

BIBLIOTHECA  
SCRIPTORVM GRAECORVM ET ROMANORVM  
TEVBNERIANA

---

IAMBlichVS

IN NICOMACHI  
ARITHMETICAM INTRODVCTIONEM  
LIBER

EDIDIT

H. PISTELLI



SLUB Dresden

SG  
700  
I11  
N6

Zell 1

DIAE IN AEDIBVS B. G. TEVBNERI

2011 FH1 N / SG 700 111 N6

IAMBICHI  
IN NICOMACHI  
ARITHMETICAM INTRODVCTIONEM  
LIBER

AD FIDEM CODICIS FLORENTINI

EDIDIT

HERMENEGILDVS PISTELLI

(MDCCCXCIV)

EDITIONEM ADDENDIS ET CORRIGENDIS

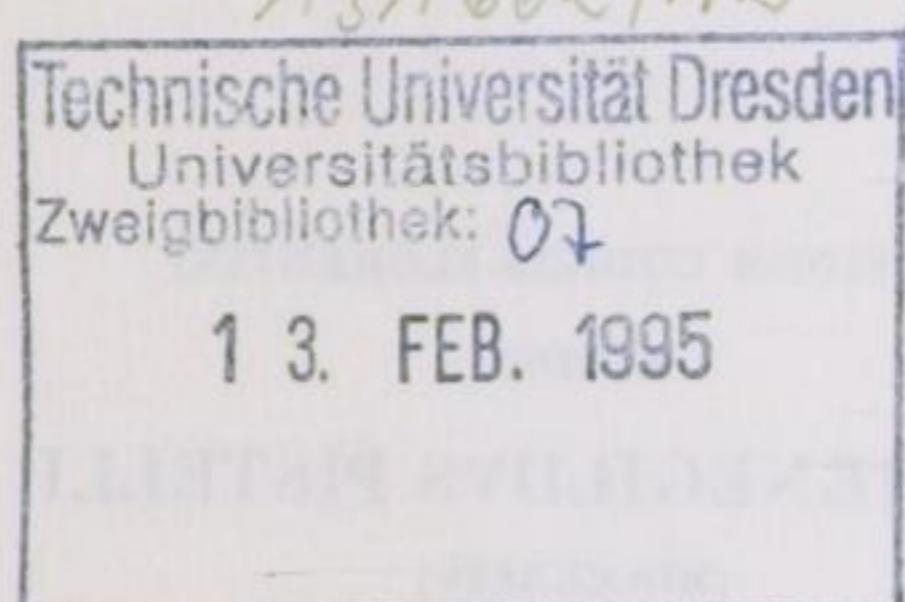
ADIVNCTIS CVRAVIT

VDALRICVS KLEIN

Technische Universität Dresden  
Universitätsbibliothek  
Fachbibliothek Mathematik  
01062 Dresden



STVTGARDIAE IN AEDIBVS B. G. TEVBNERI MCMLXXV



CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Iamblichus <Chaleidensis>

[In Nicomachi arithmeticam introductionem]

Iamblichi in Nicomachi arithmeticam introduc-

tionem liber / ad fidem codicis Florentini

ed. Hermenegildus Pistelli — (1894) /

ed. addendis et corrigendis adiunctis

cur. Udalricus Klein.

(Bibliotheca scriptorum Graecorum

et Romanorum Teubneriana; 1444)

ISBN 3-519-01444-0

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten  
Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der  
Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechani-  
schem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in  
Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen  
des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an den  
Verlag gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit  
dem Verlag zu vereinbaren ist.

© B. G. Teubner, Stuttgart 1975  
Printed in Germany  
Druck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

958.09726.001

ΙΑΜΒΛΙΧΟΥ ΧΑΛΚΙΔΕΩΣ  
ΤΗΣ ΚΟΙΛΗΣ ΣΥΡΙΑΣ  
ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ  
ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ

Ἄρχόμενοι τοῦ ἴδιου λόγου περὶ τῶν ἐν μέρεσι 5  
διωρισμένων μαθημάτων ἀπὸ τῆς ἀριθμητικῆς ἀρχό-  
μενα· αὗτη γὰρ φύσει πρεσβυτέραν ἔχει τὴν θεωρίαν  
τῷ περὶ ἀπλούστερα πραγματεύεσθαι καὶ ἀρχηγικώ-  
τερα, διόπερ καὶ ὁ περὶ αὐτῆς λόγος προηγεῖται τῶν  
ἄλλων· μαθημάτων. ἔστι δὴ καὶ οὗτος οὐχ ἀπλοῦς, 10  
ἄλλὰ πολυειδῆς· ὅσα γάρ ἔστι γένη τῶν ὄντων, περὶ  
2 πάντα συνδιαιρεῖται | καὶ τὰς αὐτὰς δέχεται διαιρέσεις.  
ἄλλὰ πρό γε τῶν ἐν ἄλλοις θεωρουμένων αὐτὸν καθ'  
αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν θεωρεῖν χρή, ἀφ' οὗ δυνησόμενα  
καὶ τὸν ἐν τῇ φύσει ἢ τοῖς ἥθεσιν ἢ τοῖς εἰδεσιν ἢ 15  
ὅλως πᾶσι τοῖς οὖσιν ἐπισκοπεῖν. διὰ δὴ τοῦτο παρα-  
λαμβάνειν δεῖ τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην τῶν ἀριθ-  
μῶν. καὶ γὰρ ως ἐν ὑποθέσει δεῖ προκεῖσθαι ταύτην·  
προϋποκειμένης γὰρ αὐτῆς, καὶ τὰς ἄλλας παραγίγνε-  
σθαι ἐπιστήμας δυνατόν, ἃνευ δὲ ταύτης οὐδὲ ἐκεῖναι 20  
παραγίγνονται. καὶ πρὸς μάθησιν δὲ ἐντεῦθεν ἄρχε-

σθαι δεῖ· προδιωρισμένων γὰρ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασιν ἀναγκαίων θεωρημάτων, δι’ αὐτῶν δδηγούμεθα πρὸς τὰς τελειοτέρας τῶν ἀριθμῶν θεωρίας· δῆλον γὰρ ὅτι συμφωνοῦσι πρὸς ταύτην ἔκεῖναι. τὴν δὲ ἐπίνοιαν αὐτῆς, οὐχ ὡς ἐν ψιλοῖς ἐννοήμασιν, οὐδὲ ὡς ὑστέραν ἐπὶ τοῖς αἰσθητοῖς ἐπιγιγνομένην, οὐδὲ ὡς φαντάσματά τινα ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἀποσυλῶσαν καὶ χωρίζουσαν, ἀλλ’ ὡς κοινὰ νοήματα δυναμένην πᾶσιν ἐφαρμόζειν τοῖς δπωσοῦν ὑφεστηκόσιν ἀριθμοῖς, οὕτως 10 αὐτὴν προϊστασθαι ἄξιον. περὶ δὴ τῆς τοιαύτης μαθηματικῆς ἀριθμητικῆς πρόκειται ἡμῖν νῦν λέγειν.

Ἐνρίσκομεν δὴ πάντα κατὰ γνώμην τῷ Πυθα- 3 γόρᾳ τὸν Νικόμαχον περὶ αὐτῆς ἀποδεδωκότα ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ τέχνῃ. ὃ τε γὰρ ἀνήρ μέγας ἐστὶν ἐν τοῖς μαθήμασι καὶ καθηγεμόνας ἔσχε περὶ αὐτῶν τοὺς ἐμπειροτάτους ἐν τοῖς μαθήμασι, καὶ ἄνευ τούτων τάξιν θαυμαστὴν καὶ θεωρίαν μετ’ ἀποδείξεώς τε θαυμαστῆς τῶν ἐπιστημονικῶν ἀρχῶν ἐπιστήμην ἀκριβῶς παραδίδωσι, λόγον τε περὶ αὐτῶν οἶδε ποιεῖσθαι, 20 καὶ ἀκραιφνῇ καὶ γνήσιᾳ τὰ θεωρήματα παραδίδωσι, μηδὲν ἐπιθολούμενα ὑπ’ ἀλλοτρίων δοξασμάτων. ἔτι τε ποικίλος ἐστὶ καὶ πολύχονς τεταγμένος τε καὶ διηρθρωμένος ἐν τῇ τῶν ἀριθμῶν εἰδήσει, τό τε καθολικὸν τῆς γνώσεως καὶ τὸ εὐρετικὸν πάρεστιν αὐτῷ πάμπολυ· τὴν γὰρ πρώτην σύστασιν καὶ τὴν πρώτην γένεσιν τῶν ἀριθμῶν θηρεύει. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπαράλειπτον· κοινῶς γὰρ ἐπὶ πάντα ἥλθε τὰ γένη καὶ τὰ εἶδη τῶν ἀριθμῶν, ἐν πεπερασμένοις τε

ἀπειρα περιέλαβε καὶ ἐν τεταγμένοις τὰ ἄτακτα, πρό-  
εισί τε διὰ γενῶν καὶ εἰδῶν τεταγμένως οὐχ ὑπερ-  
βαίνων τὸ ἐφεξῆς, τά τε ἐν πολλοῖς φερόμενα θεωρή-  
μασιν ἀτελῶς ἐν ἐνὶ περιλαμβάνει τελείω. ἔχει δὲ  
ἐνταῦθα καὶ ὁ ἐν τοῖς ἄλλοις βιβλίοις ἥκιστα ἢν τις 5  
ἴδοι ἐν αὐτῷ ὑπάρχον τὸ σύντομον καὶ ἀκριβέσ, καὶ  
μετὰ τούτων τὸ πλῆρες καὶ τέλειον, ἀγκύλον τε καὶ  
συνεστραμμένον καὶ πολύνον καὶ γόνιμον, ώς μὲν  
ἔγω νομίζω, διότι αὐτὰ τὰ Πυθαγόρεια μαθήματα  
περὶ ἀριθμοῦ καθαρὰ τίθησιν, ἔξεστω δὲ καὶ τῷ 10  
βουλομένῳ περὶ τούτου εἰκάζειν δπως βούλεται. ἀλλ'  
ὅπερ ἐκ πάντων τούτων δεῖ συλλογίσασθαι, ἐκεῖνό  
ἐστιν. εἰ γὰρ διὰ πάντα ταῦτα προκρίνομεν τὸν ἄνδρα  
τοῦτον ώς ἀριθμητικώτατον, εἰκότως δὴ διὰ τοῦτο καὶ  
τίθεμεν ὅλην αὐτοῦ τὴν ἀριθμητικὴν τέχνην, οὐχ 15  
ἥγούμενοι δεῖν οὕτε ἀτελῶς αὐτὴν ἐκφέρειν ἀκριτη-  
ριάσαντας αὐτῆς τὰ προηγούμενα, οὕτε μεταγράφειν·  
περιττὸν γὰρ καὶ τοῦτο οὕτε σφετερίζεσθαι τὰ γε-  
γραμμένα· ἀγνωμοσύνης γὰρ ἐσχάτης ἔργον ἀφαιρεῖ-  
σθαι τῆς ἐπιβαλλούσης δόξης τὸν συγγεγραφότα. ἀλλ' 20  
οὐδὲ διὰ τοῦτο δεῖ ἀλλοτρίους τῶν Πυθαγορικῶν δια-  
τριβῶν λόγους ποιεῖσθαι· οὐδὲ γὰρ καὶ λέγειν ἡμῖν  
πρόκειται, ἀλλὰ τὰ δοκοῦντα τοῖς παλαιοῖς ἀνδράσιν,  
ὅθεν οὐδὲν οὕτε ἀφελόντες οὕτε προσθέντες αὐτὴν τὴν  
5 Νικομάχειον τέχνην | ἦδη παρατιθέμεθα ἐν τοῖς λόγοις. 25

"Ινα δὲ μὴ ἀτελῆς γένηται μηδὲ κατὰ τοῦτο ἡ  
παροῦσα πραγματεία, φιλοσοφίαν Πυθαγόρας ὡνόμασε  
πρῶτος καὶ ὅρεξιν αὐτὴν εἶπεν εἶναι καὶ οἶνει φιλίαν

σοφίας, σοφίαν δὲ ἐπιστήμην τῆς ἐν τοῖς οὖσιν ἀληθείας. ὅντα δὲ ἥδει καὶ ἔλεγε τὰ ἄντα καὶ ἀίδια καὶ μόνα δραστικά, ὅπερ ἐστὶ τὰ ἀσώματα, δμωνύμως δὲ λοιπὸν ὅντα, κατὰ μετοχὴν αὐτῶν οὔτως καλούμενα, 5 σωματικὰ εἰδη καὶ ὑλικά, γεννητά τε καὶ φθαρτὰ καὶ ὅντως οὐδέποτε ὅντα. τὴν δὲ σοφίαν ἐπιστήμην εἶναι τῶν κυρίως ὅντων, ἀλλ' οὐχὶ τῶν δμωνύμως, ἐπειδή περ οὐδὲ ἐπιστητὰ ὑπάρχει τὰ σωματικὰ οὐδὲ ἐπιδέχεται γνῶσιν βεβαίαν, ἀπειρά τε ὅντα καὶ ἐπιστήμη 10 ἀπερίληπτα καὶ οἷονεὶ μὴ ὅντα κατὰ ἀντιδιαστολὴν τῶν καθόλου καὶ οὐδὲ ὅρῳ ὑποπεσεῖν εὐπεριγράφως δυνάμενα. τῶν δὲ φύσει μὴ ἐπιστητῶν οὐδὲ ἐπιστήμην οἶσι τε ἐπινοῆσαι· οὐκ ἄρα ὅρεξιν τῆς μὴ ὑφεστώσης ἐπιστήμης εἰκὸς εἶναι, ἀλλὰ μᾶλλον τῆς περὶ 15 τὰ κυρίως ὅντα καὶ ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡσαύτως ἔχοντα καὶ τῇ προσηγορίᾳ ἀεὶ συνυπάρχοντα. καὶ γὰρ δὴ τῇ | τούτων καταλήψει συμβέβηκε καὶ τὴν τῶν 6 δμωνύμως ὅντων παρομαρτεῖν, οὐδ' ἐπιτηδευθεῖσάν ποτε, οἷα δὴ τῇ <τοῦ> καθόλου ἐπιστήμῃ <ἥ> τοῦ κατὰ 20 μέρος· ‘τοιγὰρ περὶ τῶν καθόλου’ φησὶν Ἀρχύτας ‘καλῶς διαγνόντες ἔμελλον καὶ περὶ τῶν κατὰ μέρος οἷα ἐντὶ καλῶς δψεῖσθαι.’ διόπερ οὐδὲ μονογενῆ οὐδὲ ἀπλᾶ ὑπάρχει τὰ ὅντα, ποικίλα δὲ ἥδη καὶ πολυειδῆ θεωρεῖται, τά τε νοητὰ καὶ τὰ ἀσώματα, 25 <ῶν τὰ> ὅντα ἡ κλησίς, καὶ τὰ σωματικὰ καὶ ὑπ'

αἰσθησιν πεπτωκότα, ἂν δὴ κατὰ μετοχὴν κοινωνεῖ τοῦ  
ὄντως γενέσθαι. ἀκόλουθον ἀν εἶη περὶ πάντων  
ἀπλῶς τῶν ὄντων τεχνολογεῖν οὐτωσί πως. ἡ τοῦ  
συνεχοῦς καὶ ἡ τοῦ διηρημένου φύσις πᾶσα τοῖς οὖσιν,  
ὅπερ ἐστὶ τῇ τοῦ παντὸς κόσμου συστάσει, διττῶς 5  
συνεπινοεῖται· τοῦ μὲν διηρημένου κατὰ παράθεσίν  
τε καὶ σωρείαν, τοῦ δὲ συνεχοῦς κατὰ ἔνωσίν τε καὶ  
ἀλληλουχίαν. κυρίως δὲ τὸ μὲν συνέχεις καὶ ἡνωμένον  
καλοῖτ' ἀν μέγεθος, τὸ δὲ παρακείμενον καὶ διηρη-  
μένον πλῆθος. καὶ κατὰ μὲν τὴν τοῦ μεγέθους 10  
οὖσίαν, εἰς τε δὲ κόσμος ἐπινοοῖτ' ἀν καὶ λέγοιτο στε-  
ρεὸς καὶ σφαιρικός τε καὶ συμπεφυκὼς ἑαυτῷ διατε-  
ταμένος τε καὶ ἀλληλουχούμενος, κατὰ δὲ τὴν τοῦ  
πλήθους πάλιν ἵδεαν καὶ ἔννοιαν ἥ τε σύνταξις καὶ  
διακόσμησις καὶ ἀρμονία τοῦ παντὸς ἐπινοοῖτ' ἀν ἐκ 15  
τοσῶνδε φέρο' εἰπεῖν στοιχείων καὶ σφαιρῶν καὶ ἀστέ-  
ρων γενῶν τε καὶ ζῷων καὶ φυτῶν ἐναντιοτήτων τε  
καὶ δμοιοτήτων τὴν σύστασιν ἔχουσα. ἀλλὰ τοῦ μὲν  
ἡνωμένον ἐπ' ἄπειρον μὲν ἐκ παντὸς ἐστιν ἡ τομή, ἡ  
δ' αὔξησις ἐπὶ ὠρισμένον· τοῦ δὲ πλήθους κατὰ ἀντι- 20  
πεπόνθησιν ἐπ' ἄπειρον μὲν ἡ αὔξησις, ἔμπαλιν δὲ ἡ  
τομὴ ἐπὶ ὠρισμένον, φύσει δὴ κατ' ἐπίνοιαν ἀμφοτέρων  
ἀπείρων ὄντων, καὶ διὰ τοῦτο ἐπιστήμαις ἀπεριορίστων·  
‘ἀρχὰν’ γὰρ ‘οὐδὲ τὸ γνωσούμενον ἐσσεῖται πάν-  
των ἀπείρων ἐόντων’ κατὰ τὸν Φιλόλαον. ἀναγ- 25  
καίου δὲ ὄντος ἐπιστήμης φύσιν ἐνορᾶσθαι τοῖς οὖσιν

οὗτως ὑπὸ θείας ἡκριβωμένοις προνοίας, ἀποτεμόμεναι  
 ἐκατέρου καὶ περατώσασαί τινες ἐπιστῆμαι τὸ περι-  
 ληφθὲν αὐταῖς, ἀπὸ μὲν τοῦ πλήθους ποσὸν ἐκάλε-  
 σαν, ὅπερ ἥδη γνώριμον, ἀπὸ δὲ τοῦ μεγέθους κατὰ  
 5 τὰ αὐτὰ πηλίκον· καὶ τὰ ἀμφότερα αὐτῶν γένη ἐπι-  
 στήμαις ὑπήγαγον ταῖς | ἐαυτῶν εἰδήσεσιν, ἀριθμη- 8  
 τικῇ μὲν τὸ ποσόν, γεωμετρίᾳ δὲ τὸ πηλίκον. ἀλλ’  
 ἐπεὶ μὴ μονοειδῆ ταῦτα ἦν, ἔτι δὲ μερικωτέραν ὑπο-  
 διαιρεσιν ἐκάτερον αὐτῶν ἐπεδέχοντο· τοῦ μὲν γὰρ  
 10 ποσοῦ τὸ μὲν ἦν καθ’ ἐαυτὸν τῆς πρὸς ἄλλο πως ἀπ-  
 ηλλαγμένον σχέσεως, οἷον φέροντες ἄρτιον περιττόν,  
 τέλειον ἐλλιπὲς καὶ τὰ δυοια, τὸ δὲ πρὸς ἔτερόν πως  
 ἔχον (ὅ δὴ πρός τι ποσὸν ἴδιως λέγεται), οἷον ἵσον  
 ἄνισον, πολυπλάσιον ἐπιμόριον ἐπιμερὲς καὶ τὰ παρα-  
 15 πλήσια· καὶ πάλιν τοῦ πηλίκου τὸ μὲν ὑπάρχει τε  
 καὶ ἐπινοεῖται μένον, τὸ δὲ κινούμενον καὶ φερόμενον·  
 διὰ τοῦτο εἰκότως ταῖς προσαχθείσαις δυσὶν ἐπιστῆ-  
 μαις ἐτεραί τινες δύο συνεπέσχον καὶ συνεφήψαντο  
 τῆς καθ’ ἐκάτερον ἐπιστητὸν θεωρίας. τῇ μὲν γὰρ  
 20 ἀριθμητικῇ, ἴδιως λαχούσῃ τὴν περὶ τοῦ καθ’ ἐαυτὸν  
 ποσοῦ σκέψιν, συμμετέσχεν ἡ μουσικὴ τῆς περὶ τὸ  
 πρός τι ποσὸν τεχνολογίας (οὐδὲν γὰρ ἄλλο τὸ ἀρμο-  
 νικὸν αὐτῆς καὶ τὸ περὶ συμφωνιῶν ἐπαγγέλλεται, ὅτι  
 μὴ σχέσεις καὶ λόγους διαρθροῦν τῶν φθόγγων πρὸς  
 25 ἄλλήλους | καὶ ποσότητα ὑπεροχῶν τε καὶ ἐλλείψεων), 9  
 τῇ δὲ γεωμετρίᾳ περὶ τὴν τοῦ μένοντος καὶ ἐστῶτος  
 πηλίκου ἐξέτασιν καταγιγνομένη συλλήπται ὑπῆρξεν ἡ  
 σφαιρικὴ κινουμένου πηλίκου ἐπιγνώμων καταστᾶσα,  
 τοῦ τελειοτάτου δηλονότι καὶ τεταγμένην καὶ διαλήν

κίνησιν ἐπιδεδεγμένου. διότι περὶ ἀδελφὰ τὰ ὑποκείμενα καταγενομένας, εὗλογον ἀδελφὰς καὶ τὰς ἐπιστήμας ταύτας νομίζειν, ἵνα μὴ ἀπαιδευτῇ τὸ Ἀριθμεῖον ἕταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφά, ἀλλήλων τε ἔχόμενα τρόπου ἀλύσεως κρίκων 5 ἡγεῖσθαι, καὶ εἰς ἓνα σύνδεσμον καταλέγουσαν, ὡς φησιν δὲ θειότατος Πλάτων, καὶ μίαν ἀναφαίνεσθαι προσήκειν τούτων τῶν μαθημάτων τὴν συγγένειαν τῷ κατὰ τρόπου μανθάνοντι, τὸν δὲ σύμπαντα ταῦτα οὕτως εἰληφότα, ὡς αὐτὸς ὑποτίθεται, τοῦτον δὴ κα- 10 λεῖ τὸν ἀληθέστατα σοφώτατον καὶ δισχυροῖζεται παιξιών, μεταδιωκτά τε καὶ ἐκ παντὸς αἰρετὰ ταῦτα τὰ μαθήματα, εἴτε χαλεπὰ εἴτε ὁρδια εἴη, παρεγγυᾶς τοῖς φιλοσοφεῖν προθυμούν μένοις· καὶ μάλα εὐλόγως, εἴπερ συνεχοῦς καὶ διηρημένου καταλήψεις διὰ τούτων μό- 15 νων γίνονται, ἐκ δὲ συνεχοῦς καὶ διηρημένου ὃ τε κόσμος καὶ τὰ ἐν αὐτῷ πάντα. τοῦ δὴ ποσοῦ ἀκριβῆς κατάληψις σοφία, σοφίας δὲ ἔφεσις ἡ φιλοσοφία, φιλοσοφία δὲ ἐκ πασῶν μονωτάτη τεχνῶν τε καὶ ἐπιστητῶν τὸ οἰκεῖον καὶ κατὰ φύσιν ἀνθρώπῳ τέλος περιποιεῖ 20 καὶ ἐπὶ τὴν εὐδαιμονίαν ἄγει τὴν παρὰ τὰ ἄλλα ζῷα τούτῳ μόνῳ προσήκουσαν καὶ κατὰ φύσιν σπουδαξομένην, ὡς σκοπιμώτατον αὐτῷ τέλος. τῶν δέ γε τεσσάρων τούτων ἐπιστημῶν προηγεῖσθαι φαίνεται ἡ

ἀριθμητικὴ διὰ τὸ προτέρα καὶ ἀρχεγονωτέρα εὐρίσκεσθαι. συναναιρεῖ τε γὰρ ἐαυτῇ τὰς λοιπάς, καὶ πάλιν ἔκείναις συνεπιφέρεται· τὰ δὲ συναναιροῦντα μὲν μὴ συναναιρούμενα δέ, ἢ ἄλλως συνεπιφερόμενα μὲν μὴ 5 συνεπιφέροντα δέ, πρότερα πως καὶ πρεσβύτερα δεκτοῦνται. διόπερ εὐλογωτάτη ἀν ἐīη καὶ καθήκουσα ἡ περὶ πρωτίστης τῆς ἀριθμητικῆς τεχνολογίας σκέψις.

Τὸ δὲ ποσόν, ὅπερ ἐστὶ τὸν ἀριθμόν, Θαλῆς μὲν | μονάδων σύστημα ὠρίσατο (κατὰ τὸ Αἰγυπτιακὸν 11 10 ἀρέσκον, ὅπου περ καὶ ἐφιλομάθησε). τὸ δὲ ἀριθμητικὸν ἐν ἰδίων οὐχ ὑποπεσεῖται οὖν οὔτε μονὰς οὔτε τὸ ἐν τοῖς ὄροις. Πυθαγόρας δὲ ἔκτασιν καὶ ἐνέργειαν τῶν ἐν μονάδι σπερματικῶν λόγων, ἢ ἐτέρως τὸ πρὸ πάντων ὑποστὰν ἐν θείῳ νῷ ἀφ' οὗ καὶ ἐξ οὗ πάντα 15 συντέτακται καὶ μένει τάξιν ἄλυτον διηριθμημένα. ἔτεροι δὲ τῶν ἀπ' αὐτοῦ προποδισμὸν ἀπὸ μονάδος μεγέθει αὐτῆς. Εὔδοξος δὲ ὁ Πυθαγόρειος 'ἀριθμός ἐστιν' εἶπε 'πλῆθος ὠρισμένον' διαστελλας εἶδος καὶ γένος, ώς ἐν τοῖς ἀνωτέροις τὸ ποσὸν δι- 20 εκρίθη. οἱ δὲ περὶ Ἰππασον ἀκουσματικὸν ἀριθμὸν εἶπον παράδειγμα πρῶτον κοσμοποιίας, καὶ πάλιν κριτικὸν κοσμουργοῦ θεοῦ ὄργανον. Φιλόλαος δέ φησιν ἀριθμὸν εἶναι τῆς τῶν κοσμικῶν αἰώνιας διαμονῆς τὴν κρατιστεύουσαν καὶ αὐτογενῆ συνοχήν.

Μονὰς δέ ἔστι ποσοῦ τὸ ἐλάχιστον ἢ ποσοῦ τὸ πρῶτον καὶ κοινὸν μέρος ἢ ἀρχὴ ποσοῦ· ώς δὲ Θυμαρίδας περαίνουσα ποσότης, ἐπεὶ ἐκάστου καὶ ἀρχὴ<sup>12</sup> καὶ τέλος πέρας καλεῖται, ἔστι δὲ ὅν καὶ τὸ μέσον, ὥσπερ ἀμέλει κύκλου καὶ σφαιρας. οἱ δὲ νεώτεροι<sup>5</sup> καθ' ἣν ἐκάστον τῶν ὄντων ἐν λέγεται· ἐλειπε δὲ τῷ ὄρῳ τούτῳ τὸ κἄν συστηματικὸν ἥ. συγκεχυμένως δὲ οἱ Χρυσίππειοι λέγοντες ‘μονάς ἔστι πλήθος ἐν’· μόνη γὰρ αὕτη ἀντιδιέσταλται τῷ πλήθει. τινὲς δὲ τῶν Πυθαγορείων ‘μονάς ἔστιν’ εἶπον ‘ἀριθμοῦ<sup>10</sup> καὶ μορίων μεθόριον’· ἀπ’ αὐτῆς γάρ, ώς ἀπὸ σπέρματος καὶ ἀιδίου φύσης, ἐφ’ ἐκάτερον ἀντιπεπονθότως αὔξονται οἱ λόγοι, τῶν μὲν ἐπ’ ἄπειρον τεμνομένων μειούμενοι μεγαλωνυμώτερον ἀεί, τῶν δὲ ἐπ’ ἄπειρον αὔξομένων ἔμπαλιν μεγεθυνόμενοι. τινὲς δὲ ὠρίσαντο<sup>15</sup> μονάδα εἰδῶν εἶδος, ώς δυνάμει πάντας περιέχουσαν τοὺς ἐν ἀριθμῷ λόγους. καὶ γὰρ πολύγωνος ἐν ἐπιπέδῳ ἀπὸ τριγώνου μέχρι ἀπείρου, καὶ στερεὰ πᾶσιν εἴδεσιν ἐπιφαινομένη, καὶ σφαιρικὴ καὶ κωνική, ἀποκαταστική τε καὶ πλευρικὴ καὶ διαμετρικὴ καὶ τὸ κοινότατον ἑτερομήκης, ὅταν ἀφ’ ἐαυτῆς γενομένης μείζονος ἔννοια δυνάμει παράσχῃ, καὶ ἀναλογικὴ καὶ<sup>20</sup> σχετικὴ κατὰ τὰς δέκα σχέσεις, | καὶ ποικίλως ἄλλως, διασχῶς ὑποδειχθήσεται. μονὰς δὲ ἀπὸ τοῦ τῷ αὐτῆς τε λόγῳ δι’ ὅλου ἐπιμένειν. καὶ τἄλλα δὲ ὅσα ἀν<sup>25</sup> ὑπ’ αὐτῆς οὗτοι λογισθῇ.

Πάλιν δὲ ἐξ ἀλλης ἀρχῆς τοῦ ποσοῦ κατὰ πρώτην  
 <τομὴν> τὸ μέν ἔστιν ἄρτιον, τὸ δὲ περισσόν. ἄρ-  
 τιον μὲν τὸ μερῶν ἵσων ἀφ' ἑαυτοῦ παρεκτικόν, με-  
 γίστων τε καὶ ἐλαχίστων· μεγίστων μὲν πηλικότητι  
 5 καὶ τῇ πρὸς τὸ ὅλον σχέσει, ὅτι εἰς ἡμίση, ἐλαχίστων  
 δὲ ποσότητι, ὅτι εἰς δύο (τῶν γὰρ δύο ἐλάττονα φύσει  
 οὐκ ἔστιν, εἴπερ οὐδὲ τῆς δυάδος ἀριθμὸς ἐνδοτέρω·  
 πρώτη γὰρ αὕτη μονάδων σύστημα, ὅσπερ γενικοῦ  
 ὅρος ἀριθμοῦ)· περισσὸν δὲ τὸ πάντως, ὅταν εἰς τὰ  
 10 ἐλάχιστα διαιρῆται, ἄνισα τὰ μέρη ἀλλήλοις παρέχον.  
 οὐ γὰρ διχῇ εἰς ἵσα μεριστόν· ἀναιρετικὸν γὰρ ἔσται  
 τοῦτο τῆς φύσει ἀτόμου μονάδος εἰς τὴν σύμπασαν  
 τεχνολογίαν καὶ φυσιολογίας τοιαύτας χρησιμευούσης.  
 ἐπεὶ δὲ δὲ μὲν ἄρτιος διαιρούμενος δπωσοῦν ἢ ἵσα ἢ  
 15 καὶ ἄνισα, εἰς διμογενῆ πάντως λύεται· ἢ γὰρ ἄρτια  
 ἢ περιττὰ ἀμφότερα· δὲ περισσός, εἰς ἄλλα ἀμφό-  
 τερα τὰ | τοῦ ἀριθμοῦ μήκη· ἐτερομήκη μὲν ἐκ τοῦ 14  
 κατασυμβεβηκότος κατὰ τὸ σημανόμενον τὸν ἄρτιον  
 ἐπωνόμαζον οἱ ἀπὸ τοῦ διδασκαλείου, ὡς τὸ ἐτερον  
 20 μόνον τῶν τοῦ ἀριθμοῦ μηκῶν ἐν τοῖς μερισμοῖς  
 ἔχοντα· ἀντιδιεσταλμένως δὲ τούτῳ ἀμφιμήκη τὸν  
 περισσὸν τὸν ἀμφότερα δμοῦ παρεχόμενον ταῦτα. καὶ  
 δι' ἀλλήλων δ' ἀν γνωρισθείησαν ἐν τῇ φυσικῇ τοῦ  
 ἀριθμοῦ ἐκθέσει, ἄρτιος μὲν δὲ μονάδι ἐφ' ἐκάτερον  
 25 διαφέρων περισσοῦ, περισσὸς δὲ δὲ τῷ αὐτῷ ἄρτιον.  
 εἰδοποιεῖται δὲ καθ' ἐκάτερον γένος ἴδιως τε καὶ συμ-

βεβηκότως· ἄρτιος μὲν δυάδι ίδίως, συμβεβηκότως δὲ καὶ μονάδι· ἐπέρχεται γὰρ αὐτὸν μονὰς μὲν αἰεὶ δυαδικῶς, εἴτε ἀμιγῶς εἴτε καὶ συνδιαφόρως εἴτε καὶ ἄκρατος εἴτε καὶ σὺν φύτινιοῦν δμογενεῖ· περισσὸς δὲ ἐκ τοῦ ἐναντίου, ίδίως μὲν ὑπὸ μονάδος μετρεῖται δταν 5 περισσακῶς, συμβεβηκότως δὲ ὑπὸ δυάδος, οὐ μὴν καθ' ἑαυτήν, ἀλλὰ σὺν τῇ μονάδι. ἔξαίρετον μέντοι μονὰς μὲν παρὰ πάντας ἔχει περισσούς, ώς ἀν εἰδοποιὸς αὐτῶν, τὸ μηδ' εἰς ἄνισα μερίζεσθαι· δυὰς δὲ παρ' ἄρτιος, τὸ μόνον εἰς ίσα. διὸ τὴν μὲν <μονάδα> "Ἄτροπόν τε καὶ Ἀπόλλωνα καὶ ἔτερα τοιαῦτα, τὴν δὲ δυάδα Ἰσίν τε καὶ "Ἄρτεμιν κατὰ ἀνάλογον οἱ Πυθαγορικοὶ ἐπωνόμαξον. ἐκ δὲ τοῦ ἄτομος φύσει ἡ μονὰς εἶναι, πέρας ἐφ' ἐκάτερον καὶ δρισμὸς 10 ἡ | αὐτὴ φανήσεται· πηλίκῳ μέν, ἵνα ἀπ' αὐτῆς ώς 15 ὅλου ἡ ἐπ' ἄπειρον τομὴ ἄρχηται, ποσῷ δέ, ἵνα κατὰ ταῦτα ἡ ἐπ' ἄπειρον αὔξησις ἀντιπαρεκτείνηται ώς μονάδος· καὶ ώς ὅλου μὲν ἡμισυ εἶτα τρίτον εἶτα τέταρτον εἶτα πέμπτον καὶ ἔξης μείζονα αἰεὶ καὶ μᾶλλον μέρη ἐναντίως τῇ τῶν δυνομάτων αὔξησει προ- 20 χωρούσῃ, γίνεται· ώς δὲ ἀπὸ μονάδος δυὰς εἶτα τριὰς εἶτα τετρὰς καὶ ἐφεξῆς μέχρι παντὸς προκοπή, κατὰ τὰ δυόματα ἡ αὔξησις καὶ ἀντιπαρωνυμίας γένεσις ποικίλης παρὰ τοῦτο ὑποφύηται, τῆς μονάδος ὑφιστα-

μένης ἀμφοτέροις, ἔρθρου τρόπου, πηλίκῳ τε καὶ ποσῷ,  
 καὶ ὥσανεὶ διάφραγμα καὶ μεθόριον ποιούσης ἑαυτὴν  
 τῆς ἀντιπαρωνυμίας τούτων. | ἐὰν γὰρ προχειρισώμεθα 16  
 τὴν μονάδα, καὶ ὡς ἀπὸ γενίας αὐτῆς λάβδωμά τι  
 5 καταγράψωμεν, καὶ τὴν μὲν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τοῖς  
 συνεχέσι μονάδι ἀριθμοῖς ἐφεξῆς συμπληρώσωμεν μέχρι<sup>17</sup>  
 βουλόμεθα, οἷον β' γ' δ' ε' σ' ζ' καὶ ἐφοσονοῦν, τὴν  
 δὲ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῶν μερῶν ἀρξάμενοι, ὅπερ ἐστὶν  
 ἡμίσους τοῦ προσεχεστάτου | τῷ δὲ λόγῳ κατὰ μέγεθος, συν-  
 10 εχέσι καὶ αὐτοῖς ἐφεξῆς γῷ δῷ εῷ σῷ ζῷ καὶ ἐφοσονοῦν,  
 τὴν εἰρημένην ἀντιπεπόνθησιν δψόμεθα καὶ φυσικὴν  
 συνάρτησιν καὶ εὔτακτον σχέσιν, οἷον τοιαύτην. ἐπεὶ  
 εἰς δύο τὸ δλον ἐμερίσθη, ἡμισυ παρωνομάσθη καὶ  
 συνεξύγη οὕτως τὸ ἡμισυ τῷ δύο πάλιν ὅτι εἰς τοία  
 15 τρίτον, καὶ εἰς τέσσαρα τέταρτον, καὶ ἐφεξῆς μέχρις  
 ἑκατοστοῦ καὶ χιλιοστοῦ καὶ μυριοστοῦ, καὶ ἐντεῦθεν  
 ἡ τῆς ἐπ' ἄπειρον τομῆς ἀνάγκη διὰ τὴν παρέκτασιν  
 τοῦ δμολογουμένως ἐπ' ἄπειρον αὐξητοῦ παρεισβιάζε-  
 ται. καὶ ἔτι ὡς δὶς ἐν δύο, οὕτως ἡμισάκις ἐν ἡμισυ·  
 20 καὶ ὡς δὶς δύο τέσσαρα, οὕτως ἡμισάκις ἡμισυ τέταρ-  
 τον· καὶ ὡς δὶς δύο δὶς, οὕτως ἡμισάκις ἡμισυ ἡμι-  
 σάκις, δκτώ τε καὶ δγδοον· καὶ ὡς δὶς τρία ἕξ, οὕτως  
 ἡμισάκις τρίτον ἔκτον. καὶ καθάπαξ δὲ ὁ τι ἀν ἀφ'  
 ἑκατέρου λάβωμεν, ἐν αὐτῷ ἐκείνῳ δὲ λόγος μένει, καὶ  
 25 ἐφ' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν δσα ἀν ἀπλῶς συμβαίνῃ,  
 ταῦτα ἐκ παντὸς καὶ ἐπὶ τῶν ἀντιστρόφων μερῶν εὐ-  
 ορεθήσεται ἀναλογίᾳ. προληπτέον δέ, ὡς χρήσιμον εἰς

18 τὰ ἔξῆς ἐσόμενον, τοῦτο· | ὅτι παρωνυμούντων ἀπάντων μερῶν ἄπασιν ἀριθμοῖς, μόνον τὸ ἡμισυ τῷ δύο πράγματι μέν, οὐκέτι δὲ καὶ δυόματι παρωνυμεῖ· ἐπέλιπε γὰρ ἐν τῇ λέξει τοῦτο, ὥσπερ καὶ ἄλλα πολλά. γένεσις δὲ περισσοῦ καὶ ἀπὸ μονάδος, καὶ κατὰ σύν- 5 θεσιν ἀδιάξευκτον οὐχὶ τὴν σωρηδὸν ἄλλὰ τὴν κατὰ συνδυασμόν, ἦν τινες συζυγικὴν καλοῦσιν, οἷον ἐν πρῶτον, εἶτα α' β', εἶτα πάλιν β' γ' καὶ γ' δ' πάλιν, ἐφεξῆς δμοίως· ἀρτίου δέ, κατ' ἐμπλοκήν, ὡς α' γ', β' δ', γ' ε', δ' σ' καὶ ἐφοσονοῦν, ἵνα ὡς εἰδοποιὸς ἀρτίου καὶ 10 στοιχεῖον ἡ δυάς, ἀλλ' οὐχ ὡς ἐνεργείᾳ ἀρτίος, παραλείπηται· ἢ ἐτέρως, ἐκάστου τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν διπλασιαζομένου, ὡς δὶς ἐν καὶ δὶς δύο καὶ ἐφεξῆς δὶς τρία, δὶς τέσσαρα, δι' οὖ τρανοῦται μᾶλλον ἡ προταχθεῖσα εἰδοποίησις ὑπὸ δυάδος τοῦ ἀρτίου. καὶ 15 ἔξ ἀλλήλων δ' ἀν γένοιτο οὗτως πρὸς ἔμφασιν τῆς τοῦ ἀριθμοῦ ἴδιότητος· τῶν γὰρ ἐκατέρωθεν ἐκάτερος ἐτερογενῶν ἄμα ἡμισυς. καὶ τὸ θαυμασιώτατον, καὶ μονάδος ἕδιον καὶ συμβιβαστικὸν τοῦ μήπω ἀριθμὸν 19 αὐτὴν εἶναι, ὅτι | ἐτέρωθεν μόνον ἀλλ' οὐχὶ ἀμφοτέ- 20 ρωθεν περιεχομένη, μόνης τῆς δυάδος ἡμίσειά ἐστιν, ἀρκουμένη τῷ ἐνὶ γείτονι. οὗτως δυνάμει πάντα ἐν αὐτῇ θεωρεῖται κοινῶς τά τε ἀρτίου καὶ περισσοῦ εἴδη ὡς πηγῇ τινι καὶ ἀμφοτέρων ἀδιακρίτῳ φίξη καὶ ἀναγκαίως ἀδιαιρέτῳ παρὰ τὰ ἄλλα πάντα. καὶ γὰρ τῶν 25 βιαζομένων μονάδα διαιρεῖν καὶ παρατιθέντων αὐτῇ ἐκ θατέρου τὸ ἡμισυ ὡς ἐν ποσὸν καὶ δμογενὲς συνεχές, κωλυτικὸν γίνεται τὸ συζυγούντων ταῖς παρωνυμίαις τῶν ὑπὲρ αὐτὴν ἀριθμῶν ἀπάντων τοῖς καθ'

έκαστον ἀντιθέτοις μέρεσιν, αὐτὴν μόνῳ τῷ ὅλῳ ἀντιδιαστέλλεσθαι, καὶ τὸ σύγχυσιν ἔσεσθαι πάντως τῶν δύο γενικῶν τοῦ ἀριθμοῦ εἰδῶν εἰ καὶ τὸ περισσὸν φαίημεν τέμνεσθαι, καὶ πάλιν τὸ οἶόν τ' εἶναι [παρι-  
5 στάνειν ἀναγκαῖον] μᾶλλον αὐτῇ ἡμίσους τὸ οὐδὲν ἐπὶ τὸ ἔλαττον παρατιθέναι, ὅπερ πολλαχοῦ ἀκόντων ἡμῶν φαίνεται ἐγκρῖνον ἐαυτὸν τῇ τῆς θεωρίας φύσει καὶ ἐνθάδε μὲν ἐν τῷ τῶν ἑκατέρωθεν ἄμα ἡμίσειαν εἶναι καὶ τὴν μονάδα δυάδος καὶ τοῦ οὐδέν, καθὰ καὶ οἱ  
10 λοιποὶ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατέρωθεν | ἔκαστος ἄμα ἡμισυς 20 ἐφαίνετο· κάκει δὲ πολὺ μᾶλλον καὶ ἐναργέστερον ὅταν τοῦ δ' τετραγώνου πρωτίστου μετὰ τῶν δυνάμει ὅντος περισσοῦ, ἐν τῇ μεσότητι, τουτέστι τῷ πέντε, ἀνα-  
φαίνηται δ τῆς δικαιοσύνης λόγος κατ' ἀριθμητικὴν  
15 ἀναλογίαν συζύγως ἀμειβόμενος καὶ ὡς ἀφορίζονται οἱ Πυθαγορικοὶ δικαιοσύνην λέγοντες δύναμιν ἀπο-  
δόσεως τοῦ ἵσου καὶ προσήκοντος ἐμπεριεχομένην ἀριθμοῦ τετραγώνου περισσοῦ μεσότητι. ἐκτεθέντων  
γὰρ στιχηδὸν τῶν ἀπὸ μονάδος μέχρις ἐννεάδος ἀριθ-  
20 μῶν, δ πέντε μέσος τοὺς μὲν ἐντὸς ἐαυτοῦ ἔλαττον ἢ προσῆκον ἔχοντας διορίσει, τοὺς δ' ὑπὲρ αὐτὸν πλεονεκτοῦντας καὶ κατὰ πρόβασίν γε τοὺς γὰρ μᾶλλον τῇ ἐννεάδι ἐγγίζοντας ἀεί, τοὺς δὲ τῇ μονάδι ἀεὶ ἔλαττον προσήκει τε ἐκάστῳ κατά γε τὸν τῆς ἴσοτητος  
25 λόγον τὸ τοῦ πεντεκατεσσαράκοντα τῶν ὅλων συστήματος ἐννατον, ὅπερ αὐτόθεν τῇ μεσότητι τοῦ πλέον

καὶ ἔλαττον μόνη ἐμφαίνεται, ἐπεὶ καὶ ἡ δικαιοσύνη  
καὶ ἄλλαι ἀρεταὶ μεσότητες τούτων, ἀλλ' οὐχ ἔτερον  
τι εὑρίσκονται οὖσαι. διὰ τοῦτο ὅσῳ παρὰ τὸ καθῆκον |  
 21 ὑπερέχει δὲ οὗτος· καὶ πλεονεκτεῖ, τοσούτῳ λείπεται δὲ πρῶτος·  
ὅσῳ δὲ δὴ οὗτος, *τοσούτῳ* δὲ δεύτερος· καὶ ὅσῳ δὲ 5  
ζ', τοσούτῳ δὲ γ'. καὶ ὅσῳ δὲ σ', τοσούτῳ δὲ δ'. τῇ γὰρ  
ἐπὶ τὸ μέσον βραχὺ ἐγγύτητι ὥσπερ ἐπὶ ἀορτὴν ζυγι-  
κοῦ πήχεος ἀπίστασις ὑποφύεται, ώστε κάκεῖ δραστήτος  
γωνιῶν, τῶν τε πρὸς τὸν πῆχυν τῶν πλαστίγγων καὶ  
τῶν τοῦ πήχεος πρὸς αὐτὸν τὸν ἀορτήν. δὲ μέσος 10  
δέ εἶ τοσούτῳ λείπεται ὅσῳ πλεονάξει· οὐδενὶ ἄρα.  
καὶ μία μὲν ἐμφασις ἥδε τοῦ οὐδὲν ὅτι χρήσιμον ἐν  
τῇ θεωρίᾳ, καὶ ἄλλη δὲ εὐθὺς ἀναφαίνεται. οὐ γὰρ  
μόνον συνάδει τὸ καὶ τῷ σχήματι τοῦ χαρακτῆρος  
εἶναι τὸ εἴ τὸ ἥμισυ τοῦ οὗτος, ἀλλὰ καὶ ἔτι διὰ τὴν 15  
 22 συγγένειαν δμοκατάληκτα | φύσει εἶναι τὰ συξύγως ἐκα-  
τέρωθεν αὐτοῦ· ἐνάκι γὰρ οὗτος τῷ ἀπαξ α', δικτάκι δὲ  
δικτῷ τῷ δἰς δύο, ἐπτάκι δὲ ἐπτῷ τῷ τρὶς γ', εξάκι δὲ  
ἔξ τῷ τετράκι δ', μόνον δὲ αὐτῷ ἑαυτῷ τὸ πεντάκις  
πέντε. ἔτι τὸ μὲν ἐνάκι εἴ τῷ ἀπαξ ε', τὸ δὲ ἐνάκι σ' 20  
τῷ ἀπαξ δ', τὸ δὲ ἐνάκι ξ τῷ ἀπαξ γ', τὸ δὲ ἐνάκι  
δικτῷ τῷ ἀπαξ δύο. καὶ πάλιν τὸ δικτάκις ξ τῷ δὶς  
γ' καὶ τὸ δικτάκις σ' τῷ δὶς δ'*καὶ τὸ δικτάκις ε' τῷ δὶς ε'*  
*καὶ τὸ ἐπτάκις σ' τῷ τρὶς δ' καὶ τὸ ἐπτάκις ε' τῷ τρὶς ε'*. καὶ ἄλλως τὸ μὲν ἔξακι εἴ τῷ τετράκι δέ, 25  
εἰ καὶ μὴ τῷ δυνόματι ἀλλά γε τῇ δυνάμει, ὥσπερ καὶ

ἀπεδείξαμεν τὸ ἡμισυ τῷ δύο ἀντιπαρωνυμεῖν δυνά- 23  
 μει, ἀλλ' οὐκ δυόματι. εἰ δὴ παρὰ τῶν πλεονεκτούντων τοῖς πλεονεκτουμένοις, ὥσπερ κριταὶ δίκαιοι καὶ  
 τοῦ ἶσου καὶ ἐπιβάλλοντος ἀποδοτικοί, λαμβάνοντες  
 5 ἀποδιδοῦμεν, οὐκ εἰκῇ παρὰ τοῦ τυχόντος λαβόντες  
 τῷ τυχόντι ἀποδώσομεν, ἀλλὰ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀνα-  
 λογίαν, γνώμονι χρώμενοι καὶ οἶον κανόνι τῷ μήτε  
 πλεονεκτήσαντι μήτε πλεονεκτηθέντι, τουτέστι τῇ πεν-  
 τάδι· οὗτος γὰρ μόνος δικαίως τὸ ἑαυτοῦ πλῆρες ἔχει.  
 10 ἀπὸ τοῦ οὗν ἐννέα τὸν ἀπ' αὐτοῦ πέμπτον λαβόντες  
 τῷ α' δώσομεν, καὶ ἵσωθήσονται δὲ πλεῖστον ἀδικήσας  
 καὶ δὲ πλεῖστον ἀδικηθείσ. πέμπτον δὲ ἀπὸ τοῦ δὲ τὰ  
 τέσσαρα· ἔστι γὰρ η' ξ' σ' ε' δ'. πάλιν ἀπὸ τοῦ η'  
 προσθήσομεν τῷ δύο ἀφελόντες γ'. ἀπὸ τοῦ η' πέμ-  
 15 πτον γὰρ τὰ γ'. καὶ ἀπό τοῦ ξ' ἀφελόντες τὸν ἀπ'  
 αὐτοῦ πέμπτον τὰ β', προσθήσομεν τῷ τρίᾳ, καὶ ἵσω-  
 θήσονται. καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ σ' ἀφελόντες τὸν ἀπ'  
 αὐτοῦ πέμπτον τὸ ἔν, προσθήσομεν τῷ δ', καὶ ἔσονται  
 ἶσοι. ἀπὸ δὲ τοῦ πέντε ἀφελόντες οὐδέν (τὸ ἀπ' αὐ-  
 20 τοῦ πέμπτον γὰρ [α] τὸ οὐδέν), προσθήσομεν αὐτῷ, καὶ  
 ἔσται ἑαυτῷ ἶσος. οὕτως τὸ νοούμενον ἔλαττον, μο-  
 νάδος ἀδιαιρέτου οὖσης, τὸ οὐδέν, πανταχοῦ σφέζει  
 πρὸς τὴν μονάδα τὴν ἀναλογίαν, μᾶλλον ἢ ὅπερ ἔκεινοι  
 ἐνόμιζον ἡμισυ, καὶ γέγονεν ἡ μονὰς καὶ αὐτὴ τῶν  
 25 παρ' ἕκάτερα συντεθέντων ἡμίσεια· τοῦ γὰρ δύο καὶ  
 τοῦ οὐδὲν ἡμισυ τὸ ἔν. αὐτὸ μέντοι τὸ τοῦ οὐδὲν

δνομα ἐμφαντικώτατα ἡμῖν σημαίνει φύσει ἐλάχιστον εἶναι καὶ ἄτομον τὴν μονάδα· τὸ γὰρ οὐδὲν ἐν διαιρέσει στερίσκει πάσης οὐσίας, ὅπερ οὐκ ἀν ἐνοεῖτο εἰ τὸ ἥμισυ ὑπῆρχεν ἢ τρίτον ἢ τὰ δύοια αὐτῆς μέρη. τί γὰρ δεῖ προσεπιπλέκειν ὅτι ἡ μονὰς πολυπλασιά- 5 σασα ἀριθμὸν δοντινοῦν αὐτοῦ ἔκεινον οὐκ ἐκβαίνει, διότε καὶ αὐτὴ τοῦτο ποιήσασα ἔαυτῇ οὐκ ἔξισταται, ὡς ἀν μεθόριου τοῦ τε ἀπλῶς ἀριθμοῦ καὶ τοῦ οὐδὲν πεφυκυῖα; ὁ μὲν γὰρ εἴτε ἔαυτὸν εἴτε ἄλλον λάβοι 25 οὐδετέρῳ τὸν λόγον | ἵστησιν, ἀλλὰ πάντως τρίτον 10 τινὰ ἀπογεννᾷ· τὸ δὲ οὐδὲν εἴτε ἔαυτὸν εἴτε ἄλλο δόξειε πολυπλασιάζειν αὐτὸν οὐδέποτε ἐκβήσεται· οὐδενάκι γὰρ οὐδέν, καὶ οὐδενάκι θ', οὐδέν· ἵσον γὰρ τῷ οὐδαμῶς θ'· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δμοίως. ἡ δὲ μονάς, ὡς ἀμφοῖν μέση, ἐὰν μὲν ἄλλον λάβῃ, ἐν ἐκείνῳ τὸν 15 λόγον, ἐὰν δὲ ἔαυτήν, ἐν ἔαυτῇ ἀπολείπει. καὶ ἔτι προσθετέον μετὰ τῶν προσεμφανισθέντων ὅτι ἀντιπεριίσταται προκοπὴ ὑποβάσει καὶ ὑπόβασις προκοπῆ. ἄπαξ γοῦν ἐννέα, ἐννέα· καὶ ὁ λόγος ἔμεινεν ἐν ταῖς ἀκροτάταις. καὶ δις θ', ιη'· καὶ μετέβη ὁ λόγος εἰς 20 τὰς δευτέρας ἀκρότητας, καὶ τοῦτο ἐφεξῆς. ἐτέρουν γὰρ καιροῦ διερευνᾶν ἐπιπλέον πᾶς καὶ τετραγωνισθέντος ἀπὸ τῆς στιχηδὸν ἐκθέσεως τοῦ ἀριθμοῦ οὐκ ἐλάττονα πιθανὰ ἐπισυμβαίνει φύσει καὶ οὐ νόμῳ, ὡς φησί που Φιλόλαος· τοῦ μὲν πέντε δμοίως καὶ ἐνταῦθα 25 μεσότητος εὑρισκομένου κατὰ τὸν τρεῖς ἄλλοτε ἄλλως στίχους, μόνον δὲ τῶν ἐφεπομένων αὐτοῦ κατά τε

μῆκος καὶ πλάτος καὶ ἔτι διαγωνίως ἀπειληφότων τὸ |  
ἐπιβάλλον· τῶν δὲ μὴ οὔτως ἔχοντων πλεονεκτούντων 26  
τε καὶ πλεονεκτουμένων· καὶ οὐχ ὡς ἔτυχεν, ἀλλ' ὡς  
κατά τινα ἀνάλογον ἀντιπεπόνθησιν. ἀλλὰ νῦν γε  
5 ἀναπέμψαντες τὸν περὶ τούτων πλήρη λόγου εἰς τὸν  
περὶ δικαιοσύνης ἰδιον, χωρῶμεν ἐπὶ τὰ ἔξῆς.

