ÜBER

KURVEN VON KONSTANTER STEIGUNG

AUF GEGEBENEN FLÄCHEN.

VON

MORITZ HUTH

I. OBERLEHRER AN DER REALSCHULE ZU STOLLBERG.

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE

ZUM

JAHRESBERICHT DER REALSCHULE MIT PROGYMNASIUM

ZU STOLLBERG I. ERZGEB.

OSTERN 1893.

DRUCK VON E. F. KELLERS WITWE IN STOLLBERG.

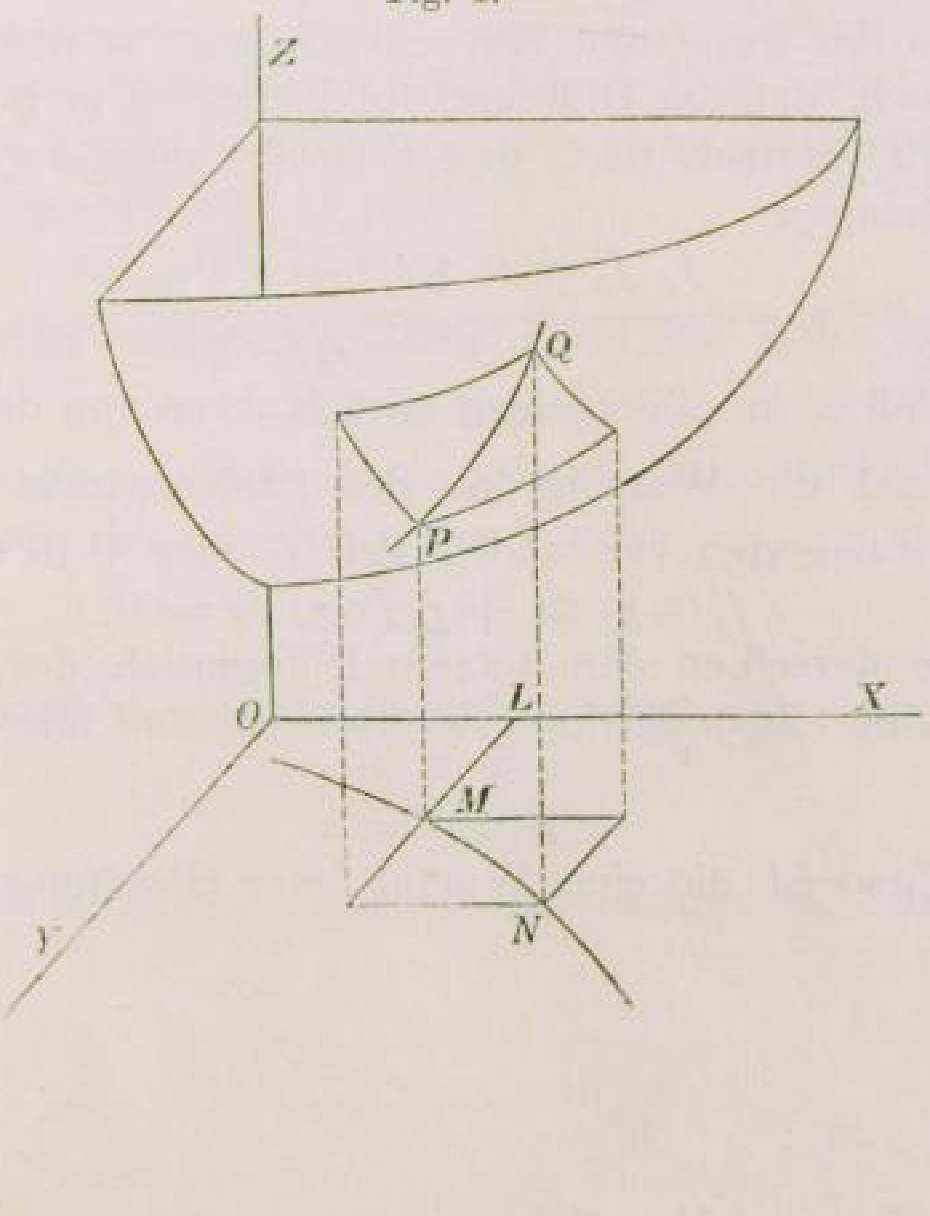
...GR.-NUMMER 578.

Über Kurven von konstanter Steigung auf gegebenen Flächen.

Wenn die Gleichung einer Fläche in der entwickelten Form $z = f(x, y)$ gegeben ist, so soll durch die folgenden Untersuchungen die auf der Fläche liegende Kurve analytisch ermittelt werden, welche, von einem gegebenen Flächenpunkte ausgehend, so beschaffen ist, daß sämtliche Bogenelemente derselben gegen den Horizont gleiche Neigung haben. Die zu betrachtende Kurve teilt diese Eigenschaft der konstanten Steigung nicht nur mit der Geraden im Raume, sondern auch mit der gewöhnlichen oder cylindrischen Schraubenlinie und kann daher durch besondere Wahl der Fläche, auf welcher sie liegen soll, in diese beiden Linien übergeführt werden.

Bezeichnet man daher (Fig. 1) die rechtwinkligen Koordinaten OL, LM, MP des Flächenpunktes P mit x, y, z, das Bogenelement PQ der gesuchten Kurve mit ds und

Fig. 1.



das der zugehörigen Horizontalprojektion MN mit $d\sigma$, so muß zufolge der obengenannten Eigenschaft der Kurve der Winkel γ zwischen ds und $d\sigma$ für alle Bogenelemente derselbe sein; es muß also, wenn man die Tangente dieses Winkels zur Abkürzung mit μ (tang $\gamma = \mu$) bezeichnet und

1) $$z = f(x, y)$$

als Gleichung der gegebenen Fläche betrachtet, für die Horizontalprojektion der gesuchten Kurve die Differentialgleichung

2) $$\mu d\sigma = dz$$

bestehen, die sich unmittelbar integrieren läßt und dadurch in die folgende

3) $$\mu\sigma = z + C,$$

in welcher C die Integrationskonstante bedeutet, übergeht. Aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich zunächst der Satz, daß die Horizontalprojektion der gesuchten Kurve immer rektifizierbar ist, und daß die μ-fache Länge derselben, abgesehen von einer additiven Konstanten, stets gleich ist der Koordinate z ihres Endpunktes.

Ersetzt man ferner die beiden veränderlichen Größen $d\sigma$ und dz der Gleichung 2) durch die gleichwertigen Ausdrücke $d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ und

$$dz = f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy,$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$\mu \sqrt{dx^2 + dy^2} = f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy$$

oder

4) $$\mu \sqrt{1 + y'^2} = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, y',$$

von der man in den meisten Fällen bei den folgenden Untersuchungen auszugehen hat. Das Integral der Gleichung 4) ist von der Form $F(x, y, C) = 0$ und kann, sobald dasselbe in rechtwinkligen Koordinaten oder in irgend einem Koordinatensysteme ermittelt worden ist, mit Hilfe der ursprünglichen Gleichung 1) zur Bestimmung der beiden noch fehlenden Projektionen der gesuchten Kurve verwendet werden.

Beachtet man noch, daß die Differentialgleichung 4) in Bezug auf y' vom zweiten Grade ist und deshalb jederzeit nach dieser Größe aufgelöst werden kann, so erhält man die beiden Gleichungen

5) $$y' = \frac{f'_x\, f'_y \pm \mu \sqrt{f'^2_x + f'^2_y - \mu^2}}{\mu^2 - f'^2_y}$$

und damit den Satz, daß es im allgemeinen zwei Kurven von der verlangten Eigenschaft giebt, wenn $\mu \lessgtr 0$ und die Wurzelgröße des Zählers nicht verschwindet. In dem speziellen Falle $\mu = 0$ dagegen verwandelt sich 4) oder 5) in die Gleichung

$$f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy = 0,$$

und da die linke Seite derselben dem totalen Differentiale der Funktion $f(x, y)$ gleichkommt, so kann dieselbe allgemein integriert werden und führt zu dem vorauszusehenden Resultate

6) $$f(x, y) = c.$$

Ist endlich $\mu = \pm f'_y$, so ist die eine Wurzel jener Gleichung unendlich, während die andere den Wert

$$7) \qquad y' = \frac{\mu^2 - f_x'^2}{2\mu f_x'}$$

annimmt.

