert sich in der früher angegebenen Weise die Zusammensetzung der C-Größen, dagegen bleibt die Bildungsweise der $[h,k]$ nebst dem System der Grundgleichungen (26) bis (29) ungeändert.

Am Schlusse der Rechnung sind die C-Größen durch Ausdrücke von der Gestalt u^e oder $u^e v^f \ldots$ zu ersetzen, worin die Exponenten die den C-Größen entsprechenden Gewichte bedeuten.

20. Um die Gestalt der Lösung noch deutlicher zu machen, mögen die Bestimmungsstücke von H für die einfachsten Fälle zusammengestellt werden. Hierbei genügt es, nur die Größen $[h,k]$ und zwar nach Art einer Determinante geordnet herzusetzen, weil man damit sofort den Ausdruck für H hinschreiben kann. Ferner soll zur Abkürzung statt der Farbe p_h einfach die Nummer h, und statt der C-Größe, die zu der Form G_h gehört, einfach (h) geschrieben werden. Man erhält dann die nachstehenden, unmittelbar verständlichen Tabellen.

Formen von $G(2)$ für $F = 2$

11, 12, 21, 22

Formen von $G(3)$ für $F = 2$

111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222

Formen von $G(4)$ für $F = 2$

1111, 1112, 1121, 1122, 1211, 1212, 1221, 1222
2111, 2112, 2121, 2122, 2211, 2212, 2221, 2222

Formen von $G(2)$ für $F = 3$

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33

Formen von $G(3)$ für $F = 3$

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133
211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333

Aus diesen Formenreihen läßt sich die zu jeder Form gehörige Nummer sofort entnehmen. Die entsprechenden Systeme der $[h,k]$ nehmen dann folgende Gestalt an.

$F = 2$ und $G(2)$

$$\begin{matrix} 1(1) & 1(2) \\ 2(3) & 2(4) \end{matrix}$$

$F = 2$ und $G(3)$

$$\begin{matrix} 1(1) & 1(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1(3) & 1(4) \\ 2(5) & 2(6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(7) & 2(8) \end{matrix}$$

$F = 2$ und $G(4)$

$$\begin{array}{cccccccc}
1(1) & 1(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1(3) & 1(4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1(5) & 1(6) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1(7) & 1(8) \\
2(9) & 2(10) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2(11) & 2(12) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2(13) & 2(14) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(15) & 2(16)
\end{array}$$

$F = 3$ und $G(2)$

$$\begin{array}{ccc}
1(1) & 1(2) & 1(3) \\
2(4) & 2(5) & 2(6) \\
3(7) & 3(8) & 3(9)
\end{array}$$

$F = 3$ und $G(3)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
1(1) & 1(2) & 1(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1(4) & 1(5) & 1(6) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1(7) & 1(8) & 1(9) \\
2(10) & 2(11) & 2(12) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2(13) & 2(14) & 2(15) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(16) & 2(17) & 2(18) \\
3(19) & 3(20) & 3(21) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3(22) & 3(23) & 3(24) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3(25) & 3(26) & 3(27)
\end{array}$$

Multipliziert man in diesen Größensystemen jedes Glied mit $-t$ und fügt dann in den Diagonalgliedern $+1$ hinzu, so entstehen die Determinanten H.

21. Die vorstehend aufgeführten Sonderfälle lassen die Bildungsweise von H bereits deutlich erkennen, und man übersieht ohne weiteres, wie sich die p_α nebst den C-Größen und den Nullwerten der $[h,k]$ innerhalb der Determinante H gruppieren. Hat man es mit niedrigen Gruppen und kleinen Werten von F und n zu tun, so bietet es keine besondere Schwierigkeit, H auszurechnen und die in (26) geforderte Entwickelung von $\log H$ nach t auszuführen. In den übrigen Fällen wird dagegen die direkte Berechnung von H umständlich, so daß es sich empfiehlt, noch andere Beziehungen aufzusuchen, die für die numerische Rechnung herangezogen werden können. Hierbei liegt eine gewisse Erleichterung in dem Umstande, daß es für gewöhnlich gar nicht auf die Größen $\mathfrak{U}(x,n)$, sondern nur auf die niedrigsten numerischen Elemente der betrachteten Verteilung ankommt. Letztere lassen sich aber, wie wir sehen werden, ermitteln, ohne daß man den vollständigen Ausdruck von H kennt.

Für $t = 0$ nimmt H, wie sich in Artikel 16 ergab, den Wert Eins an. Daher liefert (26), wenn man von $t = 0$ an integriert, die Gleichung

$$(30) \qquad \sum_n n^{-1}\mathfrak{D}(u^x,n)t^n = -\log H.$$

Setzt man hierin $u = 1$, so gehen die $\mathfrak{D}$-Größen sämtlich in den Wert Eins über, und man erhält linkerhand die Reihe für $-\log(1 - t)$, so daß darnach H für $u = 1$ den Wert $1 - t$ besitzt. Soll dieser Wert nun auch in (28) zum Vorschein kommen, so müssen für $u = 1$ die Größen X_m bis auf eine, die den Wert Eins annimmt, sämtlich verschwinden. Dieses für $u = 1$ eintretende Verhalten soll jetzt näher untersucht werden.

22. Der Ausdruck H ist eine Determinante von der Ordnung $N = F^{s-1}$ und liefert deshalb ein Polynom von t, dessen Grad im allgemeinen ebenfalls gleich N ist. Da jedoch dieser Grad unter Umständen nicht erreicht wird, so wollen wir den wirklichen Grad von H mit q bezeichnen und demgemäß statt (28) die Gleichung

$$(31) \qquad H = (1 - X_1 t)\ldots(1 - X_q t)$$

und entsprechend statt (29) die Gleichung

$$(32) \qquad \mathfrak{D}(u^x,n) = X_1^n + \cdots + X_q^n$$

hinschreiben. Dieser Ansatz kommt darauf hinaus, daß in (28) und (29) unter den Größen X_m solche vorkommen können, die identisch verschwinden und deshalb von vornherein beiseite bleiben dürfen.

Beschränkt man sich, was hier ausreicht, auf den Fall einer einmaligen Auszählung mit den Gewichten e_h, so tritt in H außer t auch noch der Parameter u auf, weil ja jede C-Größe, der ein Gewicht e zukommt, schließlich durch die Potenz u^e zu ersetzen ist. Setzt man nun $u = 1 + w$ und entwickelt H nach Potenzen von w, so erhält man eine Darstellung von der Form

$$(33) \qquad H = H_0 + H_1 w + H_2 w^2 + \cdots,$$

worin der Koeffizient H_0 die Gestalt $1 - t$ besitzt, weil für $w = 0$ oder $u = 1$ der Ausdruck H, wie wir gesehen haben, den Wert

$1-t$ annimmt. Die übrigen Koeffizienten sind Polynome von t, deren Grad nicht über q hinausgeht und diesen Wert mindestens bei einem Gliede von (33) wirklich erreicht, da andernfalls H nicht vom q-ten Grade nach t sein würde. Ferner sind die Koeffizienten $H_1, H_2, \ldots$ durch t teilbar, weil für $t = 0$ die Determinante H, wie wir wissen, den Wert Eins annimmt. Im übrigen liefert die Entwickelung nach w eine endliche oder unendliche Reihe, je nachdem die Gewichte durchweg positive ganze Zahlen sind oder nicht.

23. Ersetzt man in (31) und (33) den Parameter t durch $1 : X$ und multipliziert darauf mit X^q, so entsteht ein Polynom von X, das wir in der Gestalt

$$
\begin{aligned}
K(X) &= (X - X_1)(X - X_2)\ldots(X - X_q) \\
&= K_0 + K_1 w + K_2 w^2 + \cdots
\end{aligned}
\tag{34}
$$

schreiben wollen. Hierin erscheinen die X_m als die Wurzeln von $K(X)$; ferner wird

$$K_0 = X^{q-1}(X - 1), \tag{35}$$

während die übrigen Koeffizienten Polynome von X darstellen, die höchstens vom Grade $q - 1$ sind, und von denen mindestens eines für $X = 0$ nicht verschwindet. Für $w = 0$ wird

$$K(X) = K_0 = X^{q-1}(X - 1),$$

d. h. für $w = 0$ wird eine der Wurzeln — wir wollen sagen die Wurzel X_1 — gleich Eins, während die andern unter sich und mit dem Werte Null zusammenfallen.

Für die Darstellung der Wurzeln entnimmt man aus der Theorie der algebraischen Funktionen zunächst den Satz, daß die Wurzel X_1, weil sie für $w = 0$ nur einfach auftritt, für ein hinreichend kleines w in eine Potenzreihe von der Gestalt

$$X_1 = 1 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots \tag{36}$$

entwickelt werden kann. Bei den übrigen Wurzeln hingegen kommt man im allgemeinen auf Reihen, die nach gebrochenen Potenzen von w fortschreiten und in der Gestalt

$$X_m = a_1 W + a_2 W^2 + \cdots \tag{37}$$

geschrieben werden können, wobei $W^c = w$ und c eine gewisse ganze positive Zahl ist. Bei der vorliegenden Frage kommt es nun wesentlich auf das Glied an, mit dem die Reihe (37) wirklich beginnt, und das auf folgende Art gefunden wird.

24. Macht man die für unseren Zweck ausreichende Voraussetzung, daß w unendlich kleine Werte besitzt, so darf man die Reihe (37) auf ihr niedrigstes Glied beschränken und demgemäß X_m in der Gestalt Rw^r ansetzen, wo r wesentlich positiv, R hingegen endlich und von Null verschieden ist. Besitzt ferner in (34) die niedrigste Potenz von X, die in dem Koeffizienten K_h auftritt, den Exponenten k_h, so werden, wenn man für X den Ausdruck Rw^r einsetzt, die einzelnen Terme von (34) in bezug auf w von der Ordnung

$$0 + rk_0, \quad 1 + rk_1, \quad 2 + rk_2, \quad 3 + rk_3, \ldots.$$

Von diesen Ordnungszahlen müssen nun mindestens zwei für die betrachtete Wurzel zusammenfallen, da andernfalls die Bedingung $K = 0$ das Verschwinden von R nach sich ziehen würde, d. h. der Exponent r muß einer Gleichung von der Form

$$h + rk_h = i + rk_i \quad \text{oder} \quad h - i = r(k_i - k_h)$$

genügen. Hierbei sind aber die Zahlenwerte von $h - i$ mindestens gleich Eins, andrerseits die Zahlenwerte von $k_i - k_h$ höchstens gleich $q - 1$. Folglich liegt r sicher nicht unterhalb des reziproken Wertes von $q - 1$. Oder anders ausgedrückt: jede durch (37) ausgedrückte Wurzel ist nach w von einer bestimmten Größenordnung r, und es liegt der niedrigste hierbei vorkommende Wert von r, der mit a bezeichnet werden möge, nicht unterhalb des Bruches $1:(q-1)$.

Nach diesen Bemerkungen läßt sich der in (32) angesetzte Ausdruck von $\mathfrak{D}(u^x, n)$ in zwei Bestandteile I und II spalten, die nach w von verschiedener Ordnung sind, nämlich in

$$\mathrm{I} = X_1^n, \quad \text{und } \mathrm{II} = X_2^n + \cdots + X_q^n.$$

Von diesen beiden Bestandteilen ist I eine gewöhnliche Potenzreihe von w mit dem Anfangsgliede 1, während der Bestandteil II, der sich im allgemeinen aus Reihen mit gebrochenen Potenzen von w zusammensetzt, nach w mindestens von der Ordnung na wird. Ist na ein wirklicher Bruch, so liegt die Ordnung von II tatsächlich oberhalb na, denn die gebrochenen Potenzen in II müssen sich bei gehöriger Reduktion herausheben, weil in

$$(38) \qquad \mathfrak{D}(u^x, n) = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

die linke Seite und ebenso das Glied I nur ganze Potenzen von w enthält. Hieraus ergibt sich dann weiter, daß man bei der Berechnung von $\mathfrak{D}(u^x, n)$ den Ausdruck

$$\mathfrak{D}(u^x, n) = \mathrm{I} = X_1^n \tag{39}$$

zugrunde legen darf, sobald in der $\mathfrak{D}$-Größe nur die Glieder gebraucht werden, die nach w unterhalb der Ordnung na bleiben. Ein solcher Fall tritt nun aber ein, wenn für größere Werte von n die numerischen Elemente der betrachteten Verteilung in dem gewöhnlich vorkommenden Umfange aufgesucht werden sollen. Entwickelt man nämlich auf Grund der Gleichungen

$$w = u - 1 = \exp U - 1$$

die rechten Seiten von (38) und (39) nach U, so ist zunächst der Bestandteil II nach U mindestens von der Ordnung na. Differentiiert man ferner m-mal nach U und setzt darauf $U = 0$, so erhält man linkerhand den Ausdruck $\mathfrak{D}(x^m, n)$, der für $m = 1, 2, \ldots$ die Grundlage zur Berechnung der numerischen Elemente bildet. Rechterhand liefert, solange $m < na$ ist, der Bestandteil II sicher den Beitrag Null, d. h. die abgekürzte Formel (39) genügt sicher zur Berechnung der numerischen Elemente bis zur Ordnung m hin, wenn n so groß ist, daß na oberhalb m liegt. Die hierzu nötigen Formeln lassen sich folgendermaßen einrichten.

