Die

hyperbolischen Functionen in den bestimmten Integralen.

Vom

Herrn Dr. phil. B. Féaux.

Die hyperbolischen Functionen, deren große Wichtigkeit in der Analysis zumal seit dem Erscheinen der vortrefflichen Schrift Gudermann's über diesen Gegenstand*) allgemein anerkannt ist, spielen in der Theorie der bestimmten Integrale doch nur eine untergeordnete Rolle: besonders ist hier auf den Parallelismus in der Rechnung mit cyclischen und hyperbolischen Funktionen, welcher in der sogenannten niederen Analysis durchgreifend Statt hat, wenig zu rechnen. Die Gründe davon liegen nahe. Einmal nämlich bewegt sich dieses Geschlecht der Functionen, mit bloßer Ausnahme der Tangente, zwischen den Grenzen 0 und ∞ oder auch 1 und ∞, wenn ihren Arcus oder Argumenten die Zahlenwerthe von 0 bis ∞ beigelegt werden; hierdurch werden sehr viele bestimmte Integrale, die zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen und solchen mit cyclischen Functionen analog sind, unendlich große Werthe erhalten und darum unbestimmt oder nichtssagend sein. Es gehören dahin beispielsweise die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\, x}{x} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\, x\ \mathrm{Cos}\, ax}{x} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\, ax}{1+x^2} dx, \quad \int_0^\infty {\mathrm{Sin} \atop \mathrm{Cos}}(ax)\, x^n dx, \quad \int_0^\infty {\mathrm{Sin} \atop \mathrm{Cos}}(x^2)\, dx$$

u. a. m., welche bekanntlich insgesammt für die goniometrischen Funktionen einen bestimmten Werth haben. Ein zweiter und ohne Frage bedeutsamerer Grund liegt darin, daß die Periodicität der hyperbolischen Functionen sich auf einen imaginären Inder bezieht, wogegen dieser bei dem coordinirten Geschlechte die reelle Zahl 2π ist. Welch' große Menge der ausgezeichnetsten bestimmten Integrale aber liegt nicht zwischen Grenzen, die durch Vielfache von π angegeben sind! Bei den hyperbolischen Functionen, wo das imaginäre $2n\pi i$ $(i=\sqrt{-1})$, respective $n\pi i$ die Wiederkehr derselben Functionswerthe vermittelt, hat die Ludolph'sche Zahl in den Grenzen zugehöriger Integrale nicht viel mehr zu bedeuten, als jede andere Zahl auch; durch ihr Auftreten würde daher in den meisten Fällen der eigentliche Charakter der bestimmten Integrale vernichtet werden, welches ebenfalls dann Statt finden würde, wofern man die Grenzen oder auch nur eine derselben durch das imaginäre $a\pi i$ determiniren wollte.

---

*) Theorie der Potenzial- oder cyclisch-hyperbolischen Functionen von Dr. C. Gudermann. Crelle's Journal der Mathematik. Band 6, 7, 8 und 9.

Allein wenn nun darum auch die Anzahl der Beispiele, in denen hyperbolische Functionen auftreten können, verhältnißmäßig klein ist; so hieße es doch der Analogie und Symmetrie den Krieg erklären, wollte man sie hier durch Exponentialfunctionen oder gar mitunter durch ungeschlossene Ausdrücke ersetzen.

Ja man müßte sie dann um der Consequenz willen auch in den unbestimmten oder allgemeinen Integralen vermeiden und statt z. B. den vier Integralen

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \mathrm{arc}\ \sin x \qquad\qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)}} = \mathrm{arc}\ \mathrm{Sin}\ x$$

$$\int_1^x \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \mathrm{arc}\ \cos x \qquad\qquad \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}} = \mathrm{arc}\ \mathrm{Cos}\ x$$

die ähnlichen

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc}\ \mathrm{tg}\ x \qquad\qquad \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arc}\ \mathrm{Tg}\ x$$

$$\int_\infty^x \frac{-dx}{1+x^2} = \mathrm{arc}\ \mathrm{cotg}\ x \qquad\qquad \int_\infty^x \frac{-dx}{x^2-1} = \mathrm{arc}\ \mathrm{Cotg}\ x$$

gegenüberstellen zu dürfen, deren Werthe für jedes x aus den vorhandenen, vom Hrn. Prof. Dr. Gudermann mit bewunderungswürdiger Sorgfalt berechneten Tafeln sich entnehmen lassen, die viel unbequemeren Formen

$$\log\left(x+\sqrt{(x^2+1)}\right),\ \log\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right),\ \log\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)},\ \log\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

annehmen.