Τοῦ γὰρ ἀρτίου καθ' ὑποδιαιρεσιν τὸ μέν ἐστιν  
ἀρτιάκις ἄρτιον, τὸ δ' ἀντίζυγον τούτῳ ἀρτιοπέ-  
ρισσον, ὡσανεὶ ἀκρότητες· μέσον δ' αὐτῶν καὶ οὗν  
10 κοινὸν ἀμφοτέρων περισσάρτιον. ὅπερ ἀγνοοῦντες  
οἱ περὶ Εὐκλείδην συγκεχυμένως τὸν αὐτὸν οὖνται  
περισσάρτιόν τε καὶ ἀρτιοπέρισσον εἶναι, οὐδὲν ἀκρι-  
βὲς ἐν τῷ τόπῳ γλαφυρωτάτῳ περ ὅντι θεωρησαντες,  
ώς ἔξῆς δειχθήσεται. | ἀρτιάκις ἄρτιος μὲν οὖν 27  
15 ἐστιν ἀριθμὸς δ τὰ ἑαυτοῦ ἡμίση καὶ τὰ τῶν ἡμί-  
σεων ἡμίση καὶ ἔτι τῶν ὑπ' ἐκεῖνα μέχρι μονάδος  
ἀεὶ ἄρτια ἔχων, φῶς καὶ διὰ τοῦτο συμβέβηκε μόνῳ  
ὑπ' ἀρτίου μετρεῖσθαι μόνον ἀρτιάκις. εἰ δέ τις  
πρὸς τούτῳ ἔτι καὶ περισσάκις μετρεῖται ὑπὸ ἀρτίου,  
20 ἐκφεύξεται τὸ λεγόμενον καὶ ἔσται θατέρου τῶν ἄλ-  
λων εἰδῶν. ὥστε καὶ ἐνθάδε ἡμαρτημένως πάλιν  
Εὐκλείδης ἀφορίζεται λέγων· ‘ἀρτιάκις ἄρτιος  
ἀριθμός ἐστιν δ ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρού-  
μενος ἀρτιάκις·’ ἵδον γὰρ δ κδ' ὑπὸ τοῦ σ' ἀρ-  
25 τίου τετράκι μετρεῖται καὶ ὑπὸ τοῦ δ' ἔξακις, καὶ  
ἔτεροι ἄλλοι διοίωσι, καὶ οὐκ εἰσὶν ἀρτιάκις ἄρτιοι

οὐδὲ κατ' αὐτόν, παρακολούθημα δ' αὐτοῦ τὸ τὴν εἰς δύο λύσιν αὐτόν τε ἵσχειν καὶ τὰ μέρη καὶ τῶν μερῶν τὰ μέρη, καὶ τοῦτο μέχρι τῆς φύσει ἀτόμου μονάδος. ἔοικε δὲ διὰ τὸ μὴ μόνον ὑπ' ἀρτίου ἀρτιάκις μετρεῖσθαι τετευχέναι τοῦ δυνάματος, ἀλλὰ καὶ 5 ὅτι πᾶν ὃ ἂν ἐν αὐτῷ μέρος ληφθῇ ἀρτιακῶς δυομάζεται. καὶ πάλιν ἡ ἐκάστῳ μέρει ἐμπεριεχομένη δύ-  
28 ναμις, τουτέστιν αἱ μονάδες, ἀρτιοι καὶ αὐταὶ δμο-ειδῶς εἰσι. γένεσις δ' αὐτοῦ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον διπλάσιος λόγος ἐπ' ἄπειρον. ἀλλ' ἐὰν κατὰ περισσὴν 10 ἔκθεσιν οἱ ἀρτιάκις ἀρτιοι ἀπὸ φύσης προχειρισθῶσιν εἰς μίαν μεσότητα, ἀντιπαρωνυμήσουσιν αἱ ἀκρότητες ἐν αὐτοῖς καὶ αἱ μετ' ἐκείνας καὶ αἱ συνεχῶς μέχρι τῶν παραμέσων, ὥστε καὶ τὸ ὑφ' ἐκάστης συζυγίας ἵσον ἀποτελεῖσθαι τῷ ἀπὸ τῆς μεσότητος, ἐπεὶ καὶ μόνη ἡ 15 αὐτὴ παρωνύμως ἀνθυπήκουεν αὐτῇ. ἐὰν δὲ κατὰ ἀρτίαν,  
ό λόγος εἰς δύο μεσότητας ἀντιπαρωνυμούσας ἀλλήλαις διχασθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν ἵσον ἀποτελεῖσθαι τῷ ὑπὸ τῶν παρ' ἐκάτερα εὐτάκτως ἀεὶ μέχρι τῶν ἀκρων. διαφορὰν δὲ πάντως ἔξουσιν ἐν τῇ τῇς γενέσεως 20 προκοπῇ οἱ μείζονες ἀεὶ πρὸς τοὺς ἐλάττονας αὐτοὺς τοὺς ἐλάττονας, ἵν' ἐκ τούτου καὶ αἱ διαφοραὶ καὶ αἱ τῶν διαφορῶν πάλιν διαφοραὶ καὶ τούτων μέχρι ἐπι-δέχεται τὸν αὐτοῦ λόγον ἔχουσαι τριγώνου τρόπου σχηματίζονται. κατὰ σύνθεσιν δ' αὐτῶν τὴν σωρηδὸν 25  
29 περισσογονία πάντως γίνεται | χρησιμεύουσα ἡμῖν μετὰ βραχὺ εἰς τὴν τῶν τελείων γένεσιν. αἰεὶ γὰρ παρ'

αὐτῇ δὲ μέλλον παρὰ μονάδα προεμφαίνεται, πάντες δὲ οἱ μέλλοντες ἄρτιοι γενικῶς· τοιούτων γὰρ ἡ ἔκθεσις. παρὰ δὲ μονάδα πᾶς ἄρτιος ἀναγκαῖως περισσός. καὶ ἐπὶ πασῶν δὲ τῶν ἀνάλογον ἐκθέσεων βεβαιοῦται τὸ ἀδιαίρετον φύσει τὴν μονάδα μένειν· ἀντιπαρωνυμοῦσαν γὰρ ἐκάστοτε τῷ μεγίστῳ τὴν τοῦ ὅλου προσηγορίαν μόνη ὑφαίνει.

Ἄρτιοπέρισσος δέ ἐστιν δὲ καὶ αὐτὸς μὲν εἰς δύο ἵσα κατὰ τὸ κοινὸν διαιρούμενος, οὐ μέντοι γε τὰ μέρη 10 ἔτι διαιρετὰ ἔχων, ἀλλ' εὐθὺς ἐκάτερον περισσόν· ἐνθεν καὶ ὡνομάσθη, ὅτι ἄρτιος ὁν τὰ μέγιστα μέρη εὐθὺς περισσὰ ἔχει, ἢ μᾶλλον ὅτι τοῖς τῶν ἐν αὐτῷ μερῶν δύναμειν αἱ αὐτῶν δυνάμεις ἀντιπαίουσιν, ἄρτιαι μὲν οὖσαι περισσωνυμούντων ἐκείνων, περισσαὶ δὲ ἀρτιώνυμούντων. καὶ οὐ κατὰ τοῦτο μόνον ἀντικεῖσθαι τῷ πρώτῳ εἴδει τοῦ ἀρτίου ἐλέχθη, ἀλλὰ καὶ ὅτι τούτου μὲν τὸ μεῖζον ἄκρον μόνον ἅπαξ διαιρετὸν | ἀριστον 30 δν καὶ ἄλλοτε ἄλλο, ἐκείνου δὲ τὸ ἐλαττον μόνον ἀδιαίρετον ὠρισμένον ὑπάρχον καὶ ταύτον ἀεί. γεννᾶται 20 δὲ δυάδος τοὺς τάξει περισσοὺς μηκυνούσης, ἵν' ἐπειδὴ δυάδι οἱ γνώμονες ἀλλήλων διαφέρουσι δυάς δὲ καὶ ἡ μηκύνουσα, τῶν ἀποτελουμένων ἡ παραλλαγὴ συνεχῶν τετρὰς ἥ· διს γὰρ δύο τοῦτο. καν μὲν ἀπὸ τοῦ δυνάμει περισσοῦ ἀρχώμεθα, δὲ δυνάμει ἀρτιοπέρισσος 25 ἀποτελεῖται δὲ δύο, ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐνεργείᾳ τοῦ τρία, δὲ ἐνεργείᾳ σ'. ἔσονται δὴ ἐν τῇ φυσικῇ τοῦ ἀριθμοῦ ἐκθέσει οἱ τοιοῦτοι δυάδι μὲν εἰδοποιούμενοι, τρεῖς δὲ

παραλείποντες, τετράδι δὲ διαφέροντες, πέμπτοι δ' ἀπ' ἄλληλων. ὅτι δ' ἐφάνη τὸ συνεχέσ, ὅπερ ἔστὶ πηλίκον, ἀντιπάσχον τῷ διηρημένῳ, τουτέστι ποσῷ, κέχρονται δὲ ἥδη τὸ πρότερον εἶδος τῇ τοῦ πηλίκου ἀναλογίᾳ δὲ χρήσεται καὶ τοῦτο τῇ τοῦ ποσοῦ ὡς ἀν καὶ τὸ 5 ἀντικείμενον ἐκείνῳ, καὶ κατ' ἀριθμητικὴν μεσότητα αἱ ἀρότητες συντεθειμέναι ἴσαι ταῖς μεσότησιν ἔσονται ἐν ἀρτίᾳ ἐκθέσει· ἐν δὲ περισσῇ, τῇ μεσότητι σὺν 31 αὐτῇ, τουτέστι διπλαὶ | αὐτῆς, ὥσπερ καὶ τὸ ἀπὸ τοῖς ὑπὸ γεωμετρικῶς ἐν ἀρτιάκις ἀρτίῳ συμβάντος τὸ τοὺς 10 ἄκρους καὶ τοὺς ὑπ' ἐκείνους μέχρι μέσου ἀλλήλους πολυπλασιάζοντας ἴσους γίνεσθαι τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου πολυπλασιασθέντι, ἢ δυσὶ μέσοις καὶ αὐτοῖς μηκυνομένοις, καθὰ καὶ οἱ ἑκατέρωθεν αὐτῶν ἄκροι, ἐν ἀρτίᾳ δηλονότι ἐκθέσει. ἴδιον δὲ τοῦ εἶδους τούτου ὑπεναντίον 15 τῷ τοῦ προτέρου τὸ μόνον ἢ ὑπὸ ἀρτίου περισσῶς ἢ ὑπὸ περισσοῦ ἀρτίως κατὰ ἀναστροφὴν μετρεῖσθαι.

Ἐπειδὴ δὲ ἐνταῦθα προδηλότερον ἀμάρτημα παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ ἔστὶ τὸ μὴ διακρίνειν ἀρτιοπέρισσον περισσαρτίου μηδὲ τὸν ἔτερον μὲν αὐτῶν ἀντικεῖσθαι ἀρ- 20 τιάκις ἀρτίῳ τὸν δὲ λοιπὸν ἀμφοτέρων μῆγμα νομίζειν, ἔτι σαφέστερον περὶ τοῦ τρίτου λέγωμεν, αὐτὸ τὸ Εὐκλείδου ὁγτὸν προεκθέμενοι περὶ αὐτῶν. λέγει γὰρ οὕτως· ἀρτιοπέρισσος ἀριθμός ἔστιν δὲ ὑπ' ἀρ-

τίον ἀριθμοῦ μετρούμενος περισσάκις.<sup>3</sup> ὁ δὲ αὐτὸς καὶ περισσάρτιός ἐστι· καὶ γὰρ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρεῖται ἀρτιάκις, οὗν λόγου χάριν δὲ σ· ἐὰν μὲν γὰρ δὶς τρία λέγωμεν, ἀρτιοπέρισσος, ἐὰν 32  
 5 δὲ τρὶς δύο, περισσάρτιος· πάνυ εὐήθως. ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν ἀριθμητικῶν τοὺς τρεῖς εἰς ἓνα συγχέει,  
 δουλεύων δηλονότι τῇ τοῦ δυόματος ἐμφάσει· φησὶ  
 γάρ· ‘ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισ-  
 σόν, ἀρτιάκις τέ ἐστι περισσὸς καὶ περισσάκις  
 10 ἄρτιος’, τὸ αὐτὸ δηλονότι τοῖς ἔμπροσθεν λέγων. εἶτ'  
 ἐπιφέρει· ‘ἐὰν ἄρτιος μήτε τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισ-  
 σὸν μήτε τῶν ἀπὸ μονάδος ἡ διπλασιαζομένων,  
 ἀρτιάκις τέ ἐστιν ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περισ-  
 σὸς δὲ αὐτὸς καὶ περισσάκις ἄρτιος.’ καὶ δὲ μὲν  
 15 Εὐκλείδης οὕτως· ἥμιν δὲ μᾶλλον λεγέσθω τὸ τρίτον  
 εἶδος ὃ κοινῶς ἔξ ἀμφοῖν πλάσσεται τε καὶ εἰδοποι-  
 εῖται καὶ συμβεβηκότα ἵσχει. ἐστιν οὖν καὶ τῷ δρῷ  
 κρᾶμα αὐτῶν· ὑπό τε γὰρ ἀρτίου ἀρτιάκις μετρεῖται  
 καὶ δὲ αὐτὸς ὑπὸ ἀρτίου περισσάκις, οὐδετέρῳ δὲ τῶν  
 20 προτέρων τοῦθ’ ἄμα συμβέβηκεν, ἀλλὰ θάτερον μόνον  
 θατέρῳ. καὶ μὴν τὸ πλεονάκις μὲν τοῦ ἀπαξ διαι-  
 ρεῖσθαι παρὰ τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου ἔχει, τὸ δὲ μὴ μέχρι<sup>33</sup>  
 μονάδος δύεσθαι παρὰ τοῦ ἀρτιοπερισσοῦ· καὶ τὸ μὲν  
 ἀντιπαίεσθαι τὰ τῶν μερῶν δυόματα ὑπὸ τῶν δυνά-  
 μεων κοινωνεῖ τῷ δευτέρῳ, τὸ δὲ ἄμα καὶ διμωνυμεῖν  
 οὐκ ἀπήλλακται τοῦ προτέρου, ἀπό τε τοῦ μείζονος  
 ἄκρου δτι πλεονάκις ἡ ἀπαξ διχοτομεῖται προστρέχει

τῷ μέχρι μονάδος αὐτῷ, ἀφιστάμενος τοῦ ἅπαξ μόνον διχαῖομένου· πρὸς δὲ τῷ ἐλάττονι καὶ ἄλλα διαλυτὰ ἔχων ἀφίσταται μὲν τούτου τέως, προσεχῆς δὲ τῷ ἐναντίῳ γίνεται. καὶ ἡ γένεσις δ' αὐτοῦ ἐξ ἀμφοῖν μικτῇ. τοὺς μὲν γὰρ τοῦ ἀρτιοπερίσσου γνώμονας ἐκ- 5 θέσθαι δεῖ πάντας ἐξῆς ἀπὸ τριάδος, τοὺς δὲ ἀρτιάκις ἀρτίους αὐτοὺς ἐπὶ ἑαυτῶν καὶ γνώμονες ἀπὸ τετράδος τάξει, καὶ διποτερωθενοῦν, ἀδιάφορον γάρ, τῷ πρώτῳ τὴν προτέραν ἔκθεσιν καθ' ἔκαστον ἐξ ἀρχῆς μηκυν- 10 τέον μέχρι τις θέλει, εἶτα τῷ δευτέρῳ πάλιν τοὺς αὐ- τοὺς καὶ μετὰ ταῦτα τῷ τρίτῳ, εἶτα πάλιν τῷ τετάρτῳ, καὶ ἐπ' ἄπειρον. ἐὰν μὲν γὰρ τοῖς τοῦ ἅπαξ διαιρε- τοῦ γνώμοσιν οἱ τοῦ ἑτέρου πολυπλασιασθῶσι, γενή- 15 σονται πρῶτον μὲν δγδοάδι ἀλλήλων διαφέροντες, διπλάσιοι ἀρτιοι περισσῶν, ἐπίπλαστος περισσάρτιοι εὔτακτοι εὐτάκτων. εἶτ' ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς οἱ αὐτῶν τούτων διπλάσιοι τῶν ἐξ ἀρχῆς τετραπλάσιοι, τετραπλα- σίᾳ πρὸς ἐκείνους χρώμενοι διαφορᾷ, πρὸς δὲ τοὺς 34 πρὸ | αὐτῶν ἀναγκαίως διπλασίᾳ, καὶ τοῦτο δι' ὅλου ἀναλόγως καὶ τοῦ μήκους ὑποφαινομένου. ἐὰν δὲ ἔμ- 20 παλιν τοῖς τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου οἱ τοῦ ἀρτιοπερίσσου, τὰ μὲν αὐτὰ συμβήσεται, μεταστήσεται δὲ εἰς ἄλληλα τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, ὡς ἐν ἀμοιβῇ. ἵνα μέντοι προδηλώτερον ἡγνοηκὼς ὁ Εὐκλείδης ταῦτα φανῆ, παρα-

τηρητέον καὶ κατὰ τὰς ἐπὶ πλέον ἐκθέσεις ἐν τε μήκει  
καὶ πλάτει τὰ ἀμφοτέροις ἐκείνοις συμβεβηκότα ἡμα  
τούτῳ ὑπάρχοντα μόνῳ ὡς ἀν μίγματι αὐτῶν· τῇ γὰρ  
γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ χρήσεται ὡς ὁ ἀρτιάκις ἀρτιος  
5 τὸ ὑπὸ ποιῶν τῶν ἄκρων ἵσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἦ  
ὑπὸ τῶν μέσων παρὰ τὴν τῆς ἐκθέσεως ποσότητα, τῇ  
δὲ ἀριθμητικῇ ἵσα συναμφότερα τὰ περιέχοντα τὸ μέσον  
ἢ τὰ μέσα ἀποτελῶν, ἢ δἰς τῷ ἐνὶ ἢ ἅπαξ τοῖς δυσίν.  
οὕτως ἐν ἅπασι κοινῶς ἀμφοῖν καὶ ὥσανεὶ ἔκγονος  
10 οὗτος δείκνυνται, ἀντικειμένων ἀλλήλοις τῶν προελθόν-  
των τοῦ ἀρτίου εἰδῶν, οὐ πάντῃ διαφέρων ἐκατέροιν  
οὔτε πάντῃ ὁ αὐτὸς ὥν. εὐθυντέον δὴ τὸν Εὐκλείδου  
ὅρους | καὶ λεκτέον ὅτι ὁ μόνον ὑπ' ἀρτίου περισσάκις 35  
ἀρτιοπέρισσος, δ' οὐδέποτε μόνον θάτερον ἀλλ' ἀμ-  
φότερα ἐξ ἀνάγκης ἀεὶ ἔχων ὅπερ οὐδέτερος ἐκείνων  
〈περισσάρτιος, ἀμφότεροι δὲ ἡμα κρᾶμα εὐλόγως ἀμ-  
φοτέρων τῇ τοῦ λοιποῦ μετοχῇ τοῦ ἐτέρου ἀφιστάμενοι.

Τοῦ δὲ περισσοῦ ἀριθμοῦ πάλιν καθ' ὑποδιαιρεσιν  
τὸ μέν ἐστι πρῶτον καὶ ἀσύνθετον τὸ δὲ δεύτερον 36  
20 καὶ σύνθετον, καὶ ἄλλως τὸ μὲν καθ' αὐτὸ πρῶτον,  
δ' δὴ καὶ εὐθὺς πρὸς ἄλλο πρῶτον καὶ ἀσύνθετόν  
ἐστι, τὸ δὲ καθ' αὐτὸ δεύτερον, δ' οὐκ ἀνάγκη καὶ  
πρὸς ἄλλο εἶναι δεύτερον, ἀλλ' αὐτοῦ τούτου τὸ μὲν  
πρὸς ἄλλο πρῶτον, τὸ δὲ καὶ πρὸς ἄλλο ἐσται δεύτε-  
ρον καὶ σύνθετον. πρῶτος μὲν οὖν καὶ ἀσύνθετος  
ἀριθμός ἐστι περισσὸς ὃς ὑπὸ μόνης μονάδος πλη-

ρούντως μετρεῖται, οὐκέτι δὲ καὶ ὑπ' ἄλλου τινὸς μέρους καὶ ἐπὶ μίᾳν δὲ διάστασιν προβήσεται ὁ τοιοῦτος. διὰ τοῦτο δὲ αὐτὸν καὶ εὐθυμετρικόν τινες καλοῦσι, Θυμαρίδας δὲ καὶ εὐθυγραμμικόν· ἀπλατῆς γὰρ ἐν τῇ ἐκθέσει ἐφ' ἐν μόνον διατάμενος. ἵδιον δ' αὐτοῦ τὸ 5 μὴ ἔχειν μέρος ὅτι μὴ μόνον τὸ παρώνυμον αὐτῷ, οὗ μέγεθος ἔξ ἀνάγκης μονάς. πρῶτος δὲ καλεῖται οὐ μόνον ὅτι μέτρον αὐτοῦ μονὰς μόνη ἄλλος δὲ οὐδεὶς ἀριθμός (πρωτίστη δὲ καὶ στοιχεῖον ἀριθμοῦ ἡ μονάς), ἀλλὰ καὶ ὅτι οὐδεὶς πρὸ αὐτοῦ δύναται ἀριθ- 10 37 μὸς θεωρηθῆναι, μονάδων | γε ὃν σύστημα, οὗ αὐτὸς ἔσται πολυπλάσιος, ἀλλὰ πρῶτον δῆλον ὅτι ἐαυτὸν παρέξει εἰς τὸ ἄλλους τινὰς αὐτοῦ πολυπλασίους γενέσθαι· ἀσύνθετος δὲ ὅτι οὐκ ἀν λυθείη εἰς ἀριθμοὺς ἀλλήλοις ἰσους, ἔξ οὗ δῆλον ὅτι οὐδὲ συνετέθη ἐκ τοιούτων. 15

Δεύτερος δὲ καὶ σύνθετος ὁ τάναντία τῷ λεχθέντι ἔχων μέρος τε παρὲξ τοῦ παρωνύμου ἢ ἐν ἣ πλέονα, μέτρον τε παρὰ τὴν μονάδα τὸν αὐτὸν τρόπον ἢ ἐν ἣ πλέονα. ὁ δὲ τοιοῦτος πρὸς τῷ γραμμικῷ εὐθυμετρεῖσθαι ἔτι καὶ ἐπιπεδωθήσεται ἵτοι γε τετραγωνικῶς 20 ἐὰν ἐν ἔχῃ μέρος παρὲξ τοῦ παρωνύμου, ἢ παραλληλογράμμως ἐὰν ἐκ παντὸς δύο ἀνθυπακούοντα ἀλλήλοις ἔχῃ μέρη παρὰ τὴν τῶν πλευρῶν διαφοράν. πλείονα δ' ἀν ἐπ' ἀμφοτέρων εὑρεθείη πολυπλασίου, περισσάκις γενομένης τῆς ἐκθέσεως ἐως τῶν ἔξ ἀρχῆς. 25

καλεῖται δὲ δεύτερος μὲν ὅτι καὶ δευτέρῳ τινὶ μέτρῳ  
ἢ καὶ πλείσι παρὰ τὴν μονάδα χρᾶται, καὶ ἐν πολυ-  
πλασίοις οὐδέποτε πρῶτος ἀλλὰ μετὰ πρῶτον ἢ πρώ-  
τους ἀνάλογον τάσσεται· σύνθετος δὲ ὅτι καὶ εἰς ἀριθ-  
μοὺς ἵσους οἶός τέ ἐστι λύεσθαι, ἐξ οὗ φανερὸν ὅτι 38  
καὶ συνετέθη ἐκ τοιούτων.

Ἄπ' ἄλλης δὲ ἀρχῆς τοῦ δευτέρου εἴδους τὸ μὲν  
καὶ καθ' ἑαυτὸν καὶ πρὸς ἄλλο δεύτερον καὶ σύν-  
θετόν ἐστι ὡς θ' πρὸς ιε' ἢ κα', τὸ δὲ καθ' ἑαυτὸν  
μὲν δεύτερον πρὸς δὲ ἄλλο πρῶτον ὡς τὰ θ' πρὸς  
τὰ κε' ἢ λε'. ἐτέροις μὲν γὰρ καθ' ἑαυτοὺς οὗτοι μέτροις  
ἄνευ τῆς μονάδος χρῶνται, πρὸς δὲ ἄλλήλους μόνη ταύτῃ.  
παραιτητέοι δὲ οἱ λέγοντες ἀνάπαλιν εἶναι τινα καθ'  
ἑαυτὸν πρῶτον καὶ ἀσύνθετον πρὸς δὲ ἄλλον δεύτερον  
καὶ σύνθετον· ἐξαπατῶνται γὰρ τὸ μέτρον αὐτὸν τῷ  
μετρουμένῳ συγκρίνοντες, καὶ οὐχ δρῶσιν ὅτι κοινὸν  
δεῖ μέτρον ἄλλο παρὰ τὴν μονάδα καὶ παρ' ἀμφοτέ-  
ρους ἔχειν. εἰ τινι συμβήσεται πρὸς ἄλλον, οὗτος καὶ  
καθ' ἑαυτὸν ὃν δεύτερος ἐσται καὶ πρὸς ἄλλον δεύ-  
τερος. δυνατὸν δὲ ἐκ τῶν ἐναντίων καθ' ἑαυτὸν  
ἔχοντα δευτέρως πρὸς ἄλλον μὴ ἔχειν. ἐὰν δύο τυ-  
χόντες περισσοὶ προβληθῶσιν εἰς διάγνωσιν τοῦ πό-  
τερον πρῶτοι πρὸς ἄλλήλους ἢ δεύτεροι εἰσι, καὶ εἰ  
δεύτεροι τί κοινὸν αὐτῶν μέτρον, ἀνθυφελοῦμεν ἀεὶ  
τὸν ἐλάττονα | ἀπὸ τοῦ μείζονος δσάκις δυνατὸν καὶ 39  
τὸ λεῖπον ἀπὸ τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐλάσσονος καὶ δμοίως  
ἀεί, μέχρις ἂν ἥτοι εἰς μονάδα ἡ κατάληξις γένηται ἢ

εἰς τινα ἄλλον ἀριθμόν, ἀφ' οὗ οὐκέτ' ἀφαιρεῖν οἶόν τε, καὶ οὗτος κοινὸν ἀν εἴη μέτρον τῶν ἐξ ἀρχῆς, οἵπερ δεύτεροι πρὸς ἄλληλους λεχθήσονται, ώστε καὶ λε'. κοινὸν γὰρ αὐτῶν μέτρον η̄ πεντάς. η̄ δὲ μονὰς πρώτους αὐτοὺς πρὸς ἄλληλους καὶ ἀσυνθέτους ἀπο- 5 φαίνει, ὅταν εἰς αὐτὴν η̄ κατάληξις γίνηται· τοιούτων γὰρ κοινὸν μέτρον αὕτη μόνη.

"Ινα δὲ τάξει πάντας ήμεῖς τοὺς δευτέρους καὶ συνθέτους καθ' ἑαυτούς τε καὶ πρὸς ἄλληλους εἰδῶμεν γεννᾶν, καὶ μέτρα αὐτῶν καὶ τὰ ἀντιπαρονομαζόμενα 10 μέρη ὅσα ἀν η̄, ἔφοδον τοιαύτην τιν' ἴστεον, η̄τις ὁσανεὶ κόσκινον τοὺς μὲν τοιούτους ἐντὸς τοῦ λόγου καθέξει, τοὺς δὲ λοιποὺς, δηλονότι πρώτους καὶ ἀσυνθέτους, ὥσπερ ἐκβόλους ἀποχωρίσει. στοιχηδὸν εὐτάκτους τοὺς ἀπὸ τριάδος περισσοὺς ἔφεξῆς ώστε 15 μάλιστα ἐπὶ μήκιστον ἐκθοῦ, καὶ τῷ πρώτῳ πειρώμενος μετρεῖν πληρούντως τῶν ἔφεξῆς δυνήσῃ τοὺς 40 δύο μέσους παραλιπόντας ἐπ' ἄπειρον, τῷ δὲ δευτέρῳ τοὺς τέσσαρας μέσους διαλείποντας, τῷ δὲ τρίτῳ τοὺς ἐξ καὶ τετάρτῳ τοὺς δκτὸς καὶ ἀπλῶς ἐκάστῳ τοὺς δι- 20 πλασίους τῆς ἑαυτοῦ τάξεως διαλείποντας. ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἐκαστος κατὰ τὸ ἑαυτοῦ ὄνομα τοὺς παρωνύμως ἀφεστῶτας μετρήσει, ώστε δὲ γέρας 25 μέγεθος τοῦ τρίτου ἀκολούθως. ἀλλ' δὲ μὲν πρώτος κατά τὸ ἑαυτοῦ μέγεθος τρὶς τὸν μετ' αὐτὸν πρώτως μετρούμενον μετρήσει, τὸν δὲ μετ' ἐκεῖνον πεντάκις κατὰ τὸ τοῦ ἐξῆς μέγεθος, τὸν δὲ ἐκείνῳ ἔφεξῆς κατὰ τὸ τοῦ τρίτου, καὶ τοῦτο δι' ὅλου παραπλησίως.

δ δὲ δεύτερος μεταλαβὼν τὸ τοιοῦτον τὸν μὲν ἀπ' αὐτοῦ πέμπτον τῷ τοῦ ἐμπροσθεν μέγεθει, τὸν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἐκείνου πάλιν πέμπτον τῷ ἑαυτοῦ, τὸν δὲ ἐφεξῆς πάλιν πέμπτον τῷ τοῦ μετ' αὐτὸν καὶ τοῦτο μέχρι 5 παντός, τὸ δ' ὅμοιον καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. καὶ ἡ τοῦ δυνάμει δὲ περισσοῦ ἔννοια, τουτέστι μονάδος, κἀνταῦθα παραφανήσεται, δπόταν ἔκαστος τῶν ἐκκειμένων παραλαβὼν τὸ μετρεῖν καὶ ἑαυτὸν πολυπλασιάζων τετράγωνον ποιῆ, ως ἀπὸ τοῦ τρὶς τρία ὁ θ'. ἐν δὲ 10 τοῖς τοιούτοις ἡ ταυτότης, ἥπερ ἐστὶ παρὰ τὴν μονάδα 41 ως ἀπαξ θ', ἡ δ' ἑτερότης ἐπεὶ παρὰ τὴν δυάδα ἐστὶν εὐλόγως καὶ οἱ ἀπὸ διαφόρων ἀριθμῶν ἀλλήλους πολυπλασιασάντων γενόμενοι διαφόρους καὶ τὰς πλευρὰς ἔχουσιν ἀντιφωνούσας κατὰ τὰ τῶν γνωμόνων μεγέθη, 15 καὶ δ τοιοῦτος προμήκης κεκλήσεται. τοῦ σαφοῦς δὲ ἔνεκα τὸ μὲν ποσάκις μετρεῖν αὐτοῖς κατὰ τὴν τῶν ἀπὸ τριάδος ἐπ' ἄπειρον περισσῶν ἔκθεσιν φανήσεται, τὸ δὲ πόσους διαλείποντας κατὰ τὴν τῶν ἀπὸ δυάδος ἀρτίων (σύμβολον καὶ τοῦτο τῆς τῶν δύο εἰδῶν τοῦ ἀριθμοῦ ἀιδιότητός τε καὶ φιλαλληλίας, εἰ καὶ ἐναντία δοκεῖ καθάπερ δεξιὰ ἀριστερῷ καὶ δμοίως συλληπτικὰ ἀλλήλοις) ἢ νὴ Δία κατὰ τὴν <τῆς> χώρας ἐκάστου διπλασίασιν, καθ' ἣν δ μετρῶν τέτακται. οἱ μὲν οὖν ὑπὸ τῶν μετρήσεων τούτων σημανθέντες δεύτεροι 20 δηλούντι καὶ σύνθετοι, κοινὸν δ' αὐτῶν μέτρον τὸ 42 ἐπελθὸν αὐτοῖς· οἱ δὲ παραλειπόμενοι ὕσπερ τὰ διὰ κοσκίνου ἐκβολα πρῶτοι καὶ ἀσύνθετοι. κἀνταῦθα δὲ δ Εὐκλείδης προδηλότατον ἀμάρτημα πάσχει τὴν δυάδα

τῶν πρώτων καὶ ἀσυνθέτων ολόμενος εἶναι, ἐπεὶ μονάδι μόνη μέτρῳ χρῆται, ἐκλελησμένος δτι ἡ μὲν τοῦ ἀρτίου εἶδοντος ἔστιν, δτι μέντοι περισσοειδῆς ἵνα δυνάμει τοὺς λόγους τῶν ὁμογενῶν ἀρτιάκις ἀρτίων καὶ ἀρτιοπερίσσων τρόπῳ σπερματικῷ, καθάπερ ἡ μονάδ<sup>5</sup> ἀπάντων ἀπλῶς· οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἀσύνθετοι καθ' ὑποδιαιρέσιν τοῦ περισσοῦ εἶδοντο μόνου ὕφεσταν, ἀλλ' οὐ καὶ τοῦ ἀρτίου. ἔτερον γοῦν ἄρτιον οὐκ ἀν δύναιτο προχειρίσαι οὐδὲ ἐπιταθεῖς, οὗτοι φύσει τοῦ τοιούτου ἀπηλλάχθαι θάτερον τοῦ ἀριθμοῦ εἶδος, ὥστε<sup>10</sup> περ καὶ τὸ λοιπὸν τῶν αὐτοῦ ὑποδιαιρέσεων ἀρτιάκις ἀρτίου τε καὶ ἀρτιοπερίσσου καὶ περισσαρτίου. ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ δυάς ὡς ἀν στοιχειώδης οὖσα καὶ σπερματικὴ οὐ μετέχει τραυνῶς τῶν ὑποδιαιρέσεων τούτων καίτοι τούτου τοῦ γένους ἄρχουσα αὐτοῖς, καθάπερ<sup>15</sup> 43 ἀμέλει καὶ ἐπὶ ἄλλων αἱ ἀρχαὶ πολλῶν οὐ μετέχουσιν ὃν ἔξ ἀνάγκης τοῖς συγκρίμασι μέτεστιν, ὕσπερ σημείῳ τὰ γραμμῇ συμβεβηκότα οὐκ ἐνθεωρεῖται καὶ τὰ διαστήματι φθόγγῳ καὶ τὰ ἀναλογίᾳ λόγῳ καὶ τὰ σωματικὰ ὕλῃ καὶ εἶδει καὶ τὰ πολλῶν ἐτέρων συστημάτων<sup>20</sup> φαρμάκων τε καὶ μιγμάτων ἐκάστων προέχει στοιχείων.

Πάλιν δὲ ἔξ ὑπαρχῆς τοῦ ἀρτίου ἀριθμοῦ καθ' ἑαυτὸν καὶ παντάπασιν ἀπηλλαγμένου τῆς πρὸς τὸν περισσὸν κάνταῦθα ἐπιπλοκῆς τὸ μέν ἔστιν ὑπερτελὲς τὸ δὲ ἐλλιπὲς ἐναντία ἀλλήλοις, κοινὸν δ'<sup>25</sup>

αὐτῶν καὶ οἶονεὶ μεσότης τὸ λεγόμενον τέλειον διαφέρον κατά τι ἀμφοῖν καὶ πάλιν ἀμφοῖν κατά τι μετέχον. ὑπερτελὲς μὲν οὖν ἔστιν ὅταν ἄρτιος ἀριθμὸς πάντα τὰ αὐτοῦ μέρη συντεθέντα πλείονα ἀποδίδωσιν αὐτοῦ καὶ ὑπερπαίοντα τῇ ποσότητι· διὰ τοῦτο γὰρ καὶ οὕτως ὡνόμασται, ὡς πλημμελής τις ὃν καὶ πλεομελής καὶ πλεονέκτης, τεταγμένος ἐν τῷ οἶον ἀδικεῖν καὶ πλέον τι τοῦ ἐπιβάλλοντος αὐτῷ ἔχειν, ὡς εἴ τινι πλέονες δάκτυλοι ἐν μιᾷ χειρὶ ἢ ἐν ποδὶ εἶεν. ἐλλιπὲς | δὲ ὅταν δμοίως ἄρτιος ἀριθμὸς 44 τοῖς ἑαυτοῦ πᾶσι μέρεσι συντεθεὶς συγκρινόμενος μείζων φαίνηται, τὰ δὲ μέρη ἐλάττονα ἑαυτοῦ ποιῆι, διὸ καὶ οὕτως ὡνόμασται, ἔστερημένος μερῶν τῶν εἰς συμπλήρωσιν αὐτοῦ προσηκόντων ὥσανεὶ πλεονεκτού-15 μενός τις ἐν τῷ ἀδικεῖσθαι καὶ μὴ ἀπειληφέναι τὰ ἴδια, ὡς εἴ τις ἄγλωσσος εἴη ἢ μονόχειρ. ὑπόδειγμα τοῦ μὲν προτέρου ὅ τε *ιβ'* καὶ οἱ τούτου ἐπ' ἄπειρον πολυπλάσιοι καὶ διηγήσανται τοιοῦτοι, τοῦ δὲ δευτέρου ὅ τε *η'* καὶ διηγήσανται τοιοῦτοι, τοῦ δὲ δευτέρου ὅ τε *η'* καὶ διηγήσανται τοιοῦτοι.