Das allgemeinste Integral der Gleichung 4) ergiebt sich alsdann nach den Vorschriften über die Integration der Differentialgleichungen höherer Grade dadurch, daß man die beiden Integrale

$$F_1(x, y, C_1) = 0 \text{ und } F_2(x, y, C_2) = 0$$

der Gleichungen 5) mit einander multipliziert, wobei $C_1 = C_2$ gesetzt werden darf, ohne die Allgemeinheit der Auflösung zu beeinträchtigen.

Für eine besondere Klasse von Flächen gestaltet sich die Differentialgleichung 4) einfacher.

Man nehme an, die gegebene Fläche sei dadurch entstanden, daß eine durch die Gleichung

$$8) \qquad z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$$

dargestellte Kurve um die z-Achse rotiere. Dann ergiebt sich aus 2), indem man durch die bekannten Gleichungen

$$x = r\cos\Theta \text{ und } y = r\sin\Theta$$

zu Polarkoordinaten übergeht:

$$9) \qquad \mu\sqrt{dr^2 + (r\,d\Theta)^2} = f'(r)\,dr$$

oder, nach $d\Theta$ aufgelöst und integriert,

$$10) \qquad \mu\Theta = \int \frac{\sqrt{[f'(r)]^2 - \mu^2}}{r}\,dr + C.$$

Der Vorteil dieser Differentialgleichung besteht, wie man sieht, darin, daß die Sonderung der veränderlichen Größen unabhängig von der Natur der gewählten Kurve $z = f(r)$ bewerkstelligt und deshalb die Integration jederzeit ausgeführt werden kann. Hierbei bestimmt sich die durch die Integration hinzugekommene Konstante C in allen Fällen dadurch, daß man die zu ermittelnde Kurve von einem gegebenen Punkte $x_0\, y_0\, z_0$ der ursprünglichen Fläche ausgehen läßt.

I. Anwendungen der allgemeinen Formel auf beliebige Flächen.

1. Die Ebene.

Um zunächst ein einfaches Beispiel zu wählen, für welches das Resultat vorauszusehen ist, gehen wir von der Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

aus; die allgemeine Formel 5) verwandelt sich alsdann in

$$11) \qquad y' = \frac{mn \pm \mu\sqrt{m^2 + n^2 - \mu^2}}{\mu^2 - n^2},$$

wobei zur Abkürzung $\frac{c}{a} = m$ und $\frac{c}{b} = n$ gesetzt worden ist. Durch Integration dieser

Gleichung erhält man als Horizontalprojektion der gesuchten Kurve die beiden geraden Linien

$$12)\qquad y = \frac{mn \pm \mu\sqrt{m^2+n^2-\mu^2}}{\mu^2-n^2}\cdot x + C,$$

und wenn man die Bestimmung trifft, daß die letzteren durch den Punkt $x_0\, y_0$ gehen, so ergiebt sich

$$13)\qquad y - y_0 = \frac{mn \pm \mu\sqrt{m^2+n^2-\mu^2}}{\mu^2-n^2}\cdot (x - x_0).$$

Soll beispielsweise die gesuchte Kurve durch den Punkt A ($x = a$, $y = 0$) gehen und unter einem Winkel ansteigen, dessen Tangente $\mu = m = \frac{c}{a}$ ist, so findet man

$$y = \frac{2\,mn}{\mu^2-n^2}(x-a) \text{ und } y = 0,$$

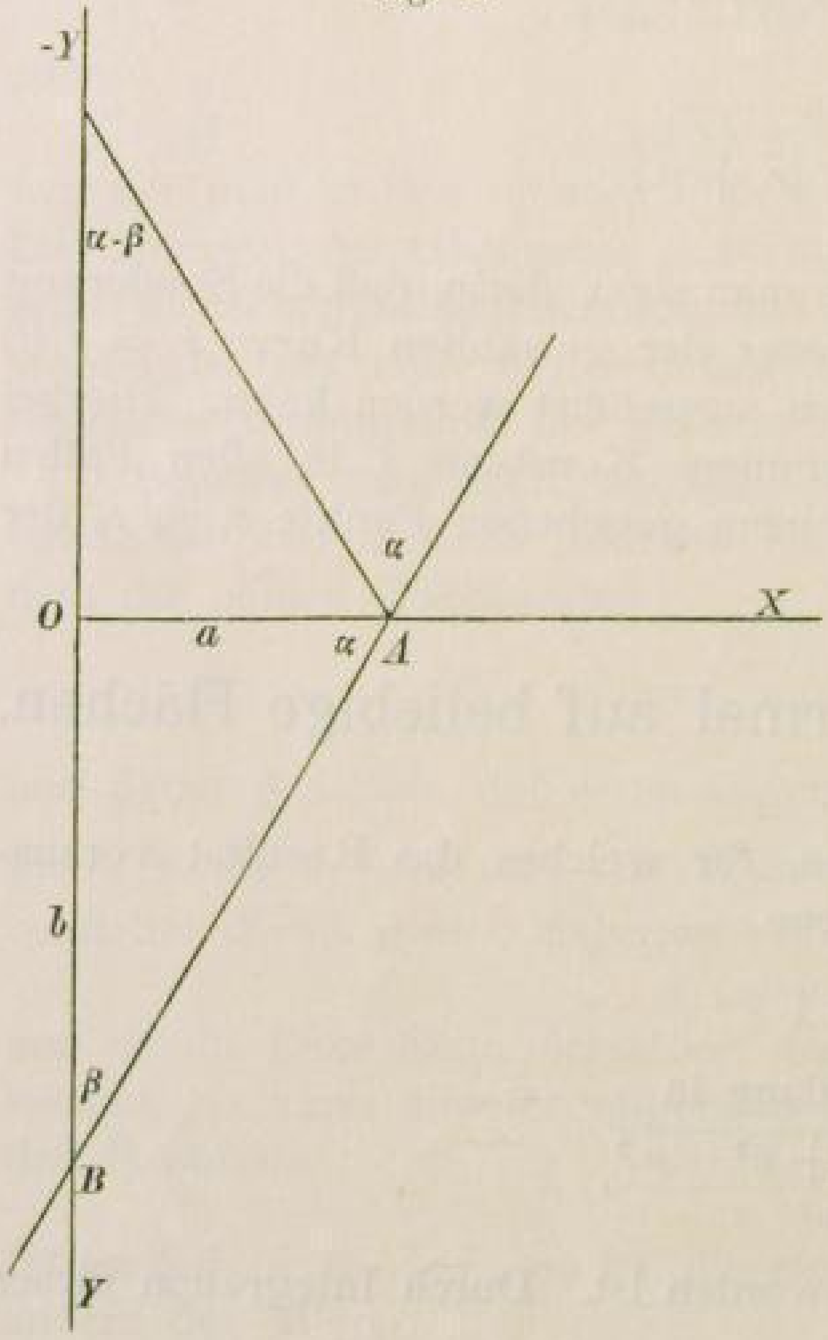
wofür zufolge der Werte von m und n

$$14)\qquad y = \frac{2\,ab}{b^2-a^2}(x-a) \text{ und } y = 0$$

geschrieben werden kann.

Diese beiden Resultate können durch folgende geometrische Betrachtung direkt abgeleitet werden. Während das zweite die x-Achse darstellt, ist das erste die Gleichung der Geraden AB', die mit der xy-Spur AB der gegebenen Ebene denselben Winkel bildet wie die x-Achse; denn bezeichnet man in nebenstehender Figur die Strecken AB und OB' mit p und q, die Winkel BAO und ABO mit α und β, so ist Winkel $AB'O = \alpha - \beta$ und Winkel $OAB' = 2\beta$, mithin vermöge der Proportionalität der Seiten und der Sinus der Gegenwinkel

Fig. 2.



$$a : q = \sin(\alpha-\beta) : \sin 2\beta$$

oder

$$q = a\,\frac{\sin 2\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = a\,\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

$$= a\,\frac{2\,\frac{a}{p}\cdot\frac{b}{p}}{\frac{b^2}{p^2}-\frac{a^2}{p^2}} = \frac{2\,a^2 b}{b^2-a^2}.$$

Da ferner $\operatorname{tang} 2\beta = \frac{q}{a} = \frac{2\,ab}{b^2-a^2}$, so ergiebt sich durch Substitution dieser Werte in die Gleichung der geraden Linie

$$y = gx + h$$

das Resultat

$$y = \frac{2\,ab}{b^2 - a^2}\,x - \frac{2\,a^2\,b}{b^2 - a^2},$$

welches mit dem unter Nr. 14) übereinstimmt.