Es ist unsere Absicht, nachstehend einige bestimmte Integrale der bezeichneten Art und zumal solche zu behandeln, bei denen trotz der erwähnten Hindernisse der innige Zusammenhang unter den einfach periodischen Funktionen sich geltend macht. Wir werden dabei je nach den verschiedenen Gestaltungen der Integrale auch einen verschiedenen Ausgang nehmen müssen, mit Verzichtleistung auf eine strenge Einheit des Verfahrens, die bis jetzt überhaupt noch nicht aufgefunden worden ist.

1. Vertauscht man in der Gleichung $\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx = \frac{\Gamma(n)}{a}$, wo $\Gamma(n)$ den Werth des Euler'schen Integrales der zweiten Art bezeichnet, die Constante a einmal mit (a—b) und dann mit (a+b); so erhält man:

$$\int_0^\infty e^{-(a-b)x}x^{n-1}dx = \frac{\Gamma(n)}{(a-b)^n}$$

$$\int_0^\infty e^{-(a+b)x}x^{n-1}dx = \frac{\Gamma(n)}{(a+b)^n}$$

Die Addition respective Subtraction dieser beiden Gleichungen führt zu den beiden Integralen:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathfrak{Cos}\,bx.x^{n-1}dx=\frac{\Gamma(n)}{2}\Big[(a-b)^{-n}+(a+b)^{-n}\Big]\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathfrak{Sin}\,bx.x^{n-1}dx=\frac{\Gamma(n)}{2}\Big[(a-b)^{-n}-(a+b)^{-n}\Big]\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

welche freilich, wie aus der Herleitung hervorgeht, nur unter der Bedingung gelten, daß $a > b$ sei. Der Kürze wegen wollen wir diese beiden Integrale beziehlich durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ bezeichnen, so daß also auch ist:

$$\mathfrak{C}=\frac{\Gamma(n)}{2}\left\{\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{(a+b)^n(a-b)^n}\right\}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

$$\mathfrak{S}=\frac{\Gamma(n)}{2}\left\{\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{(a+b)^n(a-b)^n}\right\}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Ist nun aber überhaupt $\psi(a)$ der Werth des bestimmten Integrales $\int_m^n F(a,x)dx$, und lassen sich die Functionen $\psi(a)$ und $F(a,x)$ für reelle innerhalb endlicher und nur durch ihre Vorzeichen unterschiedener Grenzen in convergente nach ganzen Potenzen von a steigend fortlaufende Reihen entwickeln; so bleibt bekanntlich die Gleichheit $\psi(a)=\int_m^n F(a,x)dx$ auch für imaginäre Werthe von a bestehen, es sei denn, daß deren Moduln den absoluten Werth jener Grenze übersteigen. Von solcher Beschaffenheit sind eben die Gleichungen (1) und (2) in Betreff des Elementes b, wie man auf der Stelle übersieht, wenn man sie durch die ungeschlossenen Ausdrücke:

$$\mathfrak{C}=\Gamma(n)\left\{\frac{1}{a^n}+\frac{n(n+1)}{2!}\cdot\frac{b^2}{a^{2+n}}+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}\cdot\frac{b^4}{a^{4+n}}+\ldots\right\}\ldots\ldots\ (5)$$

$$\mathfrak{S}=\Gamma(n)\left\{\frac{n}{1!}\cdot\frac{b}{a^{1+n}}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\cdot\frac{b^3}{a^{3+n}}+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}\cdot\frac{b^5}{a^{5+n}}+\ldots\right\}(6)$$

darstellt. Führt man diese Substitution wirklich aus, so erhält man als Werthe der analogen cyclischen Integrale:

$$C=\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx.x^{n-1}dx=\frac{\Gamma(n)}{a^n}\left\{1-\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}\left(\frac{b}{a}\right)^4-+\ldots\right\}(7)$$

$$S=\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx.x^{n-1}dx=\frac{\Gamma(n)}{a^n}\left\{n\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\left(\frac{b}{a}\right)^3+-\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}(8)$$

zwei Reihen, die offenbar nichts anderes sind, als die Entwickelungen der gewöhnlich für C und S hergeleiteten geschlossenen Ausdrücke $\Gamma(n).\dfrac{\cos\left(n.\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$ und $\Gamma(n).\dfrac{\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$. Diese Identität führt zu der Vermuthung, daß nun auch

$$\mathfrak{C} = \Gamma(n).\frac{\mathfrak{Cos}\left(n\,\mathrm{arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}}} \qquad \ldots\ldots \qquad (9)$$

$$\mathfrak{S} = \Gamma(n).\frac{\mathfrak{Sin}\left(n\,\mathrm{arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}}} \qquad \ldots\ldots \qquad (10)$$

seien. **A posteriori** ließe sich diese Vermuthung leicht zur Wahrheit erheben: auch durch Anwendung des eben erwähnten Theorem's über die Einführung einer **imaginären** Größe würde sie ihre Bejahung finden: von nicht geringerem Interesse bleibt darum doch die nachstehende **directe** Herleitung dieser Gleichungen.