20     Τέλειον δέ ἔστιν ὁ τούτων μέσον θεωρεῖται καὶ οὕτε πλέονα ὡς τὸ ὑπερτελὲς οὕτε ἐλασσονα ὡς τὸ ἐλλιπὲς τὰ μέρη ἑαυτοῦ συντεθέντα ἔχει, ἀλλὰ τὰ ἀνὰ μέσον τοῦ τε μείζονος καὶ τοῦ ἐλασσονος, διπερ ἔστιν ἴσα, ὡς ἀν δικαιότητί τινι καὶ τῶν ἴδιων καὶ προσηκόντων ἀπολήψει. συνάδει δὲ τὰ τοιαῦτα παραδείγ-

ματα τῷ τὰς ἀρετὰς δρᾶς νομίζεσθαι μετριότητάς τινας καὶ μεσότητας ὑπερβολῆς καὶ ἐλλείψεως, ἀλλ' οὐκ ἀκρότητας, ὡς τινες ὑπέλαβον εἶναι, καὶ ἀντικεῖσθαι μὲν κακὸν κακῶ, συναμφότερα δ' ἐνὶ ἀγαθῷ, ἀγαθὸν δὲ ἀγαθῷ μηκέτι, ἀλλὰ δυσὶν ἄμα κακοῖς, 5  
 45 ὥσπερ δειλίαν θρασύτητι ὃν κοινὸν ἀνανδρίᾳ συναμφότερα δὲ ἀνδρείᾳ, καὶ πανουργίαν ἡλιθιότητι ὃν κοινὸν ἀφροσύνῃ συναμφότερα δὲ φρονήσει, καὶ ἀσωτίαν φιλαργυρίᾳ ὃν κοινὸν ἀνελευθερίᾳ συναμφότερα δὲ ἐλευθεριότητι, καὶ κατάπληξιν ἀναισχυντίᾳ ὃν κοινὸν 10  
 ἀναιδειᾳ συναμφότερα δὲ αἰδοῖ, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἀρετῶν τε καὶ ἀστείων ἔξεων τὸ ἀνάλογον τηροῦσιν ἡμῖν ἀναφανήσεται, καθάπερ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ ἀνίσου σχέσεως δειχθήσεται μειζονότης ἐλαττονότητι ὃν κοινὸν ἀνισότης <συναμφότερα δὲ> τῇ ἴσοτητι. τοῦ δὴ οὗν 15  
 τελείου διὰ τὸ τοιοῦτον ἡ σπανιότης, ὥσπερ ἀγαθοῦ τινος καὶ οὐχὶ πολύχον δύντος κακοῦ, ἐνα μὲν ἐν μονάσιν ἡμῖν μόνον, τουτέστιν ἐντὸς δεκάδος, ἐνα δὲ μόνον ἐν δεκάσι, τουτέστι πρὸ τοῦ εἰς\*\*\* ἑκατοντάσιν,  
 46 καὶ ἐνα μόνον ἐν χιλιάσι παρέξει φυσικῷ νόμῳ. καὶ 20  
 εἰ τύχοι ἐν πρώτῳ βαθμῷ μυριάδων δμοίως μόνον ἐνα, καὶ ἐν δευτέρῳ πάλιν ἐνα, καὶ τὸ τοιοῦτον ἐπ' ἄπειρον. ὑπόδειγμα δὲ τούτου δ σ' καὶ δ κη' <καὶ δ>  
 υἱς' καὶ δ ηρη' καὶ οἱ δμοίοι παρὰ μέρος εἰς ἔξαδα καὶ δγδοάδα καταλήγοντες. γενέσεως δὲ ἔφοδος καὶ 25  
 αὕτη συστατικὴ τῆς φιλαλληλίας τῶν τοῦ ἀριθμοῦ εἰδῶν καὶ μετὰ συμπνοίας ἀιδιότητος. τοὺς γὰρ ἀπὸ

μονάδος ἀνάλογον διπλασίους, ὅπερ ἐστὶν ἀρτιάκις ἀρτίους, ἐπισωρεύειν δεῖ καθ' ἓνα ἔκαστον ἀεὶ καὶ κατὰ ἔκαστον ἀριθμοῦ σωρείαν ἐπισκοπεῖν. εἰ πρῶτος καὶ ἀσύνθετος ἐκ τῆς ἐπισωρείας γένοιτο, πολυπλασιάσω-  
 5 μεν τὸν γενόμενον τῷ ἐν τῇ συνθέσει ὑστάτῳ ληφ-  
 θέντι· ὁ γὰρ ἀποτελεσθεὶς τέλειος ἐκ παντὸς ἔσται·  
 εἰ δὲ δεύτερος καὶ σύνθετος, παραλείπωμεν αὐτόν,  
 ἄλλον δὲ τὸν ἔξῆς ἀνάλογον ἐπισωρεύσωμεν, εἰ πρῶ-  
 τος καὶ ἀσύνθετος ὁ γενόμενος· ἐὰν γὰρ τῷ προσεπι-  
 10 σωρευθέντι πολυπλασιαστέον αὐτόν, καὶ οὕτως ὁ τῇ  
 τάξει συνεχῆς τέλειος ἀναφανήσεται. καὶ οὕτως μέχρι  
 παντός. διὰ μὲν οὖν τῆς τῶν ἀρτιάκις ἀρτίων συν- 47  
 θέσεως ἡ τοῦ ἀρτίου φύσις, διὰ δὲ τῆς ἔξ αὐτῶν πε-  
 ρισσογονίας, μάλιστα δὲ τῶν πρώτων καὶ ἀσυνθέτων  
 15 ἀποτελέσεως, ἡ τοῦ περισσοῦ παρεμφαίνεται. οὐ χρὴ  
 δὲ ξενίζεσθαι εἰ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ποικίλα τινὰ ἐπι-  
 κατηγορεῖται, οἷον φέρ’ εἰπεῖν αὐτῷ τούτῳ τῷ σ’ τὸ  
 τέλειον εἶναι αὐτὸν καὶ τὸ πρῶτον ἀρτιοπέρισσον καὶ  
 πάλιν πρῶτον ἐτερομήκη καὶ πρὸς τῶν Πυθαγορικῶν  
 20 ἔτι γάμον καλεῖσθαι, ὅτι κατ’ αὐτὸν πρώτιστον σύνο-  
 δος ἄρσενος καὶ θήλεος ἐκ κατακράσεως γίνεται· καὶ  
 γὰρ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγίειαν τὸν αὐτὸν καλοῦσι καὶ  
 ἔτι κάλλος διὰ τὴν ἐν αὐτῷ τῶν μερῶν διοκληρίαν  
 καὶ συμμετρίαν. παρακηρόσι δὲ οἱ καὶ φιλίαν τὸν  
 25 αὐτὸν νομίζοντες αὐτοὺς λέγειν διὰ τὴν τῶν διαφε-  
 ρόντων σύνοδον ἐν αὐτῷ καὶ φίλωσιν· ἄλλους γάρ

τινας ἄντικρους φίλους ἀριθμοὺς καλοῦσιν ἐν τῷ προσοικειοῦν τάς τε ἀρετὰς καὶ τὰς ἀστείας ἔξεις τοῖς ἀριθμοῖς, οἷον τὸν σπδ' καὶ τὸν σκ'. γεννητικὰ γὰρ ἀλλήλων τὰ ἑκατέρου αὐτῶν μέρη κατὰ τὸν τῆς φιλίας λόγον, ώς Πυθαγόρας ἀπεφήνατο· ἐρομένου γάρ τινος 5 'τί ἐστι φίλος' εἶπεν· 'ἔτερος ἐγώ', — ὅπερ ἐπὶ τούτων τῶν ἀριθμῶν δείκνυται. ἀλλ' ἐπεὶ κατ' οἰκεῖον τόπον διελοῦμεν τὰ ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων εἰς τὴν τοιαύτην θεωρίαν πάνυ ἀνθηροτάτην καὶ γλαφυρὰν οὖσαν ἀναφερόμενα, χωρητέον ἐπὶ τὰ ἔξης. 10

'Ακόλουθον γὰρ τούτοις διαλαβεῖν περὶ τοῦ μηκέτι καθ' αὐτὸ ἀλλ' ἥδη πρός τι ποσοῦ, οὐκ ἐπειδὴ πᾶσα ἡ περὶ τοῦ καθ' αὐτὸ τεχνολογία πέρας ἔχει (πῶς γὰρ ὅπου μήτε περὶ ἐπιπέδων παμποικίλων ὄντων μήτε περὶ στερεῶν διειλάμεθα;), ἀλλ' ὅτι μάλιστα εἰς τὴν 15 ἔκείνων παρακολούθησιν συνεργοῦσιν οὗτοι. καὶ γὰρ οὐδὲ τὸν περὶ τούτων συνεχῶς ἔχοντες ἀπαρτιοῦμεν λόγον, ἀλλὰ στοχαζόμενοι τῆς τοῦ εἰσαγομένου διὰ τὴν τάξιν εὔμαρείας τὸ πλέον αὐτοὺς μετ' ἔκείνους ποιησόμεθα, ὑπερθέντες ἢ παρὰ μέρος τὴν περὶ ἀνα- 20 λογιῶν ἔξήγησιν. ὅπερ οὖν πρὸ βραχέος συντείνειν ἐφαίνετο πρὸς τὸν περὶ ἀρετῶν λόγον ἐν τῷ τῶν τελείων καὶ ἐναντίων διορισμῷ, τοῦτ' εὐθὺς ἐν ἀρχῇ 49 τοῦ πρός τι ποσοῦ πάλιν ἡμῖν συνεμφαίνεται. τῶν γὰρ πρὸς ἄλλο πως θεωρουμένων ἀριθμῶν αἱ γενι- 25 κώταται δύο σχέσεις εἰσὶν ἴσότης τε καὶ ἀνισότης, καὶ ἡ μὲν ἴσότης ὥσπερ μετριότης τις καὶ μεσότης

ἄσχετός ἐστιν οὕτ' ἄνεσιν οὕτ' ἐπίτασιν ἐπιδεχομένη,  
 ἡ δὲ ἀνισότης κατὰ πρώτην τομὴν εἰς δύο σχίζεται  
 εἰς τε τὸ μεῖζον καὶ τὸ ἔλαττον, ὥσπερ κάπι τῶν ἀρε-  
 τῶν τὸ ἀντίθετον εἰς ὑπερβολὴν καὶ ἔλλειψιν ἀντι-  
 5 διεστέλλοντο ἡ κακία. ἀντίκειται δὲ τὸ μεῖζον τῷ  
 ἔλαττον καὶ συναμφότερα ἂμα τῷ ἵσῳ, οὕτε δὲ ἵσον  
 ἃν τι εἴη ἄνευ τοῦ τινί, οὕτε μεῖζον ἢ ἔλαττον ἄνευ  
 τινός, διόπερ εἰκότως πρός τι. ἀλλὰ τῷ μὲν ἵσον  
 ἀνθυπακούει τὸ αὐτὸ δύνομα ὡς ἀν μεσότητι, δῆπερ καὶ  
 10 ἐπ' ἄλλων τινῶν τοῦ πρός τι ὑποδειγμάτων δείκνυ-  
 ται ἐπί τε τοῦ ἀδελφὸς καὶ συστρατιώτης καὶ γείτων  
 καὶ ἥλιξ καὶ ἄλλων δμοίων· τῷ δὲ ἀνίσῳ κατὰ μὲν  
 τὸ γενικὸν παραπλήσιόν τι συμβέβηκε κατὰ δὲ τὰ εἶδη  
 οὐκέτι, ἀλλ' ἐτερώνυμος ἡ ἀνταπόκρισις γίνεται, καθά-  
 15 περ ἐπ' ἄλλων, οἷον πατὴρ καὶ διδάσκαλος καὶ ἐρώ-  
 μενος καὶ τῶν δμοίων. ἵσον μὲν | οὗν ἐστι ποσὸν ὁ 50  
 ἀντεξεταξόμενον τῷ συζύγῳ οὕτε πλέον οὕτε ἔλαττόν  
 τι ἔχει, ἄνισον δὲ ὁ καὶ αὐτὸ ἀντεξεταξόμενον τῷ  
 20 συζύγῳ ἢ μεῖζον ἐστι ἢ ἔλαττον· ἐν γὰρ τῇ συζυγίᾳ  
 τὸ μέτρον πλέον τι μετὰ τὴν μίαν μέτρησιν ἐν τῷ  
 μετρουμένῳ καταλείψει. καὶ μεῖζον μέν ἐστιν ὁ πέ-  
 φυκε μετρούμενον ὑπὸ θατέρου μετὰ μίαν προσβολὴν  
 ἀκαταμέτρητον αὐτοῦ τι ἀπολιπεῖν δποσονοῦν, ἔλαττον  
 δὲ μετρητικὸν ὃν τοῦ συζύγου, μιᾶ προσβολῇ περι-

σχεῖν ὅλον οὐ δύναται. καθ' ὑποδιαιρεσιν δὲ τὰ δύο ταῦτα τοῦ ἀνίσου εἴδη ἀνὰ πέντε σχέσεις ἀποτελεῖ, συναμφότερα δὲ δυοῦ δέκα· τοῦ τε γὰρ μείζονος τὸ μέν ἔστι πολλαπλάσιον τὸ δὲ ἐπιμόριον τὸ δὲ ἐπιμερές, δύο δὲ τὰ λοιπά, μιγέντος τοῦ πολλαπλασίου πρὸς 5 ἑκάτερον τῶν λοιπῶν, πολλαπλασιεπιμόριον καὶ πολλαπλασιεπιμερές· τοῦ δὲ ἐλάττονος κατὰ ἀντιπεπόνθησιν μετὰ τῆς ὑπό προθέσεως τὸ μέν ἔστιν ὑποπολλαπλάσιον τὸ δὲ ὑποεπιμόριον τὸ δὲ ὑποεπιμερές, δύο δὲ τὰ λοιπά, καθὰ καὶ ἐπὶ τοῦ προτέρου 10 εἰδοντος μικτὰ ἔκ τε τοῦ πολλαπλασίου καὶ ἑκατέρου τῶν λοιπῶν, ὑποπολλαπλασιεπιμόριόν τε καὶ ὑποπολλαπλασιεπιμερές. ἐφοδιάζει δὲ ἡμᾶς ἡ πρόθεσις ἐν 51 τοῖς δυνόμαισι προλόγους μὲν ὡς | ἀν φύσει καὶ τιμιότητι πρώτους, καθάπερ δειχθήσεται, τοὺς προτέρους εἰδέναι, 15 ὑπολόγους δὲ καὶ τὰ ἐναντία ἔχοντας τοὺς δευτέρους τοὺς δυομένους. εἰ δέ τις λέγοι τὴν ἴσοτητα σχέσιν μὴ εἶναι διὰ τὸ τοὺς κατ' αὐτὴν δρους ἀδιαστάτους καὶ ἀδιαφόρους ὑπάρχειν, ὑπομνηστέον ὅτι σχέσις ἔτερον τι διαστήματός ἔστιν· ἵδον γὰρ ἐν τῷ τυχόντι 20 ἀνισότητος ὑποδείγματι δυεῖν δρῶν διάστημα μὲν ταῦτὸ κανὸν ἀναστρέφωνται, ἀναστρεφομένων δ' ὅμως λόγος πάντως ἔτερος, τουτέστι σχέσις, ὥστ' οὐδὲν κωλύει τοὺς ἐν ἴσοτητι δρους διαφορὰν μὲν μὴ ἔχειν ἀδιαστάτους δύντας, σχέσιν δὲ πάντως, ἢ οὐκ ἔσται τῶν 25 πρός τι τὸ ἶσον, ὅπερ ἀμήχανον.

Πολλαπλάσιον μὲν οὖν ἔστι τοῦ μείζονος τὸ πρῶτον εἴδος, ὅταν δυεῖν δρῶν δέ τοις ἔτερος τὸν ἔτερον πλεο-

νάκις ἡ ἀπαξ καταμετρῇ πληρούντως. ἄρξεται δὲ ἀπὸ τοῦ δίς, ἵνα παρὰ τοῦτο δυνομάζωνται ὁ μὲν μετρούμενος διπλάσιος δὲ μετρῶν ύποδιπλάσιός τε καὶ ἥμισυς συνωνύμως, ὥσπερ ἀμέλει καὶ αὐτὸ τὸ ύπόλοιπον γένος ύποπολλαπλάσιόν τε λέγεται συνωνύμως | καὶ ψιλῶς μέρος· ἐὰν δὲ τρίς, δὲ μὲν μείζων τριπλάσιος δὲ ἐλάττων ύποτριπλάσιός τε καὶ τρίτου καὶ τᾶλλα κατὰ τὸ ἔξῆς εἶδη. ύπόδειγμα δὲ πάντων εὐτάκτων πολυπλασίων σαφὲς ἔξομεν ἐὰν ἐκθέμενοι τὸν 52 ἀπὸ μονάδος συνεχῆ ἀριθμὸν ἥτοι πρὸς αὐτὴν τὴν μονάδα συγκρίνωμεν τοὺς μετ' αὐτὴν καθ' ἕκαστον ἔξῆς, ἡ πρὸς τὴν μετ' αὐτὴν δυάδα τοὺς μετ' ἑκείνην παρ' ἓνα καθ' ἕκαστον δυοίως ἔξῆς, πρὸς τριάδα τοὺς παρὰ δύο, ἡ πρὸς τετράδα τοὺς παρὰ τρεῖς καὶ ἐπ' 15 ἄπειρον, συμπροκοπτόντων τῇ τοῦ ἀριθμοῦ ἐφοσονοῦν ἐκθέσει. ἐὰν δὲ κατὰ παραλλήλους στίχους καταγράψωμεν ἅπαντα τὰ τοῦ πολυπλασίου εἶδη ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενα, προσεκθέμενοι τὸν ἐφεξῆς ἀριθμὸν καὶ πρὸς αὐτὸν γεννήσαντες ἐπὶ βάθος τὴν πολλαπλασιότητα, 20 ἐνοψόρεθα πολλά τε ἄλλα τερπνὰ ἐπακολουθήματα καὶ γλαφυρίαν ποικίλην καὶ εὔτακτον δὲ γένεσιν ἀντιπαρωνυμίας ἐπιμορίων παντοίων πρὸς πολλαπλασίους παντοίους καθ' δυογένειαν καὶ ἔτι ἐπιμερῶν καὶ εἰ τις ἐπισκέπτοιτο καὶ μικτῶν, καὶ ὅλοι δλων στίχοι 25 μιᾶς | καὶ ἀπαραλλάκτῳ σχέσει εὐτάκτως προκοπτούσῃ 53 δυολόγως φανήσονται ἐν τε πλάτει καὶ βάθει. ἔτι μὴν καὶ ἐπιμορίων πυθμένες μὲν ἐνὶ στίχῳ ἐπὶ βάθος εὑρεθήσονται, δεύτεροι δὲ ἀπὸ πυθμένος ἐν τῷ ἔξῆς,

τρίτοι δὲ καὶ τέταρτοι κατὰ τὴν πρὸς τούτους ἀντακολουθίαν διαφορὰς ἔχοντες τοὺς ἀπὸ μονάδος ἕξης ἀριθμούς. ἐὰν δὲ καὶ τὰς μὲν ἐπὶ πλάτος μονάδας ἀφέλωμεν, ώς ἀν μηδὲν ποικίλον ἔχούσας, τὸν δὲ συνεχῆ ἀριθμὸν ἀντ' αὐτῶν προτάξωμεν ὑπὸ τῆς αὐτῆς μονάδος, γλαφυρίαν τινὰ ἐνοψόμεθα καὶ σπερματικῶς ὑποφαινόμενον τὸν λόγον τῆς τῶν μαντικῶν πλινθιδίων ἐφόδου, ὃς ἐν τοῖς ἐπανθήμασι τῆς ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς παραδίδοται. καὶ εἰ μέχρι δεκάδος εἴη ἡ ἔκθεσις τῶν πολλαπλασίων, ἐπὶ τε μῆκος καὶ πλάτος 10 γενήσονται μονάδες ἐγγώνιοι αἱ μὲν ἄκραι ἀπαξ ἡ δὲ μέση δίς, ὅπως καὶ ἐνταῦθα ἀποσώζηται τὸ τῆς ἀναλογίας ἴδιον· ἵσον γὰρ ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ 54 ἀπὸ τοῦ μέσου, καὶ σημείου μὲν λόγον | ἔξει. ἡ ἐτέρα τῶν ἄκρων μονὰς ἡ δὲ ἐτέρα τετραγώνου ἡ δὲ μέση 15 πλευρᾶς. καὶ ὁστισοῦν τῶν ἐν τῷ διαγράμματι ληφθείη, ἥμισυς ἔσται δύο τῶν ἐκατέρωθεν αὐτοῦ ἐπὶ τε μῆκος καὶ πλάτος. διαγωνίως δὲ εἰ λαμβάνοιντο, πῇ μὲν ἔσται μονάδι ἐλάττων ἥμισυς δ μέσος, πῇ δὲ μονάδι μείζων. ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τῆς ἐν ἀρχῇ γωνίας, τούτ- 20 έστι τῆς μονάδος, εἰς τὴν ἐν τέλει ἡ διαγώνιος ἔσται μόνων τετραγώνων, ἐκάστου παρασπιζομένου ὑπὸ δύο ἐτερομηκῶν κατά τε μῆκος καὶ πλάτος, ώς κάνταῦθα σώζεσθαι τὸ καθολικὸν ἐκεῖνο τὸ ἐκ δύο συνεχῶν ἐτερομηκῶν καὶ δὶς τοῦ μέσου αὐτῶν ἀνάλογον τετρα- 25 γώνου γεννᾶσθαι πάντως τετράγωνον, καὶ ἀνάπαλιν ἐκ δύο τετραγώνων καὶ δὶς τοῦ μέσου αὐτῶν ἀνάλογον ἐτερομήκους δμοίως τετράγωνον, καὶ τῇδε μὲν περισ-

σούς, τῇδε δὲ ἀρτίους. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀρτίους φύεσθαι καὶ νῦν συμβαίνει διὰ τὸ τοὺς παρασπιζομένους τετραγώνους εἶναι μόνους παρ' ἓνα, φύσει περισσοὺς ὄντας καὶ ἀρτίους, καὶ τοὺς διορυφοροῦντας ἐτερομή- 55  
5 κεις ἀεὶ ἀρτίους, εἴτε δὲ ἄρτιος εἴη δὲ μέσος εἴτε περισσός, δὶς λαμβανόμενος ἄρτιον ποιεῖ· τὸ δὲ περισσοὺς γίνεσθαι οὐκέτι, ἐπεὶ οὐ παρασπίζονται ἐτερομήκεις ὑπὸ τετραγώνων· ἅπαξ γὰρ λαμβανομένων τῶν ἄκρων, ἐν οἷς πάντας ἔστι περισσός, διέμεινεν ἡ πε-  
10 ρισσότης. καὶ ἐφ' ἐκάστου δὲ τετραγώνου ἐφ' ἐκάτερα γαμμοειδῶς πάλιν εὔτακτοι αἱ σχέσεις θεωροῦνται ἀπ' ἀρχῆς, τουτέστιν ἀπὸ διπλασίου. εἰ δὲ καὶ τοὺς ἐτερομήκεις γαμμοειδῶς παρασπίζοιμεν τοῖς τετραγώνοις 56  
15 ἅπαξ τοὺς ἄκρους συντιθέντες καὶ δὶς τὸν μέσον, ποι-  
ήσομεν οὓς ἐλέγομεν ἐνταῦθα παραλείπεσθαι τετρα-  
γώνους περισσούς. διαφορὰν δὲ ἔξουσι πρὸς ἀλλή-  
λους οἱ διαγώνιοι ἀριθμοὶ τῇδε μὲν ἀπὸ τριάδος περισσούς ἀπ' ἀρχῆς εἰς τέλος, τῇδε δὲ ἀπὸ δυάδος ἀρτίους ἀπὸ μέσων ἐπὶ πέρατα, συζυγούντων κατ'  
20 ἰσότητα τῶν ἐκατέρωθεν εὐτάκτων.

Ἐπιμόριος δὲ γίνεται λόγος, ὅταν τῶν συγκρινομένων ὅρων δὲ μείζων ἔχῃ τὸν λοιπὸν καὶ ἔτι ἐν αὐτοῦ μόριον γενικῶς· εἰδικῶς δὲ ἐὰν μὲν ἡμισυ ἢ τὸ μόριον ἡμιδίλιος ἐὰν δὲ τρίτον ἐπίτριτος ἐὰν δὲ τέταρτον ἐπι-  
25 τέταρτος καὶ ἔξῆς ἀκολούθως ἀεί, προλόγων μὲν γιγνομένων τῶν μειζόνων ὅρων πρὸς τοὺς ἐλάττονας, ἀνά-  
παλιν δὲ ὑπολόγων τῶν ἐλαττόνων πρὸς τοὺς μείζονας,

τὴν δύνομασίαν ἴσχόντων καὶ τούτων ἀεὶ μετὰ τῆς ὑπό προθέσεως. ὑπόδειγμα δ' αὐτῶν ἡμιολίου μὲν ἐὰν ἐκτεθέντος τοῦ συνεχοῦς ἀριθμοῦ ἐκλέξωμεν τοὺς ἀπὸ δυάδος ἀρτίους καὶ συγκρίνωμεν τῷ μὲν πρώτῳ τὸν παρ' οὐδὲν τῷ δὲ ἔξης τὸν παρ' ἕνα τῷ δὲ τρίτῳ τὸν 5 57 παρὰ δύο καὶ <τῷ> τετάρτῳ τὸν | παρὰ τρεῖς καὶ ἐφεξῆς ἀκολούθως· ἐπιτρίτου δὲ δταν τοὺς ἀπὸ τριάδος τριάδι διαφέροντας ἐκλέξαντες συγκρίνωμεν αὐτοῖς τῷ μὲν πρώτῳ τὸν παρ' οὐδὲν τῷ δὲ δευτέρῳ τὸν παρ' ἕνα τῷ δὲ τρίτῳ τὸν παρὰ δύο τῷ δὲ τετάρτῳ τὸν παρὰ 10 τρεῖς καὶ ἔξης ἀκολούθως τοῖς προτέροις. ἐπιτετάρτου δ' ἔξομεν ὑπόδειγμα, ἐὰν τοὺς ἀπὸ τετράδος τετράδι διαφέροντας ἐκλέξαντες πάλιν συγκρίνωμεν αὐτοῖς τῷ μὲν πρώτῳ τὸν παρ' οὐδὲν τῷ δὲ δευτέρῳ τὸν παρ' ἕνα καὶ τῷ τρίτῳ τὸν παρὰ δύο καὶ ἀεὶ δμοίως τοῖς 15 προειρημένοις. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δὲ τοῦ ἐπιμορίου εἰδῶν τὸ ἀνάλογον ποιήσομεν, κατ' αὐτὸ τὸ τοῦ μορίου δύνομα λαμβάνοντες ἀριθμοὺς τοὺς πρώτους δυναμένους ἀφ' ἑαυτῶν παρασχεῖν τὸ μόριον, καθ' ὃ ἐπιμόριοι αὐτῶν ἔσονται οἱ συγκρινόμενοι, οἵπερ καὶ μονάδι 20 αὐτῶν διοίσουσι καὶ πυθμένες τῶν λόγων γενήσονται. ή δὲ τοῦ μορίου κλῆσις κατὰ τὸν ἐλάττονα λόγον ἀεὶ θεωρουμένη, μονάδι μεγαλωνυμωτέρα ἔσται κατὰ τὸν μείζονα. οὐκ ἔσται δὲ κατὰ τοὺς μείζονας δρους ή 58 τοῦ μορίου ἔξέτασις, διότι οὐδεὶς τῶν πυθμενικῶν 25 φανήσεται ἔχων ἑκεῖνο τὸ μόριον, καθ' ὃ ἐπιμόριος ἐκαστος αὐτῶν ἔστι τοῦ συγκρινομένου ἐλάττονος, κατὰ δὲ τοὺς πυθμένας αὔξονται οἱ λόγοι.

'Ἐπιμερὴς δέ ἔστι σχέσις, δταν δ μείζων δρος ἔχη

τὸν ἐλάττονα καὶ ἔτι μέρη τινὰ αὐτοῦ πλείονα ἐνὸς δηλονότι. ἀλλ' ἐὰν δύο ταῦτα, ἐπιδιμερῆς λέγεται καὶ δὲ ἐλάττων ὑποδιμερῆς, ἐὰν δὲ τοία ἐπιτριμερῆς καὶ ὑποτριμερῆς, ἐὰν δὲ τέσσαρα ἐπιτετραμερῆς καὶ ὑποτετραμερῆς καὶ ἔξης ἀκολούθως. ὑπόδειγμα δ' ἔξομεν ἐπιδιμερῶν μὲν ἐὰν ἐκθέμενοι τοὺς ἀπὸ τριάδος περισσοὺς συγκρίνωμεν ἐκάστῳ τὸν παρ' ἔνα αὐτῶν, ἐπιτριμερῶν δὲ ἐὰν τοὺς ἀπὸ τετράδος ἐκθέμενοι συνεχεῖς ἀριθμοὺς συγκρίνωμεν αὐτοῖς τοὺς παρὰ δύο. 10 ἐπεὶ δὲ οὐκ εἰλικρινεῖς ἀλλὰ πεφυρμέναι ἐτέραις σχέσειν αἱ τοιαῦται πλάσεις, χρησόμεθα ταῖς κατὰ πολλαπλασίων λόγου προκοπαῖς, ὥσπερ ἐπὶ τῶν μορίων πυθμένας λαμβάνοντες τοὺς παρέξοντας ἀφ' ἐαυτῶν τὰ μέρη, καθὰ δὲ ἐπιμερῆς κέκληται, οἷον ἐπιδιμερῶν 15 τὸν πέντε πρὸς τοία, εἶτα διπλασίους καὶ τριπλασίους τούτων καὶ ἐπ' ἄπειρον, ἐπιτριμερῶν | δὲ ἐπτὰ πρὸς 59 τέσσαρα, εἶτα διπλασίους καὶ τριπλασίους αὐτῶν καὶ ἔξης ἀκολούθως, ἐπιτετραμερῶν δὲ ἐννέα πρὸς πέντε, καὶ ἀνάλογον μέχρι παντός, ἵν' ἡ μὲν τῶν ἐλαττόνων 20 ὅρων προκοπὴ ἐν τοῖς πυθμέσι κατὰ τοὺς ἀπὸ τριάδος ἐφεξῆς ἀριθμοὺς γίνηται, ἡ δὲ τῶν μειζόνων κατὰ τοὺς ἀπὸ πεντάδος περισσούς. καθόλου δὲ πυθμένας ἔξομεν παντὸς λόγου, ἐν μὲν πολλαπλασίοις, ἐφ' ἓντος ἡ μονὰς ἐλάττων ὅρος ἐστὶ τῶν συγκρινομένων, 25 ἔξαίρετον δὲ ἐπὶ διπλασίου τὸ τὴν αὐτὴν καὶ διαφορὰν εἶναι· ἐν δὲ ἐπιμορίοις κατὰ μὲν τὸ ἡμιόλιον ἡ δυάς ἐσται δὲ ἐλάττων ὅρος, διαφορὰν δὲ ἔξουσιν οἱ ὅροι

πάλιν μονάδα. κατὰ δὲ τὸ ἐπίτριτον καὶ ἐπιτέταρτον  
καὶ τοὺς ἔξῆς ἐπιμορίους λόγους ἔσται δὲ ἐλάττων ὅρος  
δὲ τὴν ὀνομασίαν παρέχων ἀφ' ἑαυτοῦ τῷ μορίῳ, καθ' ὃ  
60 ἐπιμόριος λόγος ἔστι, διαφορὰ δὲ ἔσται ἐν πᾶσιν ἡ  
αὐτὴ μονάς. ἀλλὰ καὶ ἐν ἐπιμορίῳ πυθμέσιν ἡ αὐτὴ 5  
μονὰς καίτοι τόπον οὐκ ἔχουσα ἢ τοῖς ὅροις ἐμφαντά-  
ζεσθαι, ώς ἐπὶ τῶν τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν, ἢ δια-  
φορὰ εἶναι αὐτῶν, ώς ἐπὶ τῶν τοῦ ἐπιμορίου, διὰ τὸ  
πλείοσιν ἐνὸς μέρεσιν ὑπερέχειν τὸν μείζονα ὅρον τοῦ  
ἐλάττονος, τρόπον ἔτερον ἐνοφθῆ τοῖς ὅροις· τὰ γὰρ 10  
ἀπολειπόμενα ἐν τῷ μείζονι ἀκαταμέτρητα μόρια συγ-  
κοινόμενα τῷ ἐλάττονι διαφορὰν ἔχει πάντας μονάδα.

Λοιπόν ἔστιν εἰπεῖν περὶ τῶν μικτῶν σχέσεων ἐκ  
τε πολλαπλασίου καὶ τῶν λοιπῶν δύο ἐπιμορίου <καὶ  
ἐπιμεροῦς> καὶ τῶν ὑπολόγων τούτων, ἵνα κατὰ τὴν 15  
τῆς δεκάδος τελειότητα καὶ αἱ τῆς ἀνισότητος σχέσεις  
φυσικῶς τὴν γένεσιν ἴσχωσι, πέντε μὲν τῶν προλόγων  
ὅντων, πέντε δὲ τῶν τούτοις συζύγων ὑπολόγων· προ-  
λόγων μὲν κατά τε τὸ πολλαπλάσιον καὶ ἐπιμόριον  
καὶ ἐπιμερές καὶ πολλαπλαιεπιμόριον καὶ πολλαπλα- 20  
σιεπιμερές, ὑπολόγων δὲ τῶν ἴσων μετὰ τῆς ὑπό προ-  
θέσεως ὀνομαζομένων. ἡ γὰρ τῆς ἴσότητος σχέσις ἄτε  
61 διαφορὰν οὐκ ἔχουσα ἢ ἀλλ' ὡσανεὶ ταυτότης οὖσα  
καὶ ἐνότης, εἴγε τὸ ἴσον ἐν πρὸς ἐν ἔστιν, ἐτέρας φύ-  
σεως ἔσται καὶ τῆς ἐναντίας γε τῇ ἀνισότητι, καὶ διὰ 25  
τοῦτο οὐ συγκαταριθμήσεται τοῖς εἰδεσι τῆς ἀνισότη-  
τος. καὶ μὴν καὶ ἀρχῆς λόγουν ἔχει ἡ ἴσότης πρὸς τὴν

ἀνισότητα, καθάπερ καὶ ἐν γραμμικοῖς ἡ δρυθὴ γωνία πρὸς ἀμβλεῖαν καὶ δξεῖαν, καὶ ἐν μουσικοῖς διαστήμασιν ἡ μέση πρὸς τοὺς ἐπιτεινομένους φθόγγους καὶ ἀνιεμένους. καὶ γὰρ ταῦτα ἀπό τινος ὠρισμένου καὶ 5 πεπερασμένου λαβόντα κατὰ τὸν τῆς ἴσοτητος λόγον, ἀπὸ τούτου τὴν παρατροπὴν ἐπὶ τε τὸ μεῖζον καὶ τὸ ἵσον ἵσχοντα κατὰ τὴν ἀνισότητα ἐπ’ ἄπειρον πρόεισιν. ἵν’ οὖν δεδειγμένον ἥ τὸ τὰς τῆς ἀνισότητος σχέσεις ἐκ τῆς ἴσοτητος φυσικῇ ἀνάγκῃ γίνεσθαι καὶ 10 οὐχ ἡμῶν θεμένων, καὶ πρῶτον γε τὴν πολλαπλασιότητα ἀπὸ διπλασίου ἀρξαμένην, ἀφ’ ἣς πάλιν τὴν ἐπιμοριότητα ἀπὸ ἡμιολίου τὴν ἀρχὴν ἵσχουσαν, καὶ ἀπὸ ταύτης τὴν ἐπιμερότητα κατὰ τὴν ἀνάλογον τάξιν καὶ ἔξῆς ἀπὸ τούτων τὰς μικτάς, ἐκθετέον τρεῖς ὅρους, 15 καὶ πρῶτον γε ἐν μονάσιν εἶτα <ἐν> δυάσι καὶ πάλιν ἐν τριάσι καὶ ἔξῆς ἀκολούθως, καὶ παρ’ ἑκάστην ἔκθεσιν ἄλλους τρεῖς ὅρους πλαστέον διὰ τριῶν | προσ- 62 ταγμάτων ἀεὶ τῶν αὐτῶν, καὶ παρὰ τοὺς πλασθέντας ἑκατέρους τρεῖς καὶ ἐκ τούτων ἄλλους καὶ ἀεὶ ἔξῆς 20 ἀκολούθως. ἐφ’ ἑκάστης δὲ πλάσεως πειρατέον κατὰ φύσιν τε καὶ ἀναστρόφως τοὺς ὅρους ἐκτίθεσθαι, καὶ δευτέραν ἔκθεσιν τοῖς αὐτοῖς προστάγμασι χρωμένους πλάσσειν τοὺς ἀπ’ αὐτῶν. ἔσται δὲ τὰ προστάγματα τάδε· ποιήσας πρῶτον ὅρον πρώτῳ τῶν ἐκκειμένων 25 ἵσον, δευτέρον δὲ πρώτῳ ἄμα καὶ δευτέρῳ, τὸν δὲ τρίτον πρώτῳ δυσὶ δευτέροις ἄμα καὶ τρίτῳ. ἐκ πάν-

των οὖν ἐν ἴσοτητι ὅρων τριῶν προεκτεθέντων, εἰτ' ἐν μονάσιν εἴτ' ἐν δυάσιν ἢ καὶ τριάσι καὶ ἐφεξῆς, διὰ τῶν προειρημένων προσταγμάτων γενικῶς μὲν πολλαπλάσιοι γενήσονται, εἰδικῶς δὲ πολλαπλασίων οἱ διπλάσιοι, πρῶτοι μὲν ἐκ μονάδων, οἱ δὲ συνεχεῖς ἐκ δυάδων 5 καὶ οἱ μετ' αὐτοὺς ἐκ τριάδων καὶ ἔξης ἀκολούθως. ἐκ δὲ τῶν πλασθέντων διπλασίων τριπλάσιοι, πρῶτοι πάλιν ἐκ πρώτων καὶ συνεχεῖς ἐκ συνεχῶν, ἐκ δὲ τριπλασίων τετραπλάσιοι ἀποσφόζοντες τὴν αὐτῶν εὐταξίαν, καὶ ἐκ τετραπλασίων πενταπλάσιοι καὶ ἀεὶ οἱ ἐπό- 10  
63 μενοι λόγοι ἐκ τῶν ἡγουμένων. εἰ δὲ πλάσσοντες οὐ τῇ τοιᾶδε κατὰ φύσιν τῶν ὅρων ἐκθέσει χρησαίμεθα, ἀλλὰ ἀναστρέψαιμεν τοὺς πρώτους ἀπὸ τῶν ἴσοτήτων πλασθέντας ὅρους, ὥστε τὸν τρίτον ὅρον ἐν τῇ τοῦ πρώτου χώρᾳ τάξαι τὸν δὲ πρῶτον ἐν τῇ τοῦ τρίτου, 15 τὸν δὲ μέσον δμοίως μέσον τηρήσαιμεν, ἔπειτα διὰ τῶν αὐτῶν προσταγμάτων ἑτέρους πλάσσοιμεν, φύσονται γενικῶς μὲν ἐπιμόριοι ἀπὸ πολλαπλασίων, εἰδικῶς δὲ ἡμιόλιοι μὲν ἀπὸ διπλασίων εὔτακτοι ἀπ' εὐτάκτων, 20 ἐπίτριτοι δὲ ἀπὸ τριπλασίων ἀποσφόζοντες τὴν αὐτὴν τάξιν, καὶ δμοίως ἐπιτέταρτοι ἀπὸ τετραπλασίων καὶ ἐπίπεμπτοι ἀπὸ πενταπλασίων καὶ ἔξης κατά τινα συγγένειαν φυσικὴν συμπαραγένεταινομένων τοῖς εἶδεσι τοῦ πολλαπλασίου τῶν παρωνυμούντων καθ' ἐκαστον εἶδος ἐπιμορίων. ἐκ δὲ αὐτῶν τούτων πάλιν ἀναστραφέντων 25 τῶν ὅρων τοὺς ἐπιμερεῖς λόγους πάντως γεννήσομεν πρώτους πάλιν ἐκ πρώτων καὶ δευτέρους ἐκ δευτέρων καὶ τρίτους ἐκ τρίτων καὶ ἔξης ἀκολούθως, καὶ τούτων

διεντακτουμένων καταλλήλως τῇ ἔξ ἀρχῆς παρωνυμήσει.  
 ὑποδείγματος δὲ ἐνεκα ἔστωσαν μονάδες τρεῖς κατ'  
 ἵσον λόγον προεκκείμεναι. εἰ δὴ ποιήσαιμεν κατὰ τὰ  
 εἰρημένα προστάγματα | πρῶτον ὅρον πρώτῳ ἵσον 64  
 5 ἔσται μονάς, εἰ δὲ δεύτερον πρώτῳ καὶ δευτέρῳ ἔσται  
 δυάς, εἰ δὲ τρίτον πρώτῳ δυσὶ δευτέροις τρίτῳ ἔσται  
 τετράς, καὶ γενήσονται οἱ πλασθέντες ἐν διπλασίῳ  
 λόγῳ α' β' δ'. ἐκ δὲ αὐτῶν κατὰ τὰ αὐτὰ προστάγματα  
 ἔξομεν τοὺς ἐν τριπλασίῳ α' γ' θ', καὶ ἀπὸ τούτων  
 10 τοὺς ἐπὶ τούτοις ἐν τετραπλασίῳ α' δ' ις', καὶ ἐφεξῆς  
 ἀκολούθως. εἰ δὲ δυάδας ἐν ἴσοτητι προεκθοίμεθα,  
 ἔσονται οἱ ἔξης ὅροι ἐν διπλασίῳ δυοίως ὄντες λόγῳ  
 οἱ β' δ' η', καὶ ἀπὸ τούτων πάλιν οἱ ἔξης τριπλάσιοι  
 β' σ' ιη', ἀφ' ᾧ οἱ ἔξης τετραπλάσιοι β' η' λβ', καὶ  
 15 ἀθρόοι ἀκόλουθοι. εἰ δὲ ἀναστρέψαιμεν τοὺς πρώ-  
 τους ἐν διπλασίῳ λόγῳ τοὺς α' β' δ' διὰ τῶν αὐτῶν  
 προσταγμάτων ποιήσομεν τοὺς πρώτους ἐν ἡμιολίᾳ  
 ἀναλογίᾳ ὄντας τοὺς δ' σ' θ', ἀπὸ δὲ τούτων πάλιν  
 ἀναστραφέντων τοὺς ἐν ἐπιδιμερεῖ διμοίως ἀναλογίᾳ 65  
 20 ὄντας τοὺς θ' ιε' κε'. ἐκ τούτου συμφανῆ γίνεσθαι  
 τὴν συγγένειαν τῶν σχέσεων. εἰ γὰρ διπλάσιος  
 λόγος ἀπὸ ἴσοτητος ἐγεννήθη, ἐμάθομεν δὲ παρωνο-  
 μασμένον τὸ ἡμισυ τῷ δύο, εἰκότως ἔξης ώς οἰκεῖος  
 δι ἡμιόλιος λόγος ἐπλάσθη ἐν ἐπιμορίοις, ἀπὸ δὲ τού-  
 25 τον πάλιν ώς ἐν ἐπιμερέσι κατὰ τὴν οἰκειότητα τῆς  
 δυάδος δι ἐπιδιμερής. εἰ δὲ οἱ πρῶτοι ἐν τριπλασίῳ  
 λόγῳ, ἐκφύσονται ἀπ' αὐτῶν ἐπίτριτοι καὶ ἀπὸ τού-  
 των ἐπιτριμερεῖς, εἰ δὲ τετραπλάσιοι ἐπιτέταρτοι τε  
 καὶ ἐπιτετραμερεῖς καὶ ἀεὶ οἱ ἔξης, ἀποσώζοντες τὴν

οἰκειότητα τῆς παρωνυμήσεως καὶ πυθμένες μὲν ἀπὸ πυθμένων δεύτεροι δὲ ἀπὸ δευτέρων καὶ τρίτοι ἀπὸ τρίτων καὶ ἀεὶ δμοίως. πυθμένας δὲ ἐπιμορίων ἐν τρισὶν ὅροις μὴ τοὺς αὐτοὺς οἰώμεθα γενήσεσθαι, ὅπερ ἐν δυσὶ φαίνονται· οὐ γὰρ δυνατὸν ἐν δυσὶν ὄντος λόγου τινὸς καὶ τρίτον ὅρον προσπορισθῆναι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸν μέσον ἀποσώζοντα, διότι μὴ τοῦ αὐτοῦ μορίου παρεκτικός ἐστιν δι μείζων, καθ' ὃ ἐπιμόριός ἐστιν 66 τοῦ πρώτου, ἵνα καὶ δι τρίτος κατ' αὐτὸν ἔκεινῷ | τὸν λόγον ἀποσώζῃ· πᾶς γὰρ ἐπιμορίου λόγου πυθμὴν δι τοὺς ὅρους ἔχων μονάδι διαφέροντας οὐχ δμοίους αὐτοὺς ἔξει διαιρετούς, ἀλλ' εἰ μὲν δι λάττων διχῇ διαιροῖτο, δι μείζων τριχῇ, εἰ δὲ δι λάττων τριχῇ, δι μείζων τετραχῇ, καὶ ἀεὶ μονάδι μεγαλωνυμωτέραν δι μείζων τοῦ λάττου τὴν διαιρεσιν ἐπιδέξεται, ὥστε 15 τοῦ μορίου ἐν λόγῳ φτινιοῦν κατὰ τὸν λάττονα ἔξεταξομένου, ὃς ὑπόλογός ἐστι πρὸς τὸν μείζονα, οὐκ ἔσται τις τρίτος πρόλογος κατ' ἔκεινο τὸ μόριον ὑπόλογον ἔχων τὸν μείζονα. ἀλλ' οὖν ἐπεὶ μή εἰσιν οἱ αὐτοὶ τοῖς ἐν δυσὶν οἱ ἐν τρισὶν, ἐτέρως ἐμφαντα- 20 σθήσονται οἱ πυθμένες τοῖς ἀνάλογον· διαφορὰὶ γὰρ αὐτῶν γενήσονται, οἷον φέρ' εἰπεῖν ἐπεὶ ἀνάλογον ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ εἰσὶν οἱ δ' σ' θ', ἔσονται αὐτῶν διαφορὰὶ οἱ τὸν αὐτὸν λόγον περιέχοντες πυθμένες δι γ' καὶ δι β', καὶ πάλιν ἐν ἐπιτρίτῳ οἱ θ' ιβ' ις', ἔσονται 25 διαφορὰὶ τούτων οἱ πυθμενικοὶ δι δ' πρὸς τὸν γ', καὶ ἀεὶ δμοίως τὸ αὐτὸν συμβήσεται ἐν ἅπασι τοῖς εἶδεσι τῶν ἐπιμορίων· καθ' ὃ γὰρ πυθμένες ἔσονται ἐν τρι- 67 σίν, ὥν διαφορὰὶ | οἱ ἐν δυσὶν. ἐν δὲ τοῖς πολλα-

πλασίοις οἱ ἀνάλογον ἀπ' ἀρχῆς ἐκκείμενοι τοὺς ἐλάττονας ὅρους ἀεὶ πυθμένας ἔξουσι καθ' ἕκαστον λόγον. αἰτία δὲ τούτου ἡ μονὰς ὑπόλογον ἑαυτὴν πρὸς πάντας λόγους τοῦ πολλαπλασίου παρέχουσα. οὐδὲν δὲ 5 ἥπτον καὶ αἱ ἐν τοῖς ἀνάλογον διαφοραὶ τὸν αὐτὸν λόγον περιέχουσιν, εἰ καὶ μὴ πυθμένες εἰσὶ τῶν λόγων, ὡς ἐπὶ τῶν ἐπιμορίων συνέβαινε. μόνοι δὲ οἱ ἐν διπλασίῳ ἀνάλογον ἀπ' ἀρχῆς ἔξαίρετον ἔξουσι τὸ καὶ διαφορὰς ἔχειν τοὺς ἐλάττονας ὅρους, οἵπερ εἰσὶ πυθμενικοί. ἐν δὲ τοῖς τῶν ἐπιμερῶν εἰδεσιν οἱ τοὺς πυθμένας τῶν λόγων περιέχοντες ὅροι οὕτ' ἐν ταῖς διαφοραῖς φανήσονται ὡς ἐπὶ τῶν ἐπιμορίων, οὕτε ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις ὡς ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων, ἀλλὰ κατά τινα ἄλλην εὔτακτον ἀναλογίαν. οἱ μὲν γὰρ ἐν 15 λόγῳ ἐπιδιμερεῖ ἀνάλογον ὅντες ἐν ἡμίσει τῶν διαφορῶν τοὺς πυθμενικοὺς περιέχουσι, πάλιν κάνταῦθα τῆς οἰκειότητος τοῦ ἡμίσους πρὸς τὴν δυάδα, καθ' ἣν ἐπιδιμερής δὲ λόγος ἐστί, ἐμφαινομένης· οἱ δὲ ἐπιτριμερεῖ ἐν τρίτῳ τῶν διαφορῶν οἱ δὲ ἐν ἐπιτετραμερεῖ 20 ἐν τετάρτῳ καὶ οἱ ἐν | ἐπιπενταμερεῖ ἐν πέμπτῳ, καὶ 68 ἀεὶ ἔξῆς τὸ δμοιον ἔσται, ἀποσφραγίας τῆς συμφυΐας τοῦ μορίου πρὸς τὸν λόγον. καὶ γὰρ καθ' αὐτοὺς οἱ λόγοι ἐν τοῖς μέρεσι τὴν δνομασίαν ἵσχουσιν ἔξεταξόμενοι πρὸς τὰ μόρια, καθά ἐστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος ὅρου πρὸς τὸν ἐλάττονα μονάδι μειωνυμώτερον· ἐπιδιμερής μὲν γὰρ ἔσται δὲ πρῶτος λόγος τρίτων, ἐπιτριμερής δὲ δεύτερος τετάρτων καὶ ἐπιτετραμερής δὲ τρίτος πέμπτων καὶ ἔξῆς δμοίως.

Αἱ δὲ μικταὶ σχέσεις ἐκ τε πολλαπλασίου καὶ ἑκα-  
τέρου τῶν λοιπῶν ἐπιμορίου καὶ ἐπιμεροῦς γεννῶνται  
καὶ αὗται ἐκ τῶν πρὸ ἑαυτῶν, ἡ μὲν ἐν πολλαπλασι-  
επιμορίῳ λόγῳ ἐκ τῆς ἐν ἐπιμορίῳ, ἀφ' ἣς καὶ <ἡ> ἐν  
ἐπιμερεῖ ἐγεννᾶτο, οἷον εἰδικῶς ἡ διπλασιεφήμισυς 5  
ἀπὸ τῆς ἐν ἡμιολίοις φύεται, οὐκέτι ἀναστρόφως τῶν  
ὅρων κειμένων, ἀλλὰ κατὰ φύσιν χρωμένων ἡμῶν  
τοῖς αὐτοῖς τρισὶ προστάγμασιν· οὕσης γὰρ ἀναλογίας  
ἐν ἡμιολίῳ τῆς δ' οὐδὲ θ', ἣς αἱ διαφοραὶ οἱ πυθμε-  
νικοὶ ὅροι, πλασθήσεται ἡ διπλασιεφήμισυς <ἐν> ὅροις 10  
69 τοῖς δ' ι' κε'. ἐκ δὲ τῆς ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ τῆς θ' | ιβ'  
ις', ἣς πάλιν αἱ διαφοραὶ εἰσιν οἱ πυθμενικοὶ ὅροι,  
ὅμοιως ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος ὅρου ἀρχομένων ἡμῶν ἡ  
διπλασιεπίτριτος ἐν ὅροις τοῖς θ' καὶ μθ'. ἐκ δὲ τῆς  
ἐν ἐπιτετάρτῳ τῆς ις' κ' κε', ἣς αἱ διαφοραὶ πάλιν 15  
οἱ πυθμενικοί, ἡ διπλασιεπιτέταρτος γεννᾶται ἐν ὅροις  
τοῖς ις' λς' πα', καὶ ἔξῆς ὅμοιώς, ἀποσωζομένης κάν-  
τανθα τῆς οἰκειότητος τοῦ μετὰ τὴν πολλαπλασιότητα  
ἐπιτρέχοντος μορίου πρὸς τὴν δυνομασίαν τοῦ ἐπιμο-  
ρίου λόγου, ἀφ' οὗπερ ἡ γένεσίς ἐστι τῇ μικτῇ σχέσει. 20  
ἔπει γὰρ ἡμιόλιος ἡ γεννῶσα σχέσις διπλασιεφήμισυς  
ἡ γεννωμένη, ἔπει δὲ ἐπίτριτος διπλασιεπίτριτος, καὶ  
<ἔπει> ἐπιτέταρτος διπλασιεπιτέταρτος, καὶ ἔξῆς δὲ ἀκο-  
λούθως. πάλιν δὲ καὶ τούτων οἱ πυθμένες διεντακτη-

θήσονται οὐκέτ' αὐτόθεν ἐμφαινόμενοι ταῖς διαφοραῖς τῶν πλασσομένων, ὡς ἐπὶ τῶν ἀπλῶν σχέσεων ἐγίνετο, ἀλλὰ διὰ τὸ μικτὰς εἶναι τὰς σχέσεις | καὶ τοὺς λόγους 70 ηὔξησθαι ἐν μορίοις τῶν διαφορῶν ὅντες φανήσονται.

5 διπλασιεψημίσους μὲν γὰρ λόγου δ πυθμὴν ἐν τρίτῳ μέρει τῶν διαφορῶν, διπλασιεπιτρίτου δὲ ἐν τετάρτῳ καὶ διπλασιεπιτετάρτου δ' ἐν πέμπτῳ, καὶ ἔξῆς ἀκολούθως μονάδι μεγαλωνυμώτερον ἀεὶ ἔσται. τὸ μόριον ἀντεξεταξόμενον πρὸς τὸ ὄνομα τοῦ ἐπιτρέχοντος μο-  
10 ρίου ἐν τοῖς εἰδεσι τοῦ πολλαπλασιεπιμορίου. παρατηρητέον δὲ ἐφ' ἑκάστης πλάσεως τῶν τε ἐπιμερῶν σχέσεων καὶ τῶν πολλαπλασιεπιμορίων πᾶς καὶ ἀντιπεπόνθησίς τις γλαφυρὰ ὑποφύεται. αἱ μὲν γὰρ ἐπιμερεῖς ἀπαξ πλῆρες τὸ μέτρον προσέβαλλον καὶ πλείονα  
15 τὰ ἀκαταμέτρητα ἀπέλειπον μόρια ἀρχόμενα ἀπὸ δύο· ἐπιδιμερῆς γὰρ ἡ πρώτη, εἶτ' ἐπιτριμερῆς καὶ ἐπιτετραμερῆς καὶ ἔξῆς ἀκολούθως· αἱ δὲ πολλαπλασιεπιμόριοι ἀντιπεπονθότως δἰς μὲν τὸ μέτρον προσβάλλουσι πληρούντως, ἐν δὲ μέροις ἀεὶ ἀπολείπουσιν  
20 ἀκαταμέτρητον ἀρχόμενον καὶ αὐτὸ ἀπὸ τοῦ συξυγοῦντος τῷ δύο ἀριθμῷ μορίου, καὶ ἔξῆς προκόπτον ἀκολούθως. ἐπὶ δὲ πασῶν τῶν πλασσομένων σχέσεων 71 καὶ ἀφ' ὧν αἱ πλάσεις οἱ ἄκροι τετράγωνοι γίνονται.