25. Wir wollen annehmen, daß man für H oder $K(X)$ auf irgend eine Weise die Entwicklung nach w bis zur Ordnung m hin hergestellt habe. Dann läßt sich daraus für die Wurzel X_1 die Darstellung

$$X_1 = 1 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots$$

ebenfalls bis zur Ordnung m hin herleiten. Hiermit sei dann die Reihe

$$\log X_1 = B_1 w + B_2 w^2 + \cdots$$

nebst den Koeffizienten

$$B_1 = A_1,$$

$$B_2 = A_2 - \frac{1}{2} A_1^2,$$

$$B_3 = A_3 - A_1 A_2 + \frac{1}{3} A_1^3,$$

$$B_4 = A_4 - A_1 A_3 - \frac{1}{2} A_2^2 + A_1^2 A_2 - \frac{1}{4} A_1^4,$$

usw.

abgeleitet worden. Daraus erhält man weiter mit $w = \exp U - 1$ die Entwicklung

$$\log X_1 = C_1 U + C_2 U^2 + \cdots,$$

worin

$$\begin{aligned}
C_1 &= B_1, \\
2C_2 &= B_1 + 2B_2, \\
6C_3 &= B_1 + 6B_2 + 6B_3, \\
24C_4 &= B_1 + 14B_2 + 36B_3 + 24B_4, \\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

oder nach Elimination der B-Größen

$$\begin{aligned}
C_1 &= A_1, \\
2C_2 &= A_1(1 - A_1) + 2A_2, \\
6C_3 &= A_1(1 - A_1)(1 - 2A_1) + 6A_2(1 - A_1) + 6A_3, \\
24C_4 &= A_1(1 - A_1)(1 - 6A_1 + 6A_1^2) + A_2(14 - 36A_1 + 24A_1^2) \\
&\quad + A_3(36 - 24A_1) + 24A_4 - 12A_2^2, \\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

wird. Weiter möge statt der Formenmenge x als Argument die Größe $z = x : n$ eingeführt werden, die man gegenüber der für die ganze Zugreihe $Z(n)$ geltenden „absoluten" Menge x als die „relative", d. h. für die einzelne Gruppe $G(s)$ geltende, Menge ansehen kann. Dann läßt sich die Gleichung (39) unter Fortlassung des für den Augenblick entbehrlichen Index n logarithmisch in der Gestalt

$$\log \mathfrak{D}[\exp(nzU)] = n \log X_1 = nC_1 U + nC_2 U^2 + \cdots$$

schreiben. Daraus entsteht, wenn die Glieder mit U und U^2 nach links genommen werden, die Gleichung

$$\log \mathfrak{D}[\exp(nzU - nC_1 U - nC_2 U^2)] = nC_3 U^3 + nC_4 U^4 + \cdots.$$

Geht man vom Logarithmus wieder zum Numerus über und führt hierbei die Parameter c und h nebst der Veränderlichen V durch die Gleichungen

$$c = C_1, \quad 4h^2 C_2 = n, \quad nU = -2hV, \quad nC_2 U^2 = V^2$$

ein, so wird

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}[\exp(-2h(z - c)V - V^2)] &= 1 + nC_3 U^3 + nC_4 U^4 + nC_5 U^5 \\
&\quad + \left(nC_6 + \tfrac{1}{2} n^2 C_3^2\right) U^6 + \cdots.
\end{aligned}$$

Führt man endlich noch die für die numerischen Elemente nötigen $\mathfrak{R}$-Polynome auf Grund der Entwicklung

$$\exp(-2yV - V^2) = \mathfrak{R}(y)_0 + \mathfrak{R}(y)_1(2V) + \mathfrak{R}(y)_2(2V)^2 + \cdots$$

ein, so erhält man mit $y = h(z - c)$ die Ausdrücke

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_0) = 1, \quad \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1) = 0, \quad \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_2) = 0,$$

$$(40) \quad n^2\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_3) = -C_3h^3, \quad n^3\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_4) = C_4h^4, \quad n^4\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_5) = -C_5h^5,$$

$$(41) \quad n^5\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_6) = \left(C_6 + \tfrac{1}{2}nC_3^2\right)h^6, \quad \text{usw.}$$

Da die Durchschnitte $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1)$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_2)$ verschwinden, so gehören die Werte c und h der Normalform an, und man erhält für die beiden niedrigsten Elemente die Ausdrücke

$$(42) \quad \mathfrak{D}(z) = c = C_1 = A_1, \quad n\,\mathrm{str}(z)^2 = 2C_2 = A_1(1 - A_1) + 2A_2.$$

Nach Ausweis dieser Formeln gehen die numerischen Elemente, mit Ausnahme von $\mathfrak{D}(z)$, gegen Null, wenn man n unbegrenzt wachsen läßt.

26. Die Ähnlichkeit der vorstehenden Entwicklung mit dem Bernoullischen Urnenschema ist in die Augen springend. Setzt man das Bernoullische Schema mit den beiden Farben p und q und für n Züge an, so gilt für die Verteilung der Züge mit der Farbe p die Grundgleichung

$$\mathfrak{D}(u^x, n) = (pu + q)^n = (1 + pw)^n.$$

Sucht man hieraus nach der Gleichung

$$\sum_n \mathfrak{D}(u^x, n)t^n = -d\log H : d\log t$$

den Ausdruck für H auf, so wird

$$H = 1 - (pu + q)t = 1 - t - pwt.$$

Es tritt also nur eine einzige Wurzel X_m auf, nämlich

$$X_1 = pu + q = 1 + pw,$$

die für $u = 1$, wie es sein muß, den Wert Eins annimmt. Ferner gelten für die relative Häufigkeit $z = x : n$ die Ausdrücke

$$(43) \quad \mathfrak{D}(z) = p, \quad n\,\mathrm{str}(z)^2 = p(1 - p).$$

Sind die Gewichte für die Auszählung der Gruppen so gewählt worden, daß in (42) die Größe A_1 als eine Wahrscheinlichkeit gedeutet werden darf, so kann man der Gruppenverteilung die

Verteilung des BERNOULLIschen Schemas als eine Art Vergleichsnorm gegenüberstellen, wobei dann für p der Wert A_1 anzusetzen ist. In diesem Falle gibt offenbar der Bestandteil $2A_2$ in (42) an, wie groß bei dem Werte von $n\,\mathrm{str}\,(z)^2$ die Abweichung von der durch (43) ausgedrückten Norm ist.

Wenn bei der Auszählung der Gruppen $G(s)$ in der Zugreihe $Z(n)$ als Gewiehte nur die Zahlen Null und Eins benutzt werden, so bedeuten x und z die absolute und die relative Häufigkeit der günstigen Fälle, d. h. der zählenden Formen. Man darf also bei derartigen Auszählungen die Größen z und A_1 stets als Wahrscheinlichkeiten auffassen.

27. Zur Erläuterung des Bisherigen soll ein Beispiel benutzt werden, das sich nicht erheblich von einer Aufgabe unterscheidet, die Herr VON SEELIGER in der Abhandlung „Über die Verteilung der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler" (Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. bayr. Akademie d. W. 1889) behandelt hat.

Die n Züge z_h mögen ebensoviele Beobachtungsfehler bedeuten, die nach einem gewissen Beobachtungsmodus und unabhängig voneinander zustande gekommen sind. Trägt man diese Fehler nach der zeitlichen Folge der Beobachtungen auf dem Kreise ein, so kann man die Gruppierung der Vorzeichen innerhalb der Reihe zum Gegenstande der Untersuchung machen und im besonderen nach der Verteilung der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen fragen. Berücksichtigt man hierbei auch den gelegentlich auftretenden Fehlerwert Null, so hat man es bei der paarweisen Zusammenfassung der Züge mit den neun Fällen

$$++,\quad +-,\quad +0,\quad -+,\quad --,\quad -0,\quad 0+,\quad 0-,\quad 00$$

zu tun. Man wird also auf das Schema $G(2)$ und auf drei Farben p_1, p_2, p_3 geführt, die den drei Zeichen Plus, Minus und Null entsprechen. Beschränkt man sich bei der Ansetzung der Gewichte auf die Werte Eins und Null, so hat für zwei beliebig gewählte Farben a und b das Zeichen $E(ab)$ je nach den Umständen den Wert Eins oder Null anzunehmen. Entsprechend besitzt das Zeichen $C(ab)$ den Wert u oder 1, wenn man sich mit der einmaligen Auszählung der Zugreihen begnügt. Man darf infolgedessen

$$C(ab) = 1 + (u - 1)E(ab) = 1 + wE(ab)$$

setzen. Schreibt man der Kürze halber einstweilen $E(hk)$ statt

$E(p_h p_k)$, so erscheinen die Größen $H(h,k)$, aus denen sich die Determinante H zusammensetzt, in der Gestalt

$$H(h,k) = \mathfrak{e}(h,k) - tp_h C(p_h p_k) = \mathfrak{e}(h,k) - tp_h - twp_h E(hk),$$

liefern also für H das Elementensystem

$$\begin{array}{lll} 1 - tp_1 - twp_1 E(11), & -tp_1 - twp_1 E(12), & -tp_1 - twp_1 E(13) \\ -tp_2 - twp_2 E(21), & 1 - tp_2 - twp_2 E(22), & -tp_2 - twp_2 E(23) \\ -tp_3 - twp_3 E(31), & -tp_3 - twp_3 E(32), & 1 - tp_3 - twp_3 E(33). \end{array}$$

Um die hieraus gebildete Determinante zu entwickeln, denken wir uns mit den Elementen $E(hk)$ die Determinante E nebst den Unterdeterminanten

$$e(hk) = \partial E : \partial E(hk)$$

hergestellt und bezeichnen für den Augenblick durch das Summenzeichen eine zyklisch über die drei Farben p_1, p_2, p_3 ausgeführte Summation. Dann wird unter Berücksichtigung der Relation $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$$H = 1 - t - (A + A't)tw - (B + B't)t^2 w^2 - Ct^3 w^3, \tag{44}$$

worin

$$\begin{aligned} A &= \sum p_1 E(11), \\ A' &= -\sum p_1 (p_2 + p_3) E(11) + \sum p_2 p_3 E(23) + \sum p_2 p_3 E(32), \\ B &= -\sum p_2 p_3 e(11), \\ B' &= p_1 p_2 p_3 \sum e(11) + p_1 p_2 p_3 \sum e(23) + p_1 p_2 p_3 \sum e(32), \\ C &= p_1 p_2 p_3 E \end{aligned}$$

ist. Führt man nun in der Bedingung $H = 0$ statt t die Unbekannte $t = 1 : X$ ein, so liefert die Bedingung $HX = 0$ die Gleichung

$$X - 1 = (A + A'X^{-1})w + (BX^{-1} + B'X^{-2})w^2 + CX^{-2}w^3.$$

Hierzu ist die in Artikel 25 gebrauchte Wurzel

$$X_1 = 1 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots$$

zu suchen, wobei man die Lagrangesche Reihe oder die Methode der unbestimmten Koeffizienten oder irgend ein andres geeignetes Verfahren anwenden kann. Man erhält dann für die beiden gewöhnlich ausreichenden Glieder

$$\begin{aligned} A_1 &= A + A' = \sum p_1 p_1 E(11) + \sum p_2 p_3 E(23) + \sum p_2 p_3 E(32), \\ A_2 &= B + B' - A'(A + A') = B + B' - A'A_1. \end{aligned} \tag{45}$$

Da H nach t höchstens vom dritten Grade wird, so ist für $n > 4$ die Anwendung der Formeln (42) sicher statthaft. Ist B' und C null, so wird H vom zweiten Grade. In diesem Falle genügt es zur Gültigkeit von (42), daß $n > 2$ ist.

28. Da man für jedes der neun Gewichte $E(hk)$ nach Belieben den Wert Null oder Eins ansetzen kann, so gehören zu der Formel (44) im ganzen 2^9 oder 512 einzelne Fälle, deren Anzahl sich allerdings durch gewisse Überlegungen stark reduzieren läßt. Zunächst können nämlich die beiden Fälle beiseite bleiben, in denen die Gewichte sämtlich gleich Null oder sämtlich gleich Eins sind, da ja hierbei die Formenmenge beständig den Wert Null oder n annimmt. Wenn ferner zwei Gewichtssysteme $E(hk)$ und $F(hk)$ so beschaffen sind, daß durchweg

$$E(hk) + F(hk) = 1$$

wird, so genügen die zugehörigen Formenmengen von x und y innerhalb jeder Zugreihe der Gleichung $x + y = n$. Man kann daher nach den Sätzen über die Transformation der Argumente die Verteilung von y sofort angeben, wenn man die von x kennt, und umgekehrt. Infolgedessen ist es z. B. bei der vorliegenden Aufgabe gleichgültig, ob man von den neun Formen sämtliche Farbenwechsel oder sämtliche Farbenfolgen zählt. Daraus ergibt sich dann weiter, daß man mit der Anzahl der von Null verschiedenen Gewichte nicht über die halbe Formenanzahl, d. h. also hier nicht über 4 hinauszugehen braucht.

29. Eine andere Reduktion erhält man aus folgendem Umstande. Wenn zwei Gewichtssysteme so beschaffen sind, daß sie durch eine mit den Farben vorgenommene Vertauschung ineinander übergehen, so gehen durch dieselbe Vertauschung auch die zugehörigen Ausdrücke von H nebst den daraus folgenden Formeln ineinander über. Setzt man z. B. alle Gewichte bis auf $E(11)$ gleich Null, so wird in (44)

$$A = p_1, \quad A' = p_1(p_1 - 1), \quad B = B' = C = 0.$$

Daraus ergeben sich sofort die entsprechenden Formeln für die Zählung von $p_2 p_2$ oder $p_3 p_3$, wenn man p_1 mit p_2 oder p_3 vertauscht.