Differenziirt man die Gleichungen

$$\mathfrak{C} = \int_0^\infty e^{-ax}\,\mathfrak{Cos}\,bx.x^{n-1}dx$$

$$\mathfrak{S} = \int_0^\infty e^{-ax}\,\mathfrak{Sin}\,bx.x^{n-1}dx$$

nach b und integrirt die dadurch erhaltenen Werthe partiell, so gelangt man mit Bezug auf die Ungleichheit $a > b$ zu den beiden Differentialgleichungen

$$\mathfrak{C}' = \frac{b}{a}.\mathfrak{S}' + \frac{n}{a}\mathfrak{S}$$

$$\mathfrak{S}' = \frac{b}{a}\mathfrak{C}' + \frac{n}{a}\mathfrak{C}$$

in denen $\mathfrak{C}' = \frac{d\mathfrak{C}}{db}$, $\mathfrak{S}' = \frac{d\mathfrak{S}}{db}$ gesetzt ist.

Aus diesen ergeben sich leicht die folgenden:

$$\mathfrak{C}.\mathfrak{C}' - \mathfrak{S}.\mathfrak{S}' = \frac{b}{a}(\mathfrak{C}.\mathfrak{S}' - \mathfrak{C}'.\mathfrak{S})$$

$$\mathfrak{C}.\mathfrak{C}' - \mathfrak{S}'.\mathfrak{S}' = \frac{n}{a}(\mathfrak{C}.\mathfrak{S} - \mathfrak{C}.\mathfrak{S}')$$

Die Natur der Functionen Cosinus und Sinus, so wie die geometrische Bedeutung eines einfachen bestimmten Integrales lehren nun aber, daß $\mathfrak{C} > \mathfrak{S}$ sei; es liegt also der Bruch $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}}$ zwischen den Grenzen 0 und 1 und kann demgemäß als hyperbolische Tangente eines gewissen Arcus angesehen werden. Ist z dieser Arcus und bestimmt man überdieß eine Zahl p durch die Gleichung: $p^2 = \mathfrak{C}^2 - \mathfrak{S}^2$, so erlangt man durch Einführung dieser neuen Veränderlichen und durch die Elimination zuerst von p respective $\frac{dp}{db}$, dann der anderen Variablen aus den obigen Differentialgleichungen die neuen:

$$\frac{dz}{db}=\frac{an}{a^2-b^2}=\frac{\frac{n}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{nb}{a^2-b^2}.db$$

Die Integration der ersten gibt

$$z=n.\mathrm{arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{b}{a}$$

weil mit b zugleich $\mathfrak{S}$ und daher auch z verschwindet.

Die zweite führt zu der Gleichung:

$$\log p=\log c-\frac{n}{2}\log(a^2-b^2) \text{ oder } p=\frac{c}{(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

Um hier die Constante c zu bestimmen, hat man nur darauf zu achten, daß mit dem Verschwinden von b die Zahl p den Werth $\int\limits_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx=\frac{\Gamma(n)}{a^n}$ annimmt, so daß also

$$\frac{\Gamma(n)}{a^n}=\frac{c}{a^n} \text{ d. h. } c=\Gamma(n) \text{ wird.}$$

Auf solche Weise ergeben sich nunmehr die zu beweisenden Gleichheiten:

$$\mathfrak{C}=p\,\mathfrak{Cos}\,z=\Gamma(n).\frac{\mathfrak{Cos}\left(n\,\mathrm{arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\mathfrak{S}=p\,\mathfrak{Sin}\,z=\Gamma(n).\frac{\mathfrak{Sin}\left(n\,\mathrm{arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{b}{a}\right)}{(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

Ertheilt man hierin der Zahl n den Werth 1, so bekommt man die beiden neuen Integrale:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax}\,\mathfrak{Cos}\,bx.dx=\frac{\mathfrak{Cos}\,\mathrm{arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{b}{a}}{\sqrt{(a^2-b^2)}}=\frac{1}{a}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{b^4}{a^5}+\ldots=\frac{a}{a^2-b^2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(11)$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax}\,\mathfrak{Sin}\,bx.dx=\frac{\mathfrak{Sin}\,\mathrm{arc}\,\mathfrak{Tg}\frac{b}{a}}{\sqrt{(a^2-b^2)}}=\frac{b}{a^2}+\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^5}{a^6}+\ldots=\frac{b}{a^2-b^2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(12)$$

welche mit den bekannten correspondirenden cyclischen die vollkommenste Analogie zeigen und zu diesen durch Vertauschung von b mit bi hinführen.