ἡ δὲ λοιπὴ μικτὴ σχέσις ἡ πολλαπλασιεπιμερῆς γενννᾶται ἐκ τῆς ἐπιμεροῦς, καὶ ἐκ μὲν τῆς ἐπιδιμεροῦς  
25 <ἢ> δἰς ἐπιτρίτου, εἰδικῶς τῆς θ' καὶ τε' κε', ἀρχομένων ἡμῶν ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος δροῦ, γενννᾶται ἡ δι-

πλασιεπιδιμερής τρίτων ἐν ὅροις τοῖς θ' κδ' ξδ', ἐκ  
δὲ τῆς ἐπιτριμεροῦς ἢ τρὶς ἐπιτετάρτου τῆς ις' κη'  
μθ' ἡ διπλασιεπιτριμερής τετάρτων ἐν ὅροις τοῖς ις'  
μδ' ρκα', πάλιν δὲ ἐκ τῆς ἐπιτετραμεροῦς ἢ τετράκις  
ἐπιπέμπτου τῆς κε' με' πα' γεννᾶται ἡ διπλασιεπιτε- 5  
τραμερής πέμπτων ἐν ὅροις κε' ο' ρκς', καὶ κατὰ  
τὸ ἔξῆς ἐπ' ἄπειρον εὐρήσομεν ἀναλόγως καὶ ἀκολού-  
θως προϊοῦσαν τὴν πλάσιν τῶν πολλαπλασιεπιμερῶν  
σχέσεων ταῖς ἐπιμερέσιν. ἐκ μὲν γὰρ ἐπιδιμεροῦς  
τρίτων ἐγένετο ἡ διπλασιεπιδιμερής τρίτων, ἐκ δὲ τῆς 10  
ἐπιτριμεροῦς τετάρτων ἡ διπλασιεπιτριμερής τετάρτων,  
ἐκ δὲ τῆς ἐπιτετραμεροῦς πέμπτων ἡ διπλασιεπιτετραμε-  
ρής πέμπτων. πάλιν δὲ καὶ αὐτῶν | τούτων οἱ πυθμένες  
κατά τινα λόγον φανήσονται διευτακτούμενοι· τῆς μὲν  
γὰρ διπλασιεπιδιμεροῦς τρίτων ἐν πέμπτῳ μέρει τῶν 15  
διαφορῶν ἐνοφθῆσονται οἱ πυθμένες, τῆς διπλασιεπι-  
τριμεροῦς τετάρτων ἐν ἑβδόμῳ, τῆς δὲ διπλασιεπιτε-  
τραμεροῦς πέμπτων ἐν ἑννάτῳ, καὶ ἀεὶ κατὰ δυάδος  
προσθήκην τὴν κλῆσιν ἔξει τὸ μόριον, οἷον δια' 20  
καὶ ιγ' καὶ ιε', καὶ ἀεὶ δμοίως.

Ἐπιδειχθείσης ἡμῖν τῆς τῶν σχέσεων πλάσεως ἀπλατῶν καὶ μικτῶν ἀπὸ ἴσοτητος τὴν ἀρχὴν ἐσχηκυίας, καθόλικόν τι θεώρημα προσληπτέον χρήσιμον ἡμῖν ἐσόμενον εἰς τοὺς λόγους τῆς ἀρμονικῆς θεωρίας

τοιοῦτον. ἔκαστον τῶν ἀπὸ μονάδος πολλαπλασίων  
 ἢ οὐτινοσοῦν ἀριθμοῦ πρώτου καὶ ἀσυνθέτου τοσού-  
 των ἐπιμορίων ἡγήσεται λόγων ἀντιπαρωνύμων διπό-  
 στος ἀν αὐτὸς ὧν τυγχάνῃ ἀπὸ μονάδος ἢ τοῦ πρώ-  
 του καὶ ἀσυνθέτου. τῷ μὲν γὰρ καθ' ἔκαστον πρώτῳ  
 πολλαπλασίῳ εἰς βάθος παρώνυμος εἰς ἐπιμόριος παρα-  
 γραφήσεται, δευτέρῳ δὲ καθ' ἔκαστον δύο, τρίτῳ δὲ  
 τρεῖς, τετάρτῳ τέσσαρες, καὶ ἔξης ἀκολούθως, | ὥστε 73  
 σύριγγι δμοίου τοῦ διαγράμματος γενομένου πολλὴν  
 10 γλαφυρίαν ἐμφαίνεσθαι κατά τε τὸ μῆκος καὶ τὸ βάθος  
 καὶ τὴν ὑποτείνουσαν. ἐκ μὲν γὰρ διπλασίων τρι-  
 πλάσιοί τε καὶ ἡμιόλιοι φύσονται, ἐκ δὲ τριπλασίων  
 τετραπλάσιοί τε καὶ ἐπίτριτοι, ἐκ δὲ τετραπλασίων  
 πενταπλάσιοί τε καὶ ἐπιτέταρτοι, καὶ ἐφοσονοῦν ἀεὶ  
 15 τῆς αὐτῆς ἀκολουθίας ἀποσωζομένης. δ δὲ συνεχῆς  
 ἀεὶ πολλαπλάσιος ὑποφύσεται διὰ τῆς ὑποτεινούσης  
 κωλυτὴρ γινόμενος τῶν περαιτέρω τῆς εἰρημένης τά-  
 ξεως ἐπιμορίων ἐστερημένος τοιούτου ἐπιμορίου καθὸ  
 λέγεται δ ἐπιμόριος, ώς δ τρία ἡμίσους καὶ δ τέσ-  
 20 σαρα τρίτου καὶ δ πέντε τετάρτου καὶ ἀεὶ δμοίως.  
 καθ' ἔκάστην δὲ σύριγγα δ κατὰ τὴν δρθὴν γωνίαν  
 τεταγμένος ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἐκατέρωθεν συγγενεῖς  
 κατά τε τὸ πλάτος καὶ τὸ βάθος λόγον τινὰ ἀποσώσει  
 οὐκ ἄτακτον, οἶν τὸν μὲν τῇ τῶν διπλασίων ἐκθέσει  
 25 διπλάσιός τε καὶ ὑφημιόλιος γινόμενος, ἐν δὲ τῇ τῶν  
 τριπλασίων τριπλάσιός τε καὶ ὑπεπίτριτος, καὶ ἐπὶ τῶν  
 λοιπῶν ἀναλόγως.

Προληπτέον δὲ καὶ ἄλλο τι θεώρημα χρησιμώτατον  
 ἡμῖν ἐσόμενον εἰς τὴν μουσικὴν εἰσαγωγὴν τοιοῦτον.

74 δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐὰν ἡ πρὸς ἄλλήλους διαφορὰ κατά τινας ἄλλους ἀριθμοὺς παρὰ μονάδα ἵσους ἄλλήλοις μετρῇ, τὸν μὲν μείζονα κατὰ τὸν μείζονα τὸν δὲ ἐλάττονα κατὰ τὸν ἐλάττονα, ἥτοι πληρούντως αὐτοὺς μετρήσει ἡ ὑπερβαλλόντως ἡ ἐλλιπῶς. ἀλλ' ἐπεὶ τὸ 5 μὲν πλῆρες ἐνὶ τρόπῳ πληρές ἔστιν, ὡς τὸ τέλειον καὶ τὸ ἵσον, κατὰ τὴν τῶν ἀρετῶν φύσιν, τὸ δὲ ἐλλιπὲς καὶ τὸ ὑπερβάλλον ἀπειρά τε καὶ ἀόριστα, καθά καὶ αἱ οὐκίαι, διὰ τὴν τῆς ἀνισότητος φύσιν, κατὰ μὲν τὴν πλήρη μέτρησιν ἔνα καὶ τὸν αὐτὸν οἱ μετρη- 10 θέντες λόγοι ἔξουσι πρὸς ἐκείνους, καθ' οὓς ἐμέτρησεν αὐτοὺς ἡ διαφορά, καὶ ἔσται δ τούτων μείζων πρὸς τὸν ἐλάττονα, ὡς δ ἐκείνων μονάδι μείζων πρὸς τὸν μονάδι ἐλάττονα· κατὰ δὲ τὰς λοιπὰς δύο μετρήσεις ἡ μείζονα ἡ ἐλάττονα, καὶ οὐκέτι τὸν αὐτόν. ἀλλ' εἰ 15 μὲν ἐλλιπῆς ἡ ἡ μέτρησις, ὥστε μετὰ τὴν τοῦ μέτρου προσβολὴν τοσαντάκις καὶ οἱ πρὸ αὐτῶν ἀκαταμέτρητον τι ἀπολειφθῆναι ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μετρηθεῖσιν, ἵσον δὲ τοῦτο, ἐν μείζονι πάντες οἱ δλοι λόγῳ γενήσονται ἥπερ τὰ ὑπὸ τοῦ μέτρου καταληφθέντα πληρούντως 20 75 αὐτῶν μέρη πρὸς ἄλληλα ἔξεταξόμενα, καὶ καθόλου οἱ ἐνδοτέρω καὶ εἰς τὸ ἐλάττον κατὰ ἵσην διαφορὰν ὑποβιβαζόμενοι ἀριθμοὶ μείζονας ἀεὶ καὶ μᾶλλον λόγους ἔξουσιν τῶν ὑπὲρ αὐτοὺς μειζόνων, ὡς ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν μεσοτήτων πασῶν ἔστιν ἰδεῖν τοὺς ἐλάττονας 25 ὅρους αἰεὶ ἐν μείζοσιν ὅντας λόγοις, τοὺς δὲ μείζονας ἐν ἐλάττοσιν· ἐὰν δέ γε ὑπερβάλλουσα ἡ ἡ μέτρησις,

ῶστε, καταμετρηθέντων ὑπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν διαφορᾶς τῶν ὅλων, κατὰ τὴν αὐτῶν ποσότητα ὑπερπαίειν ἵση τινὶ ποσότητι τὸ μέτρον, ἐν ἐλάσσονι οἱ ὅλοι λόγῳ πρὸς ἀλλήλους ἔσονται ἥπερ οἱ τὴν ἵσην 5 ὑπερέκπτωσιν τοῦ μέτρου ἐν ἀμφοῖν δρᾶσοντες. ἔστω δὲ τῶν λεχθέντων τριῶν τρόπων ὑποδείγματα τρεῖς τινες αἵδε συζυγίαι· τῆς μὲν πλήρους μετρήσεως ἡ ν' καὶ νε', τῆς δ' ἐλλειπούσης ἡ μη' καὶ νγ', τῆς δὲ ὑπερβαλλούσης ἡ νγ' καὶ [ἡ] νη', κοινὴ δὲ διαφορὰ ἐν 10 πάσαις ἡ πεντάς. καθ' ἐκατέρων οὖν τῶν ἐν ἑκάστῃ συζυγίᾳ δρῶν μετροῦσα ἡ πεντάς τοὺς μὲν μείζονας ἐνδεκάκις μετρήσει τοὺς δὲ ἐλάττονας δεκάκις. ἀλλ' ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ἵσους τοὺς λόγους ἔξουσιν οἵ τε ὅλοι καὶ οἱ καθ' οὓς ἐμετρήθησαν, εἴ γε οὗτοι μὲν 15 ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιδεκάτῳ | λόγῳ ἔσονται. <ἐν δὲ τῇ 76 δευτέρᾳ μείζονα οἱ ὅλοι τῶν καθ' οὓς ἐμετρήθησαν· οἱ μὲν γὰρ ἐν τῷ ἐπιδεκάτῳ λόγῳ ἔσονται,> οἱ δ' ὅλοι οὐκέτι μὲν ἐν τῷ αὐτῷ, ἀλλ' ἐν μείζονι ἡ ἐπιδεκάτῳ· δ γὰρ νγ' ἔχει τὸν μη' καὶ μείζον ἡ τὸ δέ-  
20 κατον αὐτοῦ. ἐν δὲ τῇ τρίτῃ ἐλάττονα οἱ ὅλοι τῶν καθ' οὓς ἐμετρήθησαν· οἱ μὲν γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιδεκάτῳ ἔσονται λόγῳ, οἱ δὲ ὅλοι <ἐν> ἐλάττονι ἡ ἐπιδεκάτῳ· δ γὰρ νη' τοῦ νγ' ἐλάσσων ἔστιν ἡ ἐπιδέκατος, εἴ γε ἔχει δ μείζων τὸν ἐλάσσονα καὶ ἐλάττον 25 ἡ τὸ δέκατον αὐτοῦ. ἐὰν δὲ δροῖς ἀνίσοις ἵσοι ἀριθμοὶ προστεθῶσιν, ἡ μὲν αὐτὴ ἔσται διαφορὰ τῶν τε

ἔξ ἀρχῆς καὶ τῶν μετὰ τῆς προσθέσεως, λόγου δὲ ἐλάττονα ἔξουσιν οἱ ὕστεροι, τουτέστιν οἱ σὺν τῇ προσθέσει.  
καὶν ἀπὸ ἀνίσων δὲ ὅρων ἵση ἀφαιρεσις γένηται, οἱ  
ἔξ αὐτῶν λειπόμενοι ἀριθμοὶ τὴν αὐτὴν μὲν ἔξουσι  
77 διαφορὰν τοῖς ἔξ ἀρχῆς, ἐν μείζονι δὲ λόγῳ γενήσονται. 5

"Ετι κάκεῖνο προληπτέον χρήσιμον ἡμῖν εἰς τὰ  
αὐτὰ ἐσόμενον· δτι ἐὰν διάστημα διοῦν δὶς συν-  
τεθῇ, τουτέστιν δστισοῦν λόγος διαφορηθῇ, διαμέ-  
νοντος δηλονότι κοινοῦ τοῦ μέσου ὅρου, οἱ ἄκροι  
πάντως ἐν μείζονι λόγῳ ἔσονται ἥπερ οἱ ἀπλοῦν τὸ 10  
διάστημα περιέχοντες. ἀλλ' ἐὰν μὲν τὸ διαφορού-  
μενον διάστημα ἐν πολλαπλασίονι λόγῳ ἦ, καὶ οἱ ἐμ-  
περιέχοντες ἄκροι ἐν πολλαπλασίονι ἔσονται· ἐὰν δὲ  
ἐν ἐπιμορίῳ, οὕτ' ἐν ἐπιμορίῳ ἔσονται οἱ περιέχοντες  
οὕτ' ἐν πολλαπλασίῳ, ἀλλ' ἐν ἄλλῃ τινὶ σχέσει μικτῇ. 15  
ἔστιν οὖν καὶ ἀναστρέψαντα εἰπεῖν δτι ἐὰν σύνθετον  
διάστημα τοὺς ἄκρους ἔχῃ ἐν πολλαπλασίῳ λόγῳ ὅντας  
78 πρὸς ἄλλήλους, πάντως καὶ τὸ διαφορηθὲν διάστημα  
ἐν πολλαπλασίονι λόγῳ ἔσται· ἐὰν δὲ μήτε πολλα-  
πλάσιος ἦ δὲ λόγος τῶν ἄκρων μήτε ἐπιμόριος, μικτὸς 20  
δέ τις, τὸ διαφορηθὲν διάστημα πολλαπλάσιον μὲν  
οὐκ ἔσται, ἐπιμόριον δὲ ἢ ἑτερογενές. ἀφ' οὗ βεβαιω-  
θήσεται ἐν τοῖς ἀρμονικοῖς λόγοις τίνα μὲν σύμφωνα  
διαστήματα συμφώνοις συντιθέμενα μείζους συμφω-  
νίας ἀποτελέσει, τίνα δὲ οὐχί, καὶ ἐν τίνι λόγῳ εἰσὶν 25  
αἱ ἀποτελούμεναι σύνθετοι, καὶ ἐν τίνι <αἱ> ἔξ ἀρχῆς.

"Ετι κάκεῖνο προληπτέον, δτι ἀριθμὸς ἀριθμὸν ἔτε-

ρον πολλαπλασιάσας τὸν ἀπογεννώμενον ἔχοντα παρέξει  
ἐκατέρου τῶν γεννησάντων τὰ ἰδιώματα. καὶ ἐὰν δύο  
ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τινὶ ὄντες ἑτέρους δύο μηκύνωσιν  
ἐν ἄλλῳ λόγῳ μηκύνοντας, δι μείζων τὸν μείζονα καὶ  
5 δι ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, ἀνάγκη τοὺς ἐξ αὐτῶν γεν-  
νωμένους ἀποσῶσαι ἐκάτερον τὸν λόγον· καὶ ἐὰν μὲν  
πυθμενικοὶ ὅσιν οἱ γεννήτορες, πυθμενικὴ καὶ ἡ λῆξις  
τῶν λεγομένων ἐν τοῖς ἀπογεννωμένοις συμβήσεται,  
εἰ δὲ μὴ πυθμένες εἶεν, τὴν αὐτὴν ἀποσώσουσιν ἀνα-  
10 λογίαν τῆς τάξεως.

Ομοίως κάκεῖνο προληπτέον· πάντες οἱ ὅροι κατ'  
ἀρτίαν ἔκθεσιν ἔκκείμενοι κατ' ἵσην ὑπεροχήν, εἴτε  
τῆς ἀρτίας φύσεως εἶεν εἴτε τῆς περισσῆς εἴτε καὶ  
ἐκατέρας, τοσοῦτοπλάσιον τὸ ἐκ τῆς ἐπισυνθέσεως 79  
15 πάντων τῶν ἔκκειμένων ὅρων ἀποτελοῦσι τοῦ ἐκ μό-  
νων τῶν ἄκρων, ὅσονπερ τοῦ πλήθους τῶν ὅρων  
ἥμισυ ὑπάρχει, ἀφ' οὗ παρωνυμήσει ἡ πολλαπλασιότης.

Ακόλουθον τούτοις τὸν περὶ ἀναλογιῶν ὄντα τόπον,  
ὅτι σύστημα λόγων ἐστὶν ἡ ἀναλογία, τὸ παρὸν ὑπερ-  
20 θέμενοι, πρότερον τὸν περὶ ἐπιπέδων καὶ στερεῶν ἐπ-  
ελευσόμεθα, ἴδιον ὄντα τοῦ καθ' αὐτὸ ποσοῦ καὶ διὰ  
τὸ χρήσιμον τῆς διδασκαλίας ὑπέρθεσιν λαβόντα.

Ἐπειδὴν τοίνυν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος διτισοῦν 80  
ἥτοι καθ' αὐτὸν ἡ καὶ ἐπισυντιθέμενος τοῖς πρὸ αὐ-  
τοῦ εἰς μονάδας ἀναλύηται καὶ κατὰ γραμμὴν ἐπεκτεί-  
νηται, εὐθυγραμμικὸς κεκλήσεται, διότι ἀπλατῶς ἐπὶ  
μόνον τὸ μῆκος πρόσεισιν· ἵστεον γὰρ ὡς τὸ παλαιὸν

φυσικώτερον οἱ πρόσθεν ἐσημαίνοντο τὰς τοῦ ἀριθμοῦ ποσότητας ἀναλύοντες εἰς μονάδας, ἀλλ' οὐχ ἕσπερ οἱ νῦν συμβολικῶς. Ἰδίως δὲ εὔθυγραμμικοὶ καλοῦνται οἱ διάγραμμα ἐπίπεδον μὴ ποιοῦντες, ώς δέ εἴ καὶ δέξ' καὶ οἱ δμοιοι· εὔθυμετρικοὶ δὲ καλοῦνται 5 διὰ τὸ κατ' εὔθεῖαν μετρεῖσθαι ὑπὸ μονάδος. καὶ ἐπειδὴ ἀρχή ἐστι καὶ στοιχεῖον μῆκους ἡ στιγμή, ἕσπερ ὁύσιν φασὶν εἶναι οἱ γεωμέτραι τὴν γραμμήν, ἔξει 81 καὶ ἡ μονὰς καθ' δμοιότητα στιγμῆς καὶ σημείου λόγον, ώς ἀν ἀρχῇ οὖσα ποσοῦ καὶ δὴ καὶ ἀφ' ἑαυτῆς 10 ὥσανεὶ ὁνεῖσα καὶ κατὰ τὸ ἑαυτῆς μέγεθος ἐφ' ἐν διαστᾶσα, εἰς μῆκος προελεύσηται. οὕτως καὶ συμβεβηκότα τινὰ ἔξει κοινὰ πρὸς τὸ σημεῖον τό τε ἀρχὴ εἶναι ποσοῦ, ώς ἐκεῖνο πηλίκου, καὶ τὸ ἀμερῆς εἶναι, ώς ἐκεῖνο, καὶ τὸ δύνασθαι μηδὲν πλέον ἑαυτῆς, καθὰ 15 κάκεῖνο· ώς γὰρ ἄπαξ ἐν οὐδὲν πλέον τοῦ ἐν, οὕτως ἐπ' ἄλληλα σημεῖα γινόμενα οὐδὲν πλέον σημείου ποιεῖ· οὐδὲ γάρ ἐστιν ἡ γραμμὴ πλειόνων σύνθεσις σημείων, ἀλλ' ἵτοι ψαυτῶν ἀδιαστασία ἐσται ἡ διαστάντων ἀψαυστία, ὥστ' οὐκέτι μέρος γραμμῆς τὸ σημεῖον· οὐ 20 γὰρ μόνον σημεῖόν ἐστιν οὐ μέρος οὐδέν, ἀλλὰ καὶ οὐδὲ ἄλλου τινός ἐστι μέρος. κοινὸν δὲ ἔχει πρὸς τὸ σημεῖον ἡ μονὰς καὶ τὸ στερεῶν πυραμίδων ἀπειρογόνων ταῖς βάσειν ἐπὶ κορυφῇ θεωρουμένη ώς ἐκεῖνο πανσχήμων νοεῖσθαι. Ἰδιαὶ δὲ ἥδη ἔχει, 25 καθὰ διαφέρει σημείου, ὥσανεὶ δρογενῆς οὖσα, τό τε κατὰ σύνθεσιν ἑαυτῆς εἰς μῆκος διέστασθαι καὶ ἐτι τὸ μέρος εἶναι τούτου. εἰ δὲ τῆς ἐφ' ἐν διαστάσεως 82 πανσαιμέθα καταγράφοντες τὰς μονάδας καὶ ἐπεκβάλ-

λοντες τὸ μῆκος, ἐπὶ δὲ τὸ πλάτος ἐπέλθοιμεν κατ' ἐπίπεδον σχηματίζοντες αὐτάς, ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς ἐπίπεδος κεκλήσεται· διχῇ γὰρ ἥδη διαστατὸς καὶ ποικίλλεται εἴδεσι καταγραφόμενος, ἀρχόμενος περὶ 5 τριγώνου, περὶ ὃν ἐν κεφαλαίῳ οὗτως ἐφοδευτέον καὶ ποριστέον αὐτῶν εὔτακτον γένεσιν.

Ἐκκειμένου γὰρ τοῦ ἐφεξῆς ἀπὸ μονάδος ἀριθμοῦ, ἐὰν μὲν μηδὲν διαλιπόντες σωρηδὸν συντιθῶμεν αἱεὶ τοὺς ἐφεξῆς καθ' ἓνα, οἷον ἓνα πρῶτον, εἰτ' ἐπὶ τούτῳ 10 δύο, εἶτα ἐπὶ τοῖς δυσὶ τρία καὶ πρὸς τούτοις τέσσαρα καὶ μέχρις οὖς βουλδυμεθα, τρίγωνοι ἐφεξῆς ἀπὸ μονάδος ἀποτελεσθήσονται οἵ α' γ' σ' ι' ιε' κα' κη' λς' καὶ ἐφεξῆς, ὃν ἔκαστος σχηματισθήσεται ἀναλυθεὶς εἰς μονάδας τριγώνου τρόπον, καὶ αὐτὴ δὲ καθ' ἑαυτὴν ἡ μονὰς ὡς 15 δυνάμει οὖσα τριγωνική. τὰς δὲ πλευρὰς ἔκαστος τῶν μετὰ μονάδα τοσούτων ἔξει μονάδων, ὅσωνπερ καὶ δ γυνώμων ἐστίν, ἢ νὴ Δία ὅσωνπερ μονάδων δύστατος παραληφθεὶς ἐν τῇ ἐπισυνθέσει γυνώμων ἐστίν, ὅπερ ἔδιον μόνων τριγώνων ἐστίν. εἰρηται δὲ γυνώμων δὲ 20 αὐξητικὸς ἔκάστου εἶδοντος τῶν πολυγώνων κατὰ πρόσθεσιν τὸ αὐτὸ διαφυλάττων, ὡς φέρει εἰπεῖν τῷ τρίᾳ τριγώνῳ δύντι περιτεθεῖσα ἡ τριάς τὸ αὐτὸ διός ἔχοντα τὸν ἐπίσημον ἀπετέλεσε. μετῆκται δὲ ἀπὸ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ τὸ δύνομα· λέγεται γὰρ ἡ ὑπεροχὴ ἥπερ 25 ἔχει τετράγωνον τετραγώνου γυνώμων. πάντως δὲ ἡ σχημάτισις κατ' ἴσοπλευρον ἐσται τρίγωνον· ὥστε τριγωνος ἀν εἴη ἀριθμὸς δέκατος ἀπὸ μονάδος κατὰ

μονάδος διαφορὰν συντιθεμένων σωρηδὸν ἀπογεννώμενος. ἐν δὲ τῇ ἐπιπεδώσει ἔρχεται δὲ τέταρτος ἐναπολαμβάνειν τὸν πρῶτον, δὲ πέμπτος τὸν δεύτερον καὶ ἀκολούθως οἱ ἄλλοι, μέχρις οὗ πάλιν δὲ ἑβδόμος τὸν πρῶτον περιέχοντα περισχῆ διὰ τὸ εἶναι καὶ αὐτὸς 5 τέταρτος ἀπὸ τοῦ τετάρτου, καὶ οἱ ἔξης δὲ ἀναλόγως τὸ αὐτὸ ποιήσουσι.

Πάλιν δὲ ἔξ ἄλλης ἀρχῆς ἐὰν ἐκ τοῦ ἐφεξῆς ἀριθμοῦ ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι συντιθῶμεν σωρηδὸν μηκέτι τοὺς ἐφεξῆς ἄλλὰ τοὺς παρ' ἔνα, τοντέστι 10 τοὺς περισσούς, οἷον α', εἶτα α' γ', εἶτα α' γ' ε', καὶ πάλιν α' γ' ε' ζ' καὶ ἐφεξῆς ἀκολούθως, τετράγωνοι 84 φύσονται καὶ ἐπιπεδωθήσονται τετραγωνικῶς ἀναλυθέντες εἰς μονάδας. οἱ δὲ γνώμονες γωνίαν ποιοῦντες ἀεὶ περιτεθήσονται καὶ οὐκέτι κατὰ μίαν πλευρὰν 15 αὐξηθήσονται οἱ τετράγωνοι, ὥσπερ ἐπὶ τῶν πρὸ αὐτῶν ἐγένετο. ἔρχεται δὲ πάλιν κάνταῦθα δὲ τρίτος ἐμπεριέχειν τὸν πρῶτον καὶ δὲ τέταρτος τὸν δεύτερον καὶ δὲ πέμπτος τὸν τρίτον ἄλλὰ καὶ τὸν πρῶτον, ἔκτος δὲ τέταρτον καὶ δεύτερον, καὶ καθόλου οἱ ἀρτιοταγεῖς 20 ἀρτίους καὶ οἱ περισσοταγεῖς περισσούς. ἔστιν οὖν τετραγωνικὸς ἀριθμὸς δὲ ἐκ τῶν ἀπὸ μονάδος δυάδι διαφερόντων συντιθεμένων ἀποτελούμενος, ως α' δ' θ' ις' κε' λς' καὶ δὲ ἐφεξῆς ἔκαστος πάλιν ἔχων τοσούτων μονάδων τὴν πλευράν, ὅσουσπερ καὶ τοὺς ἐν 25 τῇ συνθέσει παραληφθέντας γνώμονας. ἐπεὶ δὲ τὸ τετράγωνον σχῆμα ἐν γραμμικοῖς διαγωνίον ἀχθείσης εἰς δύο τρίγωνα λύεται, δῆλον δὲ ὅτι καὶ συνίσταται

ἐκ τούτων, εῦροιμεν ἀν καὶ ἐν ἀριθμητικοῖς ἐκ πάντων δύο τριγώνων ἀριθμῶν συνεχῶν τετράγωνον συνιστάμενον. γεννῶνται δ' οἱ τετράγωνοι καὶ ἐκάστου τῶν ἀπὸ μονάδος ἀριθμῶν ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος· ἡ μὲν 5 γὰρ μονὰς | ἑαυτὴν μονάσασα τετραγωνικὴ γίνεται, ἡ 85 δὲ δυάς ἑαυτὴν δυάσασα τετράγωνον τὸν δ' ποιεῖ καὶ ἡ τριὰς ἑαυτὴν τριάσασα τὸν δ' καὶ ἔξῆς ἀκολούθως.

Ἐὰν δὲ πάλιν ἐκ τοῦ ἐφεξῆς ἀριθμοῦ τοὺς δύο διαλείποντας τῇ μονάδι σωρηδὸν ἐπισυνθῶμεν, πεντά-  
10 γωνοι φύσονται οἱ α' ε' ιβ' κβ' λε' καὶ ἐφεξῆς, καὶ αὐτὸὶ ἀναλυόμενοι εἰς μονάδας καὶ πενταγωνικῶς σχηματιζόμενοι κατὰ τὰς τρεῖς πλευρὰς περιτιθεμένων τῶν γνωμόνων. πάλιν δὲ τοσούτων μονάδων ἔσται ἡ πλευρὰ ἐκάστου, δύοιπερ καὶ γνώμονες εἰς τὴν γέ-  
15 νεσιν αὐτοῦ συνετέθησαν. ἔσται οὖν πενταγωνικὸς ἀριθμὸς ὁ ἐκ τῶν ἀπὸ μονάδος τριάδι διαφερόντων συντιθεμένων ἀποτελούμενος, ἔξαγωνικὸς δὲ ὁ ἐκ τῶν ἀπὸ μονάδος τετράδι διαφερόντων, καὶ ἐπταγωνικὸς ὁ <ἐκ> τῶν πεντάδι καὶ ἔξῆς ἀκολούθως, καὶ 20 κατὰ δυάδος ὑπεροχὴν τῶν πολυγώνων πρὸς τὰς διαφορὰς τῶν γνωμόνων τὴν δυομασίαν ἴσχόντων. εἰ δέ τις ἐκθοῖτο στιχηδὸν ἐφεξῆς τοὺς πολυγώνους ἀπὸ τριγώνου προτάξας αὐτῶν καὶ τὸν συνεχῆ ἀριθμόν, φανήσονται ἐν τῷ διαγράμματι τρίγωνοι μὲν δύο παρὰ 25 δύο ἄρτιοι καὶ περισσοὶ δύο, τετράγωνοι δὲ εἰς παρ' ἔνα, πεντάγωνοι δὲ δυοίως τοῖς τριγώνοις δύο παρὰ δύο, καὶ | δύος οἱ δυοταγεῖς αὐτῶν, τουτέστιν\*\*\*ἀρτιο-

ταγεῖς. καὶ γὰρ γνωμόνων ἔτυχον ἀπαντες οἱ πολύγωνοι κατά τινα φυσικὴν εὐταξίαν, τρίγωνος μὲν ἐνὸς παρ' ἓνα περισσοῦ καὶ ἀρτίου, τετράγωνος δὲ περισσῶν μόνων, πεντάγωνος δὲ ἐνὸς πάλιν παρ' ἓνα καὶ ἑξάγωνος περισσῶν μόνων, καὶ τοῦτο δι' ὅλου ἀκολούθως. 5

'Επεὶ δὲ ἡ μονὰς πάσης γενέσεως τῶν πολυγώνων ἀφηγεῖται καὶ διὰ τοῦτο πανσχήματον ἔστιν, ἐοικέναι λέγεται τοῦτο κύκλῳ καὶ σφαιρᾷ, διότι τε ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς δὲ κύκλος περιέχεται καὶ ἐνὸς ἐπιπέδου ἡ σφαιραὶ καὶ διότι ὁ τε κύκλος χωρητικός ἔστι καὶ 10 περικλειστικὸς παντὸς πολυγώνου ἐπιπέδου σχήματος καὶ ἡ σφαιραὶ στερεοῦ. φανήσεται δὲ καὶ ἑξῆς καὶ τῶν στερεῶν σχημάτων τῆς γενέσεως ἀφηγουμένη ἡ μονὰς καὶ δυνάμει ἐπιδεχομένη τοὺς πάντων λόγους, πρὸς τούτοις τε ὅτι ἀφ' ἑαυτῆς καὶ περὶ ἑαυτὴν ὥσανεὶ 15 κινηθεῖσα εἰς ἑαυτὴν ἀποκαθίσταται, καθὰ καὶ δὲ κύκλος ἀπό τινος περὶ τι ἔξ ἴσου διαστήματος εἰς ταῦτὸν ἀποκαθίσταται. εἰ δὲ δὲ κύκλικὸς λόγος τῇ μονάδι ἐμφαίνεται ἄρχονται δὲ ἐπὶ τριάδος αἱ σχηματίσεις 20  
87 τῶν πολυγώνων, τὴν δυάδα εὐλόγως οἱ ἀπὸ | Πυθα-  
γόρου ἀδριστον ἔφασαν εἶναι, διότι καθ' αὐτὴν οὐδ' ὅτιοῦν περιορίζεται σχῆμα· πρῶτον γὰρ εὐθύγραμμον καὶ στοιχεῖον ἐπίπεδον τὸ τρίγωνον, διότι ἐν τρισὶν ὅροις τὸ διχῇ διαστατόν. καὶ ἐπειδὴ ἐν γραμμικοῖς εἰδοποιεῖται τὰ πολύγωνα ὑπὸ τριγώνου, εἰ γε τὴν 25  
 σύστασιν ἀπ' αὐτοῦ καὶ εἰς αὐτὸ τὴν ἀνάλυσιν ἶσχει,  
 καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἐν ἀριθμοῖς εἰδοποιηθήσονται οἱ

πολυγώνιοι ὑπὸ τῶν τριγώνων κατά τινα φυσικὴν εὐταξίαν. ἔσται γὰρ ὁ δυνάμει τριγωνος ἡ μονὰς διαφορὰ τῶν ἐνεργείᾳ πρώτων πολυγώνων ἐπὶ βάθος θεωρουμένων τῶν γ' δ' ε' σ' ξ' η' θ' ι' καὶ ἐφεξῆς, 5 ὁ δὲ ἐνεργείᾳ πρῶτος τριγωνος ὁ τρία, τῇ δὲ τάξει δεύτερος, τῶν δευτέρων πολυγώνων ἔσται διαφορὰ τῶν σ' θ' ιβ' ιε' ιη' κα' κδ' κξ', ὁ δὲ τρίτος ὁ σ' τῶν τριγώνων περίεισιν ι' ις' ιβ' ιη' λδ' μ' μς' νβ', καὶ πάλιν ὁ τέταρτος τῶν τετάρτων καὶ ὁ πέμπτος τῶν 10 πέμπτων καὶ ἐφοσονοῦν. καὶ ἐν τῇ σχηματογραφίᾳ δὲ τῶν πολυγώνων δύο μὲν ἐπὶ πάντων αἱ αὐταὶ μενοῦσι πλευραὶ μηκυνόμεναι καθ' ἔκαστον, αἱ δὲ παρὰ ταύτας ἐναποληφθήσονται | τῇ τῶν γνωμόνων 88 περιθέσει αἰεὶ ἀλλασσόμεναι, μία μὲν ἐν τριγώνῳ δύο 15 δὲ ἐν τετραγώνῳ καὶ τρεῖς ἐν πενταγώνῳ καὶ δυοῖς ἐπ' ἄπειρον, κατὰ δυάδος κάνταῦθα διαφορὰν τῆς κλήσεως τῶν πολυγώνων πρὸς τὴν ποσότητα τῶν ἀλλασσομένων γινομένης. ἐντεῦθεν καὶ ἡ ἐφοδος τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος ἐλήφθη. ὠρισμένων γὰρ ἡ 20 ἀορίστων μερισαμένων ὠρισμένον τι καὶ ἐνδεικνοῦσοῦν τοῖς λοιποῖς καθ' ἔκαστον συντεθέντος, τὸ ἐκ πάντων ἀθροισθὲν πλῆθος ἐπὶ μὲν τριῶν μετὰ τὴν ἔξ αρχῆς δρισθεῖσαν ποσότητα ὅλον τῷ συγκριθέντι προσνέμει τ' ἀφ' οὗ τὸ λεῖπον καθ' ἔκαστον τῶν 25 λοιπῶν ἀφαιρεθήσεται, ἐπὶ δὲ τεσσάρων τὸ ἥμισυ καὶ ἐπὶ πέντε τὸ τρίτον καὶ ἐπὶ ἔξ τὸ τέταρτον καὶ ἀεὶ ἀκολούθως, δυάδος κάνταῦθα διαφορᾶς ἐπιφαινομένης

πρός τε τὴν ποσότητα τῶν μεριζομένων καὶ πρὸς τὴν  
 τοῦ μορίου κλῆσιν. παρατηρητέον πᾶς κάνταῦθα ἡ  
 μονὰς χώρας ἔσχε τῷ ὅλῳ συζυγῆσαι· ἐν μὲν γὰρ τῷ  
 τῶν πολυγωνιῶν θεωρήματι τῷ κατὰ τὴν σχηματο-  
 γραφίαν ἐλέγομεν μίαν εἶναι τὴν ἀλλασσομένην πλευρὰν 5  
 89 τῶν τριγώνων, δύο δὲ τῶν τετραγώνων καὶ τρεῖς  
 πενταγώνων καὶ ἕξης ἀκολούθως. ἐνταῦθα δὲ τῷ  
 ἐπανθήματι εἰ μὲν τρεῖς εἶεν οἱ μεριζόμενοι μετὰ τὴν  
 ἀφαίρεσιν τοῦ δρισθέντος δρισμοῦ, δλον τὸ ληφθὲν  
 προσνεμοῦμεν τῷ συγκριθέντι πρὸς τὸν λοιπὸν, ὡς 10  
 ἀναλόγως ἔχειν ἐνταῦθα τὸ δλον πρὸς τὴν ἐν τοῖς  
 τριγώνοις ἀλλασσομένην μίαν πλευράν. καὶ ἐπεὶ ἐκεῖ  
 δύο ἔσονται ἐπὶ τετραγώνων αἱ ἀλλασσόμεναι πλευραί,  
 ἐνταῦθα, εἰ τέσσαρες εἶεν οἱ μεριζόμενοι, τὸ ἥμισυ  
 προσνεμοῦμεν, εἴτε τρίτου ἐπιτρεῖς, καὶ ἀεὶ ἀναλόγως 15  
 ποιοῦντες οὐ διαπεσούμεθα. ὅτι δὲ οὐ παρέλκει τὸ  
 ἐπάνθημα τοῦτο, ἀλλὰ καὶ πρὸς θεώρημα ἀριθμητικὸν  
 ἔχει τὴν ἀναφορὰν καὶ ἐφόδου γλαφυρωτάτης πρὸς  
 ἀνεύρεσιν αἵτιον ἥμιν γίνεται, οὗτος ἀν θεωρήσαιμεν.  
 προστετάχθω γὰρ ἥμιν λόγου χάριν ἀριθμοὺς ἐκθέ- 20  
 σθαι τέσσαρας, ὃν δὲ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου δι-  
 πλάσιος ἔσται τρίτου ἄμα καὶ τετάρτου, καὶ πάλιν δὲ  
 πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου τριπλάσιος δευτέρου ἄμα καὶ  
 τετάρτου, δμοίως τε δὲ αὐτὸς πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρ-  
 του τετραπλάσιος τῶν δύο μέσων δευτέρου ἄμα καὶ 25  
 τρίτου, σύμπαντες δὲ ἄμα πενταπλάσιοι τῶν αὐτῶν  
 90 δύο | μέσων, ὡς ἀν καὶ τάξει φυσικῇ τῶν πολλαπλα-  
 σίων ἀπὸ διπλασίου εἰς πενταπλάσιον ἡ προχώρησις

εῖη. ἐφοδευτέον δὴ οὕτως. ἐπεὶ ἡμίσους χρεία διὰ τὸν διπλάσιον, λαμβάνω τὸν δύο ἀριθμόν· πρώτιστος γὰρ ἡμίσους παρεκτικὸς καὶ πρῶτος διπλάσιος. ἐπεὶ δὲ καὶ τρίτου διὰ τὸν τριπλάσιον λόγον, τρὶς ποιῶ 5 τὰ δύο. ὁ δὴ γενόμενος σ' δι' ἀμφοτέρους τοὺς γεννήτορας πρῶτος ἔσται καὶ ἡμίσους καὶ τρίτου ἐπιδεκτικός. πάλιν δὲ ἐπεὶ τετάρτου μέρους δεῖ διὰ τὸν τετραπλάσιον λόγον, τετράκι τὰ σ' ποιῶ, καὶ ἐπεὶ πενταπλασίου χρεία, τὰ κδ' πεντάκις, ἅπερ γίνεται ω̄, 10 καὶ ἔχω τοῦτον τὸν ἀριθμὸν κοινὸν ὅντα συγκεφαλαίωμα τῶν τεσσάρων ὅρων, ὁ δὴ καὶ θετέον εἶναι μεριστὸν εἰς τοὺς ἀναφανησομένους τέσσαρας ἀριθμούς, οἷς ἐμφανίσονται οἱ προειρημένοι λόγοι. διανεμητέον τὸν ω̄ τρόπῳ τούτῳ. ἐπεὶ οἱ πρῶτοι δύο 15 ἀριθμοὶ τῶν λοιπῶν δύο διπλάσιοι ἔσονται, ἔστι δὲ διπλασίων πυθμὴν ὡς δύο πρὸς ἓν, ἢ ἔστιν δμοῦ τρία, δὶς ποιῶ τὸν ω̄, καὶ τὸν σμ' μερίζω παρὰ τὸν τρίτον. γίνεται δὴ μέρος ἓν τὰ π'. φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τοὺς δύο πρῶτους ἀριθμούς, οἵπερ 20 διπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δύο, ὅνταν δηλονότι 91 καὶ αὐτῶν ἐν τεσσαράκοντα μονάσι. πάλιν ἐπεὶ δ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος τριπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὡς τρία πρὸς ἓν, ἢ ἔστιν δμοῦ δ', ποιῶ τρὶς τὸν αὐτὸν ω̄ καὶ γίνεται τξ', ἢ μερίζω παρὰ τὸ τέταρτον, ἵν' ἦ τὸ μέρος ξ'. φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τὸν πρῶτον ἄμα καὶ τὸν τρίτον, τοὺς τριπλασίους τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὅνταν δηλονότι ἐν μονάσι λ'. πάλιν ἐπεὶ δ πρῶτος σὺν τῷ τετάρτῳ τετραπλάσιός ἔστι τῶν δύο

μέσων δευτέρου καὶ τρίτου, ὡς τέσσαρα πρὸς ἓν, ᾧ  
 ἔστιν δμοῦ πέντε, τετράκις ποιῶ τὰ ρχ', γίνεται υπ',  
 μερίζω παρὰ τὸν ε' καὶ ἔχω μέρος ἓν τὰς ις'. το-  
 σούτων οὖν φημι μονάδων εἶναι τὸν πρῶτον σὺν τῷ  
 τετάρτῳ, οἵπερ τετραπλάσιοί εἰσι τῶν δύο μέσων ἓν 5  
 μονάσιν ὄντων κδ'. κατὰ συνδυασμὸν οὖν εὑρημένων  
 τῶν ἀριθμῶν, οὐδέπω δὲ καθ' εαυτοὺς διακεκριμέ-  
 νων, ἔφοδον ἡμῖν τῆς διακρίσεως παρέχει ἡ τοῦ  
 Θυμαρίδου ἐπανθήματος γνῶσις. συγκεφαλαιωθέντων  
 γὰρ δμοῦ τῶν κατὰ τὰς συζυγίας ἀριθμῶν, λέγω δὲ 10  
 τοῦ π' καὶ ι' καὶ ις', τὸ σύμπαν ἔσται σξις'. |

92 ἀφαιρῶ δὴ τὸν ἔξ αρχῆς μερισθέντα εἰς τοὺς τέσ-  
 σαρας ὄρους τὸν ρχ', καὶ λείπεται μοι ρμις', ὃν ἐπεὶ  
 τέσσαρές εἰσιν οἱ μερισάμενοι τὸ ἥμισυ ἔξει ὃ κατὰ  
 τὴν πρώτην συζυγίαν ἰδιον δ π'. ἔστι δὲ ἥμισυ δ ογ', 15  
 καὶ τὰ λοιπὰ ἀπὸ τῶν π' τὰ ξ' ἔσται τοῦ δευτέρου  
 ὄρου. ἐπειδὴ ἡ δευτέρα συζυγία περιέχει ἀριθμὸν  
 τὸν ι', πάλιν ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ι' τὸν ογ', καὶ λείπε-  
 ται ιξ', ᾧ φημι εἶναι τοῦ τρίτου ὄρου. ἐπεὶ δὲ καὶ  
 ἡ τρίτη συζυγία ις' ἔστι μονάδων, πάλιν ἀφαιρῶ τὰ 20  
 ογ', καὶ τὰ λοιπὰ κγ' προσνέμω τῷ τετάρτῳ ὄρῳ.  
 καὶ οὕτως γίνεται μοι δ πρῶτος ὄρος τῶν ογ', ὡσανεὶ  
 γνώμων τῆς τῶν συζυγιῶν εὑρέσεως, ὃστε καθ' ἔκα-  
 στον ἰδίᾳ διακεκριμένους τοὺς τέσσαρας εὑρεθῆναι  
 ἔφεξῆς ὄντας ογ' ιξ' κγ', οἵπερ εἰσὶν δμοῦ ρχ' περι- 25  
 ἔχοντες τοὺς εἰρημένους λόγους τόν τε διπλάσιον καὶ  
 πενταπλάσιον. πρώτιστοι μὲν οὖν οὗτοι καὶ πυθμενι-  
 κοὶ ἀριθμοὶ ἐν τελείαις μονάσιν τοὺς εἰρημένους λόγους

ἐπιδέχονται. εἰ δὲ καὶ μερίζειν θέλοιμεν τὴν μονάδα καὶ τὸν κατ' αὐτὴν εἰδοποιηθέντας ἀριθμοὺς περισσοὺς εἰς δύο ἴσα, φανήσονται καὶ οἱ τῶν προκειμένων ἀριθμῶν ἡμίσεις τοὺς αὐτοὺς περιέχοντες λόγους ὅ 93  
 5 τε λεῖ('' καὶ δὲ γ'('' καὶ δὲ η'('' καὶ ια'('', ὃν καὶ τὰ συγκεφαλαιώματα ξ', ἃτινα ἡμίση ἔσται δηλονότι τοῦ προτέρου συγκεφαλαιώματος τοῦ ριχ'. εἰ δὲ καὶ πολλαπλασίους τῶν ἐξ ἀρχῆς ποιῶμεν καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασίου εἶδος, ἢ ἐπιμορίους, ἢ ἐπιμερεῖς, οἱ γε-  
 10 νόμενοι πάντας τοὺς αὐτοὺς λόγους περιέχουσιν. ἵνα δὲ τεσσάρων ἄλλων ἀριθμῶν ἐκτεθέντων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τοῖς προτέροις δμοταγεῖς κατὰ συνδυασμὸν τὸν προειρημένον τῶν δμοιοτάτων, ἀντὶ μὲν πολλαπλασίων γενικῶς <ὑποπολλαπλάσιοι γίνωνται>, εἰδικῶς δὲ ἀντὶ 15 μὲν διπλασίων ἡμιόλιοι, ἀντὶ δὲ τριπλασίων ἐπίτριτοι, ἀντὶ δὲ τετραπλασίων ἐπιτέταρτοι, λαμβάνω κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον, ἐπεὶ ἡμιόλιον λόγου χρεία, ἀντὶ διπλα-  
 20 σίου τὸν πρῶτον δυνάμενον ἡμισυ παρασχεῖν, τουτέστι τὸν δύο, ὅσπερ ἦν καὶ πρῶτος διπλάσιος ἐπὶ τῶν προτέρων ἀριθμῶν, καὶ πεντάκις αὐτὸν ποιῶ, διότι σύστημά ἔστι τὰ ε' τῶν τὸν ἡμιόλιον λόγον περιεχόν-  
 των τοῦ γ' καὶ β'. καὶ ἐπεὶ ἀντὶ τριπλασίου ἐπιτρί-  
 του λόγου χρεία, πυθμὴν δὲ ἐπιτρίτων δ δ' πρὸς γ'  
 ἔστιν, δμοῦ ξ', ποιῶ ταῦτα δεκάκις, γίνεται ο'. |  
 25 πάλιν ἐπεὶ χρεία ἐπιτετάρτου ἀντὶ τετραπλασίου, ἔστι 94  
 δὲ πυθμὴν ἐπιτετάρτων ε' πρὸς δ', ἣ ἔστι δμοῦ θ',  
 δεκάκις ποιῶ τὸν ο', γίνεται χλ'. οὗτος οὖν ἔσται δ συνέχων τοὺς περιεκτικοὺς τῶν εἰρημένων λόγων ἀριθ-

μούς. καὶ ἐπεὶ ἡμιολίου λόγου χρεία, διότι τοὺς πρώτους δύο ἀριθμοὺς τῶν ὑστέρων δύο ἡμιολίους εἶναι δεήσει, ἔστι δὲ ὁ πρῶτος λόγος ἐν τοῖς ἡμιόλιον λόγον περιέχουσι πυθμέσιν δὲ γ', τοὶς ποιῶ τὸν χλ' καὶ <γίνεται> μωρόν, ἢ μερίζω παρὰ τὸν ε', ὃ ἔστι σύστημα 5 τῶν πυθμενικῶν ἡμιόλιον, καὶ ἵσχω πέμπτον μέρος τὸν <τοη̄> ἀριθμὸν, <δν> φημι εἶναι πρώτην συνυγίαν τῶν ἀναφανησομένων πρώτου καὶ δευτέρου ἀριθμοῦ, οἱ ἔσονται ἐν τῇ ἐκθέσει ἡμιόλιοι τῶν ὑστέρων δύο. πάλιν δὲ ἐπιτρόπου λόγου χρεία, διότι τὸν πρῶτον 10 καὶ τὸν τρίτον ἀριθμὸν συνάμφω ἐπιτρόπους χρὴ εἶναι δευτέρου καὶ τετάρτου, ἔστι δὲ πρόλογος ἐν ἐπιτρόπῳ πυθμέσιν δὲ δ', τετράκις ποιῶ τὸν χλ', γίνεται βφκ', ἢ μερίζω παρὰ τὸ συναμφότερον τῶν τὸν ἐπίτροπον λόγον περιεχόντων πυθμένων, τουτέστι τὸν ξ', καὶ 15 95 ἵσχω μέρος ξον τὸν τξ' ἀριθμὸν, ὃς γίνεται μοι | δευτέρας συνυγίας τῶν ἀναφανησομένων πρώτου καὶ τρίτου ἀριθμοῦ, οἱ συνάμφω ἐπίτροποι ἔσονται δευτέρου καὶ τετάρτου. δμοίως διότι ἐπιτετάρτου λόγου χρεία, ἵνα πρῶτος καὶ τέταρτος συνάμφω τῶν δύο μέσων ἐπι- 20 τέταρτοι ὥσιν, ἔστι δὲ πρόλογος ἐν ἐπιτετάρτῳ πυθμέσι <δε ε̄>, ποιῶ πεντάκις τὸν χλ', γίνεται γρν', ἢ μερίζω παρὰ τὸ συναμφότερον τῶν τὸν ἐπιτέταρτου λόγον περιεχόντων πυθμένων, τουτέστιν θ', καὶ ἵσχω μέρος θον τν', ἢ δὴ λέγω τρίτην εἶναι συνυγίαν πρώ- 25 του καὶ τετάρτου ἀριθμοῦ, οἱ συνάμφω ἐπιτέταρτοι

γενήσονται δευτέρου ἄμα καὶ τρίτου. ἵνα δὲ καὶ διακόνω εἰς τὸν ξητουμένους τέσσαρας ἀριθμοὺς τὰς τρεῖς συζυγίας, χρήσομαι τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ τοῦ Θυμαριδείου ἐπανθήματος. συγκεφαλαιῶ γὰρ πάλιν τοὺς τῶν 5 συζυγιῶν ἀριθμοὺς τόν τε τοη' καὶ τὸν τξ' καὶ τὸν τν', ἵν' ἦ μοι τὸ ἀθροισθὲν πλῆθος ἀπη', καὶ πάλιν ἀφαιρῶ τὸ ἔξ ἀρχῆς συγκεφαλαίωμα χλ'. καὶ ἐπειδὴ τέσσαρές εἰσιν οἱ ξητούμενοι ὅροι, τὸ ἥμισυ τοῦ λειπομένου ἀριθμοῦ τοῦ υνη' τὰ σκδ' προσνέμω τῷ πρώτῳ ὅρῳ 10 τῶν ξητουμένων, ὃς πρὸς τοὺς λοιποὺς τρεῖς τὴν σύγκρισιν ἔχει. ἀπὸ δὲ τοη', | ὅσπερ ἦν τῇ πρώτῃς 96 συζυγίας ἀριθμός, ἀν ἀφέλω τὰ σκδ', λείπεται μοι ρμδ'. τοῦτον οὖν φημι τὸν δεύτερον ἐν τῇ ἐκθέσει ἀριθμὸν εἶναι. πάλιν ἐπεὶ ἡ δευτέρα συζυγία ἀριθμός ἔστιν δ 15 τῶν τξ', ἀφαιρῶ τὸν αὐτὸν σκδ' καὶ λείπεται μοι ρλα', ὃν φημι εἶναι τρίτον ὅρον ἐν τῇ ἐκθέσει. δμοίως ἐπεὶ τρίτης συζυγίας ἔστι τὰ τν', ἀφέλω σκδ', λείπω ρκα' καὶ ἵσχω τὸν τέταρτον. δμοῦ οὖν τῶν τεσσάρων ὅρων τάξει τούτων σκδ' ρμδ' ρλα' ρκα' δ μὲν πρῶτος 20 καὶ δεύτερος συνάμφω ἔσονται τρίτου τε καὶ τετάρτου ἥμιόλιοι, πρῶτος δὲ ἄμα καὶ τρίτος δευτέρου καὶ τετάρτου ἐπίτριτοι, πρῶτος δὲ πάλιν καὶ τέταρτος συνάμφω δευτέρου τε καὶ τρίτου ἐπιτέταρτοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ ταῦτα μὲν ἔξωθεν ἥμιν εἰς ἔνδειξιν τῇς 25 τῶν ἀριθμητικῶν ἐπανθήματων γλαφυρίας οὐκ ἀσκόπως παρηδολεῖσθω.

