Vierundzwanzigster Jahresbericht

über das

Realgymnasium zu Zwickau

auf das Schuljahr 1891–92,

womit

zu den Montag und Dienstag, den 4. und den 5. April,

abzuhaltenden

öffentlichen Prüfungen

ganz ergebenst einladet

der Rektor

Prof. Dr. **Gottlob Friedrich Lippold.**

Voran steht eine Abhandlung:

Das Ottajanosche Problem

von

Oberlehrer Dr. **Johannes Max Brückner.**

ZWICKAU.
Druck von R. Zückler.
1892.

Fig. 2.

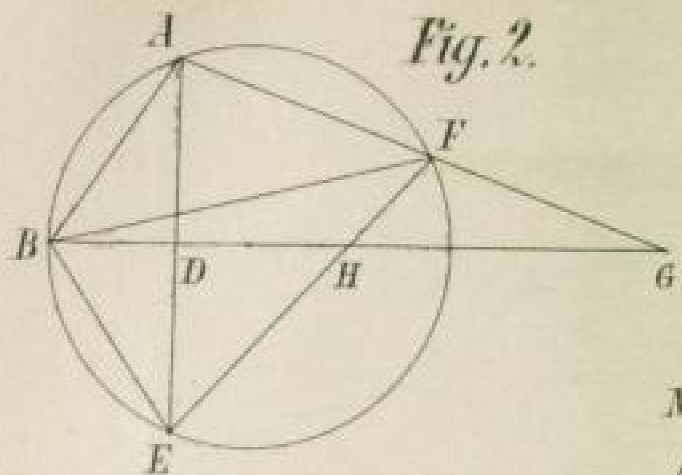


Fig. 3.