Multiplicirt man noch die Gleichungen (11) und (12) zuerst mit da und darauf mit db und vollzieht die zweite Integration innerhalb der Grenzen p und q, so entstehen mit Rücksicht auf die Gleichheit $\mathrm{arc}\,\mathfrak{Tg}\,y=\log\sqrt{\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$ die 4 bemerkenswerthen Relationen:

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-px}-e^{-qx}}{x}\right) \mathrm{Cos}\, bx.dx = \mathrm{arc\,Tg}\left(\frac{q^2-p^2}{p^2+p^2-2b^2}\right) = \log\sqrt{\left(\frac{q^2-b^2}{p^2-b^2}\right)} \quad \ldots\ldots (13)$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{Cos}\, px-\mathrm{Cos}\, qx}{x}\right).e^{-ax}dx = \mathrm{arc\,Tg}\left(\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2-2a^2}\right) = \log\sqrt{\left(\frac{q^2-a^2}{p^2-a^2}\right)} \quad \ldots\ldots (14)$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-px}-e^{-qx}}{x}\right) \mathrm{Sin}\, bx.dx = \mathrm{arc\,Tg}\frac{p}{b} - \mathrm{arc\,Tg}\frac{q}{b} = \log\sqrt{\left(\frac{b^2+b(p-q)-pq}{b^2-b(p-q)-pq}\right)} \quad \ldots (15)$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{Sin}\, px-\mathrm{Sin}\, qx}{x}\right).e^{-ax}dx = \mathrm{arc\,Tg}\frac{p}{a} - \mathrm{arc\,Tg}\frac{q}{a} = \log\sqrt{\left(\frac{a^2+a(p-q)-pq}{a^2-a(p-q)-pq}\right)} \ldots (16)$$

von denen die beiden ersteren die Bedingung involviren, daß p und q gleichzeitig entweder größer oder kleiner als a und b seien, wogegen bei den zwei folgenden p und q nothwendig kleiner als a und b zu nehmen sind, indem die Tangente über 1 hinaus nicht wachsen kann: Beschränkungen, die bei den analogen cyclischen Integralen selbstredend wegfallen.

2. Man überzeugt sich leicht, daß die Summen der endlichen Reihen:

$$\mathrm{Cos}\, o + \mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Cos}\, 2x + \mathrm{Cos}\, 3x + \ldots + \mathrm{Cos}\, nx \text{ und}$$
$$\mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Cos}\, 3x + \mathrm{Cos}\, 5x + \ldots\ldots + \mathrm{Cos}\,(2n-1)x$$

beziehlich $\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{Sin}\,(n+\frac{1}{2})x}{\mathrm{Sin}\,\frac{x}{2}}$ und $\frac{\mathrm{Sin}\, 2nx}{2\ \mathrm{Sin}\, x}$ seien, indem man entweder die einzelnen Glieder durch Exponentialgrößen ausdrückt und diese summirt, oder durch die Vermittelung des imaginären i von den allbekannten correspondirenden Reihen:

$$\cos o + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{1}{2} + \frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos\,(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

zu jenen übergeht. Indem nun das Lagrange'sche Integral $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bxdx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{-\frac{b^2}{4a}}$ auch für ein imaginäres b gilt und dann unter der Form $\int_0^\infty e^{-ax^2}\mathrm{Cos}\, bxdx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{\frac{b^2}{4a}}$ auftritt: so erhält man dadurch, daß man in beiden Integralen der Zahl b successive die Werthe 1, 2, 3, 4 ... n gibt, und diese n Specialwerthe je zu einer Summe vereinigt, die beiden Gleichungen:

$$\int_0^\infty e^{-4ax^2}.\frac{\mathfrak{Sin}\,(2n+1)x}{\mathfrak{Sin}\,x}.\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{2}+e^{\frac{1}{4a}}+e^{\frac{4}{4a}}+e^{\frac{9}{4a}}+\ \ldots\ +e^{\frac{(4n+1)^2}{4a}}\right)\ \ldots\ (1)$$

$$\int_0^\infty e^{-4ax^2}.\frac{\sin\,(2n+1)x}{\sin x}.\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{2}+e^{-\frac{1}{4a}}+e^{-\frac{4}{4a}}+e^{-\frac{9}{4a}}+\ \ldots\ +e^{-\frac{(4n+1)^2}{4a}}\right).\ .\ (2)$$