'Ἐπανιτέον δὲ ἐπὶ τὴν τῶν πολυγώνων θεωρίαν καὶ

προσεκτέον πῶς καὶ καθ' ὅλων αὐτῶν τὸ διάγραμμα  
 συμβαίνοι τὸν συνεχεῖς ἀπὸ μονάδος ἀριθμούς, εἰ  
 προεκτεθείησαν κατὰ πρῶτον στίχον, γνώμονας εἶναι  
 97 τοῦ συνεχοῦς αὐτοῖς τριγωνικοῦ στίχου, τοῦ δὲ παρ'  
 ἐνα τὸν παρ' ἐνα καὶ τοῦ παρὰ δύο τὸν παρὰ δύο καὶ 5  
 <τοῦ παρὰ τρεῖς τὸν> παρὰ τρεῖς καὶ ἔξῆς ἀκολούθως.  
 καὶ οἱ μὲν τοῦ ἑπταγώνου πάντες γνώμονες δμοκατάλητοι  
 ἔσονται τοῖς πρώτοις δυσὶ τῷ τε α' καὶ τῷ σ', οἱ δὲ  
 τῶν ἄλλων κατ' ἄλλας καὶ ἄλλας θεωρίας, ὥσπερ ἐν τῇ  
 τοῦ ἔξαγώνου ἐκθέσει πάντες οἱ τέλειοι εὑρεθήσονται. 10  
 καὶ ἴδιόν τι τοῖς ἔξαγώνοις συμβεβηκός ἔσται τὸ καὶ  
 τριγώνοις εἶναι πᾶσιν, οὐκέτι μὴν τοῖς τριγώνοις πᾶσι  
 τὸ καὶ ἔξαγώνοις εἶναι συμβήσεται, ἀλλ' ἡ μόνοις τοῖς  
 παρ' ἐνα, τουτέστι τοῖς ἡμίσεσι τοῖς α' σ' ιε' κη' με',  
 ἵνα καὶ ἐνταῦθα τὸ ἡμισυ τῷ δύο οἰκείως συζυγῇ. 15  
 ἐπεὶ γὰρ διπλάσιος ὁ ἔξαγωνος καταστὰς γωνίας τε  
 καὶ πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, διὰ τοῦτο τὸν ἡμίσεις  
 παρέξει ἀφ' ἑαυτοῦ ὁ τριγωνικὸς στίχος ἔξαγώνους, οἱ  
 δὲ ἐν τῇ ἐκθέσει τῶν ἔξαγώνων τέλειοι ἄμα καὶ τρί-  
 γωνοί εἰσιν. ἐν δὲ τῇ τοῦ πενταγώνου, ἐνθα δύο 20  
 ἀρτιοι ἀνὰ μέσον τῶν δύο συζυγιῶν περισσῶν, ὁ μὲν  
 ἔτερος ἀναγκαίως τῶν ἀρτίων ἀρτιοπέρισσός ἔστιν, ὁ  
 δὲ λοιπὸς περισσάρτιος. καὶ πολλὰ ἄλλα παρακολου-  
 θήματα γλαφυρὰ εὗροι τις ἀν συντείνων ἑαυτὸν συμ-  
 98 βεβηκότα τῷ τῶν πολυγώνων διαγράμματι, οἷον ὅτι 25  
 ἐπὶ βάθος οἱ πρῶτοι μετὰ τὰς μονάδας δὲ φεξῆς  
 ἀριθμός ἔστιν, οἱ δὲ δεύτεροι κοινῇ μὲν διαφορᾶ

χρώμενοι τριάδι, τάξει δὲ οἱ ἐπιμέροιοι ἀφ' ἡμιολίου  
 ἀρχόμενοι, οἱ δὲ τρίτοι ἐπιμερεῖς κοινῇ μὲν ἔξαδα  
 διαφορὰν ἔχοντες δυομαζόμενοι δὲ τάξει τινὶ ἄλλῃ  
 πρὸς ἄλλήλους· ἐπιτριμερεῖς μὲν γάρ, ἄλλα πέμπτα  
 5 τὰ μέρη ἐπὶ τοῦ πρώτου, ἐπὶ δὲ τοῦ ἔξης δύγδοα, εἶτα  
 ἐνδέκατα, εἶτα τεσσαρεσκαιδέκατα, ἔξης ἀκολούθως, δυο-  
 μαζομένων τῶν μορίων ἀεὶ κατὰ τὸ τοῦ ὑπολόγου  
 ἡμισυ καὶ τῇ συζυγίᾳ τῆς ἐπιμερότητος. ἐμφανέστερον  
 δὲ εὐρίσκεται δὲν τῷ διαγράμματι ἔκαστος μὲν τε-  
 10 τριάγωνος σύστημα ὃν τοῦ ὑπὲρ αὐτοῦ τριγώνου καὶ  
 τοῦ πρὸ ἐκείνου δμοειδοῦς, ἅπας δὲ πεντάγωνος τοῦ  
 κατ' αὐτὸν ἐπὶ βάθος τριγώνου | καὶ δὶς τοῦ πρὸ 99  
 ἐκείνου, καὶ πᾶς ἔξαγωνος τοῦ κατ' αὐτὸν ἐπὶ βάθος  
 τριγώνου καὶ τρὶς τοῦ πρὸ ἐκείνου, καὶ ἑπτάγωνος  
 15 δμοίως τοῦ κατ' αὐτὸν καὶ τετράκι τοῦ πρὸ ἐκείνου,  
 καὶ ἀεὶ τὸ αὐτὸ συμβήσεται κατὰ πρόσθεσιν μονάδος  
 τῆς ποσότητος παραυξομένης. πάλιν δὲύτερος τε-  
 τριάγωνος δέ σ' σύστημά ἔστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν τριγώνου  
 τοῦ ἔξ καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου γ', ώς εἰρηται. δέ δέ 20  
 τοῦτον πεντάγωνος ιβ' σύστημά ἔστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν  
 τετραγώνου τοῦ δέ καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου τετραγώνου  
 τοῦ δέ, παρὰ τὸν ε', διαγωνίου κειμένου αὐτῷ ἐνὸς  
 τριγώνου. δέ δέ 25 τοῦτον ἔξαγωνος δὲ ιε' σύστημά  
 ἔστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν πενταγώνου τοῦ ιβ' καὶ τοῦ πρὸ<sup>25</sup>  
 ἐκείνου ε', παρὰ δὶς τὸν αὐτὸν τρίγωνον τὸ πρῶτον α'.  
 δέ δέ 30 ὑπ' αὐτὸν ἑπτάγωνος δὲ ιη' ἐκ τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν  
 ἔξαγώνου τοῦ ιε' καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου τοῦ σ', παρὰ  
 τρὶς τὸν αὐτὸν τρίγωνον τὸ α'.

οἱ γὰρ ἐνεργεία

πρῶτοι πολύγωνοι οἱ μετὰ τὰς δυνάμει μονάδας τεταγμένοι παρ' οὐδὲν ἔσαν, ἀλλά πως ἐκαστος ἐκ τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου. πάλιν δὲ ἐξ ἄλλης ἀρχῆς δι' ις' τετράγωνος κατὰ τὸν τέταρτον ἐπὶ πλάτος στίχον τεταγμένος σύστημά ἔστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν τρι- 5  
 100 γώνου τοῦ ι' καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου σ' δμοίως παρ' οὐδέν. δι' δὲ ὑπ' αὐτὸν πεντάγωνος δι' κβ' σύστημα τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν τετραγώνου τοῦ ις' καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου τοῦ δ', παρὰ τὸν ἐνεργείᾳ πρῶτον τριγώνου τὸν γ', διαγώνιον δύντα πρὸς αὐτόν. δι' δὲ ὑπ' αὐτὸν 10 ἑξάγωνος δι' κη' συνέστηκεν ἐκ τε τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν κβ' πενταγώνου καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου ιβ', παρὰ δἰς τὸν αὐτὸν τριγώνου τὸν γ'. δι' δὲ ὑπ' αὐτὸν ἑπτάγωνος δι' λδ' σύστημά ἔστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν ἑξαγώνου τοῦ κη' καὶ τοῦ πρὸ ἐκείνου ιε', παρὰ τρὶς [καὶ] τὸν αὐτὸν 15 τριγώνου τὸν γ'. καὶ ἑξῆς δμοίως τὸ αὐτὸν συμβήσεται συμπροκοπτόντων τοῖς ἑξῆς ἐπὶ τὸ πλάτος λαμβανομένοις πολυγώνοις καὶ τῶν γνωμονικῶν τριγώνων. δι' μὲν γὰρ ἐφεξῆς εἰς τὸ ἔπος στίχος τῶν πολυγώνων, οὗ ἄρχει δι' ιε' τριγώνος, διεκταθήσεται δμοίως τοῖς 20 προειρημένοις κατὰ τὸν ι' τριγώνον· δι' δὲ μετ' αὐτόν, οὗ ἄρχη κα', κατὰ τὸν ιε'. καὶ ἀεὶ δμοίως διεκταθήσεται ἡ προκοπὴ τῶν πολυγώνων καὶ τῶν εἰδοποιούντων αὐτοὺς τριγώνων, ὥστε καθολικὸν ἐπ' αὐτῶν εἶναι θεώρημα τοῦτο· ἐκαστος γὰρ πολύγωνος σύστημά 25  
 101 ἔστι τοῦ ὑπὲρ αὐτὸν μονάδι μικρωνυμωτέρου καὶ τριγώνου τοῦ ἐνὶ βαθμῷ ὑποβεβιβασμένου. καὶ τὰ μὲν

τοῖς ἐπιπέδοις ἀριθμοῖς συμβαίνοντα ὡς ἐν ἐπιδρομῇ  
ἐπὶ τοσοῦτον ἡμῖν δεδείχθω.

Ἐπεὶ δὲ καὶ περὶ ἐτερομηκῶν λέγειν καιρός, διότι 102  
τῆς τῶν ἐπιπέδων ἴδιότητός εἰσι καὶ αὐτοί, ἄξιον  
5 θαυμάσαι τῶν περὶ Πυθαγόραν τὴν περὶ τὰ μαθήματα  
σπουδῆν τε καὶ ἀκρίβειαν· κατιδόντες γὰρ οἱ σοφώ-  
τατοι πάντας τοὺς ἐν ἀριθμῷ λόγους ποικιλωτάτους  
ὄντας καὶ ἀπείρους τὸ πλῆθος ἀπὸ μονάδος ἅπαντας,  
ῶσπερ ἀπὸ κοινῆς τινος φύσης, φυομένους καὶ εἰς τὸ  
10 ἐνεργείᾳ ἀπὸ δυνάμεως μενισταμένους ἀρτίους τε καὶ  
περισσοὺς καὶ καθ' ἑκάτερον τοὺς εἰδικοὺς αὐτῶν τε-  
λείους τε καὶ τοὺς ἐναντίους, ἔτι μὴν καὶ τὰς δέκα  
σχέσεις ἀπ' αὐτῆς πλασσομένας, πολυγώνους τε καὶ  
ἐπιπέδους ἀπὸ τριγώνου μέχρις ἀπείρου, ἔτι μὴν καὶ  
15 στερεούς, ὡς ἔξῆς δειχθῆσται, κατὰ πᾶν εἶδος στε-  
ρεοῦ, σφαιρικοὺς λέγω καὶ κυβικοὺς καὶ πυραμιδικούς,  
πλευρικούς τε καὶ διαμετρικούς, καὶ ἀπλῶς ἅπαντα  
ὅσα συμβέβηκε τοῖς ἀριθμοῖς προσεμφαινόμενα τῇ μο-  
νάδι | ἐκείνην τε καὶ ἀπ' ἐκείνης διατρανούμενα δὲ 103  
20 μόνον λόγον τὸν ἐτερομηκὸν ἐν ἀπάσῃ τῇ θεωρίᾳ  
τῇ ἀριθμητικῇ κατὰ μηδὲν αὐτῇ κοινωνοῦντα μήτε ἐν  
τῷ μεταλαμβάνειν μήτε ἐν τῷ μεταδιδόναι, ἀλλ' ὥσπερ  
ἀντίξουν αὐτῇ καὶ ἐτερογενῆ ἐπίτηδες ὑπ' αὐτῆς τῆς  
φύσεως ἀναδειχθέντα πως. κατὰ τὴν τῶν ἀρχῶν τού-  
25 των ἐναντιότητα τῶν ὄντων ἀπάντων συνισταμένων,  
ὡς ἔξῆς ἐπιδειχθῆσται, ἢ τῆς ἀρμονίας οὐσία χώραν

ἀναγκαίως ἔχει, εἰ γε ‘συναρμογά τίς ἐστι καὶ ἐνώσις τῶν διχοφωνεόντων καὶ τῷ φύσει πολεμίων ἀρμονία’ κατὰ τοὺς Πυθαγορείους, καὶ ἄλλως ἵνα τὰ καθόλου κάνταῦθα διαφυλάττηται τὸ ‘μηδὲν εἶναι ἐν τοῖς οὖσιν οὐ τὸ ἐναντίον οὐκ ἔστιν’. εὐθὺς οὖν 5 καὶ ἔξ αὐτοῦ τοῦ δυνάματος τῆς ἐτερότητος τὴν ἐναντιότητα συνιδεῖν ἔστι· ταῦτὸν γὰρ ἐναντία. ἡ δὲ ταυτότης καὶ ἐνότης περὶ τὴν τῆς μονάδος φύσιν φαντάζεται, ὅπως καὶ μονάδα ἔφαμεν αὐτὴν κεκλησθαι διὰ τὸ μονὴν καὶ στάσιν ἔχειν αὐτῆς τὸν λόγον, εἴτε καθ’ ἑαυτὴν ἔξε- 10 τάξοιτο, εἴτε καὶ σὺν ἄλλῳ ὕτινιοῦν εἴτε ἀριθμῷ εἴτε 104 ὅγκῳ· εἴτε μεγέθει πληθιάζοι καὶ ἀνακίρναιτο, | στάσιν αὐτῷ καὶ ταυτότητα παρέχει· ἅπαξ γὰρ τὰ ἑκατὸν ρ', καὶ ἅπαξ τὸ τριγωνον τριγωνον, καὶ ἅπαξ δ ἄνθρωπος ἄνθρωπος, καὶ ἐπὶ πάντων δμοίως. καὶ μὴν καὶ ὅτι 15 τῶν περισσῶν εἰδοποιὸς ἐφάνη οὖσα ἡ μονὰς ἴδιως, γνώμονες δὲ τετραγώνων ἐφάνησαν δυτες οἱ περισσοί, ταυτότητα δὲ καὶ ἴσότητα ἐνείδομεν τοῖς τετραγώνοις ὑπάρχονταν, εὐλόγως ἂν ἡ ταυτότης ἀπὸ μονάδος καὶ διὰ μονάδα τοῖς ἀλόγοις συμβαίνειν λέγοιτο. εἰ δὲ ἡ 20 ταυτότης κατὰ μονάδα, ἡ ἐτερότης κατὰ τὴν ἐναντίαν δύναμιν συμβήσεται τοῖς οὖσιν· πάλιν γὰρ αὕτη φανησται ἴδιως τοὺς ἐτερομήκεις εἰδοποιοῦσα καὶ μηδὲν τῆς μονάδος εἰς τὴν πλάσιν αὐτῶν δεομένη, ἀλλ' εὐθὺς ἐτερότητα καὶ παρατροπὴν τῆς διὰ μονάδα 25 ταυτότητος κατὰ τὰς πλευρὰς ἀπογεννῶσα. παρὰ μο-

νάδα γὰρ ἵσας τὰς πλευρὰς παντὸς ἑτερομήκους ἀποφαίνει, διότι καὶ αὕτη παρὰ μονάδα ἵση ἔστι τῇ μονάδι, καὶ πρώτη ἀνισότητος αἰτίᾳ γενήσεται καὶ μείζονος καὶ ἐλάττονος ἐμφαντική. καὶ ἡ συνήθεια τὸ 5 ἑτερον ἐπὶ δυοῖν λέγει· ὅθεν καὶ οἱ γεννῶντες τὸν ἑτερομήκη δύο τέ εἰσιν ἀριθμοὶ καὶ μονάδι ἀλλήλων διαφέροντες. ἐκ ταύτοῦ, ὁ δὴ καὶ ἵσον καὶ ὅμοιον, ἐξ ἑτέρου, ὁ δὴ καὶ ἄνισον | καὶ ἀνόμοιόν ἔστιν, ὡσαν- 105 εὶ ἐκ δύο στοιχείων πάντα διαφερόντων, γίνεσθαι 10 ἔδοξε τοῖς ἀπὸ Πυθαγόρου πρώτιστα μὲν τὰ ἐν ἀριθμοῖς συμπτώματα διὰ τὴν τῆς δυάδος πρὸς μονάδα ἐναντιότητα, κατὰ δὲ τὴν τούτων ἥδη μετουσίαν καὶ ἀφομοίωσιν καὶ τὰ ἐν κόσμῳ πάντα· τὰ μὲν γὰρ ἄλλα πάντα τὸν ἀριθμὸν φαίνεται μιμούμενα, δὲ δὲ ἀριθμὸς 15 παρ' ἑαυτοῦ ἀρχὰς μονάδα καὶ δυάδα. ὡς οὖν ἀπὸ πάντων τῶν τέσσαρας πλευράς τε καὶ γωνίας ἔχόντων σχημάτων συστείλαντες τὸ ὄνομα τετράγωνον ἐκαλέσαμεν τὸν πάσας πλευράς τε καὶ γωνίας ἵσας ἔχοντα, οὔτως καὶ ἑτερομήκη καλέσομεν ἀπὸ πάντων τῶν τῆς 20 ἑτερότητος εἰδῶν κατὰ τὰς πλευρὰς τὸν ἐγγυτάτω τῆς ἑτερότητος τὴν παρατροπὴν ἐμφήναντα, τουτέστι τὸν παρὰ μονάδα τὸ ἑτερον ἐν τοῖς μήκεσιν ἐσχηκότα, ἀντιδιεσταλμένως λεγόμενον τῷ αὐτομήκει. ὅπερ πάλιν οὐ συνιδὼν ὁ Εὐκλείδης συνέχεε κάπι τούτῳ τὴν τῆς 25 θεωρίας ἐξαλλαγὴν καὶ ποικιλίαν, οἰηθεὶς ἑτερομήκη εἶναι τὸν ἀπλῶς ὑπὸ διαφόρων δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιασθέντων γινόμενον καὶ | μὴ διακρινόμενος αὐτοῦ 106 <τὸν> προμήκη, ὅπερ εἰ συγχωρήσειέ τις αὐτῷ, συμβῆσεται τὰ ἐναντία ἀσυνύπαρκτα φύσει ὅντα ἄμα καὶ

περὶ τὸ αὐτὸν εὐρίσκεσθαι· τὸν αὐτὸν γὰρ ἀριθμὸν τετράγωνον ἀλλὰ καὶ ἑτερομήκη ἀποφαίνει δὲ ἐκείνου λόγος,  
οἷογ τὸν λεῖψαν τὸν τετράγωνον πολλούς, ὅπερ ἵσον  
ἄν εἴη τῷ τὸν περισσὸν ἀριθμὸν ταῦτὸν εἶναι τῷ ἀρτίῳ.  
εἰ δέ γε ἐκεῖνοι ἀπ' αὐτῆς τῆς φύσεως καὶ οὐχ ἡμῶν 5  
θεμένων εἴς παρ' ἓνα διευτακτοῦνται καὶ οὐκ ἄν ποτε  
συγγυθεῖεν, οὗτοις τετράγωνοι καὶ ἑτερομήκεις φυσικώτατοι καὶ αὐτοὶ εὐταξίᾳ χρήσονται ώς ἄν ἀπ' ἐκείνων τὴν πλάσιν ἔχοντες καὶ διακόσμησιν, ἡγουμένης  
καὶ ἀρχούσης τῶν μὲν περισσῶν μονάδος, δυάδος δὲ 10  
τῶν ἀρτίων· ἐκ μὲν γὰρ τῶν α' γ' ε' ξ' θ' ια' ιγ'  
ιε' ιξ' ιθ' καὶ ἐφορούονται συντιθεμένων, γίνονται  
τετράγωνοι οἱ α' δ' θ' ις' κε' λεῖψαν μονάδας ξδ' πα' ρ'  
ἐκ δὲ τῶν β' δ' σ' η' ι' ιβ' ιδ' ις' ιη' κ' ἑτερομήκεις οἱ β' σ' ιβ' κ' λ' μβ' νς' οβ' ι' ρι'. καὶ οἱ 15  
μὲν ἵσακις ἵσοι πλευρὰς ἔχουσι τοὺς ἀπὸ μονάδος  
ἐφεξῆς ἀριθμούς, οἱ δὲ ἀνιδάκις ἀνισοί ἔγγιστα, τουτέστι παρὰ μονάδα τοὺς ἀπὸ μονάδος ἐφεξῆς σύνδυο,  
107 κατὰ τὸν συνημμένον τρόπον ἐκλεγομένους, | ἵνα καὶ  
αἱ πλευραὶ μονάδι ἀλλήλων διαφέρωσιν. ἐν μὲν οὖν 20  
τῇ τῶν τετραγώνων γενέσει ἡ μονὰς τὴν αἰτίαν ἀποφέρεται τῆς συστάσεως· ἐν τε γὰρ τῇ τῶν γυναικῶν περιθέσει αὕτη ἐστὶν ἡ προϋφισταμένη, ἀνευ δὲ αὐτῆς  
καθ' αὐτοὺς τῶν περισσῶν ἡ ἐπισύνθεσις οὐκ ἄν  
γεννήσει τετραγώνους, ἐν τε τῇ κατὰ τὸν λεγόμενον 25  
ρίαυλον ἐπισωρείᾳ τῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν παρέχει ἑατὴν ἡ μονὰς ὕσπληγά τε καὶ νύσσαν καθ' ἐκάστην

επισύνθεσιν· ἀπ' αὐτῆς τε γὰρ ἡ τῆς προβάσεως ἀρχὴ γίνεται κατὰ τὴν γένεσιν ἐκάστου τετραγώνου, ὡς ἀπὸ ὕσπληγος μέχρι ὥσανεὶ καμπτῆρος τῆς τοῦ ἀποτελεσθησομένου πλευρᾶς, καὶ πάλιν ἐπ' αὐτὴν ἡ ἐπάνοδος 5 ὡς ἐπὶ τινα νύσσαν, κατὰ διαφόρησιν πάντων τῶν ἀριθμῶν καὶ αὐτῆς, πλὴν τοῦ καμπτῆρος, ὅπερ καὶ πλευρὰ ἔσται τοῦ κατ' αὐτὸν τετραγώνου. οὗτος γὰρ καὶ συμβήσεται ἐκάστου τῶν ἀριθμῶν μέχρις ἑαυτοῦ τὴν ἀπὸ μονάδος πρόβασιν ἀναδεχόμενον καὶ ἀπ' αὐτοῦ τὴν ἀνάκρουσιν τῆς παλινδρομίας ὡς ἐπὶ μονάδα ποιούμενον πλευρὰν τετραγωνικὴν ὑπάρχειν, τὸν μὲν δύο πλευρὰν τοῦ τέτταρα τετραγώνου· α' γὰρ καὶ δύο 108 καὶ ἔξ ὑποστροφῆς πάλιν δ' α', δ' γίνεται τετράγωνος. τὸν δὲ γ' τοῦ θ'. α' γὰρ καὶ δύο καὶ τρία καὶ 15 ἔξ ὑποστροφῆς β' καὶ α', δ' θ' τετράγωνος. τὸν δὲ τέταρτον δ' τοῦ ις'. α' γὰρ καὶ β' γ' δ' <καὶ ἔξ ὑποστροφῆς γ' β' α', δ' ις' τετράγωνος>. καὶ μέχρι ὅσου τις θέλει διελεγχέτω, εὔροι ἀν πάντας μὲν τοὺς ἐντὸς τοῦ ὑστάτου ἀριθμοῦ, ὃς ἔστι πλευρὰ τοῦ τε- 20 τραγώνου, διαφορούμένους ἐν τῇ συνθέσει κατά τε τὴν ἀπὸ μονάδος πρόοδον καὶ τὴν εἰς αὐτὴν ἐπάνοδον· μόνον δὲ τὸν πλευρικὸν ἀδιαφόρητον, καὶ ἀρχῆς τε ἄμα καὶ τέλους καὶ πρὸς τούτοις μεσότητος λόγον ἔχοντα, ἀρχῆς μὲν διότι ἀπ' αὐτοῦ ἡ ἐπάνοδος εἰς 25 μονάδα, τέλους δὲ διότι ἐπ' αὐτὸν ἡ πρόοδος ἀπὸ μονάδος, μεσότητος δὲ διότι δρίζει τὴν τε πρόοδον καὶ ἐπάνοδον, ὥσανεὶ καμπτῆρον ὑπάρχων, καὶ μή τι διὰ τοῦτο δύναμίς ἔστιν αὐτοῦ τὸ πᾶν συγκεφαλαίωμα

τῶν ἐπισυντιθεμένων ἀριθμῶν κατά τε πρόοδον καὶ ἐπάνοδον, ἐπειδὴ ὥσπερ ἐν ἀκροπόλει μόνος τεταγμένος δορυφορεῖται ὡς ὑπὸ δυνάμεως τῶν λοιπῶν 109 ἀριθμῶν κατὰ πρόβασιν. ἐν δὲ τῇ τῶν ἐτερομηκῶν συστάσει εἴτε γνωμονικῶς δέοι περιτιθέναι τινὶ τὴν 5 ἐπισωρείαν τῶν ἀρτίων, ή δυάς μόνη φανήσεται ἀναδεχομένη καὶ ὑπομένουσα τὴν περιθεσιν, ἄνευ δὲ αὐτῆς οὐ φύσουται ἐτερομήκεις· εἴτε κατὰ τὸν αὐτὸν δίαυλον οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ συνσωρεύοιντο, ή μὲν μονὰς ὡς ἀν ἀρχὴ οὖσα πάντων κατὰ τὸν Φιλόλαον 10 ('οὐ γὰρ ἐν' φησιν 'ἀρχὰ πάντων') καὶ τοῖς ἐτερομήκειν εἰς γένεσιν ὕσπληγα δμοίως ἔαυτὴν παρέξει, οὐκέτι δὲ καὶ νύσσα ἔσται τῆς καθ' ὑποστροφὴν παλινδρομίας καὶ ἐπανόδου, ἀλλὰ τὸ τοιοῦτον ή δυάς ἀντ' αὐτῆς ὑποστήσεται· ταύτης γὰρ αὐτῆς ἔσται ή 15 ἐπάνοδος. ἔοικε δὲ ή μὲν ἀπὸ μονάδος πρόοδος μέχρι τῶν πλευρικῶν δύο ἀριθμῶν, οἵπερ καμπτήρων λόγον ἔξινσιν ἐπὶ τῶν ἐτερομηκῶν γενέσει προϊούσῃ ἀπὸ τῆς κοινῆς πάντων ἀρχῆς ὠσανεὶ ἐπ' ἀκμὴν αὐτοὺς τοὺς καμπτήρας, ή δὲ ἀπὸ τούτων ἐπάνοδος ὥσπερ τις 20 ἀνάλυσις οὖσα καὶ παρακμὴ φθορᾶ, διόπερ εὐλόγως εἰς μὲν σύστασιν καὶ αὐτῶν τῶν ἐτερομηκῶν ὡς ἀν εἰδους λόγον ἔχουσα ή μονὰς ἔαυτὴν ἐπιδώσει, εἰς δὲ ἀνάλυσιν καὶ ὠσανεὶ φθορὰν οὐκέτι, ἀλλὰ εἰς δυάδα ὑλῆς λόγον ἔχουσαν καταστρέψει, ὥσπερ δρῶμεν καὶ 25 ἐπὶ τῶν φυσικῶν τὰ ἐν γενέσει πάντα τὸ μὲν γίνεσθαι καὶ τόδε τι εἶναι καὶ ἐν εἶναι ἔκαστον ἔχοντα παρὰ τὸ

εἶδος, τὸ δὲ φθείρεσθαι καὶ μὴ εἶναι ἀλλὰ ἀοριστεῖν 110 παρὰ τὴν ὑλην· εἶδους γὰρ καὶ μορφῆς στερόμενον τὸ τόδε τι ὑλη ἀν εἴη ἀοριστος καὶ ἄποσος καὶ ἄποιος, διὰ τὴν τῆς δυάδος ἀοριστίαν καὶ ἀνισότητα. διὰ 5 τοῦτο ἰδίως τῶν ἐτερομηκῶν εἰδοποιὸς ἡ δυάς ἐφάνη οὖσα καὶ τῆς ἰδίας δυνάμεως αὐτοῖς κατὰ τὰς πλευρὰς μεταδιδοῦσα, τουτέστι τῆς ἀνισότητος· δύο γὰρ τὸ ἀνισον, ὑπεροχὴ καὶ ἔλλειψις· ἡ δὲ μονὰς τῶν τετραγώνων, διόπερ καὶ ἴσάκις ἵσοι· ἀρχὴ γὰρ τῶν ἵσων 10 τὸ ἐν καὶ ἡ μονάς, εἰ γε τὸ ἵσον ἐν πρὸς ἐν ἐστι, καὶ τὰ ἵσα καθ' ἐνα λόγον ἐστὶν ἵσα. δῆλον οὖν ὅτι ἀναλόγως ἐξ εἶδους καὶ ὑλης τὰ ἐν κόσμῳ πάντα συνέστη καὶ γίνεται, ὡς ἐκ μονάδος καὶ δυάδος τὰ ἐν ἀριθμῷ συμπτώματα πάντα. πρώτως μὲν γὰρ 15 εἰδοποιὸς ἐκατέρα ἡ ἀρχὴ τῶν δύο μηκῶν τοῦ ἀριθμοῦ, ἀρτίου λέγω καὶ περισσοῦ, δευτέρως δὲ ἡ μὲν τετραγώνων ἡ δὲ ἐτερομηκῶν, καὶ οὐκ ἐπαλλάττουσιν αἱ δυνάμεις αὐτῶν, ἀλλ' ἐναντιώταται οὖσαι κατὰ τὸν ἴδιον λόγον ἐκατέρα διατίθησι τὰ μετίσχοντα αὐτῶν· 20 ὡς γὰρ τὸ θερμὸν θερμαίνειν πέφυκε τὰ πλησιά- 111 ξοντα καὶ τὸ ψυχρὸν ψύχειν καὶ τὸ ὑγρὸν ὑγραίνειν, οὕτως καὶ αἱ τῶν ὄντων ἀρχαὶ ἄμικτοι τῶν ἄλλων δυνάμεων οὖσαι πάντα τὰ μεταλαμβάνοντα αὐτῶν κατὰ τὰς οἰκείας δυνάμεις δυθμίζουσι. πέφυκε δὲ τὸ 25 μὲν ἐν καὶ ἡ μονὰς δρίζειν καὶ περαίνειν καὶ μορφοῦν καὶ ἴσαζειν καὶ σφίζειν καὶ ὅλως ἐνοποιεῖν, ἡ δὲ δυάς μερίζειν καὶ διχάζειν καὶ φθείρειν καὶ ὅλως ἀορισταίνειν, διόπερ ἐν τῇ εἰρημένῃ γενέσει τῶν ἐτερομηκῶν εἰς τὴν αὐτῆς δυάδος σύστασιν ἡ μονὰς οὐκ-

έτι έαυτὴν παρέξει, ἀλλ' αὐτὴ καθ' αὐτὴν ἡ δυάς  
 ὡς ἀν ἀρχὴ οὖσα καὶ αὐτὴ εὔθὺς ἐτερομηκῶν ἔστι  
 πυθμήν. διότι δὲ ἐξ ἀρχῆς οὐκ ἀν εἴη, φησὶν δὲ Πλά-  
 των, οὐκ ἀν ἔτι ἀρχὴ εἴη. εὑρίσκεται δὲ ἀναλόγως  
 καὶ ἐν ταῖς κοσμικαῖς ἀρχαῖς δὲ δημιουργὸς θεὸς μὴ 5  
 ὃν τῆς ὑλῆς γεννητικός, ἀλλὰ καὶ αὐτὴν ἀίδιον παρα-  
 λαβών, εἰδεσι καὶ λόγοις τοῖς κατ' ἀριθμὸν διαπλάτ-  
 των καὶ κοσμοποιῶν. εἰς δέ γε τὰς τῶν λοιπῶν  
 ἐτερομηκῶν συστάσεις κατὰ μόνην τὴν πρόοδον, ὡς  
 ἔφαμεν, ἐπιδώσει αὐτὴν ἡ μονάς, οὐκέτι δὲ καὶ εἰς 10  
 112 τὴν ἐπάνοδον, οἷον οὗτος ἐκ τοῦ ἐν καὶ δύο | καὶ  
 τρία δὲ σ' γίνεται ἐτερομηκῆς συνεχῆς ὃν τῇ δυάδι  
 καὶ πλευρᾶς ἔχων δυάδα καὶ τριάδα, καίπερ καμπτή-  
 ρων ἀμφότεραι λόγον ἔχουσαι. ἐν μὲν γὰρ τοῖς τετρα-  
 γώνοις διὰ τὴν ταυτότητα καὶ ἴσοτητα τῶν πλευρῶν 15  
 ἔνα καμπτήρα εἶναι συνέβαινεν, ὃς δὴ πλευρικὸς ἦν  
 καθ' ἕκαστον τετράγωνον ἀριθμός· ἐνταῦθα δὲ ἐπὶ  
 τῶν ἐτερομηκῶν, ὅτι διαφόρους καὶ ἀνίσους εἶναι δεῖ  
 τὰς πλευράς, δύο καμπτήρων ἐδέησε, κατ' ἐπάνοδον  
 δ' ἐπισυνθεῖναι κωλυόμεθα ἀριθμὸν ὑπὸ τοῦ σ', ἐπεί- 20  
 περ ὑπόκειται ἡ μονάς ἀνεπίδεκτος οὖσα τῆς ἐπανό-  
 δου καὶ ἀναλύσεως· ἡ δὲ δυάς οὐδὲν ἔλαττον τῆς  
 τριάδος καμπτήρος ὑπάρχει, ἀλλ' ἴσοκρατῶς ἀμφότεροι  
 πλευρικοί εἰσιν ἀριθμοὶ τοῦ σ' ἐτερομηκούς ἐκ τοῦ δὶς  
 τρία <ἢ> ἐκ τοῦ τρὶς β' ποιοῦντες αὐτόν. ἄπαξ δὲ 25  
 χρὴ κατὰ μόνην τὴν πρόοδον ἐκ πάντων ἐτερομηκῶν  
 τοὺς καμπτήρας λαμβάνεσθαι, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν τετρα-

γώνων ἐποιοῦμεν. πάλιν ἐκ τῶν α' β' γ' δ' καὶ ἔξ  
ὑποστροφῆς μόνου τοῦ β' δὲ ιβ' τρίτος ἑτερομήκης γί-  
νεται, οὗ πλευραὶ δύο καμπτῆρες δὲ τε | γ' καὶ δὲ 113  
δ', ιβ' τετράκι γ' ἀποτελεῖται. καὶ μὴν ἐκ τοῦ α' β'  
γ' δ' ε' καὶ ἔξ ὑποστροφῆς γ' β' δὲ ἔξῆς εὕτακτος κ'  
γίνεται, πλευρὰς ἔχων καὶ αὐτὸς τοὺς δύο καμπτῆρας,  
καὶ ἐκ τοῦ τετράκι πέντε ἢ πεντάκι τέσσαρα γεννώμε-  
νος, καὶ τοῦτο μέχρι παντὸς συμβήσεται κατὰ τὴν αὐτὴν  
ἔφοδον. ἔσται οὖν καὶ τοῖς ἑτερομήκεσι ποικίλη ἡ  
γένεσις, καθὰ καὶ τοῖς τετραγώνοις, καὶ κατὰ σύνθεσιν  
καὶ κατ' ἔγκρασιν καὶ κατὰ τὸν εἰρημένον δίαυλον.  
κατὰ μὲν ἔγκρασιν, ὡς ἐγίνοντο ἐκεῖνοι ἐκ τοῦ ἅπαξ  
α' καὶ δὶς β' καὶ τρὶς γ' καὶ τετράκι δ' καὶ ἔφοδου-  
οῦν, οὗτοις οἱ ἑτερομήκεις γενήσονται ἐκ τοῦ ἅπαξ  
β' καὶ δὶς γ' καὶ τρὶς δ' καὶ τετράκι ε' καὶ ἔφεξῆς,  
κατὰ συνδυασμὸν ἔγκριναμένων δύο ἀριθμῶν μονάδι  
ἀλλήλων διαφερόντων. κατὰ δὲ σύνθεσιν, ὡς ἐκεῖνοι  
ῆσαν πρῶτον εἰς περισσὸς εἶτα δύο εἶτα τρεῖς εἶτα  
τέσσαρες καὶ ἀεὶ διοίως \*\*\*, οὐκέτι κατὰ συνδυασμὸν  
ἀλλὰ κατὰ πρόσθεσιν τὴν ἐπὶ τοῖς ἔξ ἀρχῆς. περὶ δὲ  
τῆς κατὰ τὸν λεγόμενον δίαυλον αὐτῶν γενέσεως μι-  
κρῷ πρόσθεν εἴρηται. λέγεται δὲ κατ' ἔγκρασιν ἡ  
εἰρημένη πλάσις ἐκατέρου εἶδους, διὰ δὲ | γενόμενος 114  
τοὺς γνώμονας εἰλικρινεῖς ἀποδοῦναι οὐκέτι ἔχει διὰ  
τὴν σύμφωνσιν, ἀλλ' ἐν ταῖς διακρίσεσι συμφαίνον-  
ται ἀλλήλοις, οἷον φέροντες δὲ τοῦ δὶς τρεῖς

ῶν οὐ λύεται εἰς τὸν δύο καὶ τρία, ἀλλ' ἡ σύμφθασις πλέον τι τῆς ποσότητος τῶν γνωμόνων ἀπετέλεσε. τοσαυτάκις γάρ ἐστι θάτερος τῶν γνωμόνων ἐν τῷ γεννωμένῳ, ὅσοσπερ δὲ σύζυγος αὐτοῦ ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο συνεμφαίνεσθαι ἀλλήλοις εἴρηνται, καθὰ καὶ 5 ἐπὶ τῶν ἔγκιρναμένων ὑγρῶν συμβαίνει χυλῶν τε καὶ χυτῶν καὶ τηκτῶν καὶ τῶν δμοίων· οὐ γάρ ἐστιν εἰς τὰ ἐξ ἀρχῆς τὴν διάκρισιν γενέσθαι διὰ τὸ συνεφθάρθαι καὶ συνεμφαίνεσθαι τὰς ποιότητας. κατὰ δὲ παράθεσιν καὶ σύνθεσιν εἴρηται ἡ ἑτέρα πλάσις, ὅτι δυνα- 10 τὸν λύεσθαι τοὺς ἀποτελουμένους εἰς τοὺς ἐξ ὕν συνετέθησαν, οἷον τὸν σ' ἐκ τοῦ β' καὶ δ' συγκείμενον δυνατὸν διελεῖν εἰς τοὺς αὐτούς, ὥστε καὶ πᾶν πλῆθος κατὰ σωρείαν ἡ κατὰ συναγελασμὸν συγκείμενον εἰς ἐνιαῖα διακρῖναι. μόνη δὲ ἀπὸ πάντων 15 ἀριθμῶν ἡ δυάς, ὡς ἐμπροσθεν ἐμάθομεν, τὸ κατ' ἔγκρασιν τῷ κατὰ σύνθεσιν ἵσον ἀποτελεῖ, τῶν μετ' αὐτὴν ἀριθμῶν πλέον τὸ κατὰ σύγκρασιν τοῦ κατὰ | 115 σύνθεσιν ποιούντων, τῆς δὲ πρὸ αὐτῆς μονάδος ἀνάπαιτιν ἔλαττον· διόπερ αὐτὴν ἵσην καὶ δικαίαν οἱ 20 ἀπὸ Πυθαγόρου ἐκ τοῦ συμβαίνοντος ἐκάλουν, καὶ ἐκ τοῦ τοιοῦδε τὸ σπερματικὸν αὐτῆς καὶ ἀρχοειδὲς γνωρίζεται· ὡς γάρ ἡ μονὰς \*\*\* καὶ σπερματικῶς ἀδιακρίτους τοὺς ἐν ἀριθμῷ λόγους περιέχει, οὕτω καὶ ἡ δυάς συγκεχυμένον καὶ ἀδιάφορον μόνον περιέξει τὸ τῆς 25 ἔγκράσεως καὶ τὸ τῆς παραθέσεως ἰδίωμα, ὅπερ οὐδὲ

τῇ μονάδι ὑπάρξει, ἀλλ' ἔσται δυάδος ἰδιον. καὶ ἐν τοῖς φυσικοῖς δ' ἂν εὔροιμεν τὰ σπέρματα πάντα τοὺς λόγους τῶν ἀποτελεσθησομένων ἔξ αὐτῶν ἀδιακρίτους καὶ συγκεχυμένους ἔχοντα, ώς ἂν δυνάμει ὅντα ἐκεῖνα 5 ἢ ἔξ αὐτῶν γενήσεται. πάλιν οὖν ἔξ ἄλλης ἀρχῆς ἐπεὶ οἱ μὲν τετράγωνοι δυνάμεις εἰσὶν ἰδίῳ τινῶν μήκει αὐξηθέντων ἀριθμῷ, ἐτερομήκεις δὲ οὐκ ἰδίῳ ἀλλ' ἐτέρῳ, οὐκ ἀπεικότως ἐτερομήκεις ἐκλήθησαν, οὗ κατὰ ἀντιδιαστολὴν τοὺς τετραγώνους οὐκ ἦν ἀποεπὲς 10 ἰδιομήκεις καλεῖν. οἱ δὲ παλαιοὶ ταῦτούς τε καὶ δμοίους αὐτοὺς ἐκάλουν διὰ τὴν περὶ τὰς πλευράς τε καὶ γωνίας δμοιότητα καὶ ἴσοτητα, ἀνομοίους δὲ | ἐκ τοῦ ἐναντίου καὶ θατέρους τοὺς ἐτερομήκεις. ἐν 116 15 δὲ τῇ ἐκθέσει ἐκατέρου εἴδους οἱ μὲν ἐνα παρ' ἐνα περισσοὶ καὶ ἄρτιοι γενήσονται, ὅτι οἱ τοιοῦτοι αὐτοὺς αὐξάνονται· οἱ δ' ἐτερομήκεις πάντες ἄρτιοι, ὅτι περισσὸς ἄρτιον ἢ ἄρτιος περισσὸν μηκύνει, πᾶς δὲ περισσὸς κατ' ἄρτιον αὐξηθεὶς ἄρτιον γεννᾷ. καὶ ἐπεὶ ἐνταῦθα λόγου ἐσμέν, ἵστεον ὅτι χρήσιμον ἡμῖν τοῦτο 20 ἔσται τὸ παράδειγμα εἰς τὸν ἐν τῇ Πλάτωνος πολιτείᾳ γαμικὸν ἀριθμόν, ἐνθα φησὶν ἐκ δύο ἀγαθῶν ἀγαθογονίαν πάντως ἔσεσθαι καὶ ἐκ δύο τῶν ἐναντίων τὸ ἐναντίον, ἐκ δὲ μικτῶν πάντως κακογονίαν οὐδέποτε δὲ ἀγαθογονίαν. καὶ γὰρ ἐκ μὲν τῆς τῶν 25 περισσῶν καθ' ἑαυτοὺς συνόδου καὶ ἐπισυνθέσεως ἡγουμένης μονάδος ἐγίνοντὸ τετράγωνοι τῆς τἀγαθοῦ φύσεως ὅντες ἀπὸ τοιούτων· αἵτια δὲ τούτου ἢ

τε ἵστης καὶ πρὸ ταύτης τὸ ἔν· ἐκ δὲ τῆς τῶν ἀρ-  
τίων ἡγονμένης δυάδος ἐτερομήκεις τῆς ἐναντίας φύ-  
σεως ὄντες, διότιπερ καὶ οἱ γεννήτορες· πάλιν δὲ αἰτία  
τούτου ἡ τε ἀνιστης καὶ πρὸ ταύτης ἡ ἀδριστος  
δυάς. καὶ εἰ κρᾶσις δὲ γένοιτο καὶ ώς ἀν εἶποι τις 5  
γάμος ἀρτίου καὶ περισσοῦ, οἱ γεννώμενοι ὅγκοι καὶ  
117 τῆς καθ' ἑκατέρου φύσεως εἴτε μονάδι διαφέροιεν οἱ  
γεννήτορες εἴτε καὶ μείζονί τινι ἀριθμῷ· ἡ γὰρ ἐτε-  
ρομήκεις ἡ προμήκεις οἱ ἀποτελούμενοι. καὶ πάλιν ἐκ  
μὲν τετραγώνων ἀλλήλοις μιγέντων οἱ γινόμενοι τε- 10  
τράγωνοι, ἐκ δὲ ἐτερομηκῶν δμοιοι, ἐκ δὲ μικτῶν  
οὐδέποτε μὲν τετράγωνοι πάντως δὲ ἐτερογενεῖς, καὶ  
τοῦτό φησιν δὲ θειότατος Πλάτων παριδόντας τοὺς  
τῆς πολιτείας αὐτοῦ ἀρχοντας καὶ ἀρχούσας, διὰ τὸ μὴ  
τεθράφθαι ἐν τοῖς μαθήμασιν ἡ εἰ καὶ τραφεῖν παρ- 15  
ενθυμηθέντας, τοὺς γάμους φύροδην ἀναμίξειν, ἀφ' ὧν  
φαῦλοι γενόμενοι οἱ ἔγγονοι ἀρχὴ στάσεως καὶ δια-  
φορᾶς τῇ συμπάσῃ πολιτείᾳ γενήσονται. ἵνα δὲ καὶ  
μάθωμεν τὴν ἑκατέρου εἶδους τετραγώνων καὶ ἐτερο-  
μηκῶν, ἐναντιωτάτης περὶ ὄντων φύσεως, ἐναρμόνιον 20  
καὶ συμφυεστάτην σύζευξιν, ἐκθετέον στιχηδὸν καὶ  
παραλλήλως ἑκατέρους ἀπὸ τῆς οἰκείας ἀρχῆς, τετρα-  
γώνους μὲν ἀπὸ μονάδος ἀπὸ δὲ δυάδος ἐτερομήκεις,  
οὕτως·