Aus der Gleichung 12) lassen sich ferner mit Leichtigkeit noch einige spezielle Fälle entnehmen. Für $\mu = 0$ erhält man die Gleichung der xy-Spur oder einer dazu parallelen Geraden, für $\mu^2 = m^2 + n^2$ die eines Lotes zu dieser Spur und endlich für $\mu = n$ die gerade Linie

$$\frac{a^2 - b^2}{2\,ab}\,x + C,$$

die mit der ersten von den unter Nr. 14) gefundenen Geraden, d. i. mit AB', einen rechten Winkel bildet. Bemerkt man schließlich, daß die eine Wurzel einer quadratischen Gleichung unendlich wird, sobald deren erster Koeffizient verschwindet, so ergiebt sich daraus für den Fall $\mu = n$ noch ein zweites Resultat, welches die y-Achse oder eine dazu parallele Gerade darstellt.

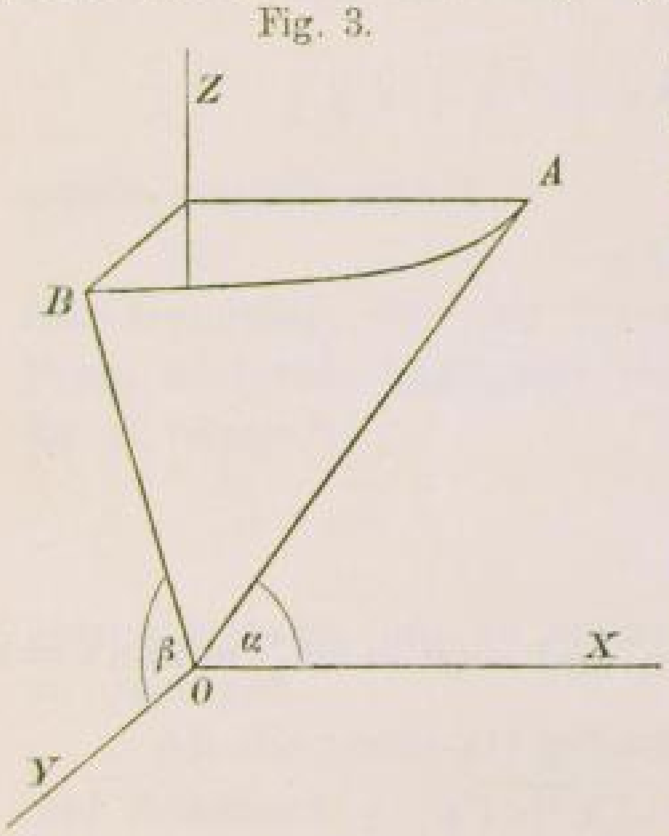
2. Der elliptische Kegel.

Denkt man sich einen elliptischen Kegel so gelegt, daß die Achse desselben mit der z-Achse und der Mittelpunkt der Fläche mit dem Koordinatenanfange zusammenfällt, so erhält man die Gleichung

15) $$\left(\frac{z}{c}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

welche unter Berücksichtigung der Relationen $\frac{c}{a} = \operatorname{tang}\alpha$ und $\frac{c}{a} = \operatorname{tang}\beta$ in die bequemere Form $z^2 = x^2 \operatorname{tang}^2\alpha + y^2 \operatorname{tang}^2\beta$ übergeht. Um daraus die Differentialgleichung der verlangten Kurve abzuleiten, substituiert man die partiellen Differentialquotienten

Fig. 3.



$$\frac{\delta z}{\delta x} = f' = \frac{x \cdot \operatorname{tang}^2\alpha}{\sqrt{x^2 \operatorname{tang}^2\alpha + y^2 \operatorname{tang}^2\beta}} \text{ und } \frac{\delta z}{\delta y} = f'_y$$

$$= \frac{y \cdot \operatorname{tang}^2\beta}{\sqrt{x^2 \operatorname{tang}^2\alpha + y^2 \operatorname{tang}^2\beta}}$$

in die allgemeine Gleichung 4), wodurch sich diese in die homogene Form

$$\mu\sqrt{1 + y'^2} = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha \cdot x + \operatorname{tang}^2\beta \cdot yy'}{\sqrt{x^2 \operatorname{tang}^2\alpha + y^2 \operatorname{tang}^2\beta}}$$

verwandelt und durch die Substitution $y = x \cdot t$ integriert werden kann. Setzt man außerdem

$$\frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{\mu^2} = m \text{ und } \frac{\operatorname{tang}^2\beta}{\mu^2} = n,$$

so findet sich

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{m+nty'}{\sqrt{m+nt^2}}$$

oder nach y' aufgelöst,

15') $$y' = \frac{mnt \pm \sqrt{m^2n^2t^2 - (m+nt^2-m^2)(m+nt^2-n^2t^2)}}{m+nt^2-n^2t^2}.$$

Der Einfachheit halber möge von hier ab $n=1$, das heißt $\gamma = \beta$ genommen werden; aus 15') folgt alsdann die Gleichung

16) $$y' = t + \sqrt{\frac{(m-1)(m+t^2)}{m}},$$

deren Integration in dem Kompendium der höheren Analysis von Dr. O. Schlömilch*) nach folgender Methode ausgeführt ist:

Da $y = xt$, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t \text{ oder } y' - t = x\frac{dt}{dx}$$

und daher mit Hilfe der Gleichung 16):

$$x\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{(m-1)(m+t^2)}{m}}$$

oder

$$lx = \sqrt{\frac{m}{m-1}}\int\frac{dt}{\sqrt{m+t^2}} = \sqrt{\frac{m}{m-1}}\, l\left(t+\sqrt{m+t^2}\right) + C.$$

Setzt man in dieser Gleichung $C = la$, wo nun a eine neue willkürliche Konstante bezeichnet, und kehrt mittelst der Gleichung $y = xt$ zu den ursprünglichen Koordinaten zurück, so findet sich

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{y+\sqrt{mx^2+y^2}}{x}\right)^{\sqrt{\frac{m}{m-1}}},$$

oder, wenn der Exponent $\sqrt{\frac{m}{m-1}}$ mit u bezeichnet wird,

$$y = \frac{x\sqrt[u]{\left(\frac{x}{a}\right)^2} - mx}{2\sqrt[u]{\frac{x}{a}}}.$$

Läßt man zur Vereinfachung $\frac{9}{4}a$ an die Stelle von a treten und setzt $m=\frac{4}{3}$, mithin $u=2$, so liefert diese Gleichung das einfache Resultat

17) $$y = \left(\frac{x}{3a} - 1\right)\sqrt{ax}.$$

---

*) Von den vortrefflichen Werken des Herrn Geh. R. Prof. Dr. Schlömilch, meines hochverehrten Lehrers, sind ausser dem obengenannten Kompendium noch das Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis und die analytische Geometrie des Raumes in der vorliegenden Arbeit benutzt worden.