Beide Reihen sind zur numerischen Berechnung um so geeigneter, je größer die Constante a ist; aber nur die zweite gilt für in's Unendliche wachsende n. Macht man diese Voraussetzung wirklich, so läßt sich auf das Integral der berühmte Satz von Fourier anwenden, nach welchem für jede gerade Function ψ der Werth des bestimmten Integrales $\int_0^\infty \psi(x)\,.\,\frac{\sin \mu x}{\sin x}dx$ für $\mu=\infty$ durch die Reihe $\pi\left(\frac{\psi(0)}{2}+\psi(\pi)+\psi(2\pi)+\psi(3\pi)+\ \ldots\ \text{in inf.}\right)$ ausgedrückt wird. Demgemäß ist also auch für $n=\infty$

$$\int_0^\infty e^{-4ax^2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=\pi\left(\frac{1}{2}+e^{-4a\pi^2}+e^{-4.4a\pi^2}+e^{-9.4a\pi^2}+\ \ldots\ \text{in inf.}\right)$$

Es besteht mithin für jeden positiven Werth von a die Gleichung:

$$\frac{1}{2}+e^{-4a\pi^2}+e^{-4.4a\pi^2}+e^{-9.4a\pi^2}+\ldots=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a\pi}}.\left\{\frac{1}{2}+e^{-\frac{1}{4a}}+e^{-\frac{4}{4a}}+e^{-\frac{9}{4a}}+\ \ldots\ .\right\}$$

Setzt man $q=e^{-4a\pi^2}$ und $p=e^{-\frac{1}{4a}}$, so ist $4a\pi^2=\log\frac{1}{q}$ und $\frac{1}{4a}=\log\frac{1}{p}$, daher $\log\frac{1}{q}.\log\frac{1}{p}=$ $=\log q.\log p=\pi^2$, und $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a\pi}}=\sqrt{\frac{\pi}{4a\pi^2}}=\frac{\sqrt[4]{\log\frac{1}{q}}\sqrt[4]{\log\frac{1}{p}}}{\sqrt{\log\frac{1}{q}}}=\frac{\sqrt[4]{\log\frac{1}{p}}}{\sqrt[4]{\log\frac{1}{q}}}$. Darnach gelangt man zu dem durch seine Symmetrie ausgezeichneten Theorem:

„Sind q und p zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß das Product ihrer (natürlichen) Logarithmen dem Quadrate der Ludolph'schen Zahl gleich ist, so ist jedesmal:

$$\sqrt[4]{\log\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2}+q+q^{2^2}+q^{3^2}+q^{4^2}+\ldots\right)=\sqrt[4]{\log\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}+p+p^{2^2}+p^{3^2}+p^{4^2}+\ldots\right)\text{“}\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Zu einem ähnlichen Resultate wird man geführt, wenn man in den beiden Integralen $\int_0 e^{-ax^2}\cos bx.dx$ und $\int_0 e^{-ax^2}\mathfrak{Cos}\,bx\,dx$ anstatt b die ungeraden Zahlen $1, 3, 5\ldots(2n-1)$ einsetzt und diese n Specialwerthe je addirt. Dann nämlich findet man, daß

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\frac{\mathfrak{Sin}\,nx}{\mathfrak{Sin}\,x}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(e^{\frac{1}{4a}}+e^{\frac{9}{4a}}+e^{\frac{25}{4a}}+\ldots+e^{\frac{(2n-1)^2}{4a}}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(e^{-\frac{1}{4a}}+e^{-\frac{9}{4a}}+e^{-\frac{25}{4a}}+\ldots+e^{-\frac{(2n-1)^2}{4a}}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

sei. Für $n=\infty$ ist aber auch

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\pi\left(\frac{1}{2}+e^{-a\pi^2}+e^{-4a\pi^2}+e^{-9a\pi^2}+\ldots\text{ in inf.}\right)$$

und daher

$$e^{-\frac{1}{4a}}+e^{-\frac{9}{4a}}+^{-\frac{25}{4a}}+\ \ldots=\sqrt{(a\pi)}\left(\frac{1}{2}+e^{-a\pi^2}+e^{-4a\pi^2}+e^{-9a\pi^2}+\ \ldots\right)$$

Setzt man hierin $e^{-\frac{1}{4a}}=q$ und $e^{-a\pi^2}=p$, so gibt die Gleichung das Theorem:

„Für jede zwei Zahlen p und q, die der Bedingungsgleichung $\log p.\log q=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ genügen, ist

$$\sqrt{2}\sqrt[4]{\log q}\left(q+q^{3^2}+q^{5^2}+q^{7^2}+\ldots\right)=\sqrt[4]{\log p}\left(p+p^{2^2}+p^{3^2}+p^{4^2}+\ldots\right)\text{“}\quad\ldots\ldots(6)$$