α' δ' θ' ις' κε' λς' μθ' ξδ' πα' ρ'

β' ε' ιβ' κ' λ' μβ' νς' οβ' ι' ρι'

118 καὶ προσεκτέον πᾶς δὲ πρῶτος τῶν θατέρων πρὸς

πρῶτον τῶν ταύτῶν περιέχει τὸν πυθμενικὸν λόγον τοῦ πρῶτου τῶν πολλαπλασίων, ὃ δὲ δεύτερος πρὸς δεύτερον ἀπὸ πυθμένος τοῦ πρῶτου τῶν ἐπιμορίων, ὃ δὲ τρίτος πρὸς [γ'] τὸν τρίτον ἀπὸ πυθμένος τοῦ 5 δευτέρου τῶν ἐπιμορίων, καὶ ὃ τέταρτος πρὸς τὸν τέταρτον ἀπὸ πυθμένος τοῦ τρίτου τῶν ἐπιμορίων, καὶ τοῦτο ἐφ' ὅσον τις θέλει ἔξετάξων εὑρήσει εὐτάκτως προχωροῦν. διαφορὰ δ' ἔσται αὐτοῖς πᾶσι πρὸς πάντας καθ' ἐκάστην συνυγίαν ἔξεταξομένοις ὃ 10 ἔξῆς ἀπὸ μονάδος ἀριθμός. καθ' ἑαυτοὺς δὲ ἔξεταξομένων τῶν στίχων, ἐπὶ μὲν τῶν δμοίων οἱ ἀπὸ τριάδος περισσοὶ ἔσονται διαφοραί, ἐπὶ δὲ τῶν ἀνομοίων οἱ ἀπὸ τετράδος ἄρτιοι. καὶ πάλιν ἐκάστη διαφορὰ τῶν ἀνομοίων σύνδυο λαμβανομένων πρὸς τὴν δμοιότητα 15 τῶν δμοίων λόγον ἔξει ἐπιμόριον, πάντως δὲ οἱ λόγοι περισσώνυμοι γενήσονται· ἐπίτριτος γὰρ καὶ ἐπίπεμπτος καὶ ἐφέβδομος καὶ ἐπέννατος καὶ ἔξῆς ἀκολούθως. πάλιν ἐκ πρῶτου δμοίου καὶ δἰς τοῦ ὑπὸ αὐτὸν ἀνομοίου <καὶ δευτέρου δμοίου> δὲ ἀποτελεσθεὶς δμοιός 20 ἔστι, καὶ ἐκ τρίτου δμοίου καὶ δἰς τοῦ ὑπὸ αὐτὸν ἀνομοίου καὶ τετάρτου δμοίου δὲ γενόμενος δμοιος, καὶ ἀεὶ οὕτως ποιοῦντες, ὥστε ἄρχειν τῆς προτέρας γενέσεως τὸ τέλος τῆς ὑστερας, δμοίους πάντας γεν- 119 νήσομεν. εἰ δὲ ἀνάπαλιν ἀρξαίμεθα ἀπὸ τῶν ἀνομοίων ἄκρους αὐτοὺς τάσσοντες, μέσους δὲ τοὺς δμοίους καθ' ἐκάστην σύζευξιν, ἀνόμοιοι πάντες γενήσονται καὶ τῆς θατέρου φύσεως. εἰ δὲ μὴ τοὺς μεσοταγεῖς μεσεμβολοίημεν δμοίους, ἀλλὰ τοὺς ἐφεξῆς

ἀεὶ καθ' ἐκάστην γένεσιν, ἄκρους τηροῦντες τοὺς αὐτοὺς ἀνομοίους, οἱ παραλειφθέντες ἔσονται ὅμοιοι ὁ τε ις' καὶ ὁ λς' καὶ ὁ ξδ' καὶ οἱ ἀνάλογοι. καὶ οὗτοι μὲν ἄρτιοι πάντες, ὅτι οἱ μεσεμβολούμενοι ὅμοιοι καν περισσοὶ ὡσι δἰς λαμβανόμενοι μετὰ ἀρτίων τῶν ἀνο- 5 μοίων ἄκρων ἀρτίους ποιοῦσι· δἰς γὰρ πᾶς περισσὸς ἄρτιος γίνεται· οἱ δὲ πρότεροι πάντες περισσοί, διότι ὁ ἔτερος τῶν δμοίων ἄκρος πάντως ἦν περισσὸς καὶ διὰ τὸ ἄπαξ λαμβάνεσθαι τὴν περισσότητα ἐφύλαττον.  
 ἡ δὲ τῶν κατὰ τοὺς αὐτοὺς τῶν γνωμόνων σύζευξις 10 εὐτάκτους τινὰς λόγους ἀποφαίνει· ἐκ μὲν γὰρ τοῦ ἄπαξ πρώτου δμοίου καὶ δἰς πρώτου ἀνομοίου καὶ ἄπαξ δευτέρου δμοίου ὁ ὑποδιπλάσιος λόγος φύσεται,  
 ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου δμοίου καὶ δἰς τοῦ ὑπ' αὐτὸν ἀνομοίου καὶ τοῦ ἔξῆς δμοίου ὁ ὑφημιόλιος, καὶ κατὰ 15 τὴν τρίτην σύζευξιν ὁ ἐπίτριτος καὶ κατὰ τὴν τετάρ-  
 120 την ὁ ἐπιτέταρτος καὶ ἔξῆς ἀκολούθως. καὶ ἐν τῇ τῶν παραλειμμένων δμοίων γενέσει ἡ σύζευξις τῶν γενομένων οὐκέτι μὲν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοὺς τρεῖς δρους καθ' ἐκάστην συζυγίαν ἀποφαίνει, ἀλλ' ἐν δια- 20 φόροις, οὐ μὴν ἀνοικείοις γε, ἀλλὰ πάλιν τινὰ φυσικὴν εὐταξίαν καὶ συγγένειαν διπλασίου λόγου πρὸς ἡμιό-  
 λιον καὶ ἡμιολίον πρὸς ἐπίτριτον καὶ ἐπιτρίτον πρὸς ἐπιτέταρτον· ἐν μὲν γὰρ τοῖς β' δ' σ' δροῖς διπλάσιος καὶ ἡμιόλιος λόγος ἐστίν, ἐν δὲ τοῖς σ' θ' ιβ' ἡμιό- 25 λιος καὶ ἐπίτριτος, ἐν δὲ τοῖς ιβ' ις' κ' ἐπίτριτος καὶ ἐπιτέταρτος καὶ ἔξῆς ἀναλόγως, μονάδι μεγαλωνυμω-  
 τέρως τοῦ δευτέρου λόγου πρὸς τὸν σύζυγον λεγο-

μένουν. πάλιν ἔκαστος δύμοιος μεθ' ἔκάστου δύμοταγοῦς  
 ἀνομοίου τριγώνου ποιεῖ· οἱ δὲ γενόμενοι τριγώνοι  
 ἀρχοντος τοῦ τρία αἰεὶ παρ' ἐν γενήσονται οὗτοι γ'  
 ι' καὶ λεῖ νεί οηρεί καὶ ἀνάλογον, παραλείποντες ἐκ  
 5 τῆς εὐτάκτου τῶν τριγώνων πλάσεως τόν τε σ' καὶ  
 τὸν ιεί καὶ τὸν κηρ' καὶ τὸν μεί καὶ τὸν ξεί καὶ τὸν  
 ζαί καὶ τὸν τούτοις ἀνάλογον. εἰ δὲ μὴ τῇ κατὰ  
 παράλληλον μόνη συνθέσει χρησαίμεθα ἀλλὰ καὶ  
 τῇ κατ' ἐμπλοπὴν συμπλέκοντες ἀν πρῶτον ἀνόμοιον  
 10 δευτέρῳ | δύμοίῳ καὶ δεύτερον ἀνόμοιον τρίτῳ δύμοίῳ 121  
 καὶ τρίτον τετάρτῳ καὶ τέταρτον πέμπτῳ καὶ ἀεὶ ἀκο-  
 λούθως, πάντες ἔξης σὺν τοῖς προτέροις ἀπὸ τριάδος  
 οἱ τριγώνοι φύσονται οὗτοι γ' σ' ιεί ιεί καὶ κηρ' λεῖ  
 μεί νεί ξεί οηρεί ζαί καὶ οἱ ἔξης ἐπ' ἄπειρον. πάλιν  
 15 δὲ καὶ αὐτῶν τῶν καθ' αὐτοὺς τῶν ἀνομοίων τὰ  
 ἡμίση τοὺς ἀπὸ μονάδος εὐτάκτους τριγώνους ποιήσει.  
 ἔκάστη δὲ διαφορὰ ἀνομοίων καθ' ἔκαστον πρὸς δύμοίους  
 λόγον ἔξει πρὸς οὓς ὃν ἔστι διαφορὰ οὐκ ἄτακτον· οὐ  
 μὲν γὰρ ἡμίσεια ἔσται οὖ δὲ τρίτον, καὶ οὖ μὲν τρίτον  
 20 οὖ δὲ τέταρτον, καὶ οὖ μὲν τέταρτον οὖ δὲ πέμπτον,  
 καὶ ἀεὶ ἀκολούθως, ἀρχὴν δὲ παρέξει τῆς τοιαύτης  
 εὐταξίας ἡ δευτέρα συζυγία τοῦ δ' πρὸς σ'. τῇ γὰρ  
 πρώτῃ συζυγίᾳ τῇ α' πρὸς δύο οὐχ ὑπάρξει τὸ  
 τοσοῦτον διὰ τὸ ἀμερὲς εἶναι τὸ ἐν καὶ τὴν μονάδα  
 25 εἶδοντες καὶ ταυτότητος λόγον ἔχουσαν. πρώτη δὲ δυάς  
 ἐπιδεκτικὴ ἔσται μερισμοῦ καὶ διακρίσεως, τῆς θατέρου  
 φύσεως οὖσα καὶ τὸν τῆς ὑλῆς λόγον ἀναδεδεγμένη,  
 καὶ ἐπεὶ συζυγὴς οὖσα τῇ μονάδι δι' ἐκείνην ἔκωλύθη  
 τῆς εἰρημένης εὐταξίας τῶν μορίων ἄρξαι, | αὕτη δια- 122

φορὰ οὖσα τῆς δευτέρας συζυγίας εὑρίσκεται, τοῦ μὲν τέσσαρα ἡμίσεια οὖσα, τοῦ δὲ σ', γον. ἀλλὰ καὶ πρὸς τὸν δ' συγκρινομένη οὐδὲν ἥπτον διαφορὰν πρὸς αὐτὸν φυλάττει. καὶ ἐπειδὴ τῇ κατὰ τὰς διαφορὰς ποσότητι ἀδιαφοροῦσιν οἱ τρεῖς ὅροι οἱ β' δ' σ', καὶ ποιότητι 5 τῇ κατὰ τὸν λόγον διαφέρουσι· διπλάσιος μὲν γὰρ δ δ' τοῦ β', ἡμιόλιος δὲ δ σ' τοῦ δ'. δ δὲ αὐτὸς σ' πρὸς τὸν ἔξῆς δμοίως συγκρινόμενος τὸν θ', ποιότητι μὲν οὐ διοίσει· τὸν γὰρ αὐτὸν ἡμιόλιον λόγον φυλάξει, ὑπόλογον ἑαυτὸν παρέχων, ὥσπερ καὶ πρὸς τὸν 10 δ' τοῦ αὐτοῦ λόγου πρόλογος ἦν· τῇ δὲ κατὰ τὴν διαφορὰν ποσότητι διοίσει, εἰ γε πρὸς μὲν τὸν δ' δυάς ἔστιν ἡ διαφορά, πρὸς δὲ τὸν θ' τριάς. πάλιν δ θ' πρὸς τὸν σ' ἀλλὰ καὶ πρὸς τὸν ιβ' συγκρινόμενος ποιότητι μὲν τῶν λόγων διοίσει, εἰ γε τοῦ μὲν ἡμιό- 15 λιος τοῦ δὲ ὑπεπίτριτός ἔστι, ποσότητι δὲ τῇ κατὰ τὰς διαφορὰς οὐ διοίσει· τριάς γὰρ αὐτῷ διαφορὰ πρὸς ἑκάτερον. καὶ καθόλου ἔνθα μὲν τῇ κατὰ τὰς | 123 διαφορὰς ποσότητι διαφέρουσι τρεῖς ὅροι οὗτοις λαμβανόμενοι ὡς εἴρηται, ποιότητι κατὰ τὸν λόγον 20 ἀδιάφοροι ἔσονται· εἰ δὲ διαφέροιεν ποιότητι, ποσότητι ἀδιαφορήσουσι. καὶ ἔξ ἀλλήλων δ' ἀν γνωρισθείησαν δμοιοί τε καὶ ἀνδριοί· δ γὰρ πρώτος ἀνδριος ἐκ δις πρώτου ἔστιν δμοίον, καὶ δ δεύτερος δμοίος ἐκ δις πρώτου ἔστιν ἀνομοίον, δ δὲ δεύτερος 25 ἀνδριος ἔξ ἐνδεῖς καὶ ἡμίσους δευτέρου δμοίον. πάλιν δ τρίτος ἀνδριος ἔξ ἐνδεῖς καὶ τρίτου ἔστι τρίτου δμοίον, ὥσπερ καὶ τέταρτος δμοίος ἔξ ἐνδεῖς καὶ τρίτου

εστὶ τρίτου ἀνομοίου. ὁ δὲ τέταρτος ἀνόμοιος ἐξ ἑνὸς καὶ τετάρτου ἐστὶ τετάρτου δυοίου, καθὰ καὶ διέπτος δυοίος ἐξ ἑνὸς καὶ τετάρτου ἐσται τετάρτου ἀνομοίου, διὰ τοῦ πέμπτος ἀνόμοιος ἐξ ἑνὸς καὶ πέμπτου ἐσται τοῦ συζύγου, καὶ διὰ τοῦ ἕκτος ἐξ ἑνὸς καὶ ἔκτου, καὶ ἀεὶ ἀκολούθως τὸ αὐτὸν συμβῆσεται, τοῦ μορίου ὀνομαζομένου κατὰ τὴν ποσότητα τῆς χώρας ἐκάστου τῶν ἀνομοίων πρὸς τὸν δυοισταγῆ δυοίου συγκρινομένου, οὗ καὶ τὸ μόριον ἐσται πρώτως, δευτέρως δὲ καὶ τοῦ ἀνομοίου πρὸς τὸν ἔξῆς δυοίου συγκρινομένου. καὶ ἄλλα πολλὰ εὔροι τις ἀν γλαφυρὰ καθ' ἑαυτὸν ἐνατενίζων τῷ διαγράμματι καὶ ἀεὶ διεξετάζων τὴν ἐναρμόνιον | σχέσιν τῶν ἐναντίων τῶν δύο δυνάμεων ταυ- 124 τότητος καὶ ἐτερότητος ἐμφαινομένων τῇ τῶν τετραγώνων καὶ ἐτερομηκῶν ἐκθέσει. ἵκανὸν δὲ ἐγκώμιον ἐσται τῆς δεκάδος ἡ κατὰ τὸν εἰρημένον δίαυλον τῶν τετραγώνων γένεσις, ὅταν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βαθμῷ τῶν ἀριθμῶν, ὃν δοῖται αὐτῇ ἡ δεκάς, ἀπὸ μονάδος ἡ πρόοδος μέχρις αὐτῆς γένηται καὶ πάλιν ἀπ' αὐτῆς 20 ὡς ἀπὸ ἀριθμοῦ τυνος διορίζοντος μονάδας ἀπὸ δεκάδων ἡ ἐπάνοδος ὡς ἐπὶ μονάδα· ἐσται γὰρ ἐκ τῆς <δεκάδος> ὡς ἀπὸ συνθέσεως τετράγωνος δοριθμός, καὶ αὐτὸς ὃν ἀριθμὸν διοριστικὸν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων, καὶ μονὰς τριώδους μένη καλούμενος πρὸς τῶν 25 Πυθαγορείων, ὥσπερ καὶ ἡ δεκάς δευτερωδούς μένη μονὰς καὶ χιλιὰς τετρωδούς μονάς. πλευρὰ δὲ

ἔσται τοῦ ρ' τετραγώνου αὐτὴ ἡ δεκάς, καὶ δύναμις αὐτῆς τὸ συγκεφαλαίωμα τῆς ἐπὶ ταύτῃ ἐπισωρείας τῶν ἐντὸς αὐτῆς ἀριθμῶν δἰς λαμβανομένων· οὗτο γὰρ καὶ διαύλῳ ἀπεικάσθαι εἶρηται ὅ τε κατὰ πρόσοδον ὡς ἀπὸ ὕσπληγος τῆς ἀρχῆς καὶ δικαῖον διαύλῳ ὡς 5  
 125 ἀπὸ καμπτῆρος τοῦ τέλους τρόπος | τῆς ἐπισυνθέσεως τῶν ἀριθμῶν. εἰ δὲ τῇ δεκάδι μηκέτι μὲν καμπτῆρι,  
 ὕσπληγι δὲ χρησαίμεθα καὶ ἀρχῇ τῆς προόδου μέχρις ἑκατοντάδος, ἀφ' ἣς πάλιν ἡ ἐπάνοδος ἐπὶ τὴν δεκάδα  
 ἔσται, ἐκ τῆς ἐπισυνθέσεως γενήσεται διπλῶς ἀριθ- 10  
 μὸς ἡ τετραδούμένη μονάς, ἀρθρον καὶ αὐτὸς ὃν  
 διοριστικὸν ἑκατοντάδων τε καὶ μυρίαδων. οὐκέτι δὲ  
 καὶ πλευρὰ ἔσται τετραγωνικὴ τοῦ χίλια ἀριθμοῦ ἡ  
 ἑκατοντάς· οὐδὲ γὰρ τετράγωνός ἔστιν δικαῖον, ἀλλὰ  
 κύβος, ἀπὸ πλευρᾶς δεκάδος. ἵνα δ' ἐπιπεδωθῆ προ- 15  
 μηκικῶς πλευρὰ αὐτοῦ, ἔσται ἡ ἑκατοντάς σὺν τῇ καὶ  
 δεκάδι, ὡς δῆλον εἶναι ὅτι δεήσεται ἡ ἑκατοντάς τῆς  
 δεκάδος εἰς τὸ πλευρικὴν γενέσθαι. πάλιν εἰ τῇ ἑκα-  
 τοντάδι ἀρχῇ χρησαίμεθα καὶ ἀντὶ ὕσπληγος, προσέλ-  
 θοιμεν δὲ ἐπισυντιθέντες τὰς μετ' αὐτὴν ἑκατοντάδας 20  
 126 μέχρι χιλιάδος, καὶ ἀπὸ ταύτης ὡς ἀπὸ | καμπτῆρος  
 δμοίως ἐπὶ τὴν ἑκατοντάδα ἐπανέλθοιμεν ὡς ἐπὶ νύσ-  
 σαν, ἔσται ἀριθμὸς διπλῶν μυρίων ἡ πενταδούμένη  
 μονάς, πλευρὰν ἔχων ὡς μὲν τετράγωνος τὴν ἑκατον-  
 τάδα ὡς δὲ προμήκης τὴν χιλιάδα μετὰ τῆς αὐτῆς 25  
 δεκάδος. οὗτος ἡ δεκάς εἰς μὲν τὸ αὐτὴ τὴν πλευ-  
 ρικὴν γενέσθαι κατὰ τὸν διαυλικὸν τρόπον οὐδενὸς  
 τῶν ἄλλων γενέσεων ἀρθρῶν τοῦ ἀριθμοῦ δεήσεται,  
 ἑκατοντάδος λέγω καὶ χιλιάδος· αὗται δὲ ἵνα αὐταῖς

τὸ τοιοῦτο συμβῆ πάντως δεήσονται τῆς δεκάδος, ὅθεν  
 αὐτῇ ἐγκώμιον τοῦτο προσενείμαμεν. λοιπὸν δὲ εἰπεῖν  
 καὶ ὅσα ἄλλα συμπτώματα δύναται ἐπινοεῖσθαι ὑπὸ<sup>5</sup>  
 τῶν κατὰ τὸ φιλοθέωρον συντεινόντων ἐαυτοὺς ἐπὶ<sup>5</sup>  
 τὴν ἀνεύρεσιν τῶν συμβεβηκότων τοῖς ἀριθμοῖς, οἷον  
 ὅτι πᾶς τετράγωνος ἦτοι αὐτόθεν τρίτον ἔχει, η̄ εἰ μὴ  
 ἔχει πάντως γε τέταρτον, η̄ εἰ μηδὲ τοῦτο μονάδος  
 ἀφαιρεθείσης ἐκ μὲν τρίτον ἔχοντος τέταρτον ἔχοντα  
 ἀποτελέσεις, ἐκ δὲ τέταρτον ἔχοντος τρίτον ἔχοντα, εἰ<sup>10</sup>  
 δὲ μηδ' ἔτερον, ἀμφότερα· εἰ δὲ ἔχοι ἀμφότερα, ἔστιν  
 ὅτε η̄ ἀφαιρεσις τῆς μονάδος ἀμφοτέρων στερίσκει.<sup>127</sup>  
 καὶ ἄπας ἀριθμὸς τὸν δυάδι διαφέροντα ἐφ' ἐκάτερα  
 δποτερονοῦν δμογενῆ πολλαπλασιάσας καὶ προσλαβὼν  
 μονάδα τετράγωνον ποιεῖ. περισσοὶ μὲν ἀρτίους ποι-<sup>15</sup>  
 οῦσιν, ἄρτιοι δὲ περισσούς. καὶ ἄπας ἀριθμὸς τὸν  
 ἐαυτοῦ πολλαπλάσιον μηκύνας τοσοντοπλάσιον τοῦ ἐξ  
 αὐτοῦ τετραγώνου ποιήσει, καὶ ἐπιμόριον καὶ ἐπιμερῆ  
 καὶ μικτὸν λαμβάνῃ. δμοίως καὶ πᾶς τρίγωνος δικάκι  
 γενόμενος καὶ προσλαβὼν μονάδα τετράγωνον ποιεῖ,<sup>20</sup>  
 καὶ ἐκ δύο τετραγώνων ἐπ' ἀλλήλους γενομένων  
 δ γενόμενος τετράγωνος, καὶ ἐκ τῶν ἀπὸ μονάδος  
 ἀνάλογον ἐὰν δ τῇ μονάδι ἐξῆς τετράγωνος η̄ καὶ οἱ  
 λοιποὶ τετράγωνοι ἔσονται, καὶ τριῶν τινῶν ἀνάλογον  
 δύντων ἐὰν δ πρῶτος τετράγωνος η̄ καὶ δ τρίτος ἔσται<sup>25</sup>  
 τετράγωνος, καὶ μετροῦντος τετράγωνον τετραγώνον  
 καὶ πλευρὰ πλευρὰν μετρήσει, καὶ πᾶς ἐκ δύο πλευρῶν  
 συνεχῶν τετραγώνων μηκυνθεὶς ἀνάλογον αὐτῶν μέσος

εῖσται, καὶ πολλὰ ἄλλα τοιαῦτα δι' ἑαυτῶν τε προθυ-  
μηθέντες εὑρήσουμεν καὶ ὑπ' ἄλλων ἐκπεπονημένα ἴστο-  
ρησαι δυνησόμεθα. τὰ νῦν δὲ μετιτέον ἐπὶ τὸν πλευ-  
128 ρικόν τε καὶ διαμετρικὸν λόγον ἵκανωτά|της ἔξετάσεως  
ἐν γεωμετρίᾳ τετυχηκότα, διότι δοκεῖ κατ' αὐτόν πως 5  
ὅνθιμίζεσθαι καὶ εἰδοποιεῖσθαι τὰ σχῆματα. ὡς οὖν  
καὶ ἐπ' αὐτῶν τῶν σχημάτων ἐποιοῦμεν μετάγοντες  
αὐτῶν τοὺς λόγους καθ' ὅμοιότητα καὶ ἐπὶ τοὺς ἀριθ-  
μούς· φητὰ γὰρ κάκεῖνα γίνεται τοῖς ἀριθμοῖς· οὕτως  
χρὴ καὶ περὶ πλευρᾶς καὶ διαμέτρου διαλεγομένους 10  
καὶ ἀκολουθοῦντας τῇ τοῦ ἀριθμοῦ φύσει ἀποσφόγειν  
ώς ἐνδέχεται τὴν ὅμοιότητα. οὐ γὰρ ὥσπερ ἐν πηλί-  
κοις πλευρᾶς λογωθείσης ἢ διάμετρος ἄλογος ἢ ἀνά-  
παλιν διαμέτρου λογωθείσης πλευρὰ ἄλογος, οὕτω  
καὶ ἐν ποσοῖς, ἀλλ' ἔσται φητὴ πλευρὰ διαμέτρῳ, ἵνα 15  
πάντῃ φητὸς ἢ ὁ ἀριθμὸς καὶ τοῦτ' ἔξαιρετον ἔχῃ,  
ώς ἂν ἀρχικώτατος ὃν καὶ τοῖς ἄλλοις ἀπασιν αἴτιος  
γενούμενος φητότητος. κοινὸν μὲν γὰρ ἀριθμοῖς καὶ  
μεγέθεσιν ὡς ἂν ἀσωμάτοις οὖσι τὸ ἀκίνητα εἶναι,  
ἴδιον δὲ ἀριθμοῦ τὸ μηδὲ ἀσυμμετρίαν ἔχειν, τῶν 20  
μεγεθῶν ἔχόντων. δεῖ δὴ πάλιν ἀπὸ μονάδος τὴν  
γένεσιν τοῦ πλευρικοῦ καὶ διαμετρικοῦ λόγου μεθο-  
δεῦσαι, ἐπειδὴ πάντων τῶν ἐν ἀριθμοῖς λόγων ἔφαμεν  
129 αὐτὴν | ἀφηγεῖσθαι. δνομάσαι γὰρ δεῖ δύο μονάδας  
τὴν μὲν πλευρὰν τὴν δὲ διάμετρον, καὶ χρήσασθαι 25  
καθολικαῖς τισι προσθέσεσι καὶ ἀεὶ ταῖς αὐταῖς, τῇ μὲν

πλευρῷ διάμετρον προστιθέντας τῇ δὲ διαμέτρῳ δύο πλευράς, ἐπειδὴ ὅσου ἡ πλευρὰ <δὶς> δύναται ἐν γραμμικοῖς, ἡ διάμετρος ἄπαξ. γίνεται οὖν ἡ διάμετρος μονάδι μείζων τῆς πλευρᾶς. ἡ δ' ἐξ ἀρχῆς ἀνευ 5 τῆς προσθήκης τὸ ἀπὸ τῆς μοναδικῆς διαμέτρου δυνάμει τετράγωνον μονάδι ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς μοναδικῆς πλευρᾶς δυνάμει τετραγώνου· ἐν ἴσοτητι γὰρ οὖσαι αἱ μονάδες τὴν ἑτέραν τῆς λοιπῆς μονάδι ἔλαττονα ποιοῦσιν ἢ διπλασίαν. τῆς δὲ προσ-10 θήκης γενομένης ὡς εἶρηται, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον· θ' γὰρ καὶ δ'. πάλιν ἐὰν προσθῶμεν τῇ μὲν πλευρᾷ διάμετρον τῇ δὲ διαμέτρῳ δύο πλευράς, 15 ἔσται ζ' καὶ ε', καὶ γίνεται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου μονάδι ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· ἔστι γὰρ μθ' πρὸς κε'. πάλιν εἰ ἡ αὐτὴ προσθήκη γίγνοιτο, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου | μονάδι μεῖζον 130 ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· ἔστι γὰρ σπθ' πρὸς ριμδ'. καὶ δὴ δμοίως κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τῆς προσθήκης γιγνομένης ποτὲ μὲν μονάδι μεῖζον ἢ δι-20 πλάσιον ἔσται τὸ ἀπό τοῦ ἀπό, ποτὲ δὲ μονάδι ἔλαττον, καὶ οὕτως ὁηταὶ γίνονται πρὸς ἀλλήλας πλευραὶ τε καὶ διάμετροι. ἀλλ' οὖν ἐπειδὴ ἐναλλὰξ ποτὲ μὲν δυνάμει μεῖζους εἰσὶν ἢ διάμετροι διπλάσιαι 25 πλευρῶν, ποτὲ δὲ μονάδι ἔλαττους ἢ διπλάσιαι, ἔσονται κατ' ἐπίνοιαν πᾶσαι δμοῦ αἱ διάμετροι πασῶν δμοῦ τῶν πλευρῶν δυνάμει διπλάσιαι· ἀπίσθωσις γὰρ γίνεται τοῦ μεῖζονος τῷ ἔλαττονι ἀναμιγέντος, διότι

στάσις τοῦ ὑπερέχοντος πρὸς ὑπερεχόμενον ἡ ἴσοτης ἐστί, διόπερ κἀνταῦθα τὸ μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον προστεθὲν τῷ μονάδι ἐλάττονι ἢ διπλασίῳ ἀπισώσει τὸ πᾶν, ὥστε ἀεὶ τὴν διάμετρον δυνάμει διπλασίαν εἶναι τῆς πλευρᾶς, καθάπερ καὶ ἐπὶ τῶν γραμμικῶν 5 δείκνυται. καὶ τοσαῦτα μὲν ἡμῖν περὶ τῶν τοῖς ἐπιπέδοις ἀριθμοῖς συμβεβηκότων εἰρήσθω.

131 Στερεόδες δέ ἐστιν ἀριθμὸς ὁ τρίτον διάστημα παρὰ τὰ ἐν ἐπιπέδοις δύο προσειληφώς, δηλονότι τετάρτου ὅρου προσγενομένου· ἐν γὰρ τέσσαρσιν ὅροις τὸ τριχῇ 10 διαστατόν, ἵνα καὶ λαβόντος καὶ ληφθέντος καὶ τρίτου καθ' ὃν λαμβάνεται τέταρτος αὐτὸς ἦ. τῶν δὴ στερεῶν ἀριθμῶν εἰσιν οἱ μὲν ἰσογώνιοι τε καὶ ἰσοεπίπεδοι καὶ ἰσοδιάστατοι, καθ' δμοιότητα καὶ αὐτοὶ λαμβανόμενοι τῶν ἐν γραμμικοῖς· καλοῦνται δ' οὗτοι κύβοι καὶ 15 τετράεδροι πυραμίδες, ὡν πάντῃ μεταλαμβάνεται ἡ βάσις· οἱ δὲ παραλληλεπίπεδοι καὶ ἰσογώνιοι, ἀνισοδιάστατοι δέ, ὡν εἴδη πλινθίδες τε καὶ δοκίδες, οἱ δὲ ἀνισεπίπεδοι καὶ ἀνισογώνιοι καὶ ἀνισοδιάστατοι, καλούμενοι σφηκίσκοι ἢ ὡς τινες βωμίσκοι ἢ σφηνί- 20 σκοι, ἐκάστου δυόματος καθ' δμοιότητα τεθέντος, οἱ δὲ μικτοὶ πάσας μὲν γωνίας παρὰ μίαν ἵσας ἔχοντες 132 πάντα δὲ ἐπίπεδα πάλιν παρ' ἐν ἵσα πυραμίδες, αἱ ἀπὸ <τῆς> τετραγώνῳ βάσει χρωμένης ἀρχόμεναι μέχρις ἀπείρου, ὡν οὐκέτι μετάληψις ἔσται κατὰ τὴν βάσιν, 25 ὡς ἐπὶ τῆς τριγώνῳ βάσει χρωμένης συνέβαινεν. ἀναλογεῖ δὲ ἐν ἐπιπέδοις τὸ μὲν ἐν τετραπλεύροις κυρίως

λεγόμενον τετράγωνον κύβῳ, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον πλινθίδι ἢ δοκίδι, ἢν τινες στηλίδα καλοῦσι, τὸ δὲ τραπέζιον σφηνίσκῳ. δεῖγμα δὲ τοῦ μὲν πάντῃ ἴσάκις ἵσως διισταμένου κύβου ὅ τε η' καὶ ὁ κξ' καὶ ὁ ξδ'  
 5 καὶ ρκε' καὶ σις', ἐκ τε τοῦ δὶς δύο δὶς καὶ ἐκ τοῦ τρὶς τρία τρὶς καὶ τετράκι τέσσαρα τετράκις καὶ πεντάκι πέντε πεντάκις καὶ ἕξάκις ἔξι ἕξάκις γινόμενοι. ὃν πάντων κύβων καλούμενων ὅσοι ἀν ἐπὶ τὸ αὐτὸ πάση προβάσει καταλήγωσιν ἔτι μᾶλλον καὶ σφαιρικοὶ  
 10 λεγέσθωσαν, ἐνὶ πλείονι διαστήματι αὐξηθέντες ἀπὸ κυκλικῶν καὶ αὐτῶν δμοκαταλήκτων ὄντων, ὡς ὁ ρκε'  
 ἀπὸ πλευρᾶς πεντάδος ὃν καὶ ὁ σις' ἀπὸ πλευρᾶς  
 ἑξάδος. καὶν ἐπὶ πλέον δὲ αὐξάνωνται οὗτοι, οὐδὲν  
 ἥττον ἐκάτεροι ἐπὶ τὴν ἑαυτῶν πλευρὰν καταλήξουσιν.  
 133  
 15 ἡ δὲ μονὰς ἄσπερ τὰ ἐν ἐπιπέδοις πάντα περιεῖχε  
 χωρὶς τοῦ ἐτερομηνικοῦ λόγου, οὕτως καὶ τὰ ἐν στερεοῖς· πυραμιδική τε γὰρ ἔσται ἐπὶ κορυφῆς θεωρουμένη παντὸς εἶδους πυραμίδος, δυνάμει στερεοῦ σημείου λόγον ἔχουσα καθ' ἔκαστον παντὸς γὰρ στερεοῦ  
 20 ἀριθμοῦ αἱ γωνίαι μονάδες σημειώδεις ἔσονται τῶν  
 <ἐν> ἐπιπέδοις δυνάμει μείζονες, διότι στερεαί· ἀπλοῦν  
 μὲν γὰρ τὸ σημεῖόν ἔστι πέρας δν τοῦ ἐφ' ἐν διαστατοῦ μεγέθους, διπλοῦν δὲ δυνάμει ἐν ἐπιπέδοις διὰ  
 τὴν σύννευσιν τῶν δύο γραμμῶν ἐφ' ἐν σημεῖον, ἐν δὲ  
 25 στερεοῖς δυνάμει ἀόριστον ἀρχόμενον ἀπὸ τριπλοῦ,  
 διότι πρώτη σύννευσις τριῶν πλευρῶν στερεὰν γωνίαν  
 τὴν πυραμιδικὴν ἀποτελεῖ. καὶ μὴν σφαιρικὴ ἔσται ἡ

μονάς, ὥσπερ ἦν καὶ κυκλική, τρὶς κατὰ τὸ ἑαυτῆς  
 μέγεθος διαστᾶσα. τῶν δὲ πάντη ἀνισοδιαστάτων ἀριθ-  
 μῶν ὑπόδειγμα κοινὸν ἔστω δὲ ξ'. καὶ γὰρ ἐκ τοῦ τρὶς  
 τέσσαρα πεντάκις ἔστι καὶ ἀνάπαλιν ἐκ τοῦ πεντάκι  
 τέσσαρα τρὶς καὶ ἐκ τοῦ τετράκι πέντε τρὶς καὶ ἐκ τοῦ 5  
 134 τετράκι τρία πεντάκις. παραλληλεπιπέδων δέ, πλιν-  
 θίδων μὲν ἴσακις ἵσων ἐλαττονάκις οὐσῶν δὲ ιη' ἐκ  
 τοῦ τρὶς τρία δὶς ὅν καὶ δὲ μη' ἐκ τοῦ τετράκι τέσ-  
 σαρες τρὶς, δοκίδων δέ, ἃς τινες στηλίδας, ἴσακις ἵσας  
 μειζονάκις οὖσας δὲ λεῖ' ἐκ τοῦ τρὶς τρία τετράκις ὅν 10  
 καὶ δὲ με' ἐκ τοῦ τρὶς τρία πεντάκι. ἔνεστι γὰρ καὶ  
 ἐπὶ τούτων καὶ ἐπὶ τῶν πλινθιδίων μὴ μόνον παρα-  
 κειμένας, τουτέστι παρὰ μονάδας, μειώσεις τε καὶ  
 αὐξήσεις ποιεῖσθαι, ἀλλὰ καὶ διεστώσας, ἵνα μᾶλλον  
 ἡ δμοιότης σχηματίσεως ἐμφαίνωνται. πυραμίδων δὲ 15  
 λόγος ὁμοίως γένοιτο καὶ εὐεφόδευτος εἰ τὴν τῶν πολυ-  
 γώνων ἔκθεσιν ἀπὸ τριγώνων κατὰ παραλλήλους στί-  
 χους ὡς μικρῷ πρόσθεν διαγράψαιμεν, εἰτ' ἐφαρμό-  
 ζοιμεν σωρηδὸν τοὺς δμογενεῖς ἀλλήλοις εὐτάκτως  
 μέχρις δποσουοῦν, ἵνα κορυφὴ μὲν πάντως μονὰς ἦ 20  
 καθ' ἐκάστην ἐπισωρείαν, δμοιοσχήμων δὲ δυνάμει  
 πάσῃ βάσις γίνηται. διὰ μὲν οὖν τῶν [τριῶν] γένεσις  
 ι' ιε' καὶ ἐφεξῆς τριγώνων ἔσονται πυραμίδες αἱ  
 τριγωνον βάσιν ἔχουσαι αὗται· δέ ι' καὶ λεῖ' νεῖ', διὰ  
 δὲ τῶν τετραγώνων τῶν δέ θέτεις κεῖται· δέ ι' καὶ λεῖ' αἱ τετρα-  
 135 γώνῳ βάσει χρώμεναι εἴ τιδέ λέ νεῖς οὐαί', διὰ δὲ τῶν  
 πενταγώνων τῶν εἴ τιβέ καβέ λεῖς ναί' αἱ βάσει πεντα-  
 γώνῳ χρώμεναι αἱ ιη' μέσης οεῖς οκτάεις'. τὸ δέ αὐτὸν καὶ

έπὶ τῶν ἔξῆς πολυγώνων ποιήσομεν· ὡς γὰρ γνώμονας εἴχομεν τῶν πολυγώνων τοὺς ἐφεξῆς ἀπὸ μονάδος ἀριθμούς, οὗτοις καὶ πυραμίδων <τοὺς> ἐφεξῆς πολυγώνους καθ' ἕκαστον. ἀνάλογος δ' ἔσται καὶ ἡ ποσότης τῶν ἐπιπέδων πρὸς τὰς πλευρὰς τὰς τῶν γνωμόνων, καὶ ὡς ἐκείνων περισσοταγεῖς μὲν δύο παρὰ δύο ἥσαν ἄρτιοι καὶ περισσοί, ἄρτιοταγεῖς δὲ εἰς παρ' ἓνα, οὗτοις κάπι τούτων περισσοταγεῖς μία παρὰ τρεῖς ἄρτιας περισσὴ καὶ εἰς πεντάδα γε λήγουσα πλὴν τῇ 10 δυνάμει· καὶ γὰρ ἐν πέμπταις ἀπ' ἀλλήλων εἰσὶ χώραις· ἄρτιοταγεῖς δὲ δύο παρὰ δύο, συμπιπτουσῶν ἀναγκαίως ταῖς ἐν περισσοταγέσι περισσαῖς τῶν καὶ ἐντεῦθεν δμοιοκαταλήκτων. σύστημα δέ ἔστιν ἐκάστη τῆς ὑπὲρ αὐτὴν ἐτεροειδοῦς καὶ τῆς τῶν εἰς ἐπίπεδον 15 ἐνα βαθμὸν ὑποβεβηκυίας, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν πολυγώνων συνέβαινεν· οἶον <ἡ> ε' τῆς δ' καὶ α', ἡ σ' τῆς ε' καὶ α', ἡ ζ' τῆς σ' καὶ α', καὶ | πάλιν ἡ ιδ' τῆς ι' καὶ δ', 136 ἡ δὲ ιη' τῆς ιδ' καὶ δ', ἡ δὲ κβ' τῆς ιη' καὶ δ', καὶ ἐφεξῆς ἀκολούθως κατὰ τὸ βάθος καὶ τὸ πλάτος ἐκάστη τῶν πολυγώνων διαγραφῆς ἐφαρμόζοντες ἀνάλογα εὑρήσομεν, ὅτι ἐκάστη πυραμὶς σύστημά ἔστι τῆς ὑπὲρ αὐτὴν καὶ τῆς ὑπὸ ἐκείνην· πρῶτον γὰρ οὐδὲν εἶτα παράπαξ εἰς ἐπίπεδον εἶτα παρὰ δὶς εἶτα παρὰ τρὶς καὶ ἐφεξῆς. καὶ τὰ ἄλλα κατὰ ταύτα ἀναλόγως συμπτώματα καὶ περὶ ταύτας εὑρήσομεν. καὶ ἐν μὲν πλάτει διοίσουσιν ἀλλήλων ίδίαις βάσεσιν, ἐν δὲ βάθει μετὰ τὸν ίσοτητι στίχον εὐθυγραμμικῶς ἐκκείμενον τετρὰς ἔσται ἡ διαφορὰ στοιχεῖον οὖσα πυραμίδων ἐνεργείᾳ, εἶτα δεκάς ἡ δευτέρα πυραμίς, εἶτα εἰκοσάς

ἡ τρίτη πυραμὶς καὶ ἔξῆς ἀκολούθως. ἐὰν δέ τις πυραμὶς μὴ ἐπὶ μονάδα κορυφῶται, ἀλλ' ἐπὶ τὸν παρ' αὐτῇ γνώμονα, κόλουρος καλεῖται· ἐὰν δὲ μηδὲ ἐπ' ἔκεινον, ἀλλ' ἐπὶ τὸν ἔξης, δικόλουρος, καὶ δμοίως τρικόλουρος καὶ τετρακόλουρος καὶ ἀεὶ ἀκολούθως δυο- 5  
 137 μασθήσεται κατὰ τὴν ποσότητα τῶν ἀφαιρουμένων γνωμόνων. ἴδιώματα δὲ καὶ κύβων πολλὰ εὑρήσομεν ὥσπερ καὶ τῶν τετραγώνων· καὶ γὰρ ἑκάστου ἀριθμοῦ τῶν ἀπὸ μονάδος ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος καὶ τὸν ἔξ αὐτοῦ γίνονται εὔτακτοι κύβοι. καὶ εἰ τάξει 10  
 οἱ ἀπὸ τετράδος τετράγωνοι τάξει τοὺς ἀπὸ δυάδος ἐφεξῆς ἀριθμοὺς ἑκάστους ἑκάστου μηκύνη ἢ ὑπὸ ἑκάστου μηκύνοιτο, δμοίως γενήσονται εὔτακτοι κύβοι.  
 ἔτι οἱ περισσοὶ ἐπειδὴ ἔτι δμοποιοί εἰσι καὶ τῆς αὐτοῦ φύσεως, ὡς ἐδείχθη, εἰ συντιθοῖντο κατ' ἐκλογὰς 15  
 ἀεὶ προσθέσει ἐνός, φύσονται κύβοι· οἷον α' πρῶτον ὁ δυνάμει κύβος ἀσύνθετος, εἶτα δύο περισσοὶ γ' ε'  
 δη' κύβος δεύτερος, εἶτα τρεῖς περισσοὶ ξ' θ' ια'  
 ⟨δη κξ'⟩ τρίτος κύβος, εἶτα τέσσαρες ιγ' ιε' ιξ' ιθ' δη δέ  
 τέταρτος κύβος, καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς δμοίως. πάλιν 20  
 ἐν τῇ τῶν ἀναλόγων ἐκθέσει οἱ μὲν τρίτοι τετράγωνοί εἰσιν, οἱ δὲ τέταρτοι κύβοι, οἱ δὲ ξοι κύβοι ἄμα καὶ τετράγωνοι. πᾶς δὲ κύβος τῇ ἑαυτοῦ πλευρᾷ αὐξηθεὶς τετράγωνον ποιεῖ, ὃς ἔσται τοσούτοπλάσιος τοῦ κύβου δσαπλάσιος ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ τῆς κυβικῆς πλευ- 25  
 138 ρᾶς τετράγωνος | αὐτῆς τῆς πλευρᾶς, δὲ τετράγωνος

πλευρὰ καὶ αὐτὸς ἔσται τετραγωνικὴ τοῦ γενομένου ἐκ τε τοῦ κύβου καὶ τῆς αὐτοῦ πλευρᾶς. πάλιν ὡς ἐκ δύο τετραγώνων μηκυνάντων ἀλλήλους τετράγωνος ἐγένετο, οὗτος ἐκ δύο κύβων κύβος, ἐκ δὲ κύβου ἑαυτὸν λαβόντος 5 κύβος ἄμα καὶ τετράγωνος. καὶ ἐν τοῖς ἀνάλογον ἐὰν δὲ μὲν μετὰ μονάδα κύβος ἦ, καὶ οἱ λοιποὶ κύβοι ἔσονται· καὶ τεσσάρων ἀνάλογον ὅντων, ἐὰν δὲ πρῶτος κύβος ἦ, καὶ δὲ τέταρτος ἔσται κύβος, ἢ καὶ μετροῦντος κύβου κύβον, καὶ πλευρὰ πλευρὰν μετρήσει. καὶ σχεδὸν τὰ 10 συμβεβηκότα πάντα τετραγώνοις ἀναλόγως ἐνοραθήσεται καὶ τοῖς κύβοις. ἐπιτρέψαντες οὖν τοῖς δι' αὐτῶν φιλοκαλήσουσι τὴν τῶν τοιούτων συμπτωμάτων ἀνεύρεσιν, ἐπὶ τὸν περὶ ἀναλογιῶν μεταβησόμεθα τόπον.