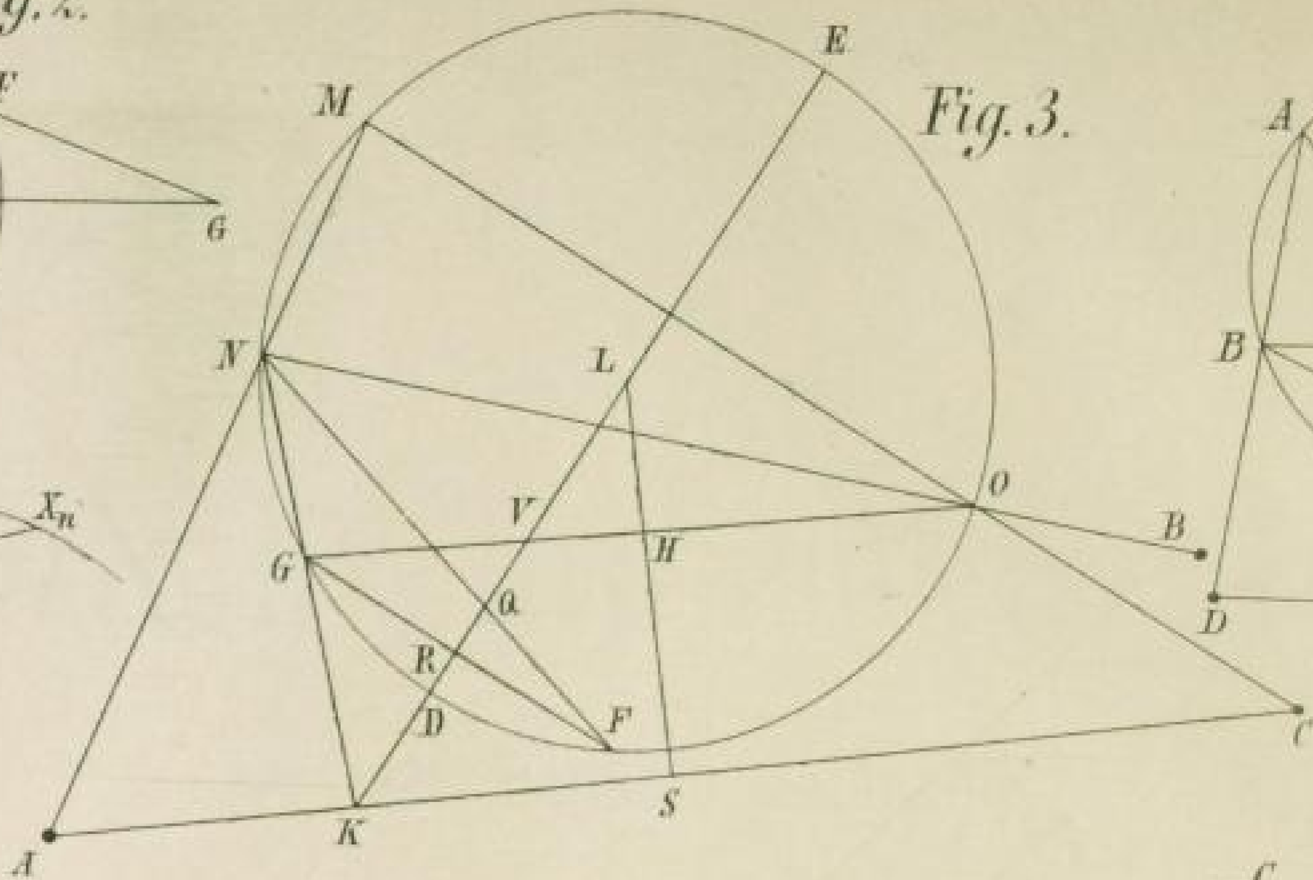


Fig.

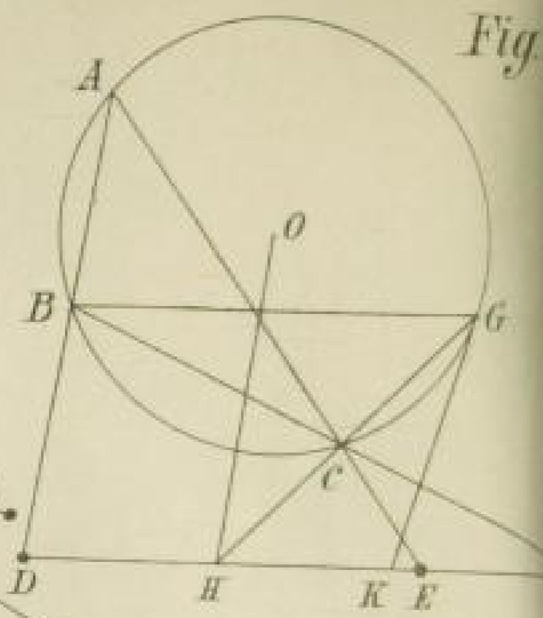


Fig. 11.

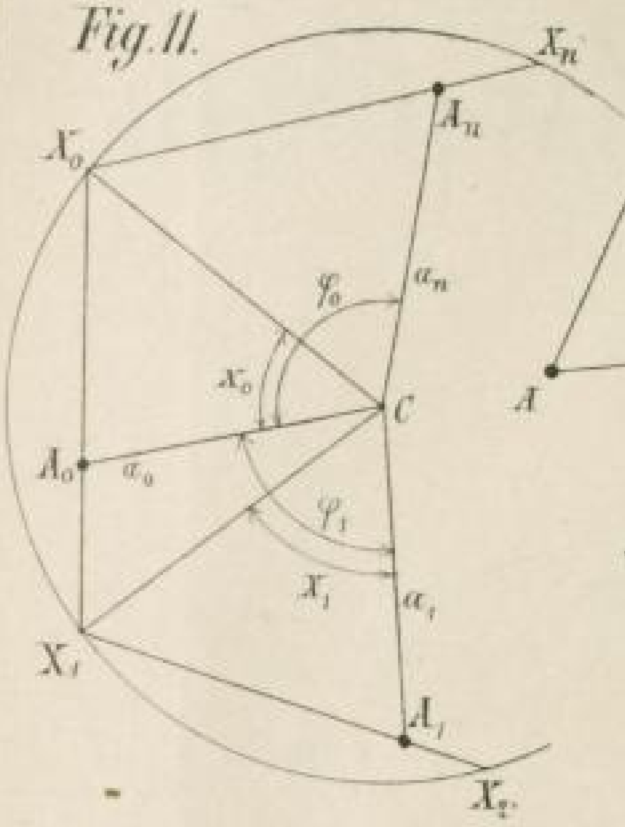


Fig. 12.

