$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \sin \vartheta\, ax\, dx = \frac{\vartheta}{2a}\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2.3} + \frac{\vartheta^4}{2^2.3.5} - \frac{\vartheta^6}{2^3.3.5.7} + - \ldots\right)$$

woraus hervorgeht, daß die Werthe der Integrale $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \mathrm{Sin}\, \gamma x\, dx$ und $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \sin \gamma x\, dx$ um so mehr übereinstimmen, je näher der Bruch $\frac{\gamma}{a}$ der Null steht.

Noch ist zu bemerken, daß diese beiden Integrale als particuläre Werthe der (von Lobatto in der größten Allgemeinheit behandelten) Differentialgleichung $2a\frac{dy}{d\vartheta} \mp ay\vartheta = 1$ Genüge leisten.

4. Bezeichnet man nach dem Vorgange Binet's das Euler'sche Integral der ersten Art, welches bekanntlich in Beziehung auf die beiden in ihm vorkommenden Constanten a und b symmetrisch ist, durch $B(a,b)$; so hat man nach je den beiden Formen des Integrales durch Einführung einer neuen Veränderlichen $z = \frac{\log x}{2}$ die beiden Gleichungen:

$$B(a,b) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2az}.dz}{(1+e^{2z})^{a+b}}$$

$$B(a,b) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2bz}dz}{(1+e^{2z})^{a+b}}$$

Addirt man diese Integrale, indem man zugleich unter dem Integrationszeichen mit $\frac{e^{-z(a+b)}}{e^{-z(a+b)}}$ multiplicirt, so wird:

$$B(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(a-b)z} + e^{-(a-b)z}}{(e^z+e^{-z})^{a+b}} dz = \frac{1}{2^{a+b-2}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\,(a-b)z}{\mathrm{Cos}\, z^{a+b}} dz$$

Um dieser wichtigen Relation eine etwas übersichtlichere Gestalt zu geben, hat man nur $a+b=2q$ und $a-b=2p$ zu setzen; dann nämlich erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\, 2px}{\mathrm{Cos}\, x^{2q}} dx = 4^{q-1} B(q+p, q-p) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei behufs der Gültigkeit stets $q > p$ sein muß.

Es sei nun zunächst $p = o$, $2q$ aber eine ganze (positive) Zahl. Unter dieser Voraussetzung nimmt die Function B den Werth $\frac{\Gamma(q)^2}{\Gamma(2q)}$ an und ist daher, je nachdem $2q$ eine gerade oder ungerade Zahl ist, rational oder irrational. In der That ist für ganze Werthe von q

$$\int_0^\infty \mathrm{Cos}\, x^{-2q} dx = \frac{2.4.6\ldots(2q-2)}{3.5.7\ldots(2q-1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$