Eine dritte Reduktion ergibt sich, wenn man die Wirkung beachtet, welche die Umkehrung der Zugreihen ausübt. Man denke sich sämtliche Formen hingeschrieben, welche die Zugreihe

$Z(n)$ mit den gegebenen Farben annehmen kann, und ordne jedem Gliede Z dieser Formenreihe eine Zugreihe Z' zu, die aus Z dadurch entsteht, daß man die Züge von Z in umgekehrter Reihenfolge, also in der Ordnung z_n bis z_1 statt z_1 bis z_n hinschreibt. Dann stimmen diese beiden Formenreihen, von der Anordnung der Glieder abgesehen, überein, denn es liefert auch jedes Glied Z' durch Umkehrung seiner Zugfolge wieder ein Glied Z. Dieselbe Bemerkung gilt von den Gruppen $G(s)$, die sich innerhalb der einzelnen Zugreihen bilden lassen. Enthält nämlich das Glied Z eine bestimmte Gruppe G, so enthält das zugehörige Z' die Gruppe G', die durch Umkehrung von G entsteht. Da ferner die relative Häufigkeit, mit der die einzelnen Formen von $Z(n)$ und $G(s)$ in den theoretischen Verteilungen auftreten, jedesmal durch das Produkt der darin vorkommenden p-Größen gegeben ist, und da überdies der Wert dieses Produktes durch die Zugumkehrung nicht geändert wird, so folgt, daß je zwei Gruppen oder auch je zwei Gruppenkombinationen dieselbe Verteilung besitzen, wenn sie durch die betrachtete Umkehrung ineinander übergeführt werden können. So ist es z. B. bei der vorliegenden Aufgabe gleichgültig, ob man die Formen

$$p_1p_1,\quad p_2p_2,\quad p_1p_3 \quad \text{oder}\ p_1p_1,\quad p_2p_2,\quad p_3p_1$$

vereint zählt, da die beiden Fälle durch Umkehrung der Zugfolge ineinander übergehen.

Durch die angegebenen Kunstgriffe läßt sich in (44), wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, die ursprüngliche Anzahl von 512 Fällen auf 36 herunterbringen. Ich will die verbleibenden Fälle nicht weiter verfolgen, sondern nur noch den Grenzfall betrachten, der für $p_3 = 0$ eintritt.

30. Es handelt sich jetzt, wenn die dritte Farbe fortfällt, um die Gruppen $G(2)$ für zwei Farben, die der Einfachheit halber nunmehr mit p und q bezeichnet werden mögen. Die Formenreihe setzt sich dann aus den vier Gruppen

$$pp,\quad pq,\quad qp,\quad qq$$

zusammen, die nach Belieben einzeln oder vereint zu zählen sind. Durch Anwendung der vorhin beschriebenen Reduktionen gelangt man zunächst dahin, daß von den 16 Fällen, die ursprünglich auftreten, nur die vier Fälle

$$pp,\quad pq,\quad pp \ \text{und}\ pq,\quad pp\ \text{und}\ qq$$

zu berücksichtigen sind. Hiervon läßt sich aber auch noch der dritte Fall streichen, denn die vereinte Zählung von pp und pq ist gleichbedeutend mit der Zählung von p allein, führt also auf das BERNOULLIsche Schema, das von vornherein beiseite bleiben darf. Die Determinante H setzt sich aus den Elementen

$$\begin{array}{ll} 1 - tp - twpE(pp), & -tp - twpE(pq) \\ -tq - twqE(qp), & 1 - tq - twqE(qq) \end{array}$$

zusammen, so daß

$$H = 1 - t - (A + A't)tw - Bt^2w^2,$$
$$A = pE(pp) + qE(qq),$$
$$A' = -pq[E(pp) - E(pq) - E(qp) + E(qq)],$$
$$B = -pq[E(pp)Eqq) - E(pq)E(qp)]$$

wird. Da ferner H nach t vom zweiten Grade ist, so besteht die Zerlegung

$$H = (1 - X_1 t)(1 - X_2 t),$$

aus der

$$X_1 + X_2 = 1 + Aw, \quad X_1 X_2 = -A'w - Bw^2$$

folgt. Hiermit erhält man für die drei übrig gebliebenen Fälle die nachstehende unmittelbar verständliche Tabelle.

Fall	I	II	III
Formen	pp	pq	pp und qq
Gewichte	1, 0, 0, 0	0, 1, 0, 0	1, 0, 0, 1
A	p	0	1
A'	$-pq$	pq	$-2pq$
B	0	0	$-pq$
$X_1 + X_2$	$1 + pw$	1	$1 + w$
$X_1 X_2$	pqw	$-pqw$	$2pqw + pqw^2$

Diese drei Fälle sollen jetzt einzeln durchgerechnet werden.

31. Wenn bei einer Verteilung die möglichen Argumentwerte auf endliche ganze Zahlen beschränkt sind, so läßt sich die Verteilung ihrer äußeren Form nach stets auf das POISSONsche Schema reduzieren. Diese Umwandlung kann an der Hand der Grundgleichung

$$(46) \qquad \mathfrak{D}(u^x, n) = X_1^n + X_2^n$$

bei der vorliegenden Aufgabe unschwer durchgeführt werden. Schreibt man zur Abkürzung

$$h = \pi : 2n, \quad h_s = (2s - 1)h$$

und läßt für den Augenblick den Index n fort, so erhält man aus (46), je nachdem n von der Gestalt $2r$ oder $2r + 1$ ist, durch eine bekannte Zerlegung die Darstellungen

$$\mathfrak{D}(u^x) = \prod_s [(X_1 + X_2)^2 - 4 X_1 X_2 \cos h_s^2]$$

$$\mathfrak{D}(u^x) = (X_1 + X_2) \prod_s [(X_1 + X_2)^2 - 4 X_1 X_2 \cos h_s^2],$$

wo die Nummer s in den Produkten rechterhand jedesmal von 1 bis r zu laufen hat.

In dem Falle III ergeben sich hieraus nach der vorhin aufgestellten Tabelle die beiden Darstellungen

$$\mathfrak{D}(u^x) = \Pi\, [u^2 - 4pq(u^2 - 1) \cos h_s^2],$$

$$\mathfrak{D}(u^x) = u\, \Pi\, [u^2 - 4pq(u^2 - 1) \cos h_s^2],$$

die mit den Abkürzungen

$$p_s = 1 - 4pq \cos h_s^2, \qquad q_s = 4pq \cos h_s^2$$

in

$$\mathfrak{D}(u^x) = \Pi\, (p_s u^2 + q_s), \qquad \mathfrak{D}(u^x) = u\, \Pi\, (p_s u^2 + q_s)$$

übergehen. Hiernach treten von den Zahlen 0 bis n, die bei einem Versuche $Z(n)$ für gewöhnlich als Werte des Arguments x möglich sind, in Wirklichkeit nur die geraden (ungeraden) auf, wenn n gerade (ungerade) ist. Setzt man nun für $n = 2r$

$$x = 2rz, \quad u^2 = v,$$

so wird

$$\mathfrak{D}(v^{rz}) = (p_1 v + q_1) \ldots (p_r v + q_r).$$

Dies ist aber die Grundformel für ein POISSONsches Schema mit r Zügen, da die Größen p_s und q_s reelle positive echte Brüche sind. Ebenso erhält man für $n = 2r + 1$ mit

$$x = 1 + 2rz, \quad u^2 = v$$

die Darstellung

$$\mathfrak{D}(v^{rz}) = (p_1 v + q_1) \ldots (p_r v + q_r),$$

also wiederum ein POISSONsches Schema mit r Zügen.

In dem Falle II entsteht auf ähnliche Weise, für $n = 2r$ und $n = 2r + 1$ gemeinsam, die Darstellung

$$\mathfrak{D}(u^x) = \Pi\, [1 + 4pq(u - 1) \cos h_s^2],$$

die mit den Abkürzungen

$$p_s = 4pq\cos h_s^2, \quad q_s = 1 - 4pq\cos h_s^2$$

für $x = rz$ in

$$\mathfrak{D}(u^{rz}) = (p_1 u + q_1)\ldots(p_r u + q_r)$$

übergeht, also ein POISSONsches Schema von r Zügen liefert.

In dem Falle I erhält man trinomische Faktoren von der Gestalt

$$(pu+q)^2 - 4pq(u-1)\cos h_s^2.$$

Zerlegt man diese in lineare Faktoren von der Form $au+b$, so wird der Quotient $a:b$ imaginär. Infolgedessen hat die Reduktion auf das POISSONsche Schema nur eine rein formale Bedeutung.

Es ist vielleicht nicht überflüssig darauf hinzuweisen, daß in dem Falle III die ursprüngliche Verteilung in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = n$ abwechselnd volle und leere Argumente aufweist, und daß bei dem Übergange auf das POISSONsche Schema die leeren Argumente unterdrückt werden.

32. Man könnte die gefundene Zerlegung von $\mathfrak{D}(u^x, n)$ dazu benutzen, um die numerischen Elemente nach den Formeln des gewöhnlichen Urnenschemas zu berechnen. Es ist jedoch bequemer, mit den in Artikel 25 entwickelten Formeln zu arbeiten.

Wird zur Abkürzung

$$r = p - q = 2p - 1 = 1 - 2q, \quad s = pq$$

gesetzt, so ist im Falle I

$$X_1 + X_2 = 1 + pw, \ X_1 X_2 = sw,$$

$$2X_1 = 1 + pw + \sqrt{(1 + 2prw + p^2w^2)}.$$

Daraus folgt mit Unterdrückung der Zwischenrechnung für die in Artikel 25 eingeführten Größen

$$A_1 = p^2, \quad A_2 = p^2 s, \quad A_3 = -p^3 sr, \quad A_4 = p^4 s(1 - 5s),$$

$$C_1 = p^2, \quad 2C_2 = ps(1+3p),$$

$$6C_3 = ps(1 + 7p + 4p^2 - 20p^3),$$

$$24C_4 = ps(1 + 15p + 30p^2 - 90p^3 - 150p^4 + 210p^5).$$

In dem Falle II erhält man

$$X_1 + X_2 = 1, \quad X_1 X_2 = -sw, \quad 2X_1 = 1 + \sqrt{(1 + 4sw)},$$

$$A_1 = s, \quad A_2 = -s^2, \quad A_3 = 2s^3, \quad A_4 = -5s^4,$$

$$C_1 = s, \quad 2C_2 = s(1 - 3s), \quad 6C_3 = s(1 - 4s)(1 - 5s),$$

$$24C_4 = s(1 - 21s + 120s^2 - 210s^3).$$

Endlich liefert der Fall III

$$X_1 + X_2 = 1 + w, \quad X_1 X_2 = s(2w + w^2),$$
$$2X_1 = 1 + w + \sqrt{(1 + 2r^2 w + r^2 w^2)},$$
$$2A_1 = 1 + r^2, \quad 4A_2 = r^2 - r^4, \quad 4A_4 = -r^4 + r^6,$$
$$16A_4 = -r^4 + 6r^6 - 5r^8,$$
$$2C_1 = 1 + r^2, \quad 8C_2 = 1 + 2r^2 - 3r^4, \quad 12C_3 = r^2 - 6r^4 + 5r^6,$$
$$192C_4 = -1 + 4r^2 - 78r^4 + 180r^6 - 105r^8.$$

Wegen $r^2 + 4s = 1$ kann man hierfür auch schreiben

$$C_1 = 1 - 2s, \quad C_2 = 2s(1 - 3s), \quad 3C_3 = -4s(1 - 4s)(1 - 5s),$$
$$3C_4 = 2s(1 - 21s + 120s^2 - 210s^3).$$

Hiernach besitzt der durch den Ausdruck $2A_2$ gegebene Überschuß der Streuung über die Norm des BERNOULLIschen Schemas für die drei Fälle die Beträge

$$\begin{array}{cccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 2A_2 = & +2p^3q & -2p^2q^2 & +2pq(1-4pq) \end{array}$$

Die Streuung ist also bei I und III übernormal, bei II hingegen unternormal. Diese Bemerkung enthält für den Fall III anscheinend einen Widerspruch gegen die Tatsache, daß sich der Fall III auf das POISSONsche Schema reduzieren läßt, und daß ferner bei dem POISSONschen Schema die Streuung im allgemeinen unternormal, aber niemals übernormal ausfällt. Der Widerspruch ist jedoch nur scheinbar, weil das POISSONsche Schema, wie bereits erwähnt wurde, die leeren Argumente der zum Falle III gehörigen Gruppenverteilung unberücksichtigt läßt.

33. Bei dem bisher benutzten Rechnungsgange wurden die numerischen Elemente der vorgelegten Verteilung aus dem nach w entwickelten Ausdruck von H hergeleitet. Dieser Zusammenhang läßt sich nun umkehren und liefert dann neue Beziehungen, die man sich je nach Umständen zunutze machen kann.

Die Formen, die für F Farben bei den Gruppen $G(s)$ auftreten können, denken wir uns wieder Q-adisch in die Reihenfolge $G_1, G_2, \ldots$ gebracht. Die zugehörigen Gewichte $e_1, e_2, \ldots$ sollen nur die Werte Eins oder Null annehmen, so daß für die C-Größen nur die Werte u oder 1 in Betracht kommen. Infolgedessen darf man, wenn C_h die zur Form G_h gehörige C-Größe bedeutet, die Gleichung

$$C_h = 1 + (u - 1)e_h = 1 + we_h$$

ansetzen. Da unter den Elementen der Determinante H jedes C_h nur einmal auftritt, so gilt das Gleiche von den Größen we_h, d. h. H stellt sich als ein Polynom der Größen we_h dar, das nach jedem we_h vom ersten Grade ist. Da ferner für $w = 0$ die Determinante H den Wert $1 - t$ annimmt, so darf man schreiben:

$$H = (1 - t)(1 - Aw - Bw^2 - Cw^3 - \cdots).$$

Hierin sind die Größen $(1 - t)A$, $(1 - t)B$, ... zunächst Polynome von t, deren Grad nicht über die Ordnung der Determinante H, d. h. nicht über F^{s-1} hinausgeht. Ferner faßt das Glied $(1 - t)Aw$ die Bestandteile von H zusammen, die nach der Gesamtheit der we_h von der ersten Dimension sind, d. h. man darf ansetzen:

$$A = \sum a_h e_h, \tag{47}$$

worin die Koeffizienten a von t und den p-Größen abhängen. Ebenso faßt das Glied $(1 - t)Bw$ die Bestandteile zusammen, die nach den we_h von der zweiten Dimension sind, so daß

$$B = \sum a_{hi} e_h e_i \tag{48}$$

gesetzt werden darf, wobei die Koeffizienten a_{hh} durchweg verschwinden müssen, da B nach jedem e_h nur vom ersten Grade ist. Desgleichen wird

$$C = \sum a_{hik} e_h e_i e_k, \tag{49}$$

mit dem Hinzufügen, daß a_{hik} Null wird, wenn von den Nummern h, i, k zwei zusammenfallen. Entsprechendes gilt von den höheren Gliedern.