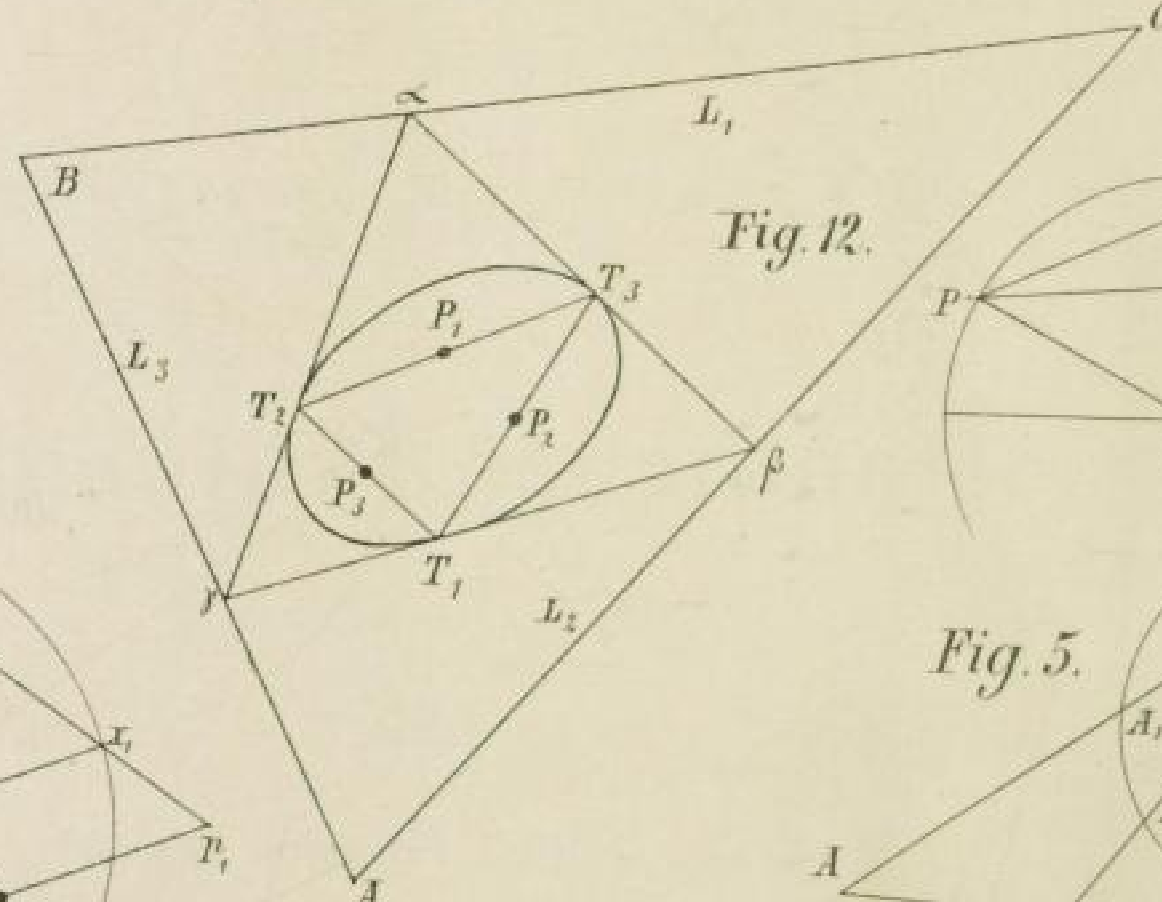


Fig. 4.

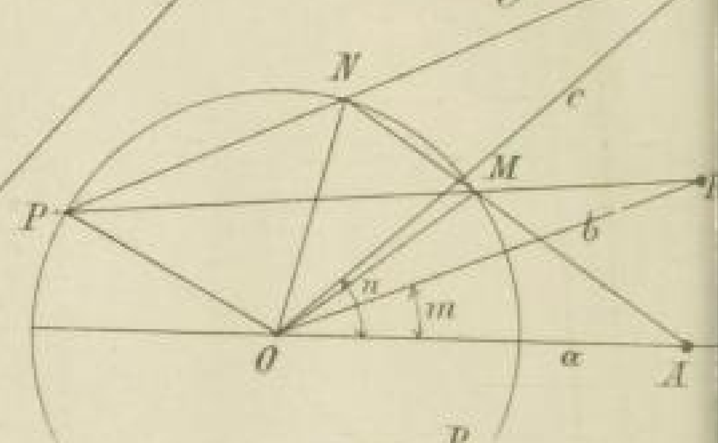


Fig. 8.