3. Das elliptische Paraboloid.

Für die nichtcentrische Fläche zweiten Grades

18) $$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

erhält man aus 4)

19) $$\mu \sqrt{1 + y'^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \cdot y'$$

als Differentialgleichung der gesuchten Horizontalprojektion. Da diese von der Form

$$x = a \mu \sqrt{1 + y'^2} - \frac{a}{b} y y' = \varphi (y, y')$$

ist, so ist es vorteilhaft, dieselbe nach x zu differenzieren; man findet, wenn man zur Vereinfachung $a \mu = M$ und $\frac{a}{b} = \alpha$ setzt und die Gleichung $dy : y' = dx$ berücksichtigt:

$$\frac{M y'^2 \, dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \alpha \, y y' \, dy' + (1 + \alpha \, y'^2) \, dy.$$

Beachtet man ferner, daß die rechte Seite dieser Gleichung zu einem vollständigen Differentiale $d \, (y \sqrt{1 + \alpha \, y'^2})$ wird, sobald man beide Seiten mit $\sqrt{1 + \alpha y'^2}$ dividiert, so hat man durch Integration

20) $$y \sqrt{1 + \alpha y'^2} = c + M \int \frac{y'^2 \, dy'}{\sqrt{1 + y'^2} \, \sqrt{1 + \alpha y'^2}}.$$

Für den speziellen Fall $a = b$ oder $\alpha = +1$ kann die auf der rechten Seite angedeutete Integration unmittelbar erfolgen; denn es ist

$$y \sqrt{1 + y'^2} = c + M \int \frac{y'^2 \, dy'}{1 + y'^2} = c + M \int \left(1 - \frac{1}{1 + y'^2}\right) dy',$$

mithin ergiebt sich

21) $$y \sqrt{1 + y'^2} = c + M \, (y' - arctg y'),$$

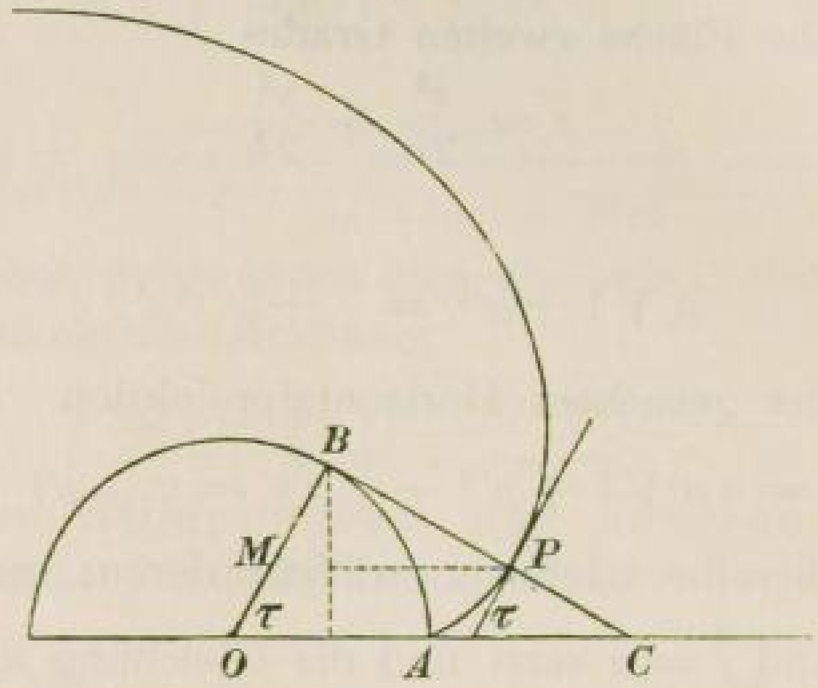
eine Geichung, der wir im zweiten Beispiele des nächsten Abschnittes in veränderter Form nochmals begegnen werden, und in welche der aus Nr. 19) zu entnehmende Wert für y', nämlich

$$y' = \frac{xy + M \sqrt{x^2 + y^2 - M^2}}{M^2 - y^2}$$

einzusetzen ist, um zu einer Gleichung zwischen den ursprünglichen Variabeln x und y zu gelangen.

An die unter 21) gefundene Gleichung knüpft sich noch folgende Bemerkung. Soll der Ausdruck $y \cdot \sqrt{1 + y'^2}$, welcher bei allen ebenen Kurven der Länge des zwischen der Abscissenachse und dem Kurvenpunkte xy liegenden Teiles PC der Normale entspricht, abgesehen von der Konstanten c gleich $M \cdot (y' - arctg y')$ sein, so findet man leicht, daß diese Bedingung bei der Evolvente eines mit dem Radius M beschriebenen Kreises erfüllt ist; denn es ist zufolge des Wertes von y:

Fig. 4.



$$CP = y\sqrt{1+y'^2} = \frac{y}{\cos\tau} = \frac{M(\sin\tau - \tau\cos\tau)}{\cos\tau} = M(\operatorname{tang}\tau - \tau) = M(y' - \operatorname{arctg} y')\cdot$$

Um nun die in Gleichung 20) angedeutete Integration des irrationalen Differentiales allgemein auszuführen, kann man mehrere Wege einschlagen, je nachdem man die zu integrierende Funktion in eine Reihe verwandelt — und das kann auf mehrfache Weise geschehen — oder zu der Gleichung 19) zurückkehrt und dann gleichfalls eine Reihe einsetzt, deren Koeffizienten vorläufig unbestimmt sind.

Für die Anwendung des ersten Verfahrens machen wir die Voraussetzung, daß $\alpha \leqq 1$ sei und y' zwischen den Grenzen $+1$ und -1 bleibe. Dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = 1 - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}y'^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}y'^6 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha y'^2}} = 1 - \frac{1}{2}\alpha y'^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2 y'^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3 y'^6 + \ldots,$$

mithin durch Multiplikation dieser beiden Reihen

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{1+\alpha y'^2}} = 1 - \frac{1}{2}(\alpha+1)y'^2 + \frac{1}{8}(3\alpha^2+2\alpha+3)y'^4$$
$$- \frac{1}{16}(5\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+5)y'^6$$
$$+ \frac{1}{128}(35\alpha^4+20\alpha^3+18\alpha^2+20\alpha+35)y'^8 - \ldots$$

und daher durch Integration

$$22)\quad y\sqrt{1+\alpha y'^2} = c + M\left\{\frac{y'^3}{3} - \frac{1}{2}(\alpha+1)\frac{y'^5}{5} + \frac{1}{8}(3\alpha^2+2\alpha+3)\frac{y'^7}{7} - \ldots\right\},$$

wobei

$$y' = \frac{\alpha xy \pm M\sqrt{x^2+\alpha^2y^2-M^2}}{M^2-\alpha^2y^2}$$

zu setzen ist. Für $\alpha = +1$ verwandelt sich die Reihe 22) in die folgende

$$y\sqrt{1+y'^2} = c + M\left\{\frac{y'^3}{3} - \frac{y'^5}{5} + \frac{y'^7}{7} - \frac{y'^9}{9} + \cdots\right\},$$

von welcher man unter Berücksichtigung der Gleichung

$$arctg\, p = \frac{p}{1} - \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} - \frac{p^7}{7} + \cdots \left(-1 \leqq p \leqq +1\right)$$

wieder auf das unter Nr. 21) gefundene Resultat zurückkommt.

Die vorige Entwickelung leidet an dem Übelstande, daß die Funktion y', nach deren Potenzen die Reihe 22) fortschreitet, eine ziemlich verwickelte ist, und daß sie durch eine andere ersetzt werden muß, sobald die Bedingung der Konvergenz nicht mehr erfüllt ist. Hierzu kommt noch der Umstand, daß die obige Reihe von den beiden Veränderlichen x und y zugleich abhängt und daher für die numerische Berechnung unbequem oder auch unbrauchbar wird. Will man diesen Übelständen abhelfen, so nehme man zunächst an, daß das Integral $y = \varphi(x)$ der Gleichung 19) eine nach dem Theoreme von Mac Laurin entwickelbare Funktion sei. Man erhält alsdann, wenn man die hypothetische Reihe

23) $$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

und die daraus abgeleitete

24) $$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots$$

in die quadrierte Gleichung 19)