Aus (30) erhält man mit $x = nz$

$$\begin{aligned} \sum_n n^{-1}\mathfrak{D}(u^{nz}, n)t^n &= -\log H \\ &= -\log(1 - t) - \log(1 - Aw - Bw^2 - \cdots). \end{aligned} \tag{50}$$

Entwickelt man rechts nach w, so entsteht

$$\begin{aligned} \sum_n n^{-1}\mathfrak{D}(u^{nz}, n)t^n = -\log(1 - t) + Aw + \left(\tfrac{1}{2}A^2 + B\right)w^2 \\ + \left(\tfrac{1}{3}A^3 + AB + C\right)w^3 + \cdots \end{aligned}$$

Differentiiert man wiederholt nach $\log u$ und setzt darauf $u = 1$ oder $w = 0$, so wird

$$\sum \mathfrak{D}(z, n)t^n = A, \tag{51}$$

$$\sum n\mathfrak{D}(z^2, n) = A + A^2 + 2B, \tag{52}$$

$$\sum n^2\mathfrak{D}(z^3, n)t^n = A + 3A^2 + 2A^3 + 6B + 6AB + 6C, \tag{53}$$

usw.

Diese Gleichungen lehren, daß man den Ausdruck von H wenigstens bis zu der Potenz w^m bilden kann, sobald man die Größen $\mathfrak{D}(z,n)$ bis $\mathfrak{D}(z^m,n)$ kennt. Ferner ist die Kenntnis dieser $\mathfrak{D}$-Größen zur vollständigen Bestimmung von H ausreichend, sobald nicht mehr als m Formen gezählt werden, denn da in diesem Falle nur m von den C-Größen den Wert u annehmen, so kann der Grad von H nach u oder w nicht über m hinausgehen. Wir wollen diese Bemerkungen für den Fall $m = 2$ noch etwas weiter verfolgen und zu dem Ende noch eine kleine Umformung mit H vornehmen.

34. Setzt man zur Abkürzung $T = 1 : (1 - t)$, so kann man mit Rücksicht auf (47) flg. schreiben:

$$TH = 1 - \Sigma a_h e_h w - \Sigma a_{h\,i} e_h e_i w^2 - \Sigma a_{h\,i\,k} e_h e_i e_k w^3 - \cdots.$$

Zieht man hiervon das Produkt

$$(1 - a_1 e_1 w)(1 - a_2 e_2 w) \ldots$$

ab, so fallen die ersten Potenzen von w heraus, und man kann infolgedessen TH in der Gestalt

$$(54)\quad TH = (1 - a_1 e_1 w)(1 - a_2 e_2 w) \cdots - \Sigma b_{h\,i} e_h e_i w^2 - \Sigma c_{h\,i\,k} e_h e_i e_k w^3 - \cdots$$

ansetzen, worin die Koeffizienten $b, c, \ldots$ verschwinden, wenn von den Nummern $h, i, \ldots$ zwei einander gleich werden. Geht man mit dem vorstehenden Ausdruck in die Gleichung (50) ein und rechnet wieder wie vorhin, so erhält man

$$(55)\quad \Sigma \mathfrak{D}(z,n) t^n = \Sigma a_h e_h,$$

$$(56)\quad \Sigma n \mathfrak{D}(z^2,n) t^n = \Sigma a_h e_h + \Sigma (a_h e_h)^2 + 2 \Sigma b_{h\,i} e_h e_i.$$

In der letzten Gleichung treten, wie man sieht, die Quadrate und Produkte der Gewichte getrennt auf.

35. Schreibt man das E-Symbol für die von z_f bis z_g reichende Zugreihe kurz in der Gestalt $E(f,g)$, so ist die Formenmenge für die betrachteten Gruppen $G(s)$ durch

$$x = nz = E(1,s) + E(2,s+1) + \cdots + E(n,n+s-1)$$

gegeben, wobei die oberhalb n gelegenen Zugnummern wie immer durch ihre modulo n genommenen Reste ersetzt zu denken sind. Die $\mathfrak{D}$-Operation liefert

$$n \mathfrak{D}(z,n) = \Sigma \mathfrak{D}[E(h,h+s-1)],$$

worin die Zugnummer h den Kreis von einer beliebigen Stelle aus einmal zu durchlaufen hat. Hierin liefern rechterhand die einzelnen $\mathfrak{D}(E)$ jedesmal denselben Beitrag zu der Summe, da ja jeder Zug z_h unabhängig von den übrigen die Reihe der p-Größen zu durchlaufen hat. Demgemäß genügt es, nur das erste $\mathfrak{D}(E)$ beizubehalten und dafür den Faktor n anzufügen, so daß

$$(57) \qquad \mathfrak{D}(z,n) = \mathfrak{D}[E(1,s)]$$

wird. Bei der Berechnung von $\mathfrak{D}(E)$ ist nun nach Artikel 10 jeder in dem E-Zeichen auftretende Zug z_h durch ein p_f zu ersetzen und gleichzeitig dieses p_f als Faktor vor das E-Zeichen zu nehmen; sodann ist für jedes E das Gewicht zu schreiben, das der in dem E stehenden Gruppenform zukommen soll; endlich ist die Gesamtheit der so erhaltenen Ausdrücke zu summieren. Demnach erscheint $\mathfrak{D}(z,n)$ in der Gestalt

$$(58) \qquad \mathfrak{D}(z,n) = \sum_h P(h,n) e_h,$$

worin die Koeffizienten $P(h,n)$, soweit sie nicht etwa verschwinden, gewisse Produkte aus den p-Größen bedeuten. Hierbei ergibt sich der zu einer bestimmten Formennummer h gehörige P-Koeffizient auf folgende Weise.

36. Die in $E(1,s)$ enthaltene Gruppe $G(s)$ umfaßt die Züge z_1 bis z_s. Soll hieraus bei der Substitution der p-Größen eine bestimmte, mit den Q-adischen Ziffern $h_1, h_2, \ldots h_s$ gebildete Form G_h hervorgehen, so muß zunächst

$$(59) \qquad z_1 = h_1, \quad z_2 = h_2, \quad \ldots z_s = h_s$$

sein. Ist nun $n < s$, so ist bereits mit den Zügen z_1 bis z_n die Zugreihe $Z(n)$ erschöpft, da ja die Züge $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots$ auf dieselben Stellen des Kreises führen, wie die Züge $z_1, z_2, \ldots$, die den Anfang der Reihe bilden. Infolgedessen müssen wegen (59) auch die Ziffern $h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots$ eine Wiederholung des Gruppenanfangs $h_1, h_2, \ldots$ darstellen, wenn anders bei dem gegebenen Werte von n mit den n Zügen die betrachtete Form G_h herstellbar sein soll. Man erhält also, je nachdem diese Bedingung von den Ziffern h erfüllt wird oder nicht, in (58) den zu G_h gehörigen Beitrag

$$P(h,n)e_h = h_1 h_2 \ldots h_n e_h \quad \text{oder} \quad P(h,n)e_h = 0.$$

Beide Fälle werden zu einer einzigen Gleichung vereinigt, wenn man schreibt:

$$(60) \qquad P(h,n) = z_1 z_2 \ldots z_n \mathfrak{e}(z_1,h_1)\mathfrak{e}(z_2,h_2)\ldots\mathfrak{e}(z_s,h_s),$$

oder etwas kürzer

$$P(h,n) = h_1 h_2 \dots h_n \mathfrak{e}(h_1, h_{n+1}) \mathfrak{e}(h_2, h_{n+2}) \dots \mathfrak{e}(h_{s-n}, h_s).$$

Ist $n > s - 1$, so lassen sich die Bedingungen (59) ohne weiteres für jede Form G_h erfüllen; auch ist hierbei der Wert von n gleichgültig, solange er nur oberhalb $s - 1$ liegt. Man erhält dann

$$(61) \qquad P(h,n) = P(h,s) = h_1 h_2 \dots h_s.$$

Die Gleichungen (60) und (61) lassen sich zusammenfassen, wenn man ein Zeichen $\{a,b\}$ einführt, das den Wert Eins oder Null bedeutet, je nachdem a größer als b ist oder nicht. Man erhält dann

$$\mathfrak{D}(z,n) = \{s,n\} \sum_h P(h,n) e_h + \{n, s-1\} \sum_h P(h,s) e_h.$$

Multipliziert man mit t^n und summiert darauf nach n von $n = 1$ an, so wird

$$\sum_n \mathfrak{D}(z,n) t^n = \sum_n \sum_h \{s,n\} P(h,n) e_h t^n + \sum_h P(h,s) e_h t^s (1 + t + t^2 + \cdots),$$

woraus durch Vergleichung mit (55)

$$(62) \quad a_h = P(h,1)t + P(h,2)t^2 + \cdots + P(h,s-1)t^{s-1} + P(h,s)t^s T$$

folgt. Handelt es sich beispielsweise um eine Gruppe $G(s)$, die s-mal dieselbe Farbe p enthält, oder — kürzer ausgedrückt — um die Sequenz p^s, so nehmen die $P(h,n)$ von $n = 1$ bis $n = s$ die Gestalt p^n an, und man erhält den Ausdruck

$$(63) \qquad a_h = pt + (pt)^2 + \cdots + (pt)^{s-1} + (pt)^s T,$$

der weiterhin zu einer kleinen Rechnung benutzt werden soll.

37. Der Ausdruck für $\mathfrak{D}(z^2,n)$ läßt sich in ähnlicher Weise bearbeiten. Wir setzen für die Formenmenge die beiden Gleichungen

$$nz = \sum_h E(h+1, h+s), \quad nz = \sum_i E(i+1, i+s)$$

an, bilden daraus erst das Produkt und dann den Durchschnitt, so daß die Gleichung

$$n^2 \mathfrak{D}(z^2,n) = \sum \mathfrak{D}[E(h+1, h+s) E(i+1, i+s)]$$

entsteht. Hierin haben die Nummern h und i, jede für sich von einer beliebigen Kreisstelle aus, den Kreis einmal zu durchlaufen. Man darf daher auch $i = h + f$ setzen und hierbei vorschreiben, daß f von 0 bis $n - 1$ laufen soll. Daraus fließt

$$n^2 \mathfrak{D}(z^2,n) = \sum \mathfrak{D}[E(h+1, h+s) E(h+f+1, h+f+s)].$$

Die in den beiden E-Faktoren enthaltenen Gruppen wandern, wenn man f festhält und nur h wachsen läßt, gleichzeitig auf dem Kreise vorwärts, ohne ihre gegenseitige Lage zu ändern. Infolgedessen liefern die Größen $\mathfrak{D}(E.E)$ bei festgehaltenem f denselben Wert, so daß man unter Zusammenziehung der übereinstimmenden Summenglieder den Ausdruck

$$(64) \qquad n\mathfrak{D}(z^2,n) = \sum_f \mathfrak{D}[E(c+1,c+s)E(c+f+1,c+f+s)]$$

ansetzen kann, worin c eine willkürlich gewählte feste Nummer bedeutet, und von den beiden E-Faktoren nur der zweite beweglich geblieben ist.

Die in $E(c+1,c+s)$ und $E(c+f+1,c+f+s)$ enthaltenen Gruppen mögen im folgenden kurz mit I und II bezeichnet werden. Substituiert man nun eine bestimmte Zugreihe, so liefern I und II zwei Formen G_h und G_i mit den Q-adischen Ziffern h_1 bis h_s und i_1 bis i_s, wobei G_h und G_i je nach Umständen voneinander verschieden sind oder übereinstimmen. Daraus entspringt dann in (64) ein Beitrag von der Gestalt Pe_he_i, worin P das Produkt derjenigen p-Größen bedeutet, welche bei der substituierten Zugreihe zu den von I und II besetzten Stellen des Kreises gehören. Man kann daher (64) in der Gestalt

$$(65) \qquad n\mathfrak{D}(z^2,n) = \sum_h \sum_i \sum_f P(h,i,f,n)e_he_i$$

ansetzen, worin die Nummern h, i, f alle zulässigen Werte zu durchlaufen haben, mit der Maßgabe, daß der Koeffizient $P(h,i,f,n)$ gleich Null zu nehmen ist, wenn für den betreffenden Wert von f und n die Gruppen I und II das Formenpaar G_h, G_i nicht erzeugen können. Multipliziert man (65) mit t^n und summiert nach n, so entsteht die Darstellung

$$(66) \qquad \sum n\mathfrak{D}(z^2,n)t^n = \sum P(h,i,f,n)e_he_it^n.$$

Vergleicht man diese mit (56), so ergibt sich, daß die zu $i=h$ gehörigen Koeffizienten $P(h,h,f,n)$ bereits durch die Größen a_h bestimmt sind, daß also die P-Koeffizienten nur noch für ungleiche Werte von h und i aufzusuchen sind. Infolgedessen darf der Wert $f=0$ beiseite bleiben, da für $f=0$ die Gruppen I und II jedesmal zusammenfallen. Ebenso darf der Wert $n=1$ beiseite bleiben, weil zu $n=1$ als einziger zulässiger Wert von f der Wert $f=0$ gehört.