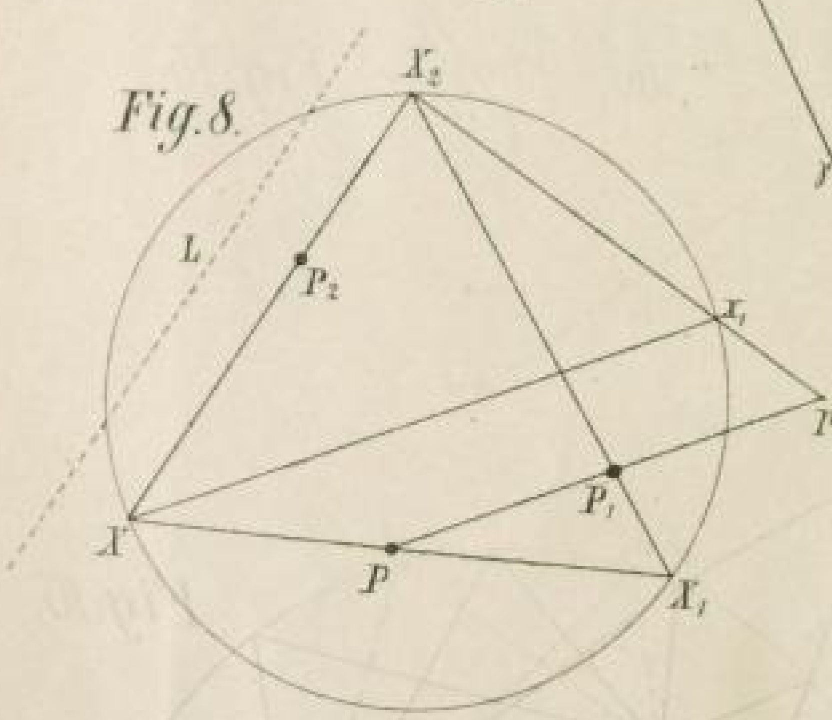


Fig. 5.

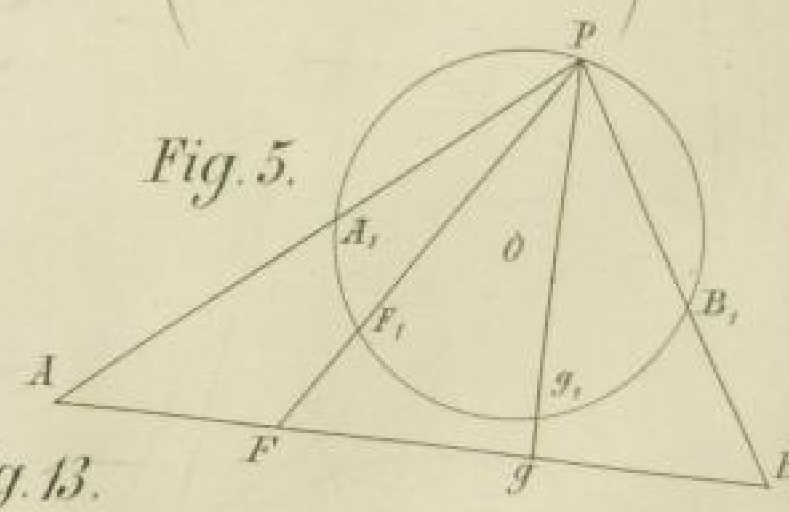


Fig. 13.