25) $$m^2 + m^2 y'^2 = x^2 + 2\alpha x y y' + \alpha^2 (yy')^2$$

einsetzt, eine neue Reihe, aus welcher sich die vorläufig noch unbestimmten Koeffizienten dadurch bestimmen lassen, daß man dieselbe zu einer identischen macht. Hierbei ist wieder $a\mu = m$ und $\frac{a}{b} = \alpha$ gesetzt worden. Die zu substituierenden Werte, die sich aus den Gleichungen 23) und 24) ergeben, sind folgende:

$$yy' = c_0 c_1 + (2c_0 c_2 + c_1^2)\, x + 3\,(c_0 c_3 + c_1 c_2)\, x^2 + (4c_0 c_4 + 4c_1 c_3 + 2c_2^2)\, x^3 + \ldots$$
$$y'^2 = c_1^2 + 4c_1 c_2 x + 2\,(3c_1 c_3 + 2c_2^2)\, x^2 + 4(2c_1 c_4 + 3c_2 c_3)\, x^3 + \ldots$$

und, wenn die Koeffizienten der ersten von diesen beiden Reihen mit A_0, A_1, $A_2 \ldots$ bezeichnet werden,

$$(yy')^2 = A_0^2 + 2A_0 A_1\, x + (2A_0 A_2 + A_1^2)\, x^2 + 2\,(A_0 A_3 + A_1 A_3)\, x^3 + \ldots$$

Nachdem diese Werte in die zu integrierende Gleichung eingeführt worden sind, erhält man an Stelle der Gleichung 25) die folgende:

$$\begin{aligned} m^2 + m^2 c_1^2 + 4m^2 c_1 c_2 x + 2m^2\,(3c_1 c_3 + 2c_2^2)\, x^2 + 4m^2\,(2c_1 c_4 + 3c^2 c^3)\, x^3 + \ldots \\ = \alpha^2 A_0^2 + 2\alpha^2 A_0 A_1 x + \alpha^2\,(2A_0 A_2 + A_1^2)\, x^2 + 2\alpha^2\,(A_0 A_3 + A_1 A_3)\, x^3 + \ldots \\ + 2\alpha A_0 x + (2\alpha A_1 + 1)\, x^2 + 2\alpha A_2 x^3 + \ldots, \end{aligned}$$

und da diese Gleichung nur unter der Bedingung bestehen kann, daß die Koeffizienten gleich hoher Potenzen der unabhängig Veränderlichen einander gleich sind, so resultieren zur Bestimmung der Größen c_0, c_1, $c_2 \ldots$ die Bedingungen:

$$\begin{aligned} & m^2 + m^2 c_1^2 = \alpha^2 c_0^2 c_1^2 \\ & 4m^2 c_1 c_2 = 2\alpha^2 A_0 A_1 + 2\alpha A_0 \\ & 2m^2\,(3c_1 c_3 + 2c_2^2) = \alpha^2\,(2A_0 A_2 + A_1^2) + 2\alpha A_1 + 1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aus diesen Relationen lassen sich die Koeffizienten der angenommenen Reihe und zwar jeder folgende aus den vorhergehenden so weit berechnen, als man dieselben zur annäherungsweisen Darstellung des Integrales $y = \varphi(x)$ braucht; man findet

$$26) \qquad c_1 = \frac{m}{\sqrt{\alpha^2 c_0^2 - m^2}}$$

$$c_2 = \frac{\alpha c_0 (\alpha c_1^2 + 1)}{2(m^2 - \alpha^2 c_0^2)}$$

$$c_3 = \frac{(\alpha A_1 + 1)^2 + 2c_2 (3\alpha^2 A_0 c_1 - 2m^2 c_2)}{6 c_1 (m^2 - \alpha^2 c_0^2)},$$

$$\vdots$$

während c_0 unbestimmt bleibt und als Integrationskonstante zu betrachten ist. Das gesuchte Integral ist demnach

$$27) \qquad y = c_0 + \frac{m}{\sqrt{\alpha^2 c_0^2 - m^2}} x + \frac{\alpha c_0 (\alpha c_1^2 + 1)}{2(m^2 - \alpha^2 c_0^2)} x^2 + \ldots,$$

und wenn die Reihe auf der rechten Seite konvergiert, so ist die Auflösung zulässig; wäre sie dagegen für irgend welche Werte, von denen die Reihe abhängig ist, divergent, so würde das ein Zeichen dafür sein, daß das Integral y einer Potenzreihe der angenommenen Art nicht gleich sein kann.

Um schließlich aus diesem allgemeinen Integrale noch einen bekannten Satz aus der analytischen Geometrie als speziellen Fall abzuleiten, setze man die Konstante $c_0 = \mu \sqrt{ab + b^2}$ und außerdem $-\alpha$ an die Stelle von $+\alpha$, d. h. man gehe von dem elliptischen zu dem hyperbolischen Paraboloide über; alsdann wird

$$c_1 = \frac{m}{\sqrt{\alpha^2 c_0^2 - m^2}} = \frac{a\mu}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\mu^2 (ab + b^2) - a^2 \mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

und, wie aus dem Werte für c_2 und dem Anblick der Reihen y'^2, yy' und $(yy')^2$ leicht zu ersehen,

$$c_2 = c_3 = c_4 = \ldots . = 0,$$

mithin das einfache Resultat

$$28) \qquad y = \mu \sqrt{ab + b^2} \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

Die Horizontalprojektion der gesuchten Kurve ist also in diesem Falle ein System von zwei geraden Linien, deren Richtung $\left(\operatorname{tang} \tau = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ von der Größe μ unabhängig ist.

Schreibt man nun die Gleichung 18) der Fläche in der Form

$$2az = x^2 - \frac{a}{b} y^2 = \left(x + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot y\right)\left(x - \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot y\right),$$

so ergiebt sich mit Hilfe von 28), daß auch die Projektion auf die xz-Ebene

$$29) \qquad 2az = \mp \mu \sqrt{a^2 + ab} \left\{2x \pm \mu \sqrt{a^2 + ab}\right\}$$

ein System von zwei geraden Linien ist; faßt man daher das Ergebnis der Gleichungen 28) und 29) zusammen, so hat man einen neuen Beweis des bemerkenswerten Satzes, daß sich auf dem hyperbolischen Paraboloide zwei Systeme von geraden Linien so ziehen lassen, daß die Horizontalprojektionen jedes Systemes parallel sind zu der einen von den beiden Geraden, welche die Horizontalspur der Fläche bilden.

4. Der parabolische Cylinder.

Wenn sich die gerade Linie

$$x = x_0, \; y = \frac{z}{b} + y_0,$$

die zwar veränderliche Lage, aber bestimmte Richtung hat, so bewegt, daß ihre xy-Spur die Parabel

$$by_0 + 2\sqrt{ax_0} = 0$$

bildet, so beschreibt sie einen parabolischen Cylinder

30) $$z = 2\sqrt{ax} + by,$$

der die yz-Ebene in der Geraden $z = by$ berührt. Die Differentialgleichung der in Rede stehenden Kurve ist für diese Fläche

31) $$\mu\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{a}{x}} + by'$$

oder

$$(\mu^2 - b^2)\, y' = b\sqrt{\frac{a}{x}} \pm \mu\sqrt{\frac{a - (\mu^2 - b^2)\, x}{x}},$$

zu deren Integration die Unterfälle $\mu \gtrless b$ zu unterscheiden sind; ist zunächst $\mu > b$, so folgt

$$(\mu^2 - b^2)\, y + c = 2b\sqrt{ax} \pm \mu \int \sqrt{\frac{a - (\mu^2 - b^2)x}{x}}\, dx,$$

wobei die angedeutete Integration mit Hilfe der Substitution $x = z^2$ zu folgendem Resultate führt:

$$(\mu^2 - b^2)\, y + c = 2b\sqrt{ax} \pm \mu \left\{ \sqrt{x}\sqrt{a - (\mu^2 - b^2)\, x} + \frac{a}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \right.$$
$$\left. \arcsin \sqrt{\frac{\mu^2 - b^2}{a}\, x} \right\}, \; (\mu > b);$$

ist dagegen $\mu < b$, so findet sich auf ähnliche Weise

$$(b^2 - \mu^2)\, y + c = -\, 2b\sqrt{ax} \pm \mu \left\{ \sqrt{x}\sqrt{a + (b^2 - \mu^2)\, x} + \frac{a}{\sqrt{b^2 - \mu^2}} \, . \right.$$
$$\left. l\left(\sqrt{(b^2 - \mu^2)\, x} + \sqrt{a + (b^2 - \mu^2)\, x}\right) \right\}, \; (\mu < b).$$