Wählt man daher, um ein besonders interessantes Beispiel herauszunehmen, die Zahl q so, daß $\log\frac{1}{q}=-\log q=\pi x$ oder $q=e^{-\pi x}$ wird, so ist $\log p=\frac{\left(\frac{\pi^2}{4}\right)}{-\pi x}=-\frac{\pi}{4x}$ oder $p=e^{-\frac{\pi}{4x}}$; die Substitution dieser particulären Werthe führt nun nach einigen leicht zu übersehenden Reductionen zu dem Ausdruck:

$$\sqrt{x}=\frac{1+2.e^{-\frac{\pi}{4x}}+2.e^{-\frac{4\pi}{4x}}+2.e^{-\frac{9\pi}{4x}}+2.e^{-\frac{16\pi}{4x}}+\ldots}{4(e^{-\pi x}+e^{-9\pi x}+e^{-25\pi x}+e^{-49\pi x}+\ldots)}$$

welcher eine Darstellung der Quadratwurzel durch Exponentialgrößen enthält, die mit der bekannten von Cauchy aufgestellten

$$\sqrt{x}=\frac{1+2.e^{-\frac{\pi}{x}}+2.e^{-\frac{4\pi}{x}}+2.e^{-\frac{9\pi}{x}}+\ldots}{1+2.e^{-\pi x}+2.e^{-4\pi x}+2.e^{-9\pi x}+\ldots}$$

große Uebereinstimmung zeigt.

3. Das im vorigen Paragraphen erwähnte Integral von Lagrange so wie das diesem parallele mit hyperbolischem Cosinus lassen aus sich mittels einfacher Substitutionen eine Menge nicht unwichtiger bestimmter Integrale ableiten. So findet man zum Beispiele, wenn man der Constanten b das Increment $\pm c$ oder auch $+ci$ gibt, ohne Weiteres die Werthe der 6 Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\cos cx\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{-\frac{(b^2+c^2)}{4a}}.\operatorname{Cos}\left(\frac{bc}{2a}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\operatorname{Cos}bx\operatorname{Cos}cx\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{\frac{b^2+c^2}{4a}}.\operatorname{Cos}\left(\frac{bc}{2a}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \sin bx \sin cx\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \,.\, e^{-\frac{(b^2+c^2)}{4a}} \,.\, \mathrm{Sin}\left(\frac{bc}{2a}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \mathrm{Sin}\, bx \,.\, \mathrm{Sin}\, cx\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \,.\, e^{\frac{b^2+c^2}{4a}} \,.\, \mathrm{Sin}\left(\frac{bc}{2a}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, \mathrm{Cos}\, cx\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \,.\, e^{\frac{c^2-b^2}{4a}} \,.\, \cos\left(\frac{bc}{2a}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \sin bx\, \mathrm{Sin}\, cx\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \,.\, e^{\frac{c^2-b^2}{4a}} \,.\, \sin\left(\frac{bc}{2a}\right)$$

Aehnliche Relationen würde man erhalten, wofern es gelänge, die Werthe der beiden coordinirten Integrale $\int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx\, dx$ und $\int_0^\infty e^{-ax^2} \mathrm{Sin}\, bx\, dx$ durch ungeschlossene Ausdrücke darzustellen. Allein das scheint, wenn es nicht vielleicht gar zu den Unmöglichkeiten gehört, mit eben so großen Schwierigkeiten verknüpft zu sein, als es leicht ist, unendliche Reihen für sie aufzufinden, die nach ganzen Potenzen des Quotienten $\frac{b^2}{a}$ fortschreiten. Zu dem Ende hat man von dem bekannten und für alle ganze Zahlen n gültigen Integrale $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1} dx = 3.4.5\dots(n-1)$ auszugehen. Führt man hier anstatt x die Variable $x\sqrt{a}$ ein und multiplicirt zugleich mit $\frac{b^{2n-1}}{(2n-1)!}$; so nimmt es die andere allgemeinere Gestalt $\int_0^\infty e^{-ax_2} \frac{(bx)^{2n-1}}{(2n-1)!} dx = \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \frac{b^{2n-1}}{2a^n} = \frac{1}{[2n-1]^{n}} \cdot \frac{b}{2a} \cdot \left(\frac{b^2}{a}\right)^{n-1}$ an. Jetzt hat man nur der Zahl b der Reihe nach alle ganzen Zahlenwerthe von 1 bis ∞ zu ertheilen und die so gewonnenen Gleichheiten entweder alle durch das Vorzeichen (+) oder alternirend durch (+) und (—) zu einer Summe zu vereinigen, um die Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \mathrm{Sin}\, bx\, dx = \frac{b}{2a}\left(1 + \frac{b^2}{2.3a} + \frac{b^4}{3.4.5a^2} + \frac{b^6}{4.5.6.7a^3} + \dots\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx\, dx = \frac{b}{2a}\left(1 - \frac{b^2}{2.3a} + \frac{b^4}{3.4.5a^2} - \frac{b^6}{4.5.6.7a^3} + - \dots\right)$$