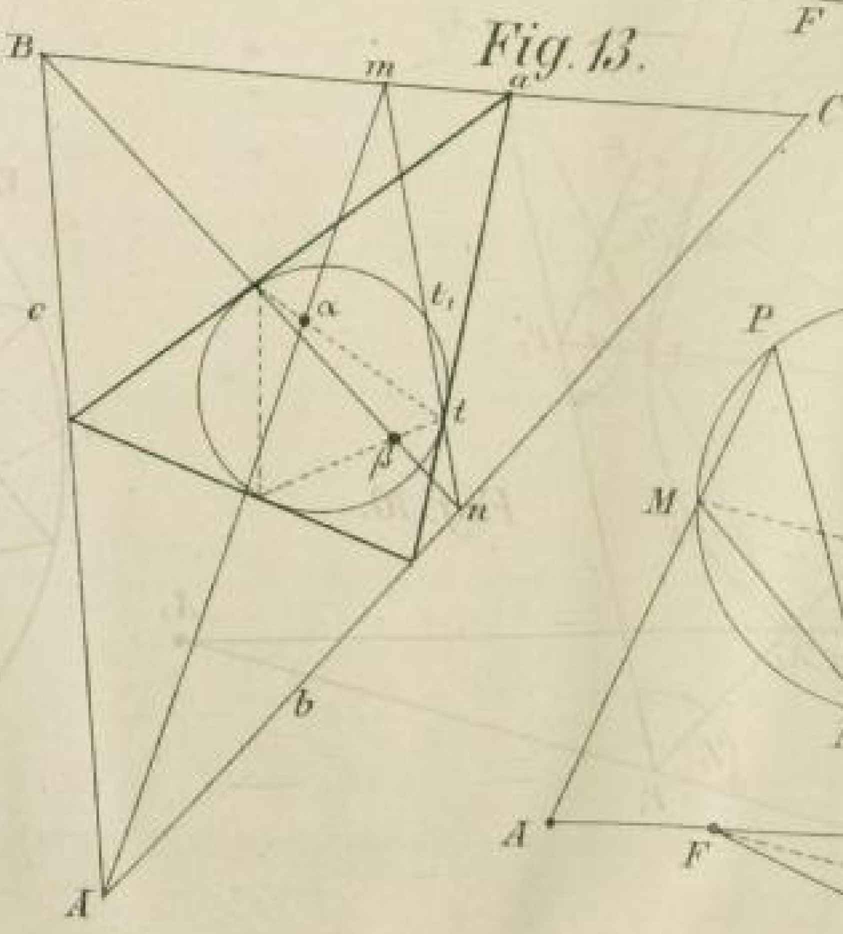


Fig. 9.

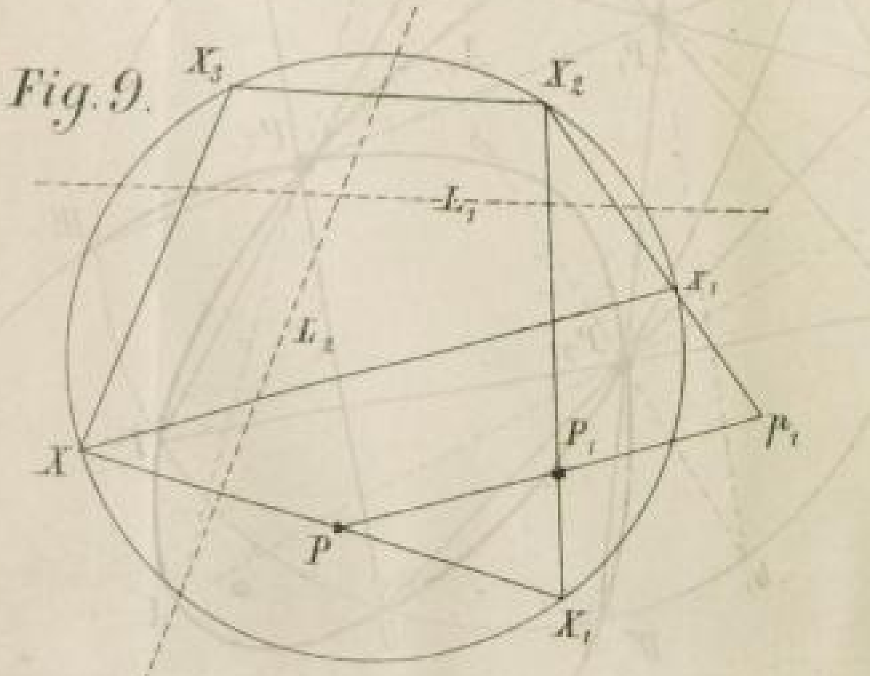