38. Zur Ermittelung der noch ausstehenden Koeffizienten greifen wir die ungleichen Formen

$$G_h = h_1 h_2 \,..\, h_s \quad \text{und} \quad G_i = i_1 i_2 \,..\, i_n$$

heraus und suchen die Zugreihen $Z(n)$ auf, die für ein vorgeschriebenes f das Gruppenpaar I, II in die Formenpaare $G_h G_i$ und $G_i G_h$ überführen und dadurch in (65) und (66) die mit $e_h e_i$ behafteten Terme erzeugen. Die hierfür hinreichenden und notwendigen Bedingungen sind bei dem Formenpaare $G_h G_i$

(67) $z_{c+1} = h_1, \ldots, z_{c+s} = h_s$ und $z_{c+f+1} = i_1, \ldots, z_{c+f+s} = i_s$,

bei dem Paare $G_i G_h$ hingegen

(68) $z_{c+1} = i_1, \ldots, z_{c+s} = i_s$ und $z_{c+f+1} = h_1, \ldots, z_{c+f+s} = h_s$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so entspringen daraus in (65) die Bestandteile

$$P(h,i,f,n) e_h e_i \quad \text{und} \quad P(i,h,f,n) e_h e_i,$$

andernfalls sind die vorstehenden P-Koeffizienten gleich Null zu setzen.

Da der Wert von c gleichgültig ist, so wollen wir in (67) $c = 0$ und in (68) $c = n - f$ setzen. Damit erhält man statt (67) das System

(69) $z_1 = h_1, \ldots, z_s = h_s, \quad z_{f+1} = i_1, \ldots, z_{f+s} = i_s$,

ferner statt (68) das System

$$z_{n-f+1} = i_1, \ldots, z_{n-f+s} = i_s, \quad z_1 = h_1, \ldots, z_s = h_s,$$

wobei in der zweiten Hälfte des letzten Systems die Nummern der z um n vermindert worden sind. Da hiernach die beiden Systeme ineinander übergehen, wenn man f mit $n - f$ vertauscht, so ist

(70) $$P(h,i,f,n) = P(i,h,n-f,n).$$

Des weitern bilden wir den Ausdruck

$$P(h,i,n) = \sum_f P(h,i,f,n),$$

worin bei der Summation f nur von 1 bis $n - 1$ zu laufen hat, da die $P(h,i,f,n)$ bei ungleichen Werten von h und i für $f = 0$ beständig Null sind. Demnach wird, wenn man (70) nach f von 1 bis $n - 1$ summiert,

$$P(h,i,n) = P(i,h,n).$$

Es genügt also im folgenden nur die Bedingungen (69), die zu dem Formenpaare $G_h G_i$ gehören, zu berücksichtigen, und nachher die Größe $P(h,i,n)$, die hierbei entsteht, mit dem Faktor 2 zu versehen.

Bei der weiteren Behandlung von (69) ist zu unterscheiden, ob die Gruppen I und II zusammenhängen, d. h. einen Zug gemeinsam haben, oder aber ganz auseinander fallen. Der zweite Fall tritt, wie man leicht erkennt, nur dann ein, wenn $n > 2s - 1$ und überdies die Nummer f der Reihe

$$s,\ s+1,\ s+2,\ \ldots\ n-s \tag{71}$$

angehört. Für alle übrigen Wertepaare von n und f findet ein Zusammenhängen oder ein Übergreifen von I auf II statt.

Um die beiden Fälle bequemer auseinander halten zu können, schreiben wir die P-Größen in der Gestalt

$$P(h,i,f,n) = Q(h,i,f,n) + R(h,i,f,n)$$

und verstehen unter $Q(h,i,f,n)$ den Bestandteil, der durch ein Zusammenhängen von I und II erzeugt wird. In derselben Weise bezeichnet die R-Größe den Bestandteil, der von dem Auseinanderfallen der Gruppen I und II herrührt. Hierbei ist selbstverständlich von den beiden Größen Q und R stets eine gleich Null, da ja für ein gegebenes Wertepaar von n und f immer nur der eine der beiden genannten Fälle stattfinden kann. Entsprechend setzen wir dann noch die Ausdrücke

$$\begin{gathered} Q(h,i,n) = \sum_f Q(h,i,f,n), \quad R(h,i,n) = \sum_f R(h,i,f,n) \\ P(h,i,n) = Q(h,i,n) + R(h,i,n) \end{gathered} \tag{72}$$

an. Im übrigen ist zu beachten, daß die R-Größen nur dann von Null verschieden sein können, wenn $n > 2s - 1$ und f der Reihe (71) angehört.

39. Um zunächst $Q(h,i,f,n)$ zu ermitteln, hat man für die angegebenen Nummern h,i,f,n das System (69) anzusetzen, wobei man sich von vornherein für jedes n auf diejenigen Werte von f beschränken wird, die einen Zusammenhang von I und II bewirken. Hierbei kommen bis $n = 2s - 1$ hin als Werte von f die Nummern 1 bis $n - 1$ in Betracht, von $n = 2s$ ab hingegen die Nummern von 1 bis $n - 1$ unter Ausschluß der Reihe (71).

Setzt man für $n = 2s - 1$ die Reihe der zulässigen f zunächst mit den beiden Hälften

$$f = 1, 2, \dots s - 1 \quad \text{und} \quad f = s, s + 1, \dots 2s - 2$$

an und subtrahiert, was erlaubt ist, von den Gliedern der zweiten Hälfte die Zahl $n = 2s - 1$, so entsteht die Reihe

$$f = \pm 1, \pm 2, \dots \pm (s - 1). \tag{73}$$

Verfährt man in ähnlicher Weise mit den für $n > 2s - 1$ zu benutzenden Reihenhälften

$$f = 1, 2, \dots s - 1 \quad \text{und} \quad f = n - s + 1, n - s + 2, \dots n - 1,$$

so erhält man, wenn von der zweiten Hälfte n subtrahiert wird, wiederum die Reihe (73). Demnach besitzen von $n = 2s - 1$ ab die zur Berechnung der Q-Größen nötigen Systeme (69) eine Gestalt, die nicht von n abhängt, d. h. es wird

$$Q(h,i,f,2s-1) = Q(h,i,f,2s) = Q(h,i,f,2s+1) = \text{usw.}$$

Das Gleiche gilt für die Größen $Q(h,i,n)$, so daß man bei dem Aufsuchen der Q-Größen die Systeme (69) nur bis $n = 2s - 1$ hin anzusetzen hat.

Beschränkt man sich der vorstehenden Bemerkung gemäß auf die Werte $n < 2s$ und reduziert in (69) die Nummern der z auf ihren modulo n genommenen Rest, so enthalten die $2s$ Gleichungen, die nach (69) für das einzelne f anzusetzen sind, wegen des Zusammenhängens von I und II höchstens $2s - 1$ verschiedene Züge z_g. Daher liefert die Elimination der z_g mindestens eine von den z_g freie Gleichung zwischen den Ziffern h und i. Sind nun die so entstehenden Gleichungen für die gegebenen Ziffern h und i nicht sämtlich erfüllt, so ist das zugehörige $Q(h,i,f,n)$ gleich Null zu setzen, da ja in diesem Falle keine Zugreihe $Z(n)$ angegeben werden kann, die aus den Gruppen I und II das Formenpaar $G_h G_i$ zu erzeugen vermag. Sind dagegen die Ziffern h und i so beschaffen, daß sie die Eliminationsgleichungen sämtlich erfüllen, so ist ein Teil der Gleichungen (69) zur Bestimmung der z_g entbehrlich, und man erhält die wirklich nötigen Gleichungen, wenn man in (69) von rückwärts her jede Gleichung streicht, die als eine Folge der vorhergehenden erscheint, also entbehrt werden kann. Das übrig bleibende reduzierte System gibt dann durch die darin enthaltenen z_g die voneinander verschiedenen Kreisstellen an, die von den Gruppen I und II bedeckt werden; ferner geben die in dem reduzierten System enthaltenen Ziffern h und i die p-Größen an, die zur Erzeugung des Paares $G_h G_i$ für die einzelnen z_g zu substituieren sind. Daraus folgt dann endlich, daß das gesuchte $Q(h,i,f,n)$ gleich dem Produkt der in dem reduzierten System auftretenden Ziffern h und i ist.

40. Die hier entwickelte Vorschrift ist, wenn es sich um konkrete Fälle handelt, hinreichend bequem und gewährt bei geeigneter Anordnung des Rechenschemas tatsächlich die kürzeste Rechnung, sobald s nicht zu groß ist und nur wenige Formen gezählt werden. Für allgemeine Untersuchungen, bei denen die Zahlen h,i,f,n unbestimmt gelassen werden, hätte man, wenn die Q-Größen unmittelbar als Funktionen der Zahlen h,i,f,n ausgedrückt werden sollen, zunächst die Formeln aufzusuchen, die für die Gleichung

$$G_h = h_1 h_2 \, .. \, h_s$$

den Zusammenhang zwischen der Formennummer h, der Ziffer h_g, ihrer Stellennummer g und der Gliederzahl s darstellen. Ich habe diese Aufgabe bis jetzt nicht weiter verfolgt, weil sie für die Anwendungen des Gruppenschemas vorderhand von untergeordneter Bedeutung ist.

Das System der Q-Größen wird besonders einfach, wenn es sich bei den Formen G_h und G_i um die zu den beiden Farben p und q gehörigen Sequenzen $G_h = p^s$ und $G_i = q^s$ handelt. Wenn nämlich eine Zugreihe $Z(n)$ die Gruppen I und II in Sequenzen verwandelt, so enthalten im Falle des Zusammenhängens die Sequenzen I und II wegen der ihnen gemeinsamen Züge notwendig dieselbe Farbe, führen also auf eine und dieselbe Form. Daraus folgt, daß das zusammenhängende Gruppenpaar I, II niemals das verlangte Sequenzenpaar $G_h G_i$ erzeugen kann, daß also die Q-Größen für diesen Fall sämtlich verschwinden.

41. Um nunmehr noch die R-Größen zu ermitteln gehen wir auf die Gleichung (64) zurück und schreiben mit $c = 0$

$$n\mathfrak{D}(z^2,n) = \sum_f \mathfrak{D}[E(1,s)E(f+1,f+s)].$$

Wenn die Gruppen I und II, wie jetzt vorausgesetzt wird, auseinander fallen, also keinen Zug gemeinsam haben, so ist nach den Regeln für die $\mathfrak{D}$-Operation

$$\mathfrak{D}[E(1,s)E(f+1,f+s)] = \mathfrak{D}[E(1,s)] \cdot \mathfrak{D}[E(f+1,f+s)].$$

Beschränkt man sich auf die mit dem Faktor $e_h e_i$ behafteten Glieder und setzt demgemäß alle Gewichte außer e_h und e_i gleich Null, so wird für die Zugreihe, die auf das Paar $G_h G_i$ führt, nach (61)

$$\mathfrak{D}[E(1,s)] = P(h,s)e_h, \quad \mathfrak{D}[E[f+1, f+s)] = P(i,s)e_i,$$

woraus sofort

$$R(h,i,f,n) = P(h,s)P(i,s)$$

folgt. Summiert man diesen Ausdruck, der selbstverständlich nur für die in (71) enthaltenen Werte von f gilt, nach f, so wird

$$R(h,i,n) = (n-2s+1)P(h,s)P(i,s),$$

wofür wir

$$(74) \qquad R(h,i,n) = \{n, 2s-1\}(n-2s+1)P(h,s)P(i,s)$$

schreiben wollen, um ersichtlich zu machen, daß die R-Größen für $n < 2s$ durchweg verschwinden. Der hierzu gehörige Bestandteil in (66) wird erhalten, wenn man in (74) wegen des Paares $G_i G_h$ noch den Faktor 2 hinzufügt, sodann mit t^n multipliziert und nach n summiert. Dies liefert zu (66) den Beitrag

$$2P(h,s)P(i,s)e_h e_i t^{2s}(1+2t+3t^2+\cdot\cdot)$$

oder

$$2P(h,s)P(i,s)e_h e_i t^{2s}T^2.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (56) und zieht außerdem die Q-Größen heran, so entsteht die Gleichung

$$(75) \qquad b_{hi} + b_{ih} = \sum_n Q(h,i,n)t^n + P(h,s)P(i,s)t^{2s}T^2.$$

Zur Erläuterung mögen wieder die beiden vorhin betrachteten Sequenzen p^s und q^s dienen. Da für diese die Q-Größen verschwinden und

$$P(h,s) = p^s, \quad P(i,s) = q^s$$

wird, so liefert die Gleichung (54) unter Berücksichtigung von (63) für H die Darstellung

$$(76) \qquad TH = (1-a_h w)(1-a_i w) - (pt\cdot qt)^s(wT)^2,$$

$$a_h = pt + \cdots (pt)^{s-1} + (pt)^s T, \quad a_i = qt + \cdots (qt)^{s-1} + (qt)^s T.$$

Da die Verteilung solcher Sequenzen für den Fall $p = q$ vor einiger Zeit Gegenstand der Erörterung gewesen ist, so mögen noch einige darauf bezügliche Folgerungen aus (76) Platz finden.