Am einfachsten gestaltet sich die Differentialgleichung 31) für den Fall $\mu = b$, weil dann die Glieder, welche mit y'^2 behaftet sind, wegfallen. Die entstehende Gleichung

$$2\mu y' = \mu^2 \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}$$

kann unmittelbar integriert werden und führt zu dem Integrale

$$y + c = \frac{\mu}{3} \sqrt{\frac{x^3}{a}} - \frac{1}{\mu} \sqrt{ax}$$

Läßt man in dieser Gleichung $\mu^2 a$ an die Stelle von a treten und trifft außerdem die Bestimmung, daß die durch das Integral dargestellte Kurve durch den Koordinatenanfang geht, so wird $c = 0$ und

32) $$y = \left(\frac{x}{3a} - 1\right) \sqrt{ax}$$

durch diese Gleichung, welche mit der im zweiten Beispiel für den elliptischen Kegel gefundenen übereinstimmt, wird eine aus zwei kongruenten Zweigen bestehende Kurve dargestellt, von denen der eine die x-Achse im Koordinatenanfange unter einem rechten Winkel schneidet, bei $x = a$, $y = -\frac{2}{3}a$ einen Kulminationspunkt hat, sodann die Abscissenachse bei $x = 3a$ unter einem Winkel von 30^0 zum zweiten Male schneidet und dann in das Unendliche verläuft. (Eine ausführliche Diskussion dieser Kurve findet sich in dem bereits genannten Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis von Dr. O. Schlömilch, Teil I, p. 94.)

Führen wir nun die Bedingungen, die bei der Ableitung der Kurve 32) in dieser und in der zweiten Aufgabe gemacht worden sind, in die Gleichungen 15) und 30) ein, so gelangen wir zu folgendem Satze:

Die beiden Flächen

$$z^2 = \frac{4}{3} \mu^2 x^2 + \mu^2 y^2$$

und

$$z = 2\mu \sqrt{ax} + \mu y,$$

von denen die erste einen elliptischen Kegel und die zweite einen parabolischen Cylinder darstellt, schneiden sich in einer Kurve von konstanter Steigung, deren Horizontalprojektion durch die Gleichung

$$y = \left(\frac{a}{3a} - 1\right) \sqrt{ax}$$

ausgedrückt wird.

Einen analogen Fall hierzu bildet die Schraubenlinie, die gleichfalls eine Kurve konstanter Steigung ist und als Schnittlinie einer Schraubenfläche und eines geraden Kreiscylinders zu betrachten ist.

5. Die zuletzt gefundenen Resultate bilden nur spezielle Fälle einer allgemeineren Aufgabe, bei welcher die gegebene Fläche durch eine Gleichung von der Form

33) $$z = \varphi(x) + by$$

dargestellt wird. Differenziert man diese Gleichung, in welcher $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion der unabhängig veränderlichen Größe x bezeichnet, so ergiebt sich

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(x) + by',$$

mithin aus Gleichung 5)

$$y' = \frac{b\,\varphi'(x) \pm \mu \sqrt{\varphi'(x)^2 + b^2 - \mu^2}}{\mu^2 - b^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert das Resultat

$$34)\qquad \lambda y + c = b\,\varphi(x) \pm \mu \int \sqrt{\varphi'(x)^2 - \lambda}\,dx,$$

wobei $\lambda = \mu^2 - b^2$ verschieden von 0 sein muß und c die Integrationskonstante bezeichnet.

Setzt man beispielsweise $\varphi(x) = lx$, also $z = lx + by$, so folgt

$$\lambda y + c = b \cdot lx \pm \mu \left(\sqrt{1 - \lambda x^2} - l \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \lambda x^2}}{x} \right) \right)$$

als Gleichung der gesuchten Kurve. Für $\mu = b$, dagegen wird

$$y' = \frac{\mu^2 - \varphi'^2}{2\mu\,\varphi'} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu}{\varphi'} - \frac{\varphi'}{\mu} \right\}$$

und daher

$$35)\qquad y + c = \frac{1}{2} \left\{ \mu \int \frac{dx}{\varphi'(x)} - \frac{\varphi(x)}{\mu} \right\}$$

das gesuchte Integral.

Für die Fläche $z = x^n + \mu y$ ist $\varphi(x) = x^n$ und $\varphi'(x) = n x^{n-1}$, mithin die Gleichung der gesuchten Kurve

$$y + c = \frac{\mu}{2n} \cdot \frac{x^{2-n}}{2-n} - \frac{x^n}{2\mu}, \quad \left(n \gtrless 2\right).$$

Diese letzte Gleichung verliert ihre Gültigkeit für den Fall $n = 2$ und muß alsdann durch

$$y + c = \frac{\mu}{4}\,lx - \frac{x^2}{2\mu}$$

ersetzt werden.

6. In analoger Weise kann die Integration durch Sonderung der Variabeln ausgeführt werden, wenn die Gleichung der gegebenen Fläche von der Form

$$36)\qquad z = ax + \psi(y)$$

ist. Aus der entstehenden Differentialgleichung

$$\mu \sqrt{1 + y'^2} = a + \psi'(y) \cdot y'$$

ergiebt sich durch Auflösung

$$y' = \frac{a\,\psi' \pm \mu \sqrt{a^2 + \psi'^2 - \mu^2}}{\mu^2 - \psi'^2}$$

oder

$$37)\qquad \int \frac{\mu^2 - \psi'^2}{a\,\psi' \pm \mu \sqrt{\psi'^2 + a^2 - \mu^2}}\,dy = x + c.$$

Im Falle $a = \mu$ ist die Wurzelgröße positiv zu nehmen, und dann liefert die letzte Gleichung das einfache Resultat

38) $$\mu^2 \int \frac{dy}{\psi'} - \psi = 2\mu x + c.$$

II. Anwendungen der besonderen Formel auf Rotationsflächen.

1. Der Rotationskegel.

Soll die zu betrachtende Kurve auf einer Fläche liegen, die dadurch entstanden ist, daß eine durch die Gleichung $z = f(r)$ charakterisierte Kurve um die vertikale z-Achse rotiert, so gehen wir von der Gleichung

$$\mu \Theta = \int \frac{\sqrt{[f'(r)]^2 - \mu^2}}{r} \, dr + C$$

aus, die bereits in der Einleitung unter Nr. 10) entwickelt wurde. Auf den Rotationskegel

$$z = r \cdot \operatorname{tang} \alpha$$

angewendet, liefert diese Gleichung

$$\mu \Theta = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \alpha - \mu^2}}{r} \, dr = \sqrt{\operatorname{tang}^2 \alpha - \mu^2} \, l r + C;$$

und wenn $C = \sqrt{\operatorname{tang}^2 \alpha - \mu^2} \, l c$ gesetzt und der Quotient $\frac{\mu}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \alpha - \mu^2}}$ mit a bezeichnet wird, so erhält man

$$a \Theta = l(cr)$$

oder

$$cr = e^{a\Theta}.$$

Die gesuchte Horizontalprojektion ist demnach eine logarithmische Spirale.

2. Das Rotationsparaboloid.

Als zweites Beispiel diene die Gleichung

$$2pz = x^2 + y^2 = r^2,$$

durch welche ein Rotationsparaboloid dargestellt wird, dessen Scheitelpunkt mit dem Koordinatenanfange zusammenfällt. Hier ist

$$z = f(r) = \frac{r^2}{2p} \text{ und } f'(r) = \frac{r}{p},$$

mithin die Gleichung der Kurve

$$\mu p \Theta = \int \frac{\sqrt{r^2 - (\mu p)^2}}{r} \, dr + C$$

oder, integriert

$$\mu p \Theta = \sqrt{r^2 - (\mu p)^2} + \mu p \arcsin \frac{\mu p}{r} + C.$$

Macht man von der Formel $\arcsin x = \frac{1}{2}\pi - \arccos x$ Gebrauch und setzt $\frac{\pi}{2} + \frac{C}{\mu p} = \delta$, so ergiebt sich die transcendente Gleichung

$$\Theta - \delta = \frac{\sqrt{r^2 - (\mu p)^2}}{\mu p} - \arccos\frac{\mu p}{r}, \tag{39}$$

durch welche die Evolvente eines mit dem Radius μp beschriebenen Kreises dargestellt wird.