‘*Ἡ τοίνυν ἀναλογία λόγων ἔστι πλειόνων δμοιότης 15 καὶ ταυτότης. τί δέ ποτ’ ἔστι λόγος δικαίων, ἐπεὶ πολλαχῶς δικαίων, ἐν τοῖς πρόσθεν διεσαφήσαμεν ὅτι δυεῖν δρῶν δμογενῶν δικαίων δικαίων ἔστι σχέσις. δμογενῶν δὲ πρόσκειται, διότι τὰ ὑπὸ ταύτῃ γένος συγκρίνειν προσῆκεν, οἷον μνᾶν πρὸς τάλαντον, | ὡν 139 20 κοινὸν γένος τὸ βάρος, καὶ γραμμὴν πρὸς ἐπιφάνειαν δικαίων· κοινὸν γὰρ αὐτῶν τὸ μέγεθος. ἔστι δέ τινα καὶ κατὰ δύναμιν καὶ κατὰ δύκον καὶ ἄλλα τινὰ γένη συγκρινόμενα. τὰ δὲ ἀνομογενῆ πᾶς ἔχει πρὸς ἄλληλα οὐ δυνατὸν εἰδέναι, οἷον πῆχυς πρὸς κοτύλην, 25 πρὸς χοίνικα τὸ λευκόν. ἐν δὲ γένος ἔστι καὶ τὸ ποσὸν καὶ ποσοῦ δικαίων, ὥστε γενήσεται καὶ τῶν ἐν δικαίων λόγων δικαίων, ἔσται αὐτῶν λόγος τις*

καὶ σχέσις ποιά. καὶ μὲν ἐν ἴσοτητι ὥσιν οἱ ὅροι,  
 ἵσου πρὸς ἵσον ἔστι λόγος· ἀδιάφορος γὰρ ἡ ἴσοτης·  
 ἐν δὲ ἀνισότητι κατὰ διαφοράν. καὶ διάστημα μὲν οὐ  
 ταῦτὸ δῆσται καὶ δ λόγος διττὸς καὶ ὅτι καὶ τὸ ἄνων  
 δύο καὶ οὐχ ἐν καὶ διάστημα μὲν ταῦτὸν ἔσται, λόγος 5  
 δὲ ἔτερος· τοῦ γὰρ δύο πρὸς ἐν καὶ τοῦ ἐνὸς πρὸς  
 δύο διάστημα μὲν ταῦτον, λόγος δὲ διπλάσιος τε καὶ  
 ἡμισυς, ὥστε ἔτερον λόγον εἶναι διαστήματος· καὶ  
 γὰρ ἐπὶ πλείοσιν ὅροις, λόγου πολλάκις τοῦ αὐτοῦ  
 ὄντος, διάστημα ἔτερόν ἔστιν, ως ἐπὶ τῶν δ' οἵ θ'. 10  
 140 ὅτι | δὲ δ τῆς ἀνισότητος λόγος ἐν δέκα γένεσιν ἔστι,  
 καὶ πέντε μὲν προλόγοις κατὰ τὸ μεῖζον, ὑπολόγοις  
 δὲ τοῖς ἵσοις κατὰ τὸ ἔλαττον, καὶ ὅτι ἀπὸ ἴσοτητος  
 πάντες τὴν γένεσιν ἔχουσιν, ἐμάθομεν ἐμπροσθεν ἐν  
 τῷ περὶ τῶν σχέσεων τόπῳ. ἔστι δέ τις καὶ ἀριθμοῦ 15  
 πρὸς ἀριθμὸν λόγος αὐτῷ λεγόμενος, διὰ τὸ μηδενὶ  
 ὑποπίπτειν τῶν δέκα γενῶν, ως ἐπιδειχθήσεται ἐν  
 τοῖς ἀριθμοικοῖς, δ τοῦ λείμματος λόγος ἐν ὅροις ἐν τοῖς  
 συνέ πρὸς σμγ'. τῶν οὖν ἐν ἀριθμοῖς λόγων τοιούτων  
 τινῶν ὄντων ἡ ἀναλογία σύλληψις ἔσται πλειόνων ἐν 20  
 διοιδητηι λόγων ἐν ἔλαχίστοις τρισὶν ὅροις· λέγεται  
 γὰρ λόγος συνηφθαι, ὅταν κοινὸς ὅρος ἦ μέσος πρὸς  
 ἑκάτερον τῶν ἀκρων λόγον ἔχων· δ γὰρ κοινὸς ὅρος  
 τοῦ λόγου συνάπτει. διεξεῦχθαι δὲ λέγεται λόγος λόγου,  
 ὅταν μὴ ἔχωσι κοινὸν ὅρον. τοῦτο δὲ ἐν τέτταρσιν 25  
 ὅροις γίνεται, διὸ καὶ δοκεῖ τὸ ἀνάλογον τῆς ἀναλο-

γίας διαφέρειν· τὸ μὲν γὰρ ἀνάλογον καὶ ἐν διεξευγμένοις ὅροις γίνεται, ἡ δὲ ἀναλογία κυρίως ἐπὶ τῶν κοινὸν ἔχόντων ὅρον τάττεται. τῆς δὴ ἀναλογίας ἐν 141 τοισὶν ὅροις γινομένης δεῖ ἔχειν τὸν πρῶτον ὅρον 5 πρὸς τὸν δεύτερον λόγον ὃν δὲ δεύτερος ἔχει πρὸς τὸν τρίτον, ἢ ἀνάπαλιν, διὸ καὶ οὗτος ὠνομάσθαι· ἀνὰ γὰρ τὸν αὐτὸν λόγον ἔκκεινται οἱ ὅροι. ἔσονται δὲ καὶ διαφοραὶ αὐτῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· εἰ δὲ λόγος ἔστι καὶ ἐν ἴσοτητι, δῆλον ὅτι καὶ ἀναλογία. καὶ 10 ταύτης στοιχειωδεστάτη ἡ ἐν μονάσιν, ἵνα καὶ ἀναλογικὴ μονὰς ὑπάρχῃ, εἰτα ἡ ἐν δυάσι καὶ τρίτη ἡ ἐν τριάσι καὶ ἕξης ἀκολούθως, ἀφ' ὧν κατὰ τὰ εἰδημένα ἔμπροσθεν τρία προστάγματα εὔτακτοι φύουνται αἱ ἐν ἀνισότητι ἀναλογίαι.

15     Προληπτέον δὲ ὅτι κυρίως ἀναλογίαν ἐκάλουν οἱ παλαιοὶ τὴν γεωμετρικήν, κοινότερον δὲ ἥδη καὶ τὰς λοιπὰς πάσας μὴν γενικῶς μεσότητας. ὅτι δὲ εὐλόγως συνεστάλη τὸ ὄνομα ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς, ἐν τῷ περὶ αὐτῆς φημήσεται λόγῳ. μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς 20 ἥσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητικὴ τε καὶ ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ Ἀρχύταν αὗθις καὶ Ἰππασον ἀρμονικὴ 142 μετακληθεῖσα, ὅτι τοὺς κατὰ τὸ ἡρμοσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα. ὑπεναντία δὲ πρότερον ἐκαλεῖτο, διότι ὑπεναντίον τι ἔπασχε τῇ ἀριθμητικῇ,

ώς δειχθήσεται. ἀλλαγέντος δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα περὶ Εὔδοξον μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσ-  
ανευρόντες μεσότητας τὴν τετάρτην ίδίως ὑπεναντίαν  
ἐκάλεσαν, διὰ τὸ καὶ αὐτὴν ὑπεναντίον τι πάσχειν τῇ  
ἀριθμονικῇ, ως δειχθήσεται· τὰς δὲ λοιπὰς δύο ἀπλῶς 5  
κατὰ τὴν τάξιν προσηγόρευσαν πέμπτην τε καὶ ἔκτην.  
οἱ μὲν παλαιοὶ καὶ οἱ μετ' ἐκείνους τοσαύτας ὅντο  
δυνατὸν εἶναι συστῆσαι μεσότητας, τουτέστιν ἔξ. οἱ  
δὲ νεώτεροι τέσσαρας ἄλλας τινὰς προσανεῦρον, ἐκ τῶν  
ὅρων καὶ τῶν διαστημάτων προστεχνησάμενοι τὴν γέ- 10  
νεσιν αὐτῶν.

'Η μὲν οὖν πρώτη ἀριθμητικὴ μεσότης ἔστιν, ὅταν  
τῶν ὅρων διάφορος ἔχῃ <ἴσον> διάστημα πρὸς τοὺς ἐκα-  
τέρωθεν ἄκρους καὶ ὑπερέχῃ καὶ ὑπερέχηται ἵσῳ ἀριθμῷ,  
λόγους δὲ ἔχῃ διαφόρους πρὸς τοὺς ἄκρους, καὶ μείζονα 15  
μὲν τὸν πρὸς τὸν ἐλάττονα ὅρον, ἐλάττονα δὲ <πρὸς>  
143 τὸν μείζονα, | συνεχεῖς δὲ τούτους ἐτερογενῶς. ὑπό-  
δειγμα δ' αὐτῆς ἐκτεθέντος ἀπὸ μονάδος τοῦ ἐφεξῆς  
ἀριθμοῦ καὶ ὡντινωνοῦν τριῶν ὅρων λαμβανομένων εἴτε  
συνεχῶν εἴτε τῶν παρ' ἓνα εἴτε τῶν παρὰ δύο ἢ τρεῖς ἢ 20  
τέσσαρας ἢ ὅσους τις ἀνθέλῃ, διάφορος καθ' ἐκάστην  
ἐκλογὴν ἵσῳ ἀριθμῷ ὑπερέχει τὸν ἐλάττονα καὶ ὑπερ-  
έχεται ὑπὸ τοῦ μείζονος, οἷον α' β' γ' καὶ α' γ' ε'  
καὶ β' δ' ε'. γεννᾶται δὲ ἔξ ἴσοτητος οὗτως· πρώτον  
ἴσον πρώτῳ, δεύτερον πρώτῳ καὶ δευτέρῳ, τρίτον 25

πρώτῳ καὶ δευτέρῳ καὶ τρίτῳ· πάλιν πρῶτον ἐκ πρώτου καὶ δευτέρου, δεύτερον ἐκ πρώτου καὶ δύο δευτέρων, τρίτον ἐκ πρώτου δύο δευτέρων <καὶ> τρίτον. ἀλλ' ἐκ μὲν τῆς ἐπὶ μονάσι διὰ τῆς προτέρας ἐφόδου ἡ 5 παρ' οὐδὲν τοὺς ὅρους ἔχουσα γεννᾶται, ἐκ δὲ τῆς ἐν δυάσιν ἡ παρ' ἔν, ἐκ δὲ τῆς ἐν τριάσιν ἡ παρὰ δύο 144 καὶ ἐν τετράσιν ἡ παρὰ τρεῖς καὶ ἐφεξῆς ἀναλόγως. καὶ μὲν διπλάσιος διπλάσιος ἡ λόγος, ἡμιόλιος πάντως διπλάσιος, τριπλάσιος δὲ διπλάσιος ἀκρων. ἂν δὲ τριπλάσιος, ἐπιδιμερὴς τρίτων, πενταπλάσιος δὲ διπλάσιος ἀκρων. καὶ τετραπλάσιος, ἐπιτριμερὴς τετάρτων, ἐπταπλάσιος δὲ διπλάσιος δὲ διπλάσιος ἀκρων καὶ εξῆς ἀναλόγως. ἵδιον δὲ τῆς μεσότητος ταύτης τὸ ὑποδιπλάσιον εἶναι τὸν μέσον ὅρον τῶν δύο ἀκρων. καὶ πάλιν, ὡς ἔκαστος 15 ὅρος ἔχει πρὸς ἑαυτόν, οὗτος καὶ ἡ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, τοῦτο δέ ἐστι τὸ ἐν ἶσῃ ὑπεροχῇ τοὺς ὅρους εἶναι. αἱ δὲ ἀπὸ μονάδος κατὰ τρεῖς ὅρους λαμβανόμεναι συζυγίαι ποιήσουσι πολυγώνων τοὺς δευτέρους ἐνεργεία, τριάδι πάντας ἀλλήλων ὑπερέχοντας. ἐκ μὲν 20 γὰρ τῆς α' β' γ' διπλάσιος ἐνεργείᾳ τριγωνος γίνεται δισκός, ἐκ δὲ τῆς α' γ' ε' διπλάσιος ἐνεργείᾳ τετραγωνος δισκός, ἐκ δὲ τῆς γ' δ' ε' διπλάσιος ἐνεργείᾳ πεντάγωνος δισκός καὶ εξῆς ἀκολούθως. ἐὰν δὲ οἱ ὅροι παρ' ἔνα ἐκλεγῶσιν ἀπὸ μονάδος, οὐκέτι ἀρχεῖ τῶν 25 πολυγώνων διπλάσιος, μεταστήσεται δὲ ἡ ἀφήγησις 145 εἰς τετραγωνον· πρῶτος γὰρ ἐσται δισκός δὲ ἐκ τῆς α' γ' ε' συζυγίας, οἱ δὲ εξῆς γινόμενοι λόγοι τινὰ οὐκ ἀτακτον ἔξουσιν. ἐὰν δὲ παρὰ δύο παράλειψιν ἡ

έκλογη γίνηται, ἵν' ἦ α' δ' ξ', ἀρξει πεντάγωνος διβ'. ἐὰν δὲ κατὰ τριῶν παράλειψιν, ἔσται ἐκ τῶν α' ε' θ' ἕξάγωνος διε', καὶ οὕτως μέχρι παντὸς ἀκολούθως τῇ αὐτῶν τῶν πολυγώνων γενέσει. διότι μὲν γὰρ οἱ τρίγωνοι ἐγίνοντο ἐκ τῶν παρ' οὐδέν, ἀρξει ἐν τῇ πρώτῃ συστάσει τῶν πολυγώνων τρίγωνος διστάσει, διότι δὲ ἐκ τῶν παρ' ἐναὶ ἐγίνοντο οἱ τετράγωνοι, ἀφηγεῖται ἐν τῇ δευτέρᾳ συστάσει διθέτραγωνος, καὶ ἔτι ἐκ τῶν παρὰ δύο οἱ πεντάγωνοι, καὶ τοῦτο δι' δλου ἔσται ἀκολούθως. ἐπεὶ δὲ ἕξάδος ἀποτελεστική ἔστιν ἡ πρώτη παρ' οὐδὲν ἀπὸ μονάδος συζυγία, ἡ πρώτη α' β' γ' εἰδοποιήσει τὰς ἕξῆς αὐτῆς, μηδενὸς δρού κοινοῦ λαμβανομένου μηδὲ μὴν παρελλειπομένου, ἀλλὰ μετὰ τὴν α' β' γ' λαμβανομένης τῆς διεστάσεως, εἰτα ζ' η' θ' καὶ ἕξῆς ἀκολούθως· πᾶσαι γὰρ αὗται ἕξάδες γενήσονται μεταλαμβανούσης τὸν μονάδος τόπον ἀεὶ 146 τῆς δεκάδος, τουτέστιν εἰς μονάδα | ἀναγομένης· οὕτως γὰρ αὐτὴν καὶ δευτεροδουμέναν μονάδα καλεῖσθαι ἐλέγομεν πρὸς τῶν Πυθαγορείων, καὶ τριτοδουμέναν τὴν ἑκατοντάδα, καὶ τετραδουμέναν τὴν χιλιάδα. 20 ἡ μὲν γὰρ διεστάσεως ποιεῖ ἀριθμὸν τὸν ιε'. ἀναγομένης δὲ τῆς δεκάδος εἰς μονάδα, διπέντε προσλαβὼν αὐτὴν ἕξὰς γίνεται. πάλιν ἡ ζ' η' θ' συνθεῖσα ποιεῖ τὸν κδ' ἀριθμόν, οὗ τὰ κ' εἰς δύο μονάδας ἀναγαγὼν προστίθημι τῷ δ', καὶ ἔχω πάλιν ἕξάδα. πάλιν ι' 25 ια' ιβ' συνθεῖσες ποιῶ λγ', ὃν τὰ λ' τριάς ἔστιν, ἣν προσθεῖσες τοῖς τρισὶν ἔχω δμοίως ἕξάδα, καὶ τοῦτο

δμοίως ἔσται δι' ὅλου. καὶ ἡ μὲν πρώτη ἔξας οὐκ  
ἔχει μετάθεσιν δεκάδος εἰς μονάδα, ως ἀν εἰδοποιὸς  
καὶ στοιχεῖον τῶν μετ' αὐτὴν ὑπάρχουσα· ἡ δὲ δευ-  
τέρα μιᾶς μονάδος μετάθεσιν ἔξει, ἡ δὲ τρίτη δυεῖν  
5 καὶ ἡ τετάρτη τριῶν καὶ ἡ πέμπτη τεσσάρων καὶ ἔξης  
ἀκολούθως. ὅσαι δ' ἀν ὕσιν αἱ μετατιθέμεναι δεκά-  
δες, τοσαῦται καὶ αἱ ἐννεάδες ἀφαιρεθήσονται ἐκ τοῦ  
ὅλου συστήματος, ἵνα τὸ λεῖπον δμοίως ἔξας ἦ· τοῦ  
γὰρ ιε' μιᾶς δεκάδος ἔχοντος μετάθεσιν, ἐὰν ἀφέλω  
10 μίαν ἐννεάδα, λειφθήσεται ἔξας. τοῦ δὲ κδ' δύο ἔχοντος  
δεκάδας τὰς μεταποιουμένας ἐὰν ἀφέλω δύο ἐννεάδας,  
λειφθήσεται | πάλιν ἔξας, καὶ τοῦτο δι' ὅλου συμβή-  
147 σεται. καὶ πλέονα δ' ἀν τις εὔροι παρακολουθοῦντα  
γλαφυρὰ τῇ ἀριθμητικῇ μεσότητι, ἀπερ ἐκόντες τὰ  
15 νῦν παραλείπομεν στοχαζόμενοι τῆς κατὰ τὴν εἰσ-  
αγωγὴν συμμετρίας. ταύτην δ' εἶπεν δ Πλάτων μεσό-  
τητα ἵστη μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερεχομένην, ἵστη  
δὲ ὑπερέχουσαν'.

Ἡ δὲ δευτέρα μεσότης ἡ γεωμετρικὴ κυρίως ἀνα-  
20 λογία κένληται, διότι λόγον τὸν αὐτὸν οἱ ὅροι περι-  
έχουσιν, ἀνὰ τὸν αὐτὸν λόγον διεστῶτες· ὃν γὰρ  
λόγον ἔχουσιν οἱ ὅροι πρὸς ἄλληλους ἢ ἀπ' ἐλάττουνος  
ἐπὶ μείζονα διὰ τοῦ κοινοῦ ἢ ἀνάπαλιν, τοῦτον ἔχει  
καὶ διαφορὰ πρὸς διαφοράν· αἵτιον δέ τι κατ' ἵσην  
25 διαφορὰν οὐ διαστήσονται οἱ ὅροι ως ἐπὶ τῆς προ-  
τέρας. δυνατόν τε καὶ ἐν τέτταρσιν ὅροις τὸ ἀνάλογον  
γενέσθαι διεξευγμένων τῶν λόγων. καὶ ἵνα τὸ Πλα-

τωνικὸν ἐνθάδε προσαρμόσωμεν τῇ ἀναλογίᾳ λεκτέον· ὅπόταν γὰρ ἀριθμῶν τριῶν εἴτε ὅγκων εἴτε δυνάμεών τι κοινωνῆ τὸ μέσον, ὃ τι περ τὸ πρῶτον πρὸς αὐτό, τοῦτο αὐτὸ πρὸς τὸ ἔσχατον, 148 καὶ πάλιν αὖθις, ὃ τι τὸ ἔσχατον πρὸς τὸ μέσον, τὸ μέσον πρὸς τὸ πρῶτον, τότε τὸ μέσον μὲν πρῶτον καὶ ἔσχατον γινόμενον, τὸ δὲ ἔσχατον καὶ τὸ πρῶτον αὖ μέσα ἀμφότερα, ταῦθ' οὗτος ἐξ ἀνάγκης τὰ αὐτὰ εἶναι καὶ ξυμβήσεται· καὶ πρὸ Πλάτωνος δὲ τὰ αὐτὰ διειλήφεσαν 10 Πυθαγορικοὶ περὶ αὐτῆς. Τίμαιός τ' οὖν δὲ Λοκρὸς ἐν τῷ Περὶ φύσεως κόσμῳ καὶ ψυχᾶς (ἀφ' οὗπερ ἐφοδιασθέντα Πλάτωνα τὸν διὰ τοῦτο φερόνυμον Τίμαιον συντάξαι λέγουσιν, ὃν ἐστιν καὶ δ τοὺς σίλλους ποιήσας Τίμων λέγων οὕτως· ‘πολλῶν δὲ ἀργυρίων 15 δλίγην ἡλλάξατο βίβλον | ἐνθεν ἀφορμηθεὶς τιμαιογραφεῖν ἐπεχείρει’) οὗτο πώς φησι· ‘τριῶν γὰρ ὧν τινωνοῦν ὅρων, ὃταν καὶ τὰ διαστάματα κατὰ τὸν αὐτὸν ἐστάθη λόγον ποτ’ ἄλλα, τότε δὴ τὸ μέσον δύσμῳ δίκας δρῆμεθα ποττὸ πρᾶ- 20 τον, ὃ τι περ τὸ τρίτον ποτ’ αὐτὸ καὶ πάλιν καὶ παραλλάξ.’ ἐστι δὲ ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ, τουτέστι τοῦ πηλίκου, κατὰ λόγους

ἴσους καὶ δμοίους διεστῶσα· ἡ δὲ ἀριθμητικὴ τοῦ δι-  
ηρημένου ποσοῦ οὐκέτι μὲν λόγοις, ἀριθμοῖς δὲ ἴσους  
κατὰ τὰς ὑπεροχὰς διεστῶσα. καὶ ἐν μὲν ταύτῃ λόγοι 149  
ἔτεροι, διαστήματα δὲ ταύτα· ἐν δὲ τῇ γεωμετρικῇ  
5 ἀνάπταλιν λόγοι μὲν οἱ αὐτοί, διαφοραὶ δὲ ἔτεραι. γεν-  
νᾶται δὲ καὶ αὕτη ἀπὸ ἴσοτητος τοῖς ἐπὶ τῶν σχέσεων  
τρισὶ τοῖς αὐτῶν προστάγμασι· πάντες γὰρ ἐκεῖ τρεῖς  
ὅροι κατὰ ταύτην ἀναλογοῦσι τὴν μεσότητα ἔχοντες  
οὗτως· ὡς δὲ μείζων πρὸς τὸν μέσον ὅ τε μέσος πρὸς  
10 τὸν ἐλάττονα, καὶ ἡ τοῦ μείζονος παρὰ τὸν μέσον  
ὑπεροχὴν πρὸς τὴν τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάττονα. Ἰδιον  
δὲ αὐτῆς τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἴσον  
ἀποτελεῖν, ἐὰν τρεῖς ἢ καθόλου περισσοὶ ὥσιν οἱ ὅροι.  
εἰ δὲ τέσσαρες ἢ ὅλως ἄρτιοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον  
15 τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ποιήσει. καὶ ἐπὶ μὲν ταύτης κατ’  
ἔγκρασιν οἱ ὅροι ἀλλήλους μηκύνουσιν, ἐπὶ δὲ τῆς  
ἀριθμητικῆς κατὰ σύνθεσιν, ὅτι τοιοῦτον τὸ διηρημέ-  
νον ποσὸν καὶ τὸ πλῆθος, περὶ δὲ πάλιν ἰδίως ἡ  
ἀριθμητικὴ καταγίνεται, ὡς ἐν ἀρχῇ τῆς εἰσαγωγῆς  
20 ἡμῖν εἴρηται. ἐν μὲν οὖν πολλαπλασίοις ἀνάλογον  
ἐκθέσεσι παντοῖαις πάμπολλα αὐτῆς εὑρήσομεν ὑπο-  
δείγματα, ἐν δὲ ἐπιμορφίοις καὶ ἐπιμερέσιν ἀεὶ καὶ  
μᾶλλον σπανιώτερα κατὰ τὴν | τοῦ μερικοῦ δυνόματος 150  
πρόοδον. τὸ δὲ αἴτιον προφανές, ὅτι πολυπλασιάζε-  
25 σθαι μὲν πᾶς ἀριθμὸς δυνατός, μέρη δὲ πάντα δέξα-  
σθαι οὐ πᾶς, ἀλλ' ἡμίση οἱ παρ' ἐνα, τρίτα δὲ οἱ  
παρὰ τὰ δύο, τέταρτα δὲ οἱ παρὰ τρεῖς, πέμπτα δὲ  
οἱ παρὰ τέσσαρας καὶ ἕξης ἀεὶ καὶ μᾶλλον ἀραιότεροι  
οἱ μεγαλωνυμώτερα μέρη ἔχοντες. εἰ δὲ λόγοι ἀεὶ καὶ

μᾶλλον διηγώτεροι ἔσονται διὰ τὴν σπανιότητα τῶν ἐπιδεξιούμενων τὸ μόριον ἀριθμῶν καθ' ὃ ἐπιμόριον ἐπιμερεῖς γενήσονται, πολὺ μᾶλλον σπανιώτεραι αἱ ἀναλογίαι γενήσονται διὰ τὴν τοῦ τρίτου πρόσθεσιν ὅρου· οὐ γάρ ὁ πρὸς τῷ ὅρῳ τῷ μέσῳ φέρεται εἰπεῖν καὶ ἡμισύ 5 τινος ἔχων, καὶ αὐτὸς πάντως ἡμισύ ἔχει, οὐδὲ ὁ σὺν τρίτῳ μέρει περιέχων τινά, καὶ αὐτὸς τρίτον ἔχει, καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς μερῶν παραπλησίως. ἀλλ' ἵνα ἀναλογία γίνηται, ἀνάγκη τοὺς περιεκτικοὺς ὅρους τῶν λόγων πυθμένας ἀλλήλους πολυπλασιάσαι, οὕπερ καὶ ἐμφαν- 10 τασθήσονται ταῖς διαφοραῖς τῆς ἀναλογίας. ἵνα δὲ κοινόν τι ὑπόδειγμα λάβωμεν πυθμενικῶν ἀναλογιῶν κατὰ πάντα τὰ εἶδη τοῦ ἐπιμορίου ἀρξαμένου ἀπὸ ἡμιολίου καὶ πρὸς τούτοις πολλαπλασίων τοῦ πρώτου, 151 τουτέστι διπλασίου, ἐκθετέον κάνταῦθα στιχηδὸν 15 ταύτους τε καὶ ἑτέρους ἑκατέρους ἀπὸ τῆς οἰκείας ἀρχῆς, καὶ συναρμοστέον κατ' ἐμπλοκὴν αὐτούς, ὥσθ' ἑκάστην συζυγίαν τριῶν ὅρων εἶναι, καὶ κατὰ συνέχειάν γε ἀεὶ τῆς προτέρας συζυγίας τοῦ ὑστάτου ἀρχοντος τῆς μετ' αὐτήν· κατὰ γάρ τὴν ἀδιάξευκτον 20 ἐκλογὴν ἑκαστοι τρεῖς ὅροι ἀπὸ μονάδος παραδείξουσι τὸ ξητούμενον.

'Η δὲ τρίτη μεσότης ἡ καλούμενη ἀρμονική ἐστιν, ὅταν τριῶν ὅρων ἀνίσων ὡς ἔχει ὁ μείζων ὅρος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὗτος ἡ ὑπεροχὴ μειζόνων ὅρων πρὸς 25 ὑπεροχὴν ἐλαττόνων, τουτέστιν ἡ τοῦ μείζονος παρὰ τὸν μέσον ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάττονα. ἑτέρα δέ ἐστιν αὕτη παρὰ τὰς πρὸς αὐτῆς,



ὅτι δὲ μέσος ὅρος οὗτε ἀριθμῷ τῶν ἄκρων ἵστω ὑπερέχει καὶ ὑπερέχεται, οὕτ' ἐν λόγῳ ἐστὶν διμοίως πρὸς αὐτούς. πυθμένες δὲ αὐτῆς β' γ' σ' ἢ γ' δ' σ'. κατὰ γὰρ τούτων πολλαπλασιασμὸν ἢ ἐπιμοριασμόν, ἐάν γε 5 ἐπιδέχωνται, ἄλλαι πολλαὶ φύσουνται. καλοῦσι δέ τινες τὴν μεσότητα ταύτην ἐστηκυῖαν, ὅτι ἐν μόνοις τοῖς εἰρημένοις πυθμενικοῖς ὅροις ἔσπερ ἐστῶσι καὶ πρω- 152 τοτύποις φαίνεται· ἐπὶ γὰρ τῆς ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρικῆς ἀπείρους συζυγίας ἔνεστι συντάττεσθαι. ἀλλ' 10 οὖν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς πυθμενικαῖς οἵ τε ἄκροι ἐν διπλασίᾳ καὶ τριπλασίᾳ λόγῳ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ τῶν μειζόνων πρὸς τοὺς μέσους διαφορὰὶ πρὸς τὰς τῶν μέσων πρὸς τοὺς ἐλάττονας. ἀρμονικὴ δὲ κέκληται ἡ μεσότητος ὅτι σπερματικῶς τοὺς ἐν ἀρμονίᾳ λό- 15 γους ἔστιν ἐνιδεῖν αὐτῇ, οἷον ἐν τῇ γ' δ' σ' τὸ διὰ τεσσάρων λεγόμενον σύμφωνον, ὅπερ ἐλάχιστον ἔστι τῶν ἄλλων συμφώνων διαστημάτων, ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ θεωρούμενον ἐν ὅροις ἔστι τοῖς ἐλάττοσι, τουτέστι τῷ δ' πρὸς γ'. τὸ δὲ διὰ πέντε, ὅπερ ἕξῆς μετὰ τὸ διὰ 20 τεσσάρων ἔστιν ἐν ἡμιολίᾳ λόγῳ ὃν ἐν τοῖς μείζοσιν ὅροις, τουτέστι τῷ σ' πρὸς δ'. τὸ δὲ διὰ πασῶν σύστημα ὃν ἀμφοτέρων τῶν προειρημένων καὶ ἐν δι- πλασίονι λόγῳ θεωρούμενον ἐν τοῖς ἄκροις, τουτέστι τῷ σ' πρὸς γ'. καὶ ἔτι ἡ τοῦ σ' διαφορὰ παρὰ τὸν 25 δ' πρὸς τὴν τοῦ δ' παρὰ τὸν γ' διμοίως ἐν διπλασίᾳ λόγῳ ἔστι, κατὰ τὴν διὰ πασῶν συμφωνίαν. | καὶ μὴν καὶ ἡ δύναμις τῶν ἄκρων ἐπ' ἀλλήλους γε- 153

νομένων τὰ ιη' πρὸς τὴν τοῦ μέσου ἐφ' ἑαυτὸν γε-  
νομένου τὴν ις' ἐν ἐπογδόῳ λόγῳ οὖσαν περιέχει  
τὸ τονιαῖον διάστημα· ἐν γὰρ τοῖς πρωτοτύποις δροῖς  
τοῖς γ' δ' σ' οὐκ ἐνην τὸν λόγον τοῦ διαστήματος  
τούτου φανῆναι, διότι οὐδεὶς αὐτῶν δγδόου μέρους 5  
ἐστὶ παρεκτικός, καθ' ὅ ἄλλος τις αὐτοῦ ἔσται ἐπόγδοος.  
πάλιν ἡ δύναμις τοῦ μεγίστου ἐστὶ τριπλασία, ὁ δὲ  
τριπλάσιος λόγος περιέχει τὴν διὰ πασῶν ἀμα καὶ διὰ  
πέντε συμφωνίαν, ἡ δὲ δύναμις καθ' αὐτὸν τοῦ με-  
γίστου πρὸς τὴν δύναμιν τοῦ ἐλαχίστου λόγον ἔξει 10  
τετραπλάσιον, ὃς περιέχει τὴν δὶς διὰ πασῶν συμ-  
φωνίαν. πάλιν δὲ ἔξ ἄλλης ἀρχῆς δύναμις τοῦ μὲν  
ἐλαχίστου πρὸς τὸν μέσον ιβ', τοῦ δ' αὐτοῦ πρὸς τὸν  
μέγιστον ιη', τοῦ δὲ μέσου πρὸς τὸν μέγιστον κδ'.  
ἰδίᾳ δὲ τοῦ μὲν γ' καθ' ἑαυτὸν θ', τοῦ δὲ δ' ις', 15  
τοῦ δὲ σ' λς'. καὶ ἔστιν ἐν μὲν ἐπιτριτῷ λόγῳ τῷ  
τὸ διὰ τῶν τεσσάρων περιέχοντι τὰ τε κδ' τῶν ιη'  
καὶ τὰ ιβ' τῶν θ'. ἐν δὲ ἡμιολίῳ τῷ διὰ πέντε τὰ τε  
ιη' τῶν ιβ' καὶ τὰ κδ' τῶν ις' καὶ τὰ λς' τῶν κδ', |  
154 ἐν δὲ τριπλασίῳ λόγῳ, ἵνα τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ 20  
πέντε συστῆ, ὁ λς' πρὸς τὸν ιβ', ἐν δὲ τετραπλασίῳ,  
ἵνα τὸ δὶς διὰ πασῶν φανῇ, ὁ λς' πρὸς θ', ἐν δὲ ἐπ-  
ογδόῳ πρὸς τὴν τοῦ τονιαίου διαστήματος ἔμφασιν τὰ  
ιη' τοῦ ις', ώς προερρηθη. καὶ ἡ ἐτέρα δὲ πυθμε-  
νικὴ μεσότης ἡ β' γ' σ' αὐτόθεν μὲν ἔχει τὸν τρι- 25  
πλάσιον λόγον ἐν τε τοῖς ἄκροις πρὸς ἀλλήλους καὶ  
τὰς διαφορὰς πάλιν πρὸς ἀλλήλας, ἐν φ λόγῳ ἔστιν ἡ

διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε μικτὴ συμφωνία, ὅπερ  
οὐχ ὑπῆρχε τῇ προτέρᾳ μεσότητι γ' δ' σ'. εἰ δὲ καὶ  
πολλαπλασιάσαιμεν τούς τε ὄρους καθ' ἑαυτοὺς καὶ  
ἐπ' ἀλλήλους καὶ οιαφορὰς καθ' ἑαυτὰς καὶ ἐπὶ τοὺς  
5 ὄρους καὶ ἔτι ἐπ' ἀλλήλας, φύσονται ἡμῖν πλείους  
συμφωνιῶν λόγοι, ὡς ἔνεστί τινα δι' ἑαυτοῦ φιλοκα-  
λήσαντα κατανοῆσαι. προσαρμοσθείη δ' ἂν κάπι ταύ-  
της τῆς μεσότητος οἰκείως τὸ Πλατωνικόν· ἀρμονικὴ 155  
γάρ ἔστιν ἡ μεσότης ἡ 'ταύτῳ μέρει τῶν ἄκρων  
10 αὐτῶν ὑπερέχουσά τε καὶ ὑπερεχομένη', ὅπερ  
ἄλλῃ οὐ συμβέβηκεν· ἐπὶ τε γὰρ τῆς β' γ' σ' [τῷ  
αὐτῷ μέρει] δι μέσος ὄρος τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων,  
τουτέστιν ἡμίσει, ὑπερέχει τε καὶ ὑπερέχεται· ὑπερ-  
έχει μὲν τοῦ ἐλάττονος, ὑπερέχεται δὲ ὑπὸ τοῦ μείζο-  
15 νος· ἐπὶ τε τῆς γ' δ' σ' πάλιν δι μέσος ὄρος τῷ αὐτῷ  
μέρει τρίτῳ, τῶν ἄκρων ὑπερέχει μὲν τοῦ γ', ὑπερέχε-  
ται δὲ ὑπὸ τοῦ σ'. μονάδι γὰρ καὶ δυάδι. ὑπεναντία  
δὲ τῇ ἀριθμητικῇ μεσότητι αὗτη ἐνομίσθη ὑπὸ τῶν  
περὶ Πυθαγόραν, διότι ἐκείνη τὸν μέσον ὑπερεχόμε-  
20 νόν τε καὶ ὑπερέχοντα εἶχεν ιδίῳ αὐτοῦ μέρει οὐκέτι  
τῶν ἄκρων καὶ τῷ αὐτῷ· ἵσῳ γὰρ ὑπερέχει καὶ ὑπερ-  
έχεται ἀριθμῷ ἢ μονάδι, ἐπὶ δὲ τῆς ἀρμονικῆς οὐκ  
ἵσῳ. ἐπεὶ δὲ βούλονται τινες ὑπεναντίαν ἀμφοτέραις  
ἀριθμητικῇ τε καὶ γεωμετρικῇ ταύτην ἐκδέχεσθαι,  
25 ἔφαμεν δὲ ἡμεῖς τῇ ἀριθμητικῇ μόνῃ ὑπεναντίον τι  
πάσχειν, συλλήψεται ἡμῖν κάκεῖνο· ἔφεξει γὰρ τὸ μι-  
κτόν τι παθοῦσαν φαίνεσθαι τὴν γεωμετρικὴν καὶ  
μεσότητος λόγον ἔχειν πρός τε ἀριθμητικὴν καὶ | ἀρ- 156

μονικὴν ὡς ἀεὶ ἀκρότητα· τὰ γὰρ ἐκατέρας ἴδιώματα  
 ἐφ' ἑαυτῆς ἀναμίξει. ἦν μὲν γὰρ τῆς ἀριθμητικῆς ἶδιον  
 τὸ τὸν μέσον ὅρον ὑπερέχειν τε καὶ ὑπερέχεσθαι μέρει  
 αὐτῶν τῶν ἄκρων ποιότητι τῷ αὐτῷ, εἰ καὶ μὴ ποσό-  
 τητι, οὐδέποτε δὲ τοῦ μέσου· τῆς δὲ ἀριθμητικῆς ἀνά- 5  
 παλιν οὐκέτι τῶν ἄκρων, ἀλλὰ τοῦ μέσου καὶ ποσότητι  
 τῷ αὐτῷ. ἐπὶ δὲ τῆς γεωμετρικῆς δὲ μέσος ὅρος φῶ  
 ὑπερέχει καὶ ὑπερέχεται μέρει, ἐκεῖνο οὔτε μόνων τῶν  
 ἄκρων ἔστιν οὔτε μόνου τοῦ μέσου, ἀλλὰ καὶ μέσου  
 καὶ ἄκρων· τοῦ μὲν γὰρ ἐτέρου τῶν ἄκρων ὑπερέξει 10  
 αὗτοῦ μέρει, ὑπερσχεδήσεται δὲ ὑπὸ θατέρου τοῦ  
 ἐκείνου μέρει· τὸ δὲ αὐτὸ ἔσται ποιότητι, εἰ καὶ μὴ  
 ποσότητι τὸ μέρος, ὡς ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς. πολλάκις  
 δὲ καὶ πλείοσι μέρεσιν ὑπερέξει τε καὶ ὑπερσχεδήσεται,  
 ἐπὶ ποιότητι πάλιν τοῖς αὐτοῖς, ὥστε καὶ κοινόν τι 15  
 ἔξει πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τὸ μόνον ποιότητι ταύτον  
 εἶναι τὸ μέρος, μηκέτι δὲ ποσότητι, καὶ κατὰ τοῦτο  
 οὐκ ἔσται αὐτῇ ὑπεναντία ἢ ἀριθμητική. πάλιν ἐν μὲν  
 τῇ ἀριθμητικῇ κατὰ μὲν τοὺς μείζονας ὅρους οἱ ἐλάτ-  
 157 τονες λόγοι ἐφαίνοντο, κατὰ δὲ τοὺς ἐλάττονας οἱ 20  
 μείζονες ἐν δὲ τῇ ἀριθμητικῇ ὑπεναντίως μείζονες μὲν  
 ἐν τοῖς μείζοσιν, ἐλάττονες δὲ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν, ἐν  
 δὲ τῇ γεωμετρικῇ ὠσανεὶ μέσῃ αὐτῶν οὕσῃ οὔτε ἐλάτ-  
 τονες οὔτε μείζονες, ἀλλ' ἵσοι. διὰ δὴ ταῦτα εὐλόγως  
 ἀν μόνη τῇ ἀριθμητικῇ ὑπεναντία ἢ ἀριθμητικὴ λέγοιτο, 25  
 οὐκέτι δὲ καὶ τῇ γεωμετρικῇ. ἶδιον δὲ ἔχει ἢ ἀριθ-  
 μητικὴ τὸ ὑπὸ μέσου καὶ συνάμφω τῶν ἄκρων εἶναι  
 διπλάσιον τοῦ ὑπὸ μόνων τῶν ἄκρων γινομένου. γεν-

νᾶται δὲ προστάγμασι τούτοις πάλιν ἀπὸ ἴσότητος πρῶτον ἐκ μονάδων <εἶτα δυάδων> εἶτα τριάδων καὶ ἐφεξῆς· πρῶτον ἐκ πρώτου καὶ δευτέρου, δεύτερον δὲ ἐκ πρώτου δύο δευτέρων, τρίτου δὲ ἐκ πρώτου δὶς 5 δευτέρου τρὶς τρίτου, ἵνα γένηται ἡ τὰ ἄκρα καὶ τὰς διαφορὰς ἐν τριπλασίᾳ λόγῳ ἔχουσα. εἰ δὲ οὐ ἐν διπλασίᾳ, πρῶτον ἐκ πρώτου καὶ δὶς δευτέρου, δεύτερον δ' ἐκ δὶς πρώτου καὶ δὶς δευτέρου, τρίτου δὲ ἐξ ἄπαξ πρώτου δὶς δευτέρου τρὶς τρίτου. ἀπὸ μὲν γὰρ 10 ἴσότητος ἐν μονάσιν ἔσονται κατὰ τὰ εἰρημένα προστάγματα αἱ πυθμενικαὶ δύο μεσότητες ἡ β' γ' σ' καὶ ἡ γ' δ' σ'. ἀπὸ δὲ τῆς ἐν δυάσιν <αἱ διπλάσιαι καὶ ἀπὸ τῆς ἐν τριάσιν> αἱ τριπλάσιαι καὶ ἐφεξῆς. ἀπὸ πασῶν δὲ τῶν γινομένων πλάσεων τὰ ἴδιώματα τῆς 15 ἀρμονικῆς παρακολουθήσει.

Καθάπερ δὲ ἐπὶ τοῦ κανόνος τῶν ἐξάψεων μενούσῶν δὲ ὑπαγωγεὺς μεθιστάμενος ποικίλας συμφωνίας 158 ἀποτελεῖ, τὸν αὐτὸν τρόπον δυνατόν ἐστι, δύο δρῶν δοθέντων εἴτε ἀρτίων εἴτε καὶ περισσῶν καὶ τῶν 20 αὐτῶν διαμενόντων, ἄλλην καὶ ἄλλην μεσότητα νῦν μὲν ἀριθμητικὴν ἀποτελεῖν νῦν δὲ γεωμετρικὴν νῦν δὲ τὴν τῇ ἀριθμητικῇ ὑπεναντίαν, τουτέστιν ἀρμονικὴν· ἰδοὺ γὰρ ἐν μὲν ἀρτίοις δροῖς τῷ τε μ' καὶ τῷ ι' δὲ μὲν κείται δρος μεσότης γενόμενος ἀριθμητικὴν ἀποτελεῖ, οὐ καὶ τὰ ἴδιώματα πάντα παρακολουθήσει, δὲ δὲ καὶ γεωμετρικὴν σὺν τοῖς ἴδιώμασιν αὐτῆς, δὲ δὲ τοις ἀρμονικὴν μετὰ τῶν προσηκόντων συμπτω-

μάτων. ἐν δὲ περισσοῖς ὅροις τῷ τε με' καὶ τῷ ε'  
δ αὐτὸς κε' μεσεμβοληθεὶς δμοίως ποιήσει τὴν ἀριθ-  
159 μητικήν· | αἴτιον δ' ὅτι οἶν προσέλαβεν δ μείζων  
πρὸς *(τὸν μέσον)*, τοσούτων ἀφηρέθη δ ἐλάττων,  
ῶστε κατ' ἵσην πάλιν ὑπεροχὴν τὸν μέσον ὑπερέχειν 5  
τε καὶ ὑπερέχεσθαι· τοῦτο γὰρ ἦν ἀριθμητικῆς ἰδιον.  
δ δὲ ιε' μεσεμβοληθεὶς γεωμετρικὴν ποιήσει, δ δὲ θ'  
τὴν ἀρμονικήν. ἐλάττονας δὲ ἀριθμοὺς τῶν ἔκκειμέ-  
νων ἄκρων κατά τε τὸ περισσὸν εἶδος καὶ τὸ ἄρτιον  
περιεκτικοὺς τῶν τριῶν μεσοτήτων οὐκ ἀν τις εὔροι, 10  
ἀλλ' οὗτοι ἀν εἶεν οἱ πυθμενικοὶ καὶ ἐλάχιστοι.

Καὶ αὖδε μὲν αἱ τρεῖς μεσότητες πρὸς τῶν πα-  
λαιῶν μόναι λόγου ηξιοῦντο, διαφοραῖς χρώμεναι  
πρὸς ἀλλήλας καὶ ἴδιότησι καθ' αὐτὰς ταῖς εἰρημέναις,  
ἐφηρμόζοντο δὲ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῇ κοσμικῇ συστάσει 15  
καὶ ἀρμονίᾳ, ὡς ἐν ἄλλοις δεῖξομεν. αἱ δὲ ἐπὶ ταύ-  
ταις τρεῖς ἀπ' Ἀρχύτου καὶ Ἰππάσου παραδοχῆς καὶ  
αὐταὶ ηξιώθησαν, ὃν ἡ πρώτη, τετάρτη δὲ συν-  
αριθμούμένη τῶν ἐξ ἀρχῆς τριῶν, ἴδιως ὑπεναντία  
ώς ἔφαμεν κέκληται, διὰ τὸ ὑπεναντίον τι πάσχειν τῇ 20  
ἀρμονικῇ διὰ τοὺς ἐνοφθέντας αὐτῇ τῶν συμφωνιῶν  
λόγους. ἔστι δ' οὖν ἡ τετάρτη μεσότης τοιαύτη· τριῶν  
160 ὅρων ὡς ἔχει δ μείζων πρὸς | τὸν ἐλάττονα, οὗτοις  
ἔξει ἡ τῶν ἐλαττόνων ὅρων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν  
μειζόνων. ὑπεναντία δὲ τῇ ἀρμονικῇ εἴρηται, διότι ἐν 25  
ἔκείνη ἡ τῶν μειζόνων ὅρων διαφορὰ πρόλογος ἦν,  
ἐπὶ δὲ ταύτης ἡ τῶν ἐλαττόνων. τοὺς δὲ ἄκρους τοὺς



αὐτοὺς διατηροῦσιν ἀμφότεραι κατά τε τὰς πυθμενικὰς καὶ τὰς τούτων πολλαπλασίους. ὑποδείγματα δὲ ταύτης ἔσται β' ε' σ', γ' ε' σ', ἕδιον δὲ τὸ πολλαπλάσιον ἀποτελεῖν τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων ὅρων τοῦ ὑπὸ τῶν ἐλαττόνων. οὔτε δὲ τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν δι μέσος ὅρος ὑπερέξει τε καὶ ὑπερσχεθήσεται ὡς ἐπὶ τῆς ἀρμονικῆς, οὔτε τῷ ἑαυτοῦ μέρει ὡς ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς, οὔτε ἄμα τῷ τε ἑαυτοῦ καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων ὡς ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς, ἀλλ' 10 ἔσται τις ἴδιότης κατὰ τὴν ὑπεροχὴν ἑαυτῆς. γεννᾶται δὲ καὶ αὕτη ἐξ ἴσοτητος, πρώτως τῆς ἐν μονάσιν 161 εἶτ' ἐν δυάσι καὶ τριάσιν καὶ ἔξης ἀκολούθως· πρῶτον ἐκ πρώτου καὶ δευτέρου, δεύτερον δὲ <ἐκ> πρώτου δύο δευτέρων δύο τρίτων, τρίτον δὲ ἐξ ἄπαξ πρώτου 15 δὶς δευτέρου τρὶς τρίτου, καὶ φύσεται ἡ ἐν τριπλασίῳ λόγῳ τοὺς ἄκρους ἔχουσα. ἵνα δὲ ἡ ἐν διπλασίῳ ἔχουσα γένηται, ποιητέον πρῶτον ἐκ πρώτου δύο δευτέρων, δεύτερον δὲ ἐκ πρώτου δύο δευτέρων δύο τρίτων, τρίτον δὲ ἐξ ἄπαξ πρώτου δὶς δευτέρου τρὶς 20 τρίτου. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι πρωτότυποι φύσονται ἐκ τῆς ἀπὸ μονάδων ἴσοτητος, αἱ δὲ τούτων διπλάσιαι ἐκ τῆς ἀπὸ δυάδων καὶ τριπλάσιαι ἐκ τῆς ἀπὸ τριάδων καὶ ἔξης ἀκολούθως. ἡ δὲ πέμπτη ὑπεναντίον μέν τι καὶ αὕτη πάσχει τῇ γεωμετρικῇ, ἀπλῶς 25 δὲ πέμπτη εἰρηται διὰ τὸ προειλῆφθαι τῷ δυόματι τὴν πρὸ αὐτῆς. ἔστι δ' οὖν τριῶν ὅρων ὡς δι μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὔτως ἡ αὐτῶν τούτων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν μειζόνων, οἷον β' δ' ε'. ὑπηναντίωται δὲ τῇ γεωμετρικῇ, διότι ἐπὶ μὲν ἐκείνης ἦν ἡ τῶν



μειζόνων ὅρων διαφορὰ πολλαπλασία τῆς τῶν ἐλασσόνων, ἐπὶ δὲ ταύτης ἀνάπαλιν ἡ τῶν ἐλασσόνων· τῆς τῶν μειζόνων, ἐν μέντοι τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐν ᾧ καὶ οἱ 162 λεχθέντες ὅροι. ἵδιον δ' ἔχει τὸ διπλάσιον ἀποτελεῖν τὸ ἀπὸ τοῦ μέσου τοῦ ὑπὸ ἐλαχίστου καὶ μέσου, 5 καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων ὅρων τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων. καὶ ταύτης δὲ αἱ πολλαπλάσιαι τὰ αὐτὰ ἔξουσι παρακολουθήματα. γεννᾶται δὲ ἐκ τριῶν ἵσων ὅρων, πρῶτος ὅρος ἐκ πρώτου καὶ δευτέρου, μέσος ἐκ δύο πρώτων δύο δευτέρων, μείζων ἐκ τοῦ πρώτου δύο 10 δευτέρων δύο τρίτων. ἡ δὲ ἔκτη, ὅταν ὡς ὁ μέγιστος τῶν τριῶν ὅρων πρὸς τὸν μέσον ἔχῃ, οὔτως καὶ ἡ τῶν ἐλαττόνων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν μειζόνων. διὰ ταύτα δέ, δι' ἄπερ καὶ ἡ πρὸ αὐτῆς, τῇ γεωμετρικῇ ἡναντίωται, οἷον α' δ' σ'. κανταῦθα δὲ πρόλογός 15 ἐστιν ἡ τῶν ἐλαττόνων ὅρων διαφορά, τῆς γεωμετρικῆς πρόλογου ἔχούσης τὴν τῶν μειζόνων ὅρων πρὸς ἀλλήλους, καὶ συνάμφω τῶν διαφορῶν πρὸς ἀλλήλας ἡμιόλιοι εἰσι. τοιοῦτοι γενήσονται καὶ οἱ τὸ ἵδιον <ταύτης> τῆς μεσότητος ἀποδιδόντες λόγοι. τὸ γὰρ 20 ἀπὸ τοῦ μεγίστου σ' ἡμιόλιον ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν μειζόνων ὅρων, καὶ αὐτὸ τοῦτο <τὸ> ἀπὸ τοῦ μέσου καὶ αὗτη δ' ἀν γεννηθείη ἐκ τριῶν ἐν ἴσοτητι ὅρων 163 οὔτως· πρῶτος πρώτῳ ἵσος, δεύτερος δυσὶ | πρώτοις δυσὶ δευτέροις, τρίτος ἐξ ἄπαξ πρώτου δὶς δευτέρου 25 τρὶς τρίτου. ἡ μὲν οὖν πρωτότυπος ἀπὸ μονάδων ἐστίν, αἱ δὲ ταύτης πολλαπλάσιαι ἀπὸ δυάδων καὶ τριάδων καὶ τῶν ἔξης ἴσοτήτων.