zu erhalten. Die Reihen convergiren für jeden beliebigen Werth von a und b; sie nehmen dadurch, daß man a mit a^2 vertauscht und $\frac{b}{a} = \vartheta$ setzt, die einfachere Form an:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \mathrm{Sin}\, \vartheta a x\, dx = \frac{\vartheta}{2a}\left(1 + \frac{\vartheta^2}{2.3} + \frac{\vartheta^4}{2^2.3.5} + \frac{\vartheta^6}{2^3.3.5.7} + \dots\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\sin\vartheta\, ax\,dx = \frac{\vartheta}{2a}\left(1-\frac{\vartheta^2}{2.3}+\frac{\vartheta^4}{2^2.3.5}-\frac{\vartheta^6}{2^3.3.5.7}+-\ldots\right)$$

woraus hervorgeht, daß die Werthe der Integrale $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma x\,dx$ und $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\sin\gamma x\,dx$ um so mehr übereinstimmen, je näher der Bruch $\frac{\gamma}{a}$ der Null steht.

Noch ist zu bemerken, daß diese beiden Integrale als particuläre Werthe der (von Lobatto in der größten Allgemeinheit behandelten) Differentialgleichung $2a\frac{dy}{d\vartheta}\mp ay\vartheta = 1$ Genüge leisten.

4. Bezeichnet man nach dem Vorgange Binet's das Euler'sche Integral der ersten Art, welches bekanntlich in Beziehung auf die beiden in ihm vorkommenden Constanten a und b symmetrisch ist, durch B(a,b); so hat man nach je den beiden Formen des Integrales durch Einführung einer neuen Veränderlichen $z = \frac{\log x}{2}$ die beiden Gleichungen:

$$B(a,b) = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2az}.dz}{(1+e^{2z})^{a+b}}$$

$$B(a,b) = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2bz}dz}{(1+e^{2z})^{a+b}}$$

Addirt man diese Integrale, indem man zugleich unter dem Integrationszeichen mit $\frac{e^{-z(a+b)}}{e^{-z(a+b)}}$ multiplicirt, so wird:

$$B(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(a-b)z}+e^{-(a-b)z}}{(e^z+e^{-z})^{a+b}}dz = \frac{1}{2^{a+b-2}}\int_0^\infty\frac{\mathfrak{Cos}\,(a-b)z}{\mathfrak{Cos}\,z^{a+b}}dz$$

Um dieser wichtigen Relation eine etwas übersichtlichere Gestalt zu geben, hat man nur $a+b=2q$ und $a-b=2p$ zu setzen; dann nämlich erhält man:

$$\int_0^\infty\frac{\mathfrak{Cos}\,2px}{\mathfrak{Cos}\,x^{2q}}dx = 4^{q-1}B(q+p, q-p) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (1)$$

wobei behufs der Gültigkeit stets $q > p$ sein muß.

Es sei nun zunächst $p=0$, $2q$ aber eine ganze (positive) Zahl. Unter dieser Voraussetzung nimmt die Function B den Werth $\frac{\Gamma(q)^2}{\Gamma(2q)}$ an und ist daher, je nachdem 2q eine gerade oder ungerade Zahl ist, rational oder irrational. In der That ist für ganze Werthe von q

$$\int_0^\infty\mathfrak{Cos}\,x^{-2q}dx = \frac{2.4.6\ldots(2q-2)}{3.5.7\ldots(2q-1)} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (2)$$

$$\int_0^\infty \mathfrak{Cos}\, x^{-(2q+1)}dx = \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2.4.6\ldots\ 2q}.\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Diese Formeln versagen nur, jene für $q=1$, diese für $q=0$; allein in Bezug auf diese Fälle lehrt die Relation (1), daß $\int_0^\infty \frac{dx}{\mathfrak{Cos}\, x^2} = 1$ und $\int_0^\infty \frac{dx}{\mathfrak{Cos}\, x} = \frac{\pi}{2}$ sei. Uebrigens ist in Betreff dieser Integrale zu bemerken, daß sie sich auch für jede anderen Grenzen analytisch darstellen lassen, wodurch sie den specifischen Charakter bestimmter Integrale einbüßen.