3. Die Kugelfläche.

Für eine um den Koordinatenanfang beschriebene Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ oder } z^2 = a^2 - r^2$$

ergiebt sich aus 10)

$$\mu\Theta - C = \int \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r^2(1+\mu^2) - a\mu^2}{a^2 - r^2}}\,dr,$$

und wenn man bemerkt, daß zufolge des Wertes von μ die Gleichungen

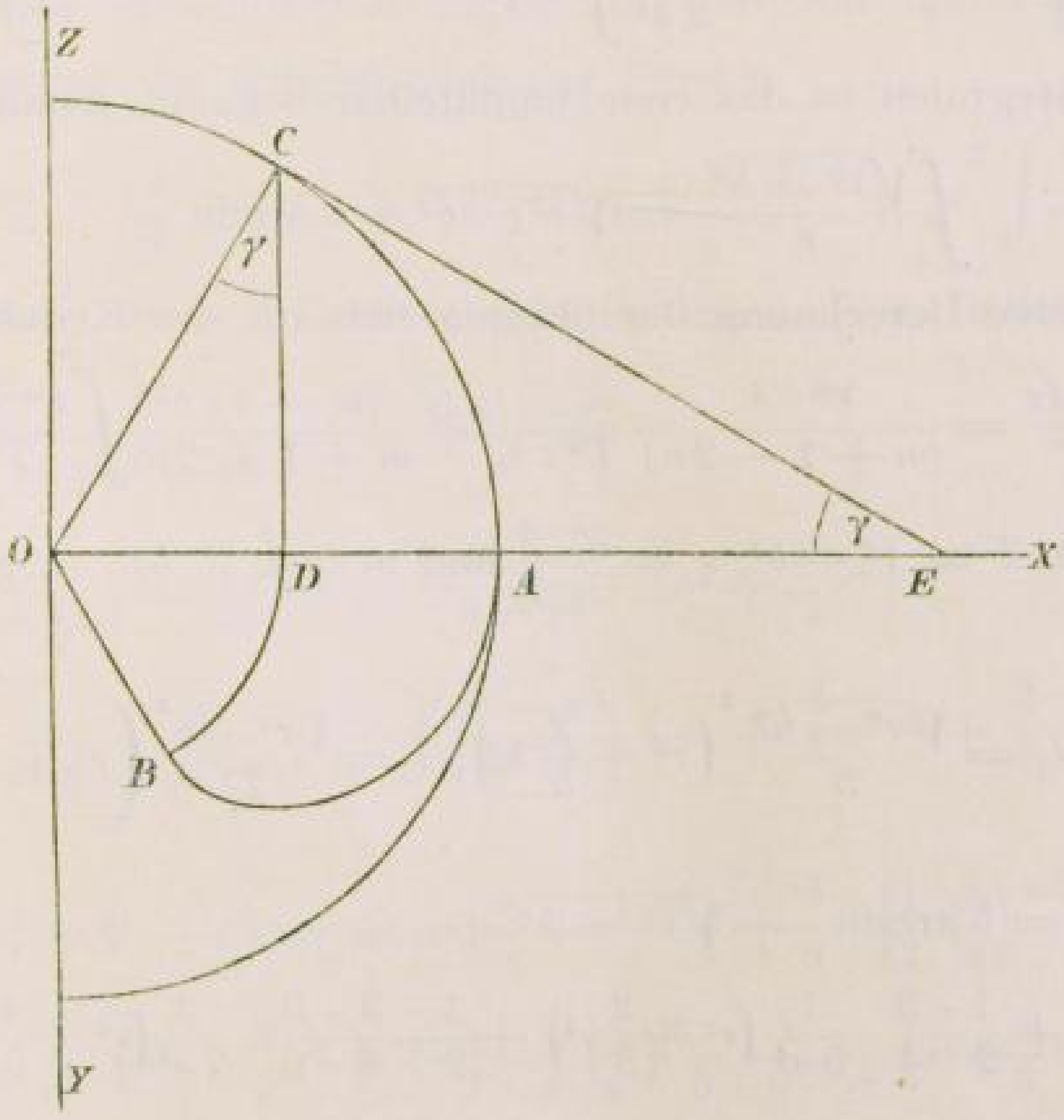
$$1 + \mu^2 = \frac{1}{\cos\gamma^2} \text{ und } \frac{\mu^2}{1+\mu^2} = \sin\gamma^2$$

stattfinden, so entsteht

$$\mu\Theta - C = \frac{1}{a\cos\gamma}\int \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}}\,dr, \tag{40}$$

in welcher $a \sin\gamma = b$ gesetzt worden ist. In Übereinstimmung mit der unmittelbaren Anschauung (Fig. 5) geht aus dieser Gleichung zunächst hervor, daß der Radiusvector

Fig. 5.



der gesuchten Kurve nicht kleiner als $b = a \sin\gamma$ werden darf, wenn der Wert des Integrales 40) reell bleiben soll; denn jedem Radius, der kleiner als b, würde eine Stelle der Kugelfläche entsprechen, deren Tangentialebene mit dem Horizonte einen Winkel bildete, der kleiner als der Neigungswinkel γ der Kurve wäre. Da ferner bei jeder ebenen Kurve der Winkel φ zwischen der Tangente und dem Radiusvector durch die Gleichung $\operatorname{cotang}\varphi = \operatorname{cotang}(\tau - \Theta) = \frac{r'}{r}$ bestimmt wird, so ergiebt sich weiter aus 40):

$$a\mu\cos\gamma\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{r^2-b^2}} = \operatorname{cotang}\varphi,$$

d. h. $\varphi = 90^0$ für $r = a$ und $\varphi = 0$ für $r = b$. Die an die Kurve gelegte Tangente muß also im Punkte $r = a$ senkrecht auf dem Radius stehen und im Punkte $r = b$ mit dem Radiusvector zusammenfallen.

Um nun die in 40) angedeutete Integration auszuführen, entwickle man entweder den Zähler oder den Nenner der Wurzelgröße nach dem binomischen Lehrsatze. Dies giebt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{r}{a}\right)^6 + \ldots,$$

$$-1 \angle \frac{r}{a} \angle +1,$$

mithin

$$a(\mu\Theta - c)\cos\gamma = \int\frac{\sqrt{r^2-b^2}}{r}dr + \frac{1}{2a^2}\int r\sqrt{r^2-b^2}\,dr + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{a^4}\int r^3\sqrt{r^2-b^2}\,dr + \ldots$$

Von diesen Integralen ist das erste unmittelbar bekannt, nämlich

$$\int\frac{\sqrt{r^2-b^2}}{r} = \sqrt{r^2-b^2} + b\arcsin\frac{b}{r},$$

während die successive Berechnung der übrigen sich aus der Reduktionsformel

$$\int\frac{r^m\,dr}{T^n} = \frac{r^{m-1}}{(m+1-2n)\,T^{n-1}} + \frac{(m-1)\,b^2}{m+1-2n}\int\frac{r^{m-2}}{T^n}dr$$

ergiebt, wenn darin $T = r^2 - b^2$, $n = -\frac{1}{2}$ und $m = 1, 3, 5, \ldots$ gesetzt wird. Hiernach findet sich

$$I_1 = \frac{\sqrt{r^2-b^2}^3}{3},\quad I_3 = \frac{\sqrt{r^2-b^2}^3}{5}\left(r^2+\frac{2}{3}b^2\right),\; I_5 = \frac{\sqrt{r^2-b^2}^3}{7}\left(r^4+\frac{4}{5}r^2b^2+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}b^4\right),$$

und daher

$$a(\mu\Theta - C)\cos\gamma = b\arcsin\frac{b}{r} + \sqrt{r^2-b^2} +$$

$$\sqrt{r^2-b^2}^3\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3a^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5a^4}\left(r^2+\frac{2}{3}b^2\right) + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7a^6}\left(r^4+\frac{4}{5}r^2b^2+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}b^4\right)\ldots\right.$$

Für $r = b$ verschwinden alle Glieder dieser Reihe mit Ausnahme des ersten; mit Rücksicht auf die Gleichung $b = a \sin\gamma$ ergiebt sich nun

$$\mu\Theta - C = \mu \frac{\pi}{2},$$

woraus die Konstante C ermittelt werden kann, wenn man die Kurve durch einen bestimmten Punkt des mit dem Radius b beschriebenen Kreises gehen läßt.