Εἶρηται καὶ περὶ τῶν ἔξῆς ταῖς πρώταις τριῶν μεσοτήτων, αἷς καὶ οἱ ἀπὸ Πλάτωνος μέχρις Ἐρατοσθένους ἔχοήσαντο, ἃρξαντος ώς ἔφαμεν τῆς εὐρέσεως αὐτῶν Ἀρχύτα καὶ Ἰππάσου τῶν μαθηματικῶν. τὰς δ' ὑπὸ τῶν μετὰ ταῦτα νεωτέρων περὶ τε Μυωνίδην καὶ Εὐφράνορα τοὺς Πυθαγορικοὺς προσφιλοτεχνηθείσας τέσσαρας οὕτε παραλείπειν ἄξιον· ἀφιλόκαλον γὰρ τὸ τοιοῦτον· οὕτε μὴν ἐπεκτείνειν τὸν περὶ αὐτῶν λόγον, διὰ τὸ μηδὲν οὔτω σεμνὸν αὐτὰς ἔχειν μηδὲ ποικίλον, 10 ώς τὰς πρὸ αὐτῶν. διόπερ ἐν ἐπιδρομῇ φητέον περὶ αὐτῶν στοχαζομένους ἅμα καὶ τῆς τοῦ βιβλίου συμμετρίας. ὡνομάσαμεν δ' αὐτὰς ἀπλῶς οὔτως· ἐβδόμην καὶ διγδόνην καὶ ἐνάτην καὶ δεκάτην. | καὶ ἔστιν 164 ἡ μὲν ἐβδόμη, ὅταν ώς δὲ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον 15 ἔχῃ, οὔτως ἡ αὐτῶν διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων, οἷον σ' η' θ'. γένεσις δὲ αὐτῆς ἐκ τῆς τετάρτης γ' ε' σ'. τὰ γὰρ ἐκείνης ἄκρα συνθεὶς ταύτης μέγιστον τάσσω, ἐκ δὲ ἐλαχίστου καὶ μέσου τὸν ταύτης ποιῶ μέσον, τὸν δὲ ἐκείνης μέγιστον ταύτης ἐλάχιστον. παρακολουθεῖ δὲ ταύτῃ τὸ ἔχειν τὸν αὐτὸν λόγον τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων δρῶν πρόμηκες πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν ἐλαττόνων, ὅνπερ καὶ δὲ μέγιστος δρος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔχει, καὶ ἡ τῶν ἄκρων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων. ἡ δὲ διγδόνη θεωρεῖται, ὅταν ώς 25 δὲ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔχῃ, οὔτως καὶ ἡ αὐτῶν | τούτων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ μεγίστου παρὰ 165

τὸν μέσον, ἀντιστρόφως τῇ πρὸ αὐτῆς, οἷον σ' ζ' θ'. γένεσις δὲ καὶ ταύτης ἐκ τῆς πέμπτης τῆς β' δ' ε'. συνθεὶς γὰρ τοὺς μεγίστους αὐτῆς ὅρους ποιῶ τὸν ταύτης μέγιστον, τοὺς δ' ἄκρους τὸν ταύτης μέσον τάσσω, τοὺς δὲ ἐλάττονας πάλιν συνθεὶς ἐκείνης ἔχω 5 τὸν ταύτης ἐλάττονα. παρακολουθεῖ δὲ αὐτῇ τό, ώς δι μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔχει, οὗτος καὶ τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων ὅρων ἔχειν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ἐλαττόνων. ή δὲ ἐννάτη, ὅταν ώς δι μέσος ὅρος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔχῃ, οὗτος ή διαφορὰ τῶν ἄκρων πρὸς τὴν τῶν 10 166 ἐλαττόνων, οἷον δ' ζ'. | ἕδιον δὲ ἔχει τὸ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν μειζόνων πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἐν φάπερ καὶ μέσος πρὸς ἐλάχιστον, καὶ διαφορὰ δὲ ἄκρων πρὸς διαφορὰν ἐλαττόνων. γεννήσομεν δὲ καὶ ταύτην ἐκ τῆς ἕκτης α' δ' ζ'. συνθεὶς 15 γὰρ αὐτῆς τὰ ἄκρα ποιῶ τὸν ταύτης μέγιστον, μέσον δὲ τάσσω τὸν ἐκείνης μέγιστον, ἐλάχιστον δὲ τὸν μέσον. ἔσονται δὴ τάξει ταῖς ἀπὸ τῆς ἐβδόμης τρισὶ μεσότησιν αἱ γενέσεις ἀπὸ τῶν πρὸ αὐτῶν τριῶν τετάρτης τε καὶ πέμπτης καὶ ἕκτης. ή δ' ἐπὶ πάσαις δε- 20 κάτη ἐστίν, ὅταν ώς δι μέσος ἔχῃ πρὸς τὸν ἐλάσσονα, οὗτος καὶ ή <διαφορὰ τῶν ἄκρων πρὸς τὴν διαφορὰν> τοῦ μεγίστου παρὰ τὸν μέσον, οἷον γ' ε' η'. ἕδιον δὲ ταύτης τὸ ἐν ἐπιμερεῖ λόγῳ θεωρεῖσθαι καὶ 167 πυθμένειν γε, ἀλλ'—οὐκ ἐν πολλαπλασίᾳ η̄ ἐπιμορίῳ. 25 καὶ παρακολουθεῖ αὐτῇ τὸ ὑπὸ τῶν ἐλαττόνων πρό-

μηκες ἔσον τῷ ὑπὸ τῶν λεχθεισῶν διαφορῶν ἀποτελεῖν· αἴτιον δ' ὅτι οἱ αὐτοί εἰσιν ἀριθμοί. γεννᾶται δὲ καὶ αὕτη ἐκ τῆς ἀρμονικῆς τῆς β' γ' σ', ἥτις πρὸ τῶν εἰρημένων ἔστι τριῶν μέσων, ἵνα συνεχεῖς ἀπὸ 5 συνεχῶν καὶ εἰ μὴ εὐτάκτων τὴν γένεσιν σχῶσι. συνθεὶς δ' οὖν τοὺς ἄκρους ἐκείνης ποιῶ τὸν ταύτης μέγιστον, ἐκ δὲ τῶν ἐλασσόνων τὸν μέσον ταύτης τάσσω, τὸν δὲ μέσον ἐφ' ἕαυτοῦ ἐλάχιστον ταύτης φυλάσσω. δέκα δὴ τῶν πασῶν ἡμῖν ἀναφανεισῶν μεσοτήτων, οὐ 10 τὸ τυχὸν ἐγκώμιον ἔσται τῆς δεκάδος καὶ τοῦτο πρὸς τὸ μηδένα τέλειον λόγον ἐκφυγεῖν αὐτήν, ἀλλ' ὡσανεὶ δεχάδα τινὰ οὖσαν τοὺς τῶν ὄντων ἀπάντων λόγους εἰς ἕαυτήν ἀναδέχεσθαι, καὶ διὰ τοῦτο πᾶν καὶ ὅλον καὶ οὐρανὸν πρὸς τῶν παλαιῶν ἐπωνομάσθαι, ὡς ἐν 15 τῷ περὶ αὐτῆς λόγῳ πειρασόμεθα δεῖξαι, ὅταν καὶ τῶν ἄλλων ἀπὸ μονάδος μέχρις αὐτῆς ἀριθμῶν ἐκάστου ἐπανθήματα εὑθὺς ἔξῆς μετὰ τήνδε τὴν εἰσαγωγὴν δεικνύωμεν.

Τὰ νῦν δὲ περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας ὁητέον 20 ἐν | τέσσαρσιν ὅροις ὑπαρχούσης καὶ ἴδιως μουσικῆς 168 ἐπικληθείσης διὰ τὸ τοὺς μουσικοὺς λόγους τῶν καθ' ἀρμονίαν συμφωνιῶν τρανότατα ἐν αὐτῇ περιέχεσθαι. εὔρημα δ' αὐτήν φασιν εἶναι Βαβυλωνίων καὶ διὰ Πυθαγόρου πρώτου εἰς Ἑλληνας ἐλθεῖν. εὑρίσκονται 25 γοῦν πολλοὶ τῶν Πυθαγορείων αὐτῇ κεχρημένοι, ὥσπερ Ἀρισταῖος ὁ Κροτωνιάτης καὶ Τίμαιος ὁ Λοκρὸς

καὶ Φιλόλαος καὶ Ἀρχύτας οἱ Ταραντῖνοι καὶ ἄλλοι πλείουσ, καὶ μετὰ ταῦτα Πλάτων ἐν τῷ Τιμαίῳ λέγων οὗτως· ‘μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦτο τά τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ 5 τούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταύτῳ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσάν τε καὶ ὑπερεχομένην, τὴν δ' ἵσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἵσῳ δὲ ὑπερεχομένην· ἡμιολίων δὲ καὶ ἐπιτρίτων δια- 10 στάσεων διὰ πασῶν τῷ τοῦ ἐπογδόντος λείμματι συνεπληροῦτο’· καὶ τὰ τούτοις ἐφεξῆς, ἅπερ δῆλα πάντα ἔσται μετὰ τὴν τῆς ἀναλογίας ταύτης παράδοσιν. ἔστιν οὖν ἡ μουσικὴ καλουμένη ἀναλογία ἐν ὅροις τέσσαροι, δύο μὲν ἄκροις δύο δὲ μέσοις, ὥστ' ἐμπεπλέχθαι 15 169 διαφόρους ὄντας τοὺς λόγους τῶν μέσων ὅρων πρὸς τοὺς ἄκρους κατὰ τὰς ἐν ἀρμονίαις συμφωνίαις διεστώσαις. ἐπεὶ γὰρ τὰ κατὰ μουσικὴν ἐν ἀρμονίᾳ σύμφωνα γίνεται, φθόγγων δυεῖν ἡ καὶ πλειόνων οὐχ διμοφώνων ὑπὸ μίαν πλῆξιν κατακιρναμένη καὶ τῇ ἀκοῇ ἐνοειδῶς 20 προσπιπτόντων, ἐλάχιστον δὲ καὶ πρῶτον τῇ ἀκοῇ αἰσθητὸν σύμφωνον διάστημά ἔστι τὸ διὰ τεσσάρων· ἐν τοσαύτῃ γὰρ αἱ περιέχουσαι αὐτὸς χορδαὶ ἀποστάσει εἰσὶν ἀπ' ἀλλήλων. ἔστι δὲ τοῦτο ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ, μεθ' ὁ μιᾶς χορδῆς προσληφθείσης τὸ μὲν δλον διά- 25

στημα παρὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν διὰ πέντε κέκληται, ἐν λόγῳ δὲ καὶ αὕτη ἡμιολίῳ τυγχάνει. διαφορὰ δὲ τούτου πρὸς τὸν ἔτερον τὸ περιεχόμενόν ἐστι διάστημα ὑπὸ τῆς προσληφθείσης πέμπτης χορδῆς τονιαῖον ὑπὸ ἀρχῶν καὶ ἐν ἐπογδῷ λόγῳ τυγχάνον, ὥστε τὸ μὲν διὰ πέντε τοῦ διὰ τεσσάρων τόνῳ ὑπερέξει, δὲ ἡμιόλιος λόγος ἐπιτρίτου ἐπογδόω. καὶ ταῦτα μὲν ἀσύνθετα διαστήματα καὶ ἀπλῶς ἐν συμφώνοις κατείληπται, ἐξ ὧν συντιθεμένων τὰ μείζονα κατακορεστέραν ἥδη τὴν 10 συμφωνίαν | ἀποδίδωσι, καὶ πρῶτον γε τὸ διὰ πασῶν 170 καλούμενον ὅπερ ἐξ ἀμφοτέρων ἐκείνων σύνθετόν ἐστιν, ἐπικληθὲν καὶ αὐτὸ οὔτως, ὅτι πάσας ἐμπεριέχει τὰς τὰ ἀπλᾶ σύμφωνα ἀποτελούσας χορδάς, καὶ ἐστιν ἐν λόγῳ διπλασίᾳ· παντὸς γὰρ ἐπιτρίτου καὶ ἡμιολίου 15 λόγου σύστημά ἐστιν δὲ διπλάσιος. ἐξ αὐτοῦ δὲ πάλιν τοῦ διπλασίου καὶ ἐκατέρου τῶν ἐξ ἀρχῆς *τὸ διὰ πασῶν ἄμα καὶ διὰ τεσσάρων καὶ τὸ διὰ πασῶν ἄμα καὶ διὰ τεσσάρων λεγόμενον οἱ Πυθαγορικοὶ μὲν σύμφωνον οὐκ ὕστοντο εἶναι, διαφεῦγον πολλαπλάσιον τε καὶ ἐπιμόριον λόγον καὶ ἔτι ἐπιμερῆ, εἰς δὲ μικτὴν σχέσιν ἐκπίπτόν ἐστι· καὶ γὰρ ὡς η' πρὸς γ', διότι τὰ μὲν σ' τοῦ γ' διπλάσια, τὰ δὲ η' τοῦ σ' ἐπίτριτα· εἰς δ' οὖν τὸ παρὸν κατὰ τοὺς νεωτέρους νομιζέσθω καὶ αὐτὸ σύμ-*

φωνον, σαφηνείας ἔνεκα τῶν ἔξῆς. μεθ' ὁ πάλιν τὸ διὰ πασῶν ἄμα καὶ διὰ πέντε σύμφωνόν ἐστιν ἐν τριπλασίῳ λόγῳ ὅν, διότι ἐκ διπλασίου καὶ ἡμιολίου διπλάσιος λόγος σύγκειται· διπλάσια μὲν γὰρ τὰς οὐ τῶν γ', ἡμιόλια δὲ τὰς θ' τῶν γ', ἀπερ πρὸς γ' ἐν 5  
 171 τριπλασίῳ λόγῳ ἐστίν. Ἐαυτῷ δὲ τὸ διπλάσιον συντεθὲν ποιεῖ τὸ διὰ πασῶν σύμφωνον διάστημα ἐν λόγῳ ὅν τετραπλασίῳ· διὰ γὰρ ὁ διπλάσιος λόγος τετραπλάσιός ἐστι. τὰς δὲ εἰς τούτῳ μείζονας συμφωνίας συμβαίνει γίνεσθαι, προσπλεκομένων πάλιν τῇ 10 διὰ πασῶν τῶν ἔξι ἀρχῆς ἀπλῶν διαστημάτων, ἃν παρίεμεν ἐκόντες, ὡς εὔκαιρότερον ὅν ἐν αὐτῇ τῇ Μουσικῇ εἰσαγωγῇ περὶ αὐτῶν τεχνολογεῖν. τὰς δὲ ἐπιτάσεις καὶ ἀνέβεις τῶν χορδῶν κατὰ τοὺς εἰρημένους λόγους γινομένας πρῶτον Πυθαγόραν ἴστοροῦσι 15 συμμετρήσασθαι· παριόντα γὰρ εἰς τι χαλκοτυπεῖον, καὶ ἐκ τῆς τῶν ὁμοιότερων καταφορᾶς συμφώνου ἀπηχήσεως ἐπακούσαντα, συσταθμίσασθαι τὰ βάρη, καὶ εὑρόντα \*\*\* καὶ ἐν λόγοις τοῖς εἰρημένοις, μεγαλοφυῶς περινοῆσαι καὶ ποικίλαις ὑλαις ἐφαρμόσαι τοὺς 20 αὐτοὺς λόγους, νῦν μὲν μήκεσι χορδῶν ἢ ἴσοπαχῶν μέν, κατὰ δὲ τὴν κολόβωσιν συμμετρηθεισῶν πρὸς ἀλλήλας, ἢ ἀνάπτατιν ἴσομηκῶν μέν, ἀναλόγως δὲ παχυνθεισῶν, νῦν δὲ κατὰ μὲν τὰ προειρημένα ἀδιαφόρων οὐσῶν κατὰ δὲ μόνην | τὴν τάσιν διαφόρως συμ- 25

μετρηθεισῶν, πολλάκι δὲ καὶ κατὰ δύο τῶν εἰρημένων καὶ τρεῖς διαφορὰς τὴν ἔξετασιν ἀναλαμβανουσῶν. ήδη δὲ κάπι τῶν συρίγγων καὶ αὐλῶν καὶ δλως τῶν ἐμπνευστῶν τὸ ἀνάλογον ἐφαρμόζειν αὐτῷ φάστον ἦν· 5 κάκεī γὰρ ἀκολούθως τοῖς ἐντατοῖς τά τε μήκη καὶ αἱ κοιλώσεις κατὰ τοὺς εἰρημένους λόγους συμμετρούμεναι τὰς συμφωνίας ἀπετέλουν, τῆς μὲν εὔρυτητος καὶ μακρότητος τῶν αὐλῶν ἀναλογούσης πάχει καὶ μήκει καὶ ἀνέσει χορδῆς, στενότητος δὲ καὶ βραχύτητος λεπτότητί τε καὶ ἐπιτάσει καὶ βραχύτητι. τὰς δ' αἰτίας, δι' ἃς τοῦτο συνέβαινε, κατ' οἰκεῖον τόπον ἐν αὐτῇ τῇ Μουσικῇ εἰσαγωγῇ σαφηνιοῦμεν. τὰ νῦν δὲ ὡς ἐν ἐπιδρομῇ θεωρητέον ἐπ' ἀριθμῶν τοὺς εἰρημένους λόγους. ἵνα τοίνυν ἐπίτροιτον ἀποστήσῃ τις λόγον, ἀριθμοῦ δεῖ τρίτον ἔχοντος· διὸ γὰρ τούτον ἐπίτροιτος πάντως ἡμισυ ἔξει, ὅπως καὶ διὸ τούτου ἡμιόλιος πρὸς τὸν ἔξι ἀρχῆς διπλάσιον, ὡς ἔχει ἐπὶ τῶν σ' η' ιβ'. ἡ πάλιν ἵνα ἡμιόλιον λόγον ποιήσω, ἀριθμοῦ δεῖ ἡμισυ ἔχοντος, ἵν' διὸ ἡμιόλιος αὐτοῦ τεινόμενος 20 τρίτον ἀναγκαίως ἔχων ὑπεπίτροιτον λόγον πρὸς | ἄλ-173 λον τινὰ ὅρον παράσχῃ, διὸ τοῦ ἔξι ἀρχῆς ἔσται πάλιν πολλαπλάσιος, ὡς ἔχει ἐπὶ τῶν σ' θ' ιβ'. εἰ δὴ τηρήσαιμεν τοὺς ἄκρους ὅρους ἔστωτας, ἐπειδὴ καὶ οἱ αὐτοὶ εἰσιν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς μεσότησι, τὸν σ' λέγω 25 καὶ τὸν ιβ', τοὺς δὲ μέσοντις ἄμα τάξαιμεν μεταξὺ αὐτῶν, ἔσται ἡ εἰρημένη διὰ τεσσάρων ὅρων μουσικὴ ἀναλογία ἡ σ' η' θ' ιβ'. πρῶτον δ' ἐτάξαμεν αὐτῆς τὸν σ' ἀριθμόν, ἐπειδὴ τρίτον ἄμα καὶ ἡμίσους πρῶ-

τος ἦν ἐπιδεκτικός, ἵνα ἀπ' αὐτοῦ τοὺς εἰρημένους λόγους ἀποστῆσαι δυνηθῶμεν, ἐπίτριτον μὲν τὸν η' πρὸς τὸν ἡμιόλιον τὸν ιβ', ὃς διπλάσιος ἔσται τοῦ ἐξ ἀρχῆς σ', ἥ πάλιν ἡμιόλιον μὲν τὸν θ' πρὸς τὸν ἐπίτριτον τὸν ιβ', ὃς πάλιν ἔσται τοῦ ἐξ ἀρχῆς διπλάσιος. καὶ αὗτη ἔστιν ἡ προειρημένη ἐμπλοκὴ τῶν μέσων ὅρων πρὸς τοὺς ἄκρους. ὅτι δ' ἀναγκαῖον ἦν πρῶτον τάξαι τὸν σ' πρὸς τὴν τῶν λόγων ἀπόστασιν, ἐντεῦθεν ἀν μάθοιμεν· μονάδα μὲν γὰρ οὐχ οἶδον τ' ἦν, ἐπειδὴ ἀμερής ὑπόκειται καὶ οὔτε ἡμισυ οὔτε τρί- 10 τον ἔχει, ἀλλ' οὐδὲ δυάδα, διότι ἡμισυ μὲν ἔχει τρίτον δ' οὐκ ἔχει, οὐδὲ μὴν τὴν τριάδα τρίτον μὲν ἔχουσαν ἡμισυ δ' οὐκ ἔχουσαν, οὐδὲ τετράδα διὰ τὰ αὐτὰ τῇ δυάδι (τρίτον γὰρ καὶ αὕτη ἔστερηται), τὴν δὲ πεντάδα διὰ τὰ αὐτὰ τῇ μονάδι οὕθ' ἡμισυ οὔτε 15 τρίτον ἔχουσαν. πρῶτος δὴ καὶ ἐλάχιστος ἡμῖν ὁ σ' 174 χρησιμεύσει | πρὸς τὰς τῶν λόγων ἀποστάσεις, ἀποτέλεσμα ὃν τῶν δύο πρῶτων ἀριθμῶν καὶ ἡμίσους καὶ τρίτου ἐπιδεκτικῶν, λέγω δὲ τοῦ β' καὶ γ'. πρὸς δὴ τὸν σ' ὁ μὲν η' ἐπίτριτος ὃν περιέξει τὴν διὰ 20 τεσσάρων συμφωνίαν. καὶ ἐπεὶ πρὸς τὸν η' ἡμιόλιος ἔστιν ὁ ιβ' περιέχων τὴν διὰ πέντε, πρὸς τὸν ἐξ ἀρχῆς σ' ὁ αὐτὸς ιβ' διπλάσιος ὃν <περιέξει τὴν διὰ πασῶν> συμφωνίαν σύνθετον οὖσαν ἐκ τῆς διὰ τεσσάρων καὶ διὰ πέντε. καὶ πάλιν τοῦ σ' ὁ θ' ἡμιόλιος 25 ὃν περιέξει τὴν διὰ πέντε, πρὸς δὲ τὸν θ' ὁ ιβ' τὴν διὰ τεσσάρων ἐπίτριτος ὃν αὐτοῦ, πρὸς δὲ τὸν ἐξ ἀρχῆς σ' πάλιν τὴν διὰ πασῶν. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τοῦ διὰ πέντε πρὸς τὸ διὰ τεσσάρων, τὸ τονιαῖον

διάστημα, περιέχουσιν οἱ μέσοι δὲ πρὸς η' ἐν  
ἐπογδόῳ λόγῳ ὅντες, διότι δὲ ἡμιόλιος λόγος τοῦ ἐπι-  
τρίτου ἐπογδόῳ ὑπερέχει, ώς εἰρηται. καὶ η̄ διαφορὰ  
δὲ μειζόνων ὅρων τοῦ ιβ' καὶ δὲ *〈πρὸς τὴν〉* τοῦ η'  
καὶ σ' τὸν ἡμιόλιον λόγον περιέχει, ὃς ἔστι τῆς διὰ  
πέντε συμφωνίας· καὶ κατ' ἐμπλοκὴν η̄ διαφορὰ τοῦ  
ιβ' καὶ η̄ πρὸς διαφορὰν τοῦ δὲ καὶ σ' τὸν ἐπίτρι-  
τον ἔξει λόγον τῆς διὰ τεσσάρων συμφωνίας· τὸν δὲ  
διπλάσιον η̄ τε τοῦ η' καὶ σ' διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ  
η' καὶ δὲ διαφοράν, καὶ η̄ τοῦ ιβ' καὶ η̄ διαφορὰ  
πρὸς τὴν τοῦ η' καὶ σ' διαφοράν, καὶ ἔτι η̄ τοῦ ιβ'  
καὶ σ' διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ δὲ καὶ σ' διαφοράν  
καθ' ἐκάστην γὰρ συζυγίαν λόγος ἔστι τῆς διὰ πα-  
σῶν | συμφωνίας δὲ διπλάσιος. τὸν δὲ τριπλάσιον 175  
λόγον περιέχει τῇ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε συμφωνία-  
η̄ διαφορὰ τοῦ τε δὲ καὶ σ' πρὸς διαφορὰν τοῦ δὲ  
καὶ η̄, η̄ καὶ *〈η̄〉* διαφορὰ τοῦ ιβ' καὶ σ' πρὸς διαφορὰν  
τοῦ η' καὶ σ'. τὸν δὲ τετραπλάσιον λόγον τῆς *〈δὶς〉*  
διὰ πασῶν συμφωνίας, η̄ τοῦ ιβ' καὶ η̄ [η̄] διαφορὰ  
πρὸς τὴν τοῦ δὲ καὶ η̄ διαφοράν. καὶ πλείονας δ'  
ἄν τις εὗροι λόγους τῶν συμφώνων διαστημάτων  
πολλαπλασιάσας τὸν ἐκκειμένους τέσσαρας ὅρους ἐπί<sup>1</sup>  
τε αὐτοὺς ἐκαστον καὶ ἐπ' ἀλλήλους, καὶ ἔτι ἐπὶ τὰς  
αὐτῶν διαφοράς, καὶ αὐτὰς τὰς διαφορὰς καθ' ἐαυτάς  
25 τε καὶ ἐπ' ἀλλήλας, ώς ἔνεστι κατὰ τὸ φιλόκαλον δι'  
αὐτοῦ ἐκαστον πειραθέντα κατανοῆσαι. ἔστιν οὖν  
πάλιν μουσικὴ μεσότης, δταν ἐν τέτταρσιν ὅροις ἥτις

ό μέγιστος πρὸς τὸν παρ' αὐτόν, οὗτος δὲ τῶν μέσων ἐλάττων πρὸς τὸν ἐλάχιστον· ὡς δὲ δὲ μέγιστος πρὸς τὸν τῶν μέσων ἐλάττονα, οὗτος δὲ τῶν μέσων μείζων πρὸς τὸν ἐλάχιστον. παρακολουθεῖ δὲ αὐτῇ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων πρόμηκες ἵσον ἀποτελεῖν τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ ἐτερομήκει. περιέχει δὲ καὶ τὰς πρωτίστας τρεῖς μεσότητας μόνη, | ἀριθμητικὴν μὲν ἐν ὅροις τοῖς ιβ' θ' σ'. ἵσως γὰρ δὲ μέσος <ὑπερέχει καὶ> ὑπερέχεται. ἀρμονικὴν δὲ ἐν ὅροις τοῖς ιβ' η' σ'. τῷ γὰρ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν δὲ μέσος ὑπερέχει τε καὶ ὑπερέχεται. τὴν δὲ γεωμετρικὴν ἐν διατάξει· ἔστι γὰρ ὡς ιβ' πρὸς η', θ' πρὸς σ', ὥστε τὴν ταυτότητα τῶν λόγων διὰ τῶν δὲ ὅρων ἀποδοθῆναι.

Καὶ τοῦτο μὲν ἡμῖν πέρας τῆς Εἰσαγωγῆς ἔστω τὸ παρὸν τῆς κατὰ τὸν Πυθαγόρειον Νικόμαχον, αὖθις δὲ θεοῦ διδόντος ἐντελέστερον σοι καὶ αὐτὴν ταύτην τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγὴν ως ἂν ἦδη ἔξιν παρακολουθητικὴν διὰ ταύτης ἐσχηκότι ποιήσαντες παρέξομεν καὶ ὅσα δὲ ἄλλα ἐπανθεῖ τοῖς ἀπὸ μονάδος μέχρι δεκάδος ἀριθμοῖς κατὰ τὸν φυσικὸν λόγον καὶ τὸν ἡθικὸν καὶ ἔτι πρὸ τούτων τὸν θεολογικὸν κατατάξαντες συμφιλογήσομεν, ἵνα ἀπ' αὐτῶν εὐμαρεστέρα σοι λοιπὸν καὶ ὁράστη τῶν ἔξῆς τριῶν εἰσαγωγῶν, μουσικῆς λέγω καὶ γεωμετρικῆς καὶ σφαιρικῆς, ἡ παράδοσις γίνηται.

# SCHOLIA CODICIS FLORENTINI

## IN IV IAMBLICHI LIBRUM.

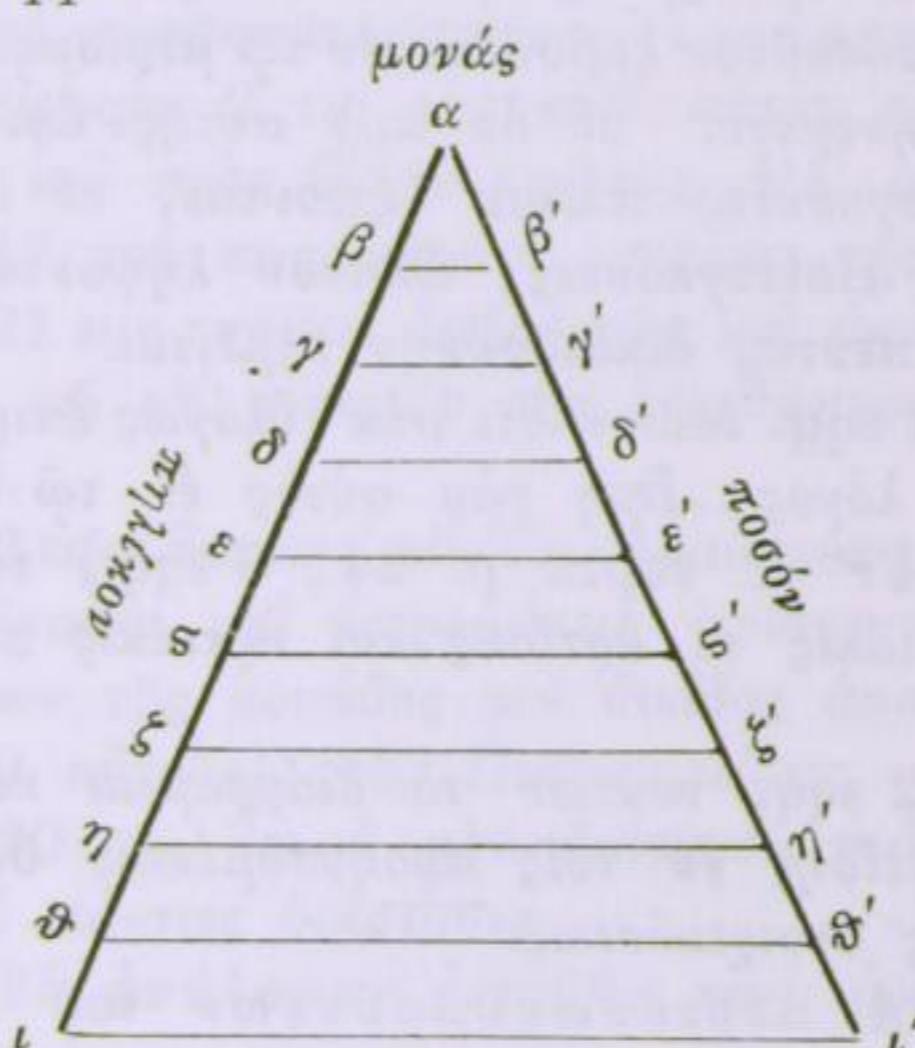
p. 7, 18 sqq. τοῦτο αἰνιττόμενος ὁ θεῖος Ἱάμβλιχος εἶπεν ὅτι τοῦ ἡνωμένου ἐπ' ἄπειρον ἔστιν ἡ τομή, τοῦ ποσοῦ, τουτέστι τοῦ διωρισμένου, ἐπὶ ὠρισμένον, ὅτι τοῦ ἡνωμένου ἐπ' ἄπειρον αὔξεται ἡ τομή, τουτέστιν 5 ἡ ἐπ' ἐλάχιστον αὔξησις· εἰ γὰρ τὸν ἐν Ἑηρολόφῳ κίονα θέλοι τις εἰς τοσαῦτα τεμεῖν μέχρις ἂν εἰς ἀλεύρου ψήγματα διαλύσαι, τὰ τοιαῦτα ψήγματα εἰ ἀριθμοῖς ὑποβάλλειν ἐπιχειρήσοι, ἀνηνύτοις ἐπιχειρῶν πάντως ὑπονοηθείη. ἡ δὲ αὔξησις ἐπὶ ὠρισμένον· εἰ γὰρ αὔξανεται ἡ στιγμὴ 10 μέχρι ἂν τῷ οὐρανῷ μεγέθει παρισωθείη, πεπερασμένη τὴν αὔξησιν σχοίη, ὅπου γε καὶ αὐτὸν οὐρανὸν πεπερασμένον εύρισκομεν, εἰς δύο τε διαιρούμενον ἡμισφαίρια καὶ δ' τεταρτημόρια καὶ ιβ' τόπους, ἐν οἷς καὶ τὰ ἀποτελούμενα ἐφευρίσκεται, μοίρας τε τέξ', καὶ ταῦτα πάλιν εἰς ἔξηκοστὰ 15 πόλους τε καὶ νότια καὶ βόρεια κλίματα ὑποδιαιρούμενα καὶ κλωστοὺς παρ' αὐτῶν τῶν τὰ τοιαῦτα δεινῶν παραλλήλους ἐπικληθέντων. πάντως οὖν πεπερασμένα ταυτί. τοῦ δὲ πλήθους ἐπ' ἄπειρον μὲν τὴν αὔξησιν διωρίσατο εἶναι, καθὸ τὸ ἐν πολλαπλασιάζειν ἐπινοήσας ἀποκάμοις πρότερον 20 ἥπερ τὴν στάσιν εὔροις τῶν ἀριθμῶν ἢ τὸ πέρας, ἐπεὶ καὶ πάντα τὰ δύντα εἶπε νοητὰ εἴτε καὶ αἰσθητὰ κατὰ ἀριθμὸν ὑπὸ τοῦ δημιουργοῦ νοῦ καὶ τῆς ἀρρήτου τούτου σοφίας καὶ τοῦ παναγίου καὶ ζωοποιοῦ αὐτοῦ πνεύματος ἐκτίσθησαν

καὶ εἰδοποιηθέντα ἀπετελέσθησαν, ὥστε καὶ τὸν ἀριθμὸν πρῶτον τούτων τίθενται οἱ φιλόσοφοι δημιούργημα. καὶ ἄκουσον αὐτῆς τῆς θείας ἐπιμαρτυρούσης φωνῆς καὶ διαρρήδην βοώσης ἐν ἀρχῇ ἐποίησεν δὲ θεὸς τὸν οὐρανὸν καὶ τὴν γῆν<sup>5</sup>, τουτέστιν οὐρανὸν ἓνα καὶ γῆν μίαν, καὶ πολλαχοῦ ἀν εῦροις χιλίας χιλιάδας ἀγγέλων καὶ μυρίας μυριάδας. καὶ ταῦτα μὲν οὕτως. τὸ δὲ ἔμπαλιν ἡ τομὴ ἐπὶ ὁρισμένον τοῦτο δηλοῖ· τεμνόμενον γὰρ διχάζεται καὶ εἰς ἥμισυ καὶ ἥμισυ συμπεραίνεται, τὸ δὲ ἥμισυ τὸν δύο δηλοῖ ἀριθμόν, καὶ τί ἀν εἴη τούτων ἐλαττότερον;<sup>10</sup>

p. 11, 9—11 οὕτως δὲ Διόφαντος ἐν τοῖς Μεριαστικοῖς· μόρια γὰρ τὴν εἰς ἐλαττον τῶν μονάδων πρόοδον εἰς τὸ ἕπειρον.

p. 12, 17 sqq. ὅτι ἑτερομήκη τὸν ἄρτιον ἐκάλουν οἱ Πυθαγόρειοι, ἀμφικήκη δὲ τὸν περισσόν.<sup>15</sup>

p. 14, 3 sqq.



p. 14, 21 sq. ἵνα γένηται κύβος καὶ κύβον τὸ μόριον.

p. 15, 9 sqq. δεῖ λαμβάνειν ἐκάστου ἀριθμοῦ τοὺς παρ' ἐκάτερα καὶ συντιθέντας ποιεῖν τοὺς ἐφεξῆς ἀρτίους· παντὸς 20

γὰρ ἀριθμοῦ οἱ παρ' ἐκάτερα ἔγγὺς ἑτερογενεῖς εἰσὶ κατὰ τὸ ἄρτιον καὶ τὸ περιπτόν.

p. 15, 24 ἀμφοτέρων· ἄρτιου καὶ περιπτοῦ.

p. 15, 28 sqq. κατὰ τὸ προδιδαχθὲν ἀνωτέρῳ λάβδωμα.

5 p. 16, 20 sqq. ἐν τῇ συνεισφορᾷ τῶν με̄.

πλάστιγξ

p. 17, 6 sqq. ά β́ γ́ δ́ ἀρτηρία (sic) σ́ ξ́ ή θ́.

πῆχυς ξυγοῦ

p. 17, 17 sqq. ὁ νοῦς τῶν λεγομένων τοιοῦτος· ἀπὸ τῆς μονάδος ἔως τῆς θ' οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ συντεθέντες ἀπογεννῶσι τὸν με̄ ἀπὸ ἀριθμῶν τινῶν (sic) ἐννέα συσταθέντα 10 ά β́ γ́ δ́ έ σ́ ξ́ ή θ́. ἐὰν οὖν τοῦτον τὸν με̄ ἀριθμὸν εἰς ἵσα διέλωμεν θ', ἔσονται πᾶσαι δηλονότι πεντάδες, καὶ ἔσται ὁ με̄ ἐξ ἀνίσων μὲν συγκείμενος ἀριθμῶν τῶν ἀπὸ μονάδος ἔως ἐννεάδος, εἰς δὲ ἵσα διαιρεθεὶς θ' μόνην τὴν πεντάδα ἔξει, τοσοῦτον λαβοῦσαν ἐν τῷ μερισμῷ τῆς ἰσότητος, 15 ὅσον καὶ εἰσήνεγκεν. οἱ δὲ πρὸ αὐτῆς ἀριθμοὶ τέσσαρες ἔλασσον εἰσενεγκόντες πλεῖον λήψονται, οἱ δὲ μετ' αὐτὴν πλεῖον τῶν έ εἰσενεγκόντες, ἔλαττον λήψονται οὐ εἰσήνεγκον. ἡ ἄρα πεντὰς δικαιοσύνην μιμεῖται.

p. 20, 21 sqq. ἴστεον δτι οὐκ εὐλόγως ἐπιρραπίζεται νῦν 20 ὁ Εὐκλείδον λόγος· ἔφη γὰρ αὐτὸς ἐν τῷ θ' (Elem. IX propp. 33. 34: cf. supra p. 24, 6 sqq.) τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς ἀρτιάκις τε ἄρτιους καὶ ἀρτιάκις περισσοὺς τοὺς αὐτούς.

p. 21, 22 sqq. τούτων τὸ διάγραμμα καὶ τὰς αἰτίας 25 ἐδίδαξεν Εὐκλείδης ἐν τοῖς προηγουμένοις θεωρήμασι τοῦ ή βιβλίου τῆς στοιχειώσεως.

p. 22, 14 περισσωνυμούντων τοῦ ἀρτιοπερίσσου τοῦ ἀρτιάκις ἄρτιου.

p. 24, 27 sq. προστρέχει τῷ ἀρτιάκις ἄρτιῳ, ἀφί- 30 σταται τοῦ ἀρτιοπερίσσου.

p. 25, 3 sq. τέως (sic) ὁ ἀρτιοπέρισσος, ἐναντίος ὁ ἀρτιάκις ἄρτιος.

p. 25, 5 sqq.

## ἀριθμητική

$\gamma'$	$\varepsilon'$	$\zeta$	$\theta'$	$\iota\alpha'$
$\langle \delta'$	$\eta'$	$\iota\varsigma'$	$\lambda\beta'$	$\xi\delta' \rangle$
$\iota\beta'$	$\kappa'$	$\kappa\eta'$	$\lambda\varsigma'$	$\mu\delta'$
$\kappa\delta'$	$\mu'$	$\nu\varsigma'$	$\nu\beta'$	$\pi\eta'$
$\mu\eta'$	$\pi'$	$\varrho\iota\beta'$	$\varrho\mu\delta'$	$\varrho\sigma\varsigma'$
$\varsigma\varsigma'$	$\varrho\xi'$	$\sigma\kappa\delta'$	$\sigma\pi\eta'$	$\tau\nu\beta'$

p. 26, 6 εἰ γὰρ ἡ ποσότης τῆς ἐκθέσεως ἦ περισσή,  
τότε τῷ ὑπὸ ἵσον τὸ ἀπὸ τοῦ μέσου. εἰ δὲ ἀρτία, τότε  
τῷ ὑπὸ ἵσον τὸ ἀπὸ τῶν μέσων.

p. 26, 14 προσυπακουστέον μετρούμενος.

5

p. 26, 20 sqq. εἴ τις γὰρ καθ' αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός,  
οὗτος εὐθὺς καὶ πρὸς ἄλλον πρῶτος, ἀλλ' οὐκ ἔμπαλιν.

p. 27, 17 τοῦ παρωνύμου] τουτέστι τῆς μονάδος.

p. 28, 21 sqq. ταῦτα διεξοδικῶς καὶ ἀποδεικτικῶς παρ'  
Εὐκλείδῃ ἐν τῷ αῷ στοιχείῳ τῆς Ἀριθμητικῆς (Elem. VII 10  
propp. 1. 2).p. 31, 2 sqq. ὅτι κατ' εἰκόνα τῆς ταυτότητος καὶ ἐτερότη-  
τος οἱ τετράγωνοι καὶ ἐτερομήκεις ὑφίστανται, οἵτινες ὡς  
ἀπὸ πυθμένων τῆς μονάδος καὶ δυάδος ἀπαριθμοῦνται.

p. 34, 2 αὐτοὺς] τοὺς Πυθαγορείους.

15

p. 37, 20 sqq. ὅτι ἡ μὲν διάστασις πάντως σχέσις, ἡ  
σχέσις δ' οὐ πάντως διάστασις.p. 39, 25 ἀνάλογον ἐνταῦθα κατὰ ἀριθμητικὴν ἀνα-  
λογίαν ἐκληπτέον.p. 39, 27 ἀνάλογον ὥδε κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀνα- 20  
λογίαν λέγει.

p. 40, 4 τὸ γραμμικὸν σχόλιον ἄνω (?) παράκειται.

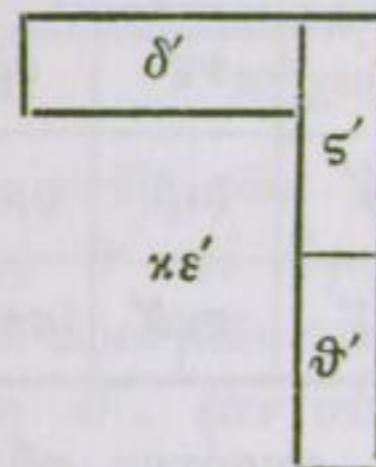
p. 40, 4 sq. ἵστεον ὅτι ἐτερόμηκες νῦν καλεῖ κοινότερον

καὶ τὸν προμήκεις κατὰ τὸν καθόλου γεωμετρικὸν κανόνα τὸν νῦν ἡμῖν δεδειγμένον γραμμικῶς.

p. 40, 5 ἐὰν δύο συνεχεῖς ἑτερομήκεις λάβωμεν πάντας ἄρτιοι ἔσονται, διὰ τὸ τὴν ἑτέραν πλευρὰν ἔχειν αὐτοὺς 5 ἀρτίαν.

p. 40, 9 sq. διέμ. ἡ περισσότης] τῶν τετραγώνων δηλονότι.

p. 40, 13 γαμμοειδῶς κατὰ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν



p. 40, 25 sqq. πρόλογοι οἱ μείζονες, οἷον τριπλάσιος, ὑπόλογοι οἱ ἐλάσσονες, οἷον τριτημόριος.

10 p. 41, 9 παρ' οὐδὲν ἀντὶ τοῦ ἐφεξῆς.

p. 47, 15 sqq. ἐλάχιστοι γάρ εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς. ταῦτα δὲ Εὐκλείδης γενναιότατα δέδειχεν.

p. 50, 13 sqq. ταῦτα Εὐκλείδης αἰτιολογικώτατα (//τιολογι//ώτατα F) ἐν τοῖς στοιχείοις.

15 p. 52, 5 sqq. ταῦτα αἰτιωδῶς Εὐκλείδης ἐν τῷ ὁγδῷ τῶν στοιχείων.

p. 53, 1 διαφορὰ] ἡ ὑπεροχή· διαφορὰν γὰρ τὴν ὑπεροχὴν δεῖ νοεῖν.

20 p. 53, 15 sqq. οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς μετροῦσι τὸν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ισάκις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὃ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα (Eucl. Elem. VII prop. 20).

p. 54, 12 sqq. ταῦτα παρ' Εὐκλείδῃ καὶ σαφέστερα καὶ συντομώτερα καὶ ἀποδεικτικώτερα ἔκκεινται.

25 p. 55, 15 ἐν ἄλλ. τ. σχ. μικτῇ] οἷον πολλαπλασιεπιμορίῳ.

p. 58, 23 ἐπίσημον λέγει τὸν [ν]Σ'.

p. 61, 11 ἐπιπ. σχήματος] ἀντὶ τοῦ ἐπιφανείας.

p. 70, 11 διμοειδοῦς ἀντὶ τριγώνου.

p. 70, 12 ἐκείνου] τριγώνου δηλονότι.

30 p. 73, 22 πάλιν γὰρ αὗτη] ἡ δυάς.

p. 75, 27 ὅτι τὸ τῆς νύσσης ὄνομα οἱ παλαιοὶ τριχῶς ἐκλαμβάνουσιν· ἐπὶ τε γὰρ τοῦ καμπτῆρος, καὶ ἐπὶ τῆς ἀφετηρίας, τουτέστι τῆς ὕσπληγγος, καὶ ἐπὶ τοῦ πέρατος τῶν ἀγωνιζομένων. παράδειγμα τοῦ μὲν προτέρου "Ομηρος ἐν νύσσῃ δέ τοι ἵππος ἀριστερὸς ἔγχριμφθήτω" 5 (Ψ 338), τοῦ δὲ δευτέρου "τοῖσι δ' ἀπὸ νύσσης τέτατο δρόμος" (ib. 758), τοῦ δὲ τρίτου αὐτὸς Ἰάμβλιχος δ συγγραφεύς.

p. 80, 18 ἐκεῖνοι] οἱ τετράγωνοι.

p. 82, 17 μηκύνει ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιάξει. 10

p. 83, 10 ἀλλήλοις μιγέντων] ἀντὶ τοῦ ἀλλήλους πολλαπλασιασάντων.

p. 84, 13 sqq. οἱ ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν διαφορῶν κατὰ εἰκόνα τοῦ δ' θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν στοιχείων. 15

p. 88, 12 τῷ διαγράμματι] τῷ τῶν τετραγώνων καὶ ἑτερομηκῶν.

p. 89 κατὰ δεκάδος ὑπεροχήν, ἀλλ' οὐχὶ κατὰ μονάδος.

p. 91, 6 sqq. διὰ τὸ ὀρθογώνια ἴσοσκελῆ ὑποκεῖσθαι τὰ τοιαῦτα τρίγωνα. 20

p. 92, 21 τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς.

p. 92, 25 sqq. ἐν τῷ μὲν τοῦ πρώτου τῶν στοιχείων Εὐκλείδου.

p. 97, 23 sq. τὸ αὐξηθεὶς ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιασθεὶς δεῖ ἀκούειν. 25

p. 98, 3 τετράγωνος] τοῦτο δυναμοδύναμιν διόφαντος καλεῖ (Arithm. I p. 4, 1 sq. Tannery).

p. 98, 4 λαβόντος] πολλαπλασιάσαντος.

p. 98, 4 κύβος] τοῦτο κυβόκυβον καλεῖ διόφαντος (ib. p. 4, 6 sq.). 30

p. 98, 14 sqq. τοῖς διὰ τῶν Εὐκλείδου στοιχείων ἥγουμένοις (sic) περὶ ἀναλογιῶν ἐντεῦθεν ἄρχεται.

p. 98, 18 sq. συνεκδρομικῶς νῦν δι φιλόσοφος λέγει καὶ δεῖ ἀσφαλῶς ἀκοῦσαι τοῦ λόγου· οὐ γὰρ ἀπλῶς τὰ δμογενῆ δεῖ συγκρίνειν, οὐδὲ γὰρ γραμμὴν πρὸς ἐπιφάνειαν συγκρίνο- 35 μεν, ἀλλὰ δεῖ τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ προσεχὲς γένος συγκρίνειν,

9\*

οῖον ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν πρὸς κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἢ σφαιρικήν, ως καὶ Ἀρχιμήδης ἐποίησε.

p. 106, 13 sqq. ἐπὶ ἀριθμῶν τοῦτο ἀκουστέον μόνον· ἐπὶ γὰρ μεγεθῶν οὐ συμβαίνει.

5 p. 106, 23 ἡ γὰρ μονὰς ἀμερής ἐστι.

p. 107, 3 οὐ γὰρ ὥσπερ [δυνατὸν] δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀεὶ δυνατὸν τρίτην ἀνάλογον εὑρίσκειν, οὕτως καὶ δύο δοθέντων ἀριθμῶν δυνατὸν ἀεὶ τρίτον εὑρεῖν.

p. 110, 7 ἐν τῷ Τιμαίῳ.

10 p. 110, 7 sqq. τὰ ἴδια τῆς ἀρμονικῆς μεσότητος τελεώτερον μαθησόμεθα ἐν τῷ τελευταίῳ θεωρήματι τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Διοφάντου ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως καὶ ἔκειθεν δεῖ τὸν φιλόπονον ἀναλέγεσθαι ταῦτα.

BG 38,-

X

SLUB DRESDEN



3 0211917

1444