Indem nämlich allgemein $\int \frac{dx}{\mathfrak{Cos}\, x} = l(x) + c$ ist, wo die durch Gudermann in die Analysis eingeführte Longitudinalfunction l durch die Gleichung $l(x) = \operatorname{arc tg} \mathfrak{Sin}\, x = \arcsin \mathfrak{Tg}\, x$ oder auch implicite durch die andere $\operatorname{num}\log x = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + l(x)\right)$ bestimmt ist, so führt die Reductionsmethode zu den beiden Ausdrücken:

$$\int \frac{dx}{\mathfrak{Cos}\, x^n} = \frac{\mathfrak{Tg}\, x}{n-1}\left\{\mathfrak{Cos}\, x^{2-n} + \frac{n-2}{n-3}\mathfrak{Cos}\, x^{4-n} + \ldots \frac{(n-2)(n-4)\ldots 6.4.2}{(n-3)(n-5)\ldots 7.5.3}\right\} + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\mathfrak{Cos}\, x^n} = \frac{\mathfrak{Tg}\, x}{n-1}\left\{\mathfrak{Cos}\, x^{2-n} + \frac{n-2}{n-3}\mathfrak{Cos}\, x^{4-n} + \ldots \frac{(n-2)(n-4)\ldots 7.5.3}{(n-3)(n-5)\ldots 6.4.2}\right\} + \frac{1.3.5\ldots(n-2)}{2.4.6\ldots(n-1)}.l(x) + C \ldots (5)$$

von denen jener für gerade, dieser für ungerade n gilt, und welche bei den Grenzen 0 und ∞ in die Werthe (2) und (3) übergehen.

Wir wenden uns wieder zu der Gleichung (1) und betrachten die Fälle, wo $q = p + 1$ oder $= p + \frac{1}{2}$ wird. Dadurch werden die beiden Integrale erhalten:

$$\int_0^\infty \frac{\mathfrak{Cos}\, 2px}{\mathfrak{Cos}\, x^{2p+2}}dx = \frac{4^p}{2p+1} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\mathfrak{Cos}\, 2px}{\mathfrak{Cos}\, x^{2p+1}}dx = \frac{1.3.5\ldots(4p-1)}{1.2.3\ldots\ 2p}.\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Ist hierin p eine ganze Zahl, so läßt sich $\mathfrak{Cos}\, 2px$ in eine nach fallenden Potenzen von $\mathfrak{Cos}\, x$ fortlaufende Reihe entwickeln, deren Bildungsgesetz absolut übereinstimmend ist mit dem der für $\cos 2px$ mehrseitig*) hergeleiteten Reihe, so daß eine buchstäbliche Uebertragung Statt hat: und mit Bezug hierauf lassen sich zwei Arten von Reihen summiren, deren Glieder aus den Coefficienten der besagten Entwickelung und den Specialwerthen der Integrale (2) und (3) gebildet sind. Es genüge aber, hiermit die Andeutung gegeben zu haben. Ebenso soll bloß im Vorbeigehen erwähnt werden, wie durch wiederholte Differentiation der Gleichung (1), sei es nach p oder nach q oder nach p und q zugleich, neue Integrale sich herleiten lassen, deren Werth von den Differentialquotienten der Function B(p,q) abhängig sind und unter Zuziehung der desfallsigen vortrefflichen Untersuchungen Binet's**) zuweilen unter einfachen Gestalten sich bestimmen lassen.

---

*) Vergleiche Schloemilch's Handbuch der mathematischen Analysis, erster Theil, Seite 241.

**) Binet, Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes.

Zum Schlusse machen wir auf zwei Integrale aufmerksam, die man erhält, wenn man in den leicht herzuleitenden Integralen $\int_0^1 \frac{(x^a - x^{-a})^2}{(1-x^2)\log x} . x dx = \log \frac{\sin a\pi}{a\pi}$ und $\int_0^1 \frac{(x^a - x^{-a})^2}{(1-x^2)\log x} dx = \log \cos a\pi$ e^{-z} für x setzt und die Bedingung feststellt, daß a zwischen 0 und 1 liege. Sie sind:

$$\int_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\, az^2}{ze^z\, \mathfrak{Sin}\, z} dz = \frac{1}{2} \log \frac{a\pi}{\sin a\pi} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\, az^2}{z\, \mathfrak{Sin}\, z} dz = -\frac{1}{2} \log \cos a\pi$$

In dem letztern liegt zugleich ausgesprochen, daß der Werth des Integrales $\int_0^\infty \frac{\mathfrak{Tg}\, x}{x} dx$ unendlich groß sei: eine Wahrheit, die, wenn auch freilich die hyperbolische Tangente große Aehnlichkeit mit dem cyclischen Sinus hat, dennoch aus dem Grunde nicht überrascht, weil der Sinus für die Argumente von 0 bis ∞ periodenmäßig positiv und negativ wird, während die Tangente immer positiv bleibt und mithin die Arealstücke der auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Curve $y = \frac{\mathfrak{Tg}\, x}{x}$ ohne Ausnahme additiv sind.