Giebt man ferner der Gleichung 40) die Form

$$\mu\Theta - C = \frac{1}{\cos\gamma} \int \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2}}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr$$

und entwickelt den Zähler des Bruches unter dem Integralzeichen in die unendliche Reihe

$$\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\left(\frac{b}{r}\right)^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{b}{r}\right)^6 - \ldots,$$

$$-1 \leqq \left(\frac{b}{r}\right) \leqq +1,$$

so ergiebt sich

$$\cos\gamma \cdot (\mu\Theta - C) = \int \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{b^2}{2}\int \frac{dr}{r^2\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^4}{4}\int \frac{dr}{r^4\sqrt{a^2 - r^2}}$$
$$- \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{b^6}{6}\int \frac{dr}{r^6\sqrt{a^2 - r^2}} - \ldots$$

Auch hier ist das erste Integral unmittelbar bekannt und zwar gleich $\arcsin \frac{r}{a}$, während die Berechnung der übrigen nach der Formel

$$\int \frac{dr}{r^m\, T^n} = -\frac{1}{(m-1)\, a^2\, r^{m-1}\, T^{n-1}} + \frac{m + 2n - 3}{(m-1)\, a^2}\int \frac{dr}{r^{m-2}\, T^n}$$

für $T = a^2 - r^2$, $n = \frac{1}{2}$, $m = 2, 4, 6 \ldots$ erfolgen kann. Man findet

$$I_2 = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{a^2 - r^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a^2\, r}$$

$$I_4 = \int \frac{dr}{r^4\sqrt{a^2 - r^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{3\, a^4\, r^3}\left(a^2 + \frac{2}{1} r^2\right)$$

$$I_6 = \int \frac{dr}{r^6\sqrt{a^2 - r^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{5\, a^6\, r^5}\left(a^4 + \frac{4}{3} a^2 r^2 + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} r^4\right)$$
$$\vdots$$

und daher

$$41) \qquad \cos\gamma\,(\mu\Theta - C) = \arcsin \frac{r}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \cdot \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^4 \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot r^2}\left(a^2 + \frac{2}{1} r^2\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{b}{a}\right)^6 \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot r^4}\left(a^4 + \frac{4}{3} a^2 r^2 + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} r^4\right) + \ldots\right\}$$

Hierbei ist immer die Summe der in jeder Klammer stehenden Koeffizienten gleich dem vorletzten Koeffizienten des Nenners vor der Klammer $\left(\text{z. B. } 1+\frac{6}{5}+\frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}=7\right)$; die unendliche Reihe 41) verwandelt sich deshalb für $r=a$ in

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{b}{a}\right)^6\frac{1}{6}+\cdots$$

und da dieselbe konvergent ist, so folgt wegen des verschwindenden Faktors der Reihe

$$(\mu\Theta - C).\cos\gamma = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

folglich, wenn die Kurve durch den Punkt A ($r=a$, $\Theta=0$) gehen soll:

$$C = -\frac{\pi}{2\cos\gamma} \text{ und}$$

$$\Theta\cdot\sin\gamma+\frac{\pi}{2}=\arcsin\frac{r}{a}+\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{r}\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{1}{3\cdot 4\cdot r^2}\left(a^2+\frac{2}{1}r^2\right)+\cdots\right\}.$$

4. Das einfache Rotationshyperboloid.

Die für Rotationsflächen entwickelte Formel 10) gestattet ferner eine einfache Anwendung zur Herleitung eines bekannten Satzes aus der analytischen Geometrie des Raumes. Aus der Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{r^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{42}$$

folgt zunächst

$$z=f(r)=\frac{c}{a}\sqrt{r^2-a^2},\quad f'(r)=\frac{c}{a}\,\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}},$$

mithin unter der Bedingung $\mu=\frac{c}{a}$

$$\mu\Theta - C=\mu a\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-a^2}}=-\mu\arcsin\frac{a}{r}. \tag{43}$$

Läßt man nun die Kurve von dem Punkte des kleinsten Parallelkreises, des sogenannten Kehlkreises, ausgehen, in welchem sich dieser mit der x-Achse schneidet, so muß für $r=a$ der Winkel $\Theta=0$ genommen werden, d. h.

$$C=\mu\frac{\pi}{2}.$$

Führt man diesen Wert in die Gleichung 43) ein und dividiert beiderseits mit μ, so kommt

$$\frac{\pi}{2}-\Theta=\arcsin\frac{a}{r},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\Theta\right)=\cos\Theta=\frac{a}{r},$$

oder endlich

44) $$r \cos \Theta = x = a\,.$$

Die Horizontalprojektion ist also eine Gerade, welche der y-Achse parallel ist und von derselben die Entfernung a hat. Da ferner das Koordinatensystem ohne Änderung der Rechnung um die z-Achse gedreht werden darf, die x-Achse also durch jeden Punkt des Kehlkreises gehen kann, so folgt aus der letzten Gleichung in Verbindung mit Nr. 42), daß auf der gegebenen Fläche unendlich viel gerade Linien gezogen werden können, von denen jede senkrecht auf dem zugehörigen Halbmesser des Kehlkreises steht und mit der Ebene desselben einen Winkel γ bildet, dessen Tangente $= \frac{c}{a}$ ist.

Schließlich möge noch erwähnt werden, daß man mit Hilfe der in der Einleitung entwickelten Formeln auch umgekehrt die Gleichung der Fläche ableiten kann, wenn die Gleichung der Kurve, die bisher gesucht war, gegeben ist. Verlangt man beispielsweise diejenige Fläche, für welche die Horizontalprojektion der Kurve von konstanter Steigung ein mit dem Radius a um den Koordinatenanfang beschriebener Kreis

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ist, so kann der daraus entnommene Wert

$$y'^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}$$

in die Gleichung

$$\mu \sqrt{1 + y'^2}\, dx = dz$$

eingesetzt werden, wodurch man die Differentialgleichung

$$\frac{a\mu}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = dz$$

und somit das Integral

$$z + c = \pm a\mu \arcsin \frac{x}{a}$$

erhält. Um die Konstante c zu bestimmen, beachte man, daß $x = a$ für $z = 0$, mithin

$$c = \pm a\mu \frac{\pi}{2}$$

und

$$\frac{z}{a\mu} \pm \frac{\pi}{2} = \pm \arcsin \frac{x}{a} = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)$$

sein muß. Aus dieser Gleichung folgt weiter

$$\frac{z}{a\mu} = \mp \Theta$$

oder

$$\operatorname{tang} \frac{z}{a\mu} = \mp \frac{y}{x}.$$

Die gesuchte Fläche ist daher eine mit dem Parameter $a\mu$ konstruierte rechts- oder linksgängige Schraubenfläche.

Soll endlich diejenige Rotationsfläche gesucht werden, für welche die Horizontalprojektion der auf ihr liegenden Kurve von konstanter Steigung die Spirale des Archimedes $\mu\Theta = r$ ist, so folgt aus 10)

$$\frac{\sqrt{[f'(r)]^2 - \mu^2}}{r}\, dr = \mu\, d\Theta = dr,$$

$$z = \int f'(r)\, dr = f(r) = \int \sqrt{\mu^2 + r^2}\, dr$$

und somit durch Integration

$$z = \frac{1}{2}\left\{r\sqrt{\mu^2 + r^2} + \mu^2\, l\left(r + \sqrt{\mu^2 + r^2}\right)\right\} + C,$$

wobei $C = -\frac{1}{2}\mu^2\, l\mu$ genommen werden muß, wenn z und r gleichzeitig verschwinden sollen.

M. Huth.