42. Für $q = p$ wird zunächst

$$TH = (1 - a_h w)^2 - (p^s t^s w T)^2.$$

Zerlegt man rechterhand die Differenz der Quadrate in bekannter Weise, so kann man schreiben

$$H = LM,$$
$$L = 1 - w[pt + \cdots + (pt)^{s-1}],$$
$$M = 1 - t - w(1 - t)[pt + \cdots + (pt)^{s-1}] - 2w(pt)^s.$$

Hieraus suchen wir jetzt nach Artikel 25 die Wurzel

$$(77) \qquad X_1 = 1 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots$$

auf, die für $w = 0$ den Wert Eins annimmt. Diese Wurzel gehört dem Teiler M an, weil für $w = 0$ der Teiler L den Wert Eins annimmt. Setzt man nun $t = X^{-1}$, so geht die Bedingung $M = 0$ durch Multiplikation mit X nach einer kleinen Umformung in die Gleichung

$$X = 1 + w(X - p)^{-1}[-p + pX + p^s X^{2-s} + p^s(1 - 2p)X^{1-s}]$$

über. Die Auflösung liefert mit Unterdrückung der Zwischenrechnung für die niedrigsten Glieder von (77) die Ausdrücke

$$(78) \qquad \begin{aligned} A_1 &= 2p^s, \\ A_2 &= 2(p^{s+1} - p^{2s})(1 - p)^{-1} - 4(s - 1)p^{2s}. \end{aligned}$$

Hieraus folgen dann weiter die Gleichungen

$$(79) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{D}(z,n) &= 2p^s, \\ n\,\mathrm{str}\,(z,n)^2 &= 2p^s(1 - 2p^s) + 4(p^{s+1} - p^{2s})(1 - p)^{-1} - 8(s - 1)p^{2s}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind, da der Grad von M nach t nicht über s hinausgeht, sicher so lange richtig, als n oberhalb $2s - 2$ bleibt.

Die Größe A_2 gibt durch ihr positives oder negatives Vorzeichen an, ob die Streuung übernormal oder unternormal ist. Um das Verhalten von A_2 bequemer zu übersehen, setzen wir

$$p = 1 : (1 + y),$$

wobei zu beachten ist, daß bei der vorliegenden Aufgabe für p nur die Werte von $p = 0$ bis $p = 0.5$, also für y nur die Werte oberhalb $y = 1$ in Betracht kommen. Man erhält dann aus (78) zunächst

$$y(1 + y)^{2s} A_2 = 2(1 + y)^s - (4s - 2)y - 2.$$

Entwickelt man auf der rechten Seite nach y, so wird nach der nötigen Reduktion

$$A_2(1+y)^{2s} : 2(s-1) = -1 + \frac{sy}{2} + \frac{s(s-2)y^2}{2 \cdot 3} + \frac{s(s-2)(s-3)y^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots.$$

Dieser Ausdruck nimmt beständig zu, wenn y von $y = 1$ an wächst; ebenso nimmt er zu, wenn s die Zahlenreihe $2, 3, \ldots$ durchläuft. Das hier in Betracht kommende Minimum findet also für $y = 1$ und $s = 2$ statt und besitzt den Wert Null, so daß A_2 niemals negativ und die Streuung niemals unternormal wird.

43. Die betrachteten Sequenzen sind bei einer beobachteten Reihe um so seltener zu erwarten, je größer s ist. Man kann daher fragen, wie man das Fehlen der höheren Sequenzen zu beurteilen habe. Zu dem Ende führen wir das Verhältnis zwischen Streuung und Argumentdurchschnitt ein und setzen

$$\mathrm{str}(z,n) = a\mathfrak{D}(z,n).$$

Hiermit verwandelt sich (79) nach gehöriger Reduktion in die Gleichung

$$(80) \qquad 2na^2 + 4s - 1 = [(1+p)(p^{-s} - 1)] : (1-p),$$

deren Verwendung sich am raschesten durch Beispiele deutlich machen läßt.

Handelt es sich, wie wir zunächst annehmen wollen, um die mit einer Münze ausgeführten Würfe „Bild oder Schrift“, so ist $p = 0.5$, und man erhält aus (80)

$$na^2 = 3 \times 2^{s-1} - 1 - 2s.$$

Daraus läßt sich dann ein Täfelchen wie das folgende berechnen:

$s =$	6	7	8	9
$na^2 =$	83	177	367	749.

Hiernach ist bei 400 Würfen für $s = 8$ der Wert von a sehr nahe gleich Eins. Daher würde das Ausbleiben der Sequenzen $G(8)$ besagen, daß der beobachtete Wert $z = 0$ von dem Argumentdurchschnitt um den Betrag der Streuung abweicht. Eine solche Abweichung hat aber erfahrungsgemäß nichts auffallendes an sich und gestattet darum auch keine weitergehenden Schlüsse.

Rechnet man mit dem Werte $p = 18 : 37$, der für das Roulettespiel gilt, so läßt sich nach (88) das Täfelchen

$s =$	10	11	12	13	14	15
$na^2 =$	1928	3984	8211	16903	34772	71504

aufstellen. Hiernach würde bei einem Versuche von 80000 Spielen das Ausbleiben der Sequenzen $G(13)$ besagen, daß der beobachtete Wert $z = 0$ von dem Argumentdurchschnitt um das $2 \cdot 18$-fache der Streuung abweicht. Es bedarf keiner besonderen Bemerkung, daß man eine solche Abweichung auf sich beruhen lassen muß, wenn sie bei einer ganz isolierten Beobachtungsreihe vorgekommen ist.

44. Mit den vorstehenden Entwicklungen will ich die Untersuchung der zyklischen Gruppen abbrechen und noch kurz auf die linearen Gruppen eingehen. Hierbei wird es genügen, eine bestimmte Gliederzahl und zwar die Gruppen $G(4)$ zugrunde zu legen, da das Ergebnis sofort erkennen läßt, wie sich die Rechnung für die übrigen Gruppen gestaltet.

Wie früher führen wir die Veränderlichen $u = \exp U$, sowie die Zeichen

$$E(z_i z_{i+1} z_{i+2} z_{i+3}) \quad \text{und} \quad C(z_i z_{i+1} z_{i+2} z_{i+3}) = \exp[UE(z_i z_{i+1} z_{i+2} z_{i+3})]$$

nebst der linear gebildeten Formenmenge

$$x = E(z_1 z_2 z_3 z_4) + \cdots + E(z_{n-3} z_{n-2} z_{n-1} z_n)$$

ein. Ferner bilden wir das Produkt aus den C-Größen und daraus den Durchschnitt

$$(81) \qquad \mathfrak{D}[C(z_1 z_2 z_3 z_4) \ldots C(z_{n-3} z_{n-2} z_{n-1} z_n)] = \mathfrak{D}[\exp(Ux)] = \mathfrak{D}(u^x, n).$$

Hierin denken wir uns die drei letzten Züge durch die vorläufig als fest gedachten Größen a, b, c ersetzt und stellen dadurch den Ausdruck

$$(82) \qquad A(abc, n) = \mathfrak{D}[C(z_1 z_2 z_3 z_4) \ldots C(z_{n-3} abc)]$$

her, worin die $\mathfrak{D}$-Operation nur über die Züge z_1 bis z_{n-3} auszudehnen ist. Will man daraus wieder $\mathfrak{D}(u^x, n)$ herleiten, so hat man die $\mathfrak{D}$-Operation für die drei letzten Züge nachzuholen und erhält auf diese Weise die Darstellung

$$(83) \qquad \mathfrak{D}(u^x, n) = \sum abc A(abc, n).$$

Führt man in (82) die $\mathfrak{D}$-Operation zunächst nur nach z_{n-3} explizite aus, so entsteht die Gleichung

$$A(abc, n) = \sum_e e \mathfrak{D}[C(z_1 z_2 z_3 z_4) \ldots C(z_{n-4} eab) C(eabc)],$$

worin die $\mathfrak{D}$-Operation nur noch über die Veränderlichen z_1 bis z_{n-4} zu gehen hat. Hierbei läßt sich der Faktor $C(eabc)$ vor das

$\mathfrak{D}$-Zeichen ziehen, und man erhält mit der in (82) eingeführten Bezeichnung

$$A(abc,n) = \sum_e e\,C(eabc)\,A(eab,n-1). \tag{84}$$

Da das Zeichen $A(abc,3)$ vorderhand keinen Sinn hat, so gilt die Beziehung (84) vorläufig nur von $n=5$ ab. Man kann jedoch jenes Zeichen so festsetzen, daß die Gleichung (84) auch noch für $n=4$ gilt. Nach (82) ist nämlich

$$A(abc,4) = \mathfrak{D}[C(z_1abc)].$$

Führt man nun hierin die noch ausstehende $\mathfrak{D}$-Operation nach z_1 aus, so entsteht

$$A(abc,n) = \sum_e e\,C(eabc).$$

Hält man hiermit die Gleichung (84) zusammen, so erkennt man, daß diese Gleichung auch noch für $n=4$ gilt, wenn man, wie es jetzt geschehen soll,

$$A(abc,3) = 1 \tag{85}$$

setzt. Daraus folgt nach (83) noch die Gleichung

$$\mathfrak{D}(u^x,3) = \sum abc = (\sum a)(\sum b)(\sum c) = 1,$$

da ja von den Summen über die a,b,c jede nichts andres als die Summe der Farbengrößen p_h ist, also den Wert Eins besitzt.

45. Um die Gleichung (84) weiter umzuformen führen wir die Q-adischen Zahlen $G(3)$ nebst den dazu gehörigen Ordnungsnummern ein und setzen, wenn die Nummern h und k zu den Ziffertripeln abc und efg gehören, wie früher den Ausdruck

$$[k,h] = [efg,abc] = e\,C(eabc)\,\mathfrak{e}(f,a)\,\mathfrak{e}(g,b)$$

an. Bildet man damit den Ausdruck

$$\sum_k [k,h]\,A(efg,n-1) = \sum_k e\,C(eabc)\,\mathfrak{e}(f,a)\,\mathfrak{e}(g,b)\,A(efg,n-1),$$

worin die Summe über alle Nummern k und folgeweise über alle Ziffern e,f,g auszudehnen ist, so entsteht rechterhand wegen der $\mathfrak{e}$-Faktoren die rechte Seite von (84). Demnach ist

$$A(abc,n) = \sum_k [k,h]\,A(efg,n-1)$$

oder, kürzer geschrieben,

$$A(h,n) = \sum_k [k,h]\,A(k,n-1). \tag{86}$$

Hierzu sind dann noch die Anfangsbedingungen

(87) $$A(h,3) = A(k,3) = 1$$

hinzuzufügen. Um nun die Gleichungen (86) zusammenzufassen bilden wir die von $n = 3$ an laufenden Summen

$$A(h) = \sum_n A(h,n) t^n,$$

multiplizieren darauf (86) mit t^n und summieren von $n = 4$ an. Daraus entsteht unter Berücksichtigung von (87)

$$A(h) - t^3 = \sum_k [k,h] t A(k),$$

so daß man mit der Abkürzung

$$H(k,h) = \mathfrak{e}(k,h) - [k,h] t$$

das System

(88) $$t^3 = \sum_k H(k,h) A(k)$$

erhält. Aus den $H(k,h)$ bilden wir nunmehr die Determinante H nebst den Unterdeterminanten

$$G(i,h) = \partial H : \partial H(i,h),$$

multiplizieren sodann (88) mit $G(i,h)$ und summieren nach h. Dadurch entsteht

$$t^3 \sum_h G(i,h) = H A(i) = H \sum_n A(i,n) t^n$$

oder, wenn statt der Ordnungsnummern h und i wieder die Tripel efg und abc eingeführt werden,

$$t^3 \sum_e \sum_f \sum_g G(abc,efg) = H \sum_n A(abc,n) t^n.$$

Multipliziert man mit dem Produkt $a.b.c$ und summiert nach den a, b, c, so entsteht mit der Abkürzung

(89) $$J = t^3 \sum a.b.c.G(abc,efg)$$

unter Berücksichtigung von (83) die Grundformel

(90) $$\sum_n \mathfrak{D}(u^x,n) t^n = J : H.$$

Die Ähnlichkeit dieser Formel mit der Grundgleichung der zyklischen Gruppen ist unmittelbar zu erkennen. Der Nenner auf der rechten Seite von (90) ist identisch mit der früher eingeführten Determinante H. Ferner tritt im Zähler an die Stelle des Polynoms $-dH : d\log t$ jetzt das in ähnlicher Weise gebildete Polynom J.

Führt man wieder die Darstellung

$$H = (1 - X_1 t)(1 - X_2 t) \ldots (1 - X_N t)$$

ein, so läßt sich der Quotient $J : H$ auf bekannte Weise in Partialbrüche mit den Nennern $1 - X_f t$ zerlegen. Entwickelt man diese Partialbrüche nach Potenzen von t und spaltet darauf die Gleichung (90) nach diesen Potenzen, so entsteht eine Gleichung von der Gestalt

$$(91) \qquad \mathfrak{D}(u^x, n) = L_1 X_1^n + L_2 X_2^n + \cdots + L_N X_N^n,$$

worin der Koeffizient L_h den Wert bezeichnet, den eine gewisse rationale Funktion $M(X)$ für $X = X_h$ annimmt.

Die Gleichung (91) läßt erkennen, warum die linearen Gruppen unbequemer zu benutzen sind, als die zyklischen. Denn bei den letzteren tritt an die Stelle der Koeffizienten L durchweg der Wert Eins. Im übrigen lassen sich die früheren Entwicklungen auch auf die linearen Gruppen übertragen, nur daß alle Formeln — von dem Ausdruck für $\mathfrak{D}(x,n)$ abgesehen — verwickelter ausfallen. Aus diesem Grunde will ich das Schema der linearen Gruppen hier nicht weiter verfolgen.

46. Zum Schlusse dieser Untersuchung möge noch eine Bemerkung allgemeiner Art Platz finden. Die Züge z_g sind die Repräsentanten von irgendwelchen „Ereignissen", denen ein und derselbe Entstehungsmodus zugrunde liegt. Ferner soll die Vergleichung der beobachteten Gruppenverteilung mit der aus dem Schema berechneten die Frage entscheiden, ob zwischen den einzelnen Zügen der Zugreihen eine Sukzessionsabhängigkeit, d. h. eine Verbundenheit vorhanden ist oder nicht. Nun ist aber die Konstanz des Entstehungsmodus, d. h. der Urnenfüllung, eine Voraussetzung, deren Zulässigkeit bei beobachteten Reihen nicht selten zweifelhaft ist. Daher wäre bei der weiteren Verfolgung des Gegenstandes zunächst die Annahme ins Auge zu fassen, daß jeder Zug aus einer besonderen Urne erfolgt, daß also die für einen Zug z_g zu substituierende p-Größe nicht nur von der gezogenen Farbe, sondern auch von der Zugnummer g abhängt.

Eine andre Erweiterung der Fragestellung geht davon aus, daß die Anwendung des hier betrachteten Schemas nicht mehr als eine Entscheidung zwischen „verbunden" und „unverbunden" liefern kann und die Frage nach der Beschaffenheit einer als vorhanden nachgewiesenen Verbundenheit unbeantwortet läßt.

Damit gelangt man zu einer Verteilungsaufgabe, die bisher meines Wissens nicht einmal für die einzelnen Züge, geschweige denn für die Zuggruppen, ernstlich in Angriff genommen worden ist. Gegeben ist eine Reihe von Urnen $U(1), U(2), \ldots$, deren Füllung die F Farben p_1 bis p_F aufweist. Der erste Zug erfolgt aus einer willkürlich herausgegriffenen Urne $U(A)$ und liefert die Farbe p_a. Diese Farbe p_a bestimmt die Urne $U(B)$, aus der der zweite Zug zu erfolgen hat. Sodann bestimmt die Farbe p_b des zweiten Zuges die Urne $U(C)$ für den dritten Zug, und so fort, bis man alle Züge beisammen hat; gesucht wird die Verteilung der verschiedenen Gruppenformen.

Die gestellte Aufgabe dürfte, soweit sich das nach dem ersten Anblick beurteilen läßt, ziemliche Schwierigkeiten bieten. Sie ist jedoch für die allgemeine Kollektivmaßlehre von erheblicher Wichtigkeit, denn die Fälle, wo zwischen den Gliedern einer Reihe von Ereignissen eine vom Zufall beeinflußte Verbundenheit besteht, sind recht häufig; Beispiele hierfür sind die meteorologischen Aufzeichnungen, die täglichen Gänge einer Uhr und noch manches andre.

Inhaltsübersicht.

ZWÖLFTER BAND. (XX. Bd.) Mit 13 Tafeln. hoch 4. 1883. brosch. Preis 22 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. 13. Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Taf. 1878. 2 ℳ.
W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 ℳ.
—— Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 ℳ 50 ₰.
W. G. HANKEL, Elektr. Untersuch. 14. Abhdlg.: Ueb. d. photo- u. thermoelektr. Eigensch. d. Flussspathes. M. 3 Taf. 1879. 2 ℳ.
C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 ℳ 40 ₰.
C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 ℳ 50 ₰.
—— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 1880. 2 ℳ 40 ₰.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. 15. Abhandlung: Ueber die aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen. Mit 4 Tafeln. 1881. 2 ℳ.
—— Elektr. Untersuchungen. 16. Abhdlg.: Ueb. die thermoelektr. Eigensch. d. Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases und Titanits. Mit 3 Taf. 1882. 2 ℳ.
—— Elektr. Untersuch. 17. Abhdlg.: Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten. 1883. 1 ℳ 80 ₰.

DREIZEHNTER BAND. (XXII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1887. brosch. Preis 30 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber die Frage des Weber'schen Gesetzes u. Periodicitätsgesetzes im Geb. d. Zeitsinnes. 1884. 2 ℳ 80 ₰.
—— Ueber die Methode der richtigen und falschen Fälle in Anwendung auf die Maassbestimmungen der Feinheit oder extensiven Empfindlichkeit des Raumsinnes. 1884. 7 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode, erläutert am Gelenkmechanismus des Vorderarmes beim Menschen. Mit 4 Taf. 1885. 2 ℳ.
F. KLEIN, Ueber die ellipt. Normalcurven der n^{ten} Ordnung u. zugehörige Modulfunctionen der n^{ten} Stufe. 1885. 1 ℳ 80 ₰.
C. NEUMANN, Ueber die Kugelfunctionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke $P_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$. 1886. 2 ℳ 40 ₰.
W. HIS, Zur Geschichte des menschl. Rückenmarkes und der Nervenwurzeln. Mit 1 Taf. u. 10 Holzschn. 1886. 2 ℳ.
H. BRUNS, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. 1886. 2 ℳ.
R. LEUCKART, Neue Beiträge zur Kenntniss des Baues u. der Lebensgeschichte der Nematoden. Mit 3 Taf. 1887. 7 ℳ.
C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels. 1. Abhdlg. Mit 11 Holzschn. 1887. 3 ℳ 20 ₰.

VIERZEHNTER BAND. (XXIV. Bd.) Mit 54 Taf. u. 1 geolog. Karte. hoch 4. 1888. brosch. Preis 42 ℳ.

J. WISLICENUS, Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekulen und ihre Bestimmung in geometrisch-isomeren ungesättigten Verbindungen. Mit 186 Fig. 2. Abdruck. 1889. 4 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Untersuchungen über die Gelenke des menschlichen Armes. 1. Th.: Das Ellenbogengelenk von O. Fischer. 2. Th.: Das Handgelenk von W. Braune und O. Fischer. Mit 12 Holzschn. u. 15 Taf. 1887. 5 ℳ.
J. P. MALL, Die Blut- und Lymphwege im Dünndarm des Hundes. Mit 6 Taf. 1887. 5 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Das Gesetz der Bewegungen in den Gelenken an der Basis der mittleren Finger und im Handgelenk des Menschen. Mit 2 Holzschn. 1887. 1 ℳ.
O. DRASCH, Untersuch. über die papillae foliatae et circumvallatae d. Kaninchens u. Feldhasen. Mit 8 Taf. 1887. 4 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. 18. Abhandlung: Fortsetzung der Versuche über das elektrische Verhalten der Quarz- und der Boracitkrystalle. Mit 3 Taf. 1887. 2 ℳ.
W. HIS, Zur Gesch. des Gehirns, sowie der centralen u. peripher. Nervenbahnen. Mit 3 Taf. u. 27 Holzschn. 1888. 3 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Über den Antheil, den die einzelnen Gelenke des Schultergürtels an der Beweglichkeit des menschlichen Humerus haben. Mit 3 Taf. 1888. 1 ℳ 60 ₰.
G. HEINRICIUS und H. KRONECKER, Beiträge zur Kenntniss des Einflusses der Respirationsbewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme. Mit 5 Taf. 1888. 1 ℳ 80 ₰.
J. WALTHER, Die Korallenriffe d. Sinaihalbinsel. Mit 1 geolog. Karte, 7 lithogr. Taf., 1 Lichtdrucktaf. u. 34 Zinkotyp. 1888. 6 ℳ.
W. SPALTEHOLZ, Die Vertheilung der Blutgefässe im Muskel. Mit 3 Taf. 1888. 1 ℳ 80 ₰.
S. LIE, Zur Theorie der Berührungstransformationen. 1888. 1 ℳ.
C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels. Zweite Abhandlung. Mit 19 Holzschn. 1888. 6 ℳ.

FÜNFZEHNTER BAND. (XXVI. Bd.) Mit 42 Tafeln. hoch 4. 1890. brosch. Preis 35 ℳ.

B. PETER, Monographie der Sternhaufen G. C. 4460 und G. C. 1440, sowie einer Sterngruppe bei o Piscium. Mit 2 Taf. und 2 Holzschn. 1889. 4 ℳ.
W. OSTWALD, Über die Affinitätsgrössen organ. Säuren u. ihre Bezieh. zur Zusammensetz. u. Constitution ders. 1889. 5 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. Mit 5 Taf. und 6 Holzschn. 1889. 3 ℳ.
W. HIS, Die Neuroblasten und deren Entstehung im embryonalen Mark. Mit 4 Taf. 1889. 3 ℳ.
W. PFEFFER, Beiträge zur Kenntniss der Oxydationsvorgänge in lebenden Zellen. 1889. 5 ℳ.
A. SCHENK, Über Medullosa Cotta und Tubicaulis Cotta. Mit 3 Taf. 1889. 2 ℳ.
W. BRAUNE und O. FISCHER, Über den Schwerpunkt des menschlichen Körpers mit Rücksicht auf die Ausrüstung des deutschen Infanteristen. Mit 17 Taf. und 18 Fig. 1889. 8 ℳ.
W. HIS, Die Formentwickl. des menschl. Vorderhirns vom Ende des 1. bis z. Beginn des 3. Monats. Mit 1 Taf. 1889. 2 ℳ 80 ₰.
J. GAULE, Zahl und Vertheilung der markhaltigen Fasern im Froschrückenmark. Mit 10 Taf. 1889. 3 ℳ.

SECHZEHNTER BAND. (XXVII. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1891. brosch. Preis 21 ℳ.

P. STARKE, Arbeitsleistung u. Wärmeentwickelung bei der verzögerten Muskelzuckung. Mit 9 Taf. u. 3 Holzsch. 1890. 6 ℳ.
W. PFEFFER, I. Über Aufnahme u. Ausgabe ungelöster Körper. — II. Zur Kenntniss der Plasmahaut u. d. Vacuolen nebst Bemerk. über d. Aggregatzustand d. Protoplasmas u. über osmotische Vorgänge. Mit 2 Taf. und 1 Holzschn. 1890. 7 ℳ.
J. WALTHER, Die Denudation in der Wüste und ihre geologische Bedeutung. Untersuchungen über die Bildung der Sedimente in den ägyptischen Wüsten. Mit 8 Taf. und 99 Zinkätzungen. 1891. 8 ℳ.

SIEBZEHNTER BAND. (XXIX. Bd.) Mit 43 Tafeln. hoch 4. 1891. brosch. Preis 33 ℳ.

W. HIS, Die Entw. d. menschl. Rautenhirns v. Ende d. 1. b. z. Beginn d. 3. Monats. I. Verläng. Mark. M. 4 Taf. u. 18 Holzsch. 1891. 4 ℳ.
W. BRAUNE u. O. FISCHER, Die Beweg. d. Kniegelenks, n. e. neu. Meth. am leb. Mensch. gemess. Mit 19 Taf. u. 6 Fig. 1891. 5 ℳ.
R. HAHN, Mikrometr. Vermess. d. Sternhaufens Σ762, ausgef. am zwölffüss. Äquatoreal d. Leipz. Sternwarte. M. 1 Taf. 1891. 6 ℳ.
F. MALL, Das reticulirte Gewebe und seine Beziehungen zu den Bindegewebsfibrillen. Mit 11 Taf. 1891. 5 ℳ.
L. KREHL, Beiträge zur Kenntniss der Füllung und Entleerung des Herzens. Mit 7 Taf. 1891. 5 ℳ.
J. HARTMANN, Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Mit 1 lithogr. Taf. u. 3 Textfig. 1891. 8 ℳ.

ACHTZEHNTER BAND. (XXXI. Bd.) Mit 26 Tafeln. hoch 4. 1893. brosch. Preis 24 ℳ.

W. HIS jun., Die Entwickelung des Herznervensystems bei Wirbelthieren. Mit 4 Taf. 1891. 5 ℳ.
C. NEUMANN, Über einen eigenthümlichen Fall elektrodynamischer Induction. Mit 1 Holzschn. 1892. 3 ℳ.
W. PFEFFER, Studien zur Energetik der Pflanze. 1892. 4 ℳ.
W. OSTWALD, Ueber die Farbe der Ionen. Mit 7 Taf. 1892. 2 ℳ.
O. EICHLER, Anatom. Untersuch. über die Wege des Blutstromes im menschl. Ohrlabyrinth. Mit 4 Taf. u. 3 Holzsch. 1892. 3 ℳ.
H. HELD, Die Beziehungen des Vorderseitenstranges zu Mittel- und Hinterhirn. Mit 3 Taf. 1892. 1 ℳ 20 ₰.
W. G. HANKEL und H. LINDENBERG, Elektrische Untersuchungen. 19. Abhandlung: Über die thermo- und piëzoelektrischen Eigenschaften der Krystalle des chlorsauren Natrons, des unterschwefelsauren Kalis, dos Seignettesalzes, des Resorcins, des Milchzuckers und des dichromsauren Kalis. Mit 3 Taf. 1892. 1 ℳ 80 ₰.
W. BRAUNE u. O. FISCHER, Bestimm. d. Trägheitsmomente d. menschl. Körpers u. sein. Glieder. Mit 5 Taf. u. 7 Fig. 1892. 4 ℳ.

NEUNZEHNTER BAND. (XXXII. Bd.) Mit 13 Tafeln. hoch 4. 1893. brosch. Preis 12 ℳ.

J. T. STERZEL, Die Flora des Rothliegenden im Plauenschen Grunde bei Dresden. Mit 13 Taf. 1893. 12 ℳ.

ZWANZIGSTER BAND. (XXXIII. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1893. brosch. Preis 21 ℳ.

O. FISCHER, Die Arbeit der Muskeln u. die lebendige Kraft des menschlichen Körpers. Mit 2 Taf. u. 11 Fig. 1893. 4 ℳ.
E. STUDY, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. Mit 16 Fig. 1893. 5 ℳ.
W. PFEFFER, Druck- und Arbeitsleistung durch wachsende Pflanzen. Mit 14 Holzschn. 1893. 8 ℳ.
H. CREDNER, Zur Histologie der Faltenzähne paläozoischer Stegocephalen. Mit 4 Taf. u. 5 Textfig. 1893. 4 ℳ.

EINUNDZWANZIGSTER BAND. (XXXV. Bd.) Mit 17 Tafeln. hoch 4. 1895. brosch. Preis 27 ℳ.

O. EICHLER, Die Wege des Blutstromes durch den Vorhof u. d. Bogengänge d. Menschen. Mit 1 Doppeltaf. 1894. 1 ℳ.
W. G. HANKEL und H. LINDENBERG, Elektrische Untersuchungen. 20. Abhandlung: Über die thermo- und piëzoelektrischen Eigenschaften der Krystalle des brom- und überjodsauren Natrons, des Asparagins, des Chlor- und Brombaryums, sowie des unterschwefelsauren Baryts und Strontians. Mit 2 Taf. 1894. 1 ℳ 60 ₰.
S. LIE, Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen. 1895. 5 ℳ.
W. BRAUNE u. O. FISCHER, Der Gang d. Menschen. I. Th.: Vers. am unbelast. u. bel. Mensch. M. 14 Taf. u. 26 Textfig. 1895. 12 ℳ.
H. BRUNS, Das Eikonal. 1895. 5 ℳ.
J. THOMAE, Untersuchungen über zwei-zweideutige Verwandtschaften u. einige Erzeugnisse derselben. 1895. 3 ℳ.

ZWEIUNDZWANZIGSTER BAND. (XXXVII. Bd.) Mit 12 Tafeln. hoch 4. 1895. brosch. Preis 20 M.
H. CREDNER, Die Phosphoritknollen d. Leipz. Mitteloligocäns u. d. norddeutschen Phosphoritzonen. Mit 1 Taf. 1895. 2 M.
O. FISCHER, Beitr. zu e. Muskeldynamik. 1. Abhdlg.: Üb. d. Wirkungsweise eingelenkig. Muskeln. M. 8 Taf. u. 13 Textfig. 1895. 9 M.
R. BOEHM, D. südamerik. Pfeilgift Curare in chem. u. pharmakolog. Beziehg. I. Th.: Das Tubo-Curare. Mit 1 Taf. 1895. 1 M 80 ₰.
B. PETER, Beob. am sechszölligen Repsoldschen Heliometer der Leipz. Sternwarte. Mit 4 Textfig. u. 1 Doppeltaf. 1895. 6 M.
W. HIS, Anatom. Forsch. üb. Joh. Seb. Bach's Gebeine u. Antlitz nebst Bemerk. üb. dessen Bilder. Mit 15 Textfig. u. 1 Taf. 1895. 2 M.

DREIUNDZWANZIGSTER BAND. (XL. Bd.) Mit 12 Tafeln. hoch 4. 1897. brosch. Preis 29 M.
P. DRUDE, Über die anomale elektrische Dispersion von Flüssigkeiten. Mit 1 Taf. und 2 Textfig. 1896. 2 M.
—— Zur Theorie stehender elektrischer Drahtwellen. Mit 1 Taf. 1896. 5 M.
M. v. FREY, Untersuch. üb. d. Sinnesfunctionen d. menschl. Haut. 1. Abhdlg.: Druckempfindg. u. Schmerz. M. 16 Textfig. 1896. 5 M.
O. FISCHER, Beiträge zur Muskelstatik. Erste Abhandlung: Ueber das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln am zweigliedrigen System. Mit 7 Taf. und 21 Textfig. 1896. 6 M.
J. HARTMANN, Die Beobachtung der Mondfinsternisse. Mit 4 Textfig. 1896. 5 M.
O. FISCHER, Beiträge zu einer Muskeldynamik. Zweite Abhandlung: Über die Wirkung der Schwere und beliebiger Muskeln auf das zweigliedrige System. Mit 4 Taf. und 12 Textfig. 1897. 6 M.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND. (XLII. Bd.) Mit 12 Taf. hoch 4. 1898. brosch. Preis 23 M 50 ₰.
R. BOEHM, Das südamerikanische Pfeilgift Curare in chemischer und pharmakologischer Beziehung. II. Theil (Schluss). I. Das Calebassencurare. II. Das Topfcurare. III. Über einige Curarerinden. Mit 4 Taf. u. 1 Textfig. 1897. 3 M.
W. WUNDT, Die geometrisch-optischen Täuschungen. Mit 65 Textfiguren. 1898. 5 M.
B. PETER, Beobacht. am sechszöll. Repsoldschen Heliometer d. Leipz. Sternwarte. II. Abhdlg. M. 2 Textfig. u. 1 Taf. 1898. 5 M.
H. CREDNER, Die Sächs. Erdbeben während der J. 1889 bis 1897. Mit 5 Taf. u. 2 in d. Text gedruckt. Kärtch. 1898. 4 M 50 ₰.
W. HIS, Über Zellen- und Syncytienbildung, Studien am Salmonidenkeim. Mit 14 Figuren im Text. 1898. 4 M.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. 21. Abhandlung: Über die thermo- u. piëzo-elektrischen Eigenschaften der Krystalle des ameisensauren Baryts, Bleioxyds, Strontians und Kalkes, des salpetersauren Baryts und Bleioxyds, des schwefelsauren Kalis, des Glycocolls, Taurins und Quercits. Mit 2 Taf. 1899. 2 M.

FÜNFUNDZWANZIGSTER BAND. (XLIII. Bd.) Mit 25 Taf. u. 62 Textfig. 1900. Preis 26 M 30 ₰.
O. FISCHER, Der Gang des Menschen. II. Theil: Die Bewegung des Gesammtschwerpunktes und die äusseren Kräfte. Mit 12 Taf. und 5 Textfig. 1899. 8 M.
W. SCHEIBNER, Ueber die Differentialgleichungen der Mondbewegung. 1899. 1 M 50 ₰.
W. HIS, Protoplasmastudien am Salmonidenkeim. Mit 3 Taf. und 21 Textfig. 1899. 5 M.
W. OSTWALD, Period. Erscheinungen bei der Auflösung des Chroms in Säuren. Erste Mittheil. Mit 6 Taf. 1899. 3 M.
S. GARTEN, Beitr. zur Physiologie des elektr. Organes d. Zitterrochen. Mit 1 Lichtdruck- u. 3 lithograph. Taf. 1899. 5 M.
W. SCHEIBNER, Zur Theorie des Legendre-Jacobi'schen Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$. 1900. 1 M 80 ₰.
W. OSTWALD, Dampfdrucke ternärer Gemische. Mit 36 Textfig. 1900. 2 M.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND. (XLV. Bd.) Mit 35 Taf. u. 140 Textfig. 1901. brosch. Preis 36 M.
E. BECKMANN, Neue Vorrichtungen zum Färben nichtleuchtender Flammen (Spektrallampen). Mit 2 Taf. 1900. 2 M.
W. OSTWALD, Period. Erschein. bei der Auflösung d. Chroms in Säuren. Zweite Mittheil. M. 16 Textfig. 1900. 2 M 50 ₰.
O. FISCHER, Der Gang des Menschen. III. Theil: Betrachtungen über die weiteren Ziele der Untersuchung und Ueberblick über die Bewegungen der unteren Extremitäten. Mit 7 Taf. und 3 Textfig. 1900. 6 M.
W. HIS, Lecithoblast und Angioblast der Wirbelthiere. Histogenetische Studien. Mit 102 Textfig. 1900. 8 M.
S. GARTEN, Ueber rhythmische, elektrische Vorgänge im quergestreiften Skelettmuskel. Mit 13 Doppeltaf. 1901. 5 M 50 ₰.
R. FICK, Über die Bewegungen in den Handgelenken. Mit 8 Fig. i. T., 7 photogr. u. 3 lithogr. Taf. 1901. 6 M 50 ₰.
O. FISCHER, Der Gang des Menschen. IV. Theil: Über die Bewegung des Fusses und die auf denselben einwirkenden Kräfte. Mit 3 Taf. und 11 Textfig. 1901. 5 M 50 ₰.

SIEBENUNDZWANZIGSTER BAND. (XLVI. Bd.) Mit 13 Taf. u. 60 Textfig. 1902. Preis 35 M 30 ₰.
E. GROSSMANN, Beobachtungen am Repsold'schen Meridiankreise der von Kuffner'schen Sternwarte in Wien-Ottakring in den Jahren 1896—1898. Mit 4 Textfig. 1901. 6 M.
C. NEUMANN, Ueber die Maxwell-Hertz'sche Theorie. Mit 3 Textfig. 1901. 3 M 50 ₰.
W. HIS, Beobachtungen z. Geschichte d. Nasen- u. Gaumenbildung beim menschl. Embryo. M. 48 Fig. i. T. 1901. 3 M 80 ₰.
F. MARCHAND, Ueber das Hirngewicht des Menschen. 1902. 3 M.
O. FISCHER, Das statische und das kinetische Maass für die Wirkung eines Muskels, erläutert an ein- und zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels. Mit 12 Taf. 1902. 7 M 50 ₰.
B. PETER, Beobacht. am sechszöll. Repsoldschen Heliometer d. Leipz. Sternwarte. III. Abhdlg. Mit 1 Taf. 1902. 2 M 50 ₰.
W. SCHEIBNER, Zur Theorie des Legendre-Jacobi'schen Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$, insbesondere über zweitheilige complexe Zahlen. Abhandlung II. Mit 2 Textfig. 1902. 3 M 50 ₰.
C. NEUMANN, Ueber die Maxwell-Hertz'sche Theorie. Zweite Abhandlung. Mit 3 Textfig. 1902. 3 M 50 ₰.
F. HAYN, Selenographische Koordinaten. I. Abhandlung. 1902. 2 M.

ACHTUNDZWANZIGSTER BAND. (XLIX. Bd.) Mit 1 Karte, 12 Doppelt., 5 Taf. u. 49 Textabb. 1903. Preis 31 M.
H. HELD, Untersuchungen über den feineren Bau des Gehörorgans der Wirbeltiere. I. Zur Kenntnis des Cortischen Organs und des Goltzschen Sinnesapparates bei Säugetieren. Mit 4 Doppeltaf., 1 Taf u. 2 Fig. i. T. 1902. 6 M.
C. NEUMANN, Ueber die Maxwell-Hertz'sche Theorie. Dritte Abhandlung. Mit 3 Textfig. 1903. 1 M 50 ₰.
F. ZIRKEL, Über Urausscheidungen in rheinischen Basalten. 1903. 3 M.
H. HELD, Über den Bau der Neuroglia und über die Wand der Lymphgefäße in Haut und Schleimhaut. Mit 60 Fig. im Text und auf Tafeln. 1903. 6 M 50 ₰.
O. FISCHER, Der Gang des Menschen. V. Teil: Die Kinematik des Beinschwingens. Mit 5 Doppeltaf. u. 8 Textfig. 1903. 5 M.
H. CREDNER, Der vogtländische Erdbebenschwarm vom 13. Februar bis zum 18. Mai 1903 und seine Registrierung durch das Wiechertsche Pendelseismometer in Leipzig. Mit 26 Seismogrammen als Textfig u. 1 Karte. 1904. 5 M.
O. FISCHER, Der Gang des Menschen. VI. Teil: Über den Einfluß der Schwere und der Muskeln auf die Schwingungsbewegung des Beins. Mit 3 Doppeltaf. u. 7 Textfig. 1904. 4 M.

NEUNUNDZWANZIGSTER BAND. (LI. Bd.) Mit 1 Karte, 5 Taf. u. 12 Textfig. 1906. Preis 25 M 20 ₰.
F. HAYN, Selenographische Koordinaten. II. Abhandlung. Mit 4 Tafeln. 1904. 6 M.
H. HELD, Zur weiteren Kenntnis der Nervenendfüße und zur Struktur der Sehzellen. Mit 1 Doppeltafel. 1904. 2 M.
C. CORRENS, Gregor Mendels Briefe an Carl Nägeli 1866—1873. Ein Nachtrag zu den veröffentlichten Bastardierungsversuchen Mendels. Mit einem Facsimile. 1905. 3 M.
O. FISCHER, Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme. Mit 6 Textfiguren. 1905. 3 M 50 ₰.
A. NATHANSOHN, Über die Bedeutung vertikaler Wasserbewegungen für die Produktion des Planktons im Meere. Mit einer Karte. 1906. 4 M.
E. MARX, Die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen. Mit 6 Textfiguren. 1906. 1 M 60 ₰.
B. PETER, Beobachtungen am sechszölligen Repsoldschen Heliometer der Leipziger Sternwarte. IV. Abhandlung. Triangulation von 28 Sternen in den Hyaden. 1906. 3 M 50 ₰.
H. BRUNS, Das Gruppenschema für zufällige Ereignisse. 1906. 1 M 60 ₰.

160

Leipzig, August 1906. **B. G. Teubner.**

SITZUNGSBERICHTE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.
—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.
Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.
—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft) 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1) 1879 (1) 1880 (1) 1881 (1) 1882 (1) 1883 (1) 1884 (2) 1885 (3) 1886 (4 mit Supplement) 1887 (2) 1888 (2) 1889 (4) 1890 (4) 1891 (5) 1892 (6) 1893 (9) 1894 (3) 1895 (6) 1896 (6) 1897 (3) 1898 (5) 1899 (5) 1900 (6) 1901 (7) 1902 (7) 1903 (6) 1904 (5) 1905 (6).
—— —— Naturwissenschaftliche Reihe. 1898 1899.
—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (1) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (2) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 (3) 1879 (2) 1880 (2) 1881 (2) 1882 (1) 1883 (2) 1884 (4) 1885 (4) 1886 (2) 1887 (5) 1888 (4) 1889 (4) 1890 (3) 1891 (3) 1892 (3) 1893 (3) 1894 (2) 1895 (4) 1896 (3 1897 (2) 1898 (5) 1899 (5) 1900 (9) 1901 (4) 1902 (3) 1903 (5) 1904 (5) 1905 (6).

Acta acad.

Druck von B G Teubner in Leipzig.