$$\int_0^\infty e^{-4ax^2}.\frac{\mathrm{Sin}\,(2n+1)x}{\mathrm{Sin}\,x}.\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{4a}}+e^{\frac{4}{4a}}+e^{\frac{9}{4a}}+\;.\;.\;.\;+e^{\frac{(4n+1)^2}{4a}}\right)\;.\;.\;.\;(1)$$

$$\int_0^\infty e^{-4ax^2}.\frac{\sin\,(2n+1)x}{\sin x}.\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{2}+e^{-\frac{1}{4a}}+e^{-\frac{4}{4a}}+e^{-\frac{9}{4a}}+\;.\;.\;.\;+e^{-\frac{(4n+1)^2}{4a}}\right).\;.\;(2)$$

Beide Reihen sind zur numerischen Berechnung um so geeigneter, je größer die Constante a ist; aber nur die zweite gilt für in's Unendliche wachsende n. Macht man diese Voraussetzung wirklich, so läßt sich auf das Integral der berühmte Satz von Fourier anwenden, nach welchem für jede gerade Function ψ der Werth des bestimmten Integrales $\int_0^\infty \psi(x).\frac{\sin \mu x}{\sin x}dx$ für $\mu=\infty$ durch die Reihe $\pi\left(\frac{\psi(0)}{2}+\psi(\pi)+\psi(2\pi)+\psi(3\pi)+\;.\;.\;.\text{ in inf.}\right)$ ausgedrückt wird. Demgemäß ist also auch für $n=\infty$

$$\int_0^\infty e^{-4ax^2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=\pi\left(\frac{1}{2}+e^{-4a\pi^2}+e^{-4.4a\pi^2}+e^{-9.4a\pi^2}+\;.\;.\;.\text{ in inf.}\right)$$

Es besteht mithin für jeden positiven Werth von a die Gleichung:

$$\frac{1}{2}+e^{-4a\pi^2}+e^{-4.4a\pi^2}+e^{-9.4a\pi^2}+\ldots=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a\pi}}.\left\{\frac{1}{2}+e^{-\frac{1}{4a}}+e^{-\frac{4}{4a}}+e^{-\frac{9}{4a}}+\;.\;.\;.\;.\right\}$$

Setzt man $q=e^{-4a\pi^2}$ und $p=e^{-\frac{1}{4a}}$, so ist $4a\pi^2=\log\frac{1}{q}$ und $\frac{1}{4a}=\log\frac{1}{p}$, daher $\log\frac{1}{q}.\log\frac{1}{p}=$ $=\log q.\log p=\pi^2$, und $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a\pi}}=\sqrt{\frac{\pi}{4a\pi^2}}=\frac{\sqrt[4]{\log\frac{1}{q}}\sqrt[4]{\log\frac{1}{p}}}{\sqrt{\log\frac{1}{q}}}=\frac{\sqrt[4]{\log\frac{1}{p}}}{\sqrt[4]{\log\frac{1}{q}}}$. Darnach gelangt man zu dem durch seine Symmetrie ausgezeichneten Theorem:

„Sind q und p zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß das Product ihrer (natürlichen) Logarithmen dem Quadrate der Ludolph'schen Zahl gleich ist, so ist jedesmal:

$$\sqrt[4]{\log\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2}+q+q^{2^2}+q^{3^2}+q^{4^2}+\ldots\right)=\sqrt[4]{\log\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}+p+p^{2^2}+p^{3^2}+p^{4^2}+\ldots\right)\text{“}\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Zu einem ähnlichen Resultate wird man geführt, wenn man in den beiden Integralen $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx.dx$ und $\int_0^\infty e^{-ax^2}\mathrm{Cos}\,bx\,dx$ anstatt b die ungeraden Zahlen 1, 3, 5... (2n—1) einsetzt und diese n Specialwerthe je addirt. Dann nämlich findet man, daß

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\frac{\mathrm{Sin}\,nx}{\mathrm{Sin}\,x}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(e^{\frac{1}{4a}}+e^{\frac{9}{4a}}+e^{\frac{25}{4a}}+\ldots+e^{\frac{(2n-1)^2}{4a}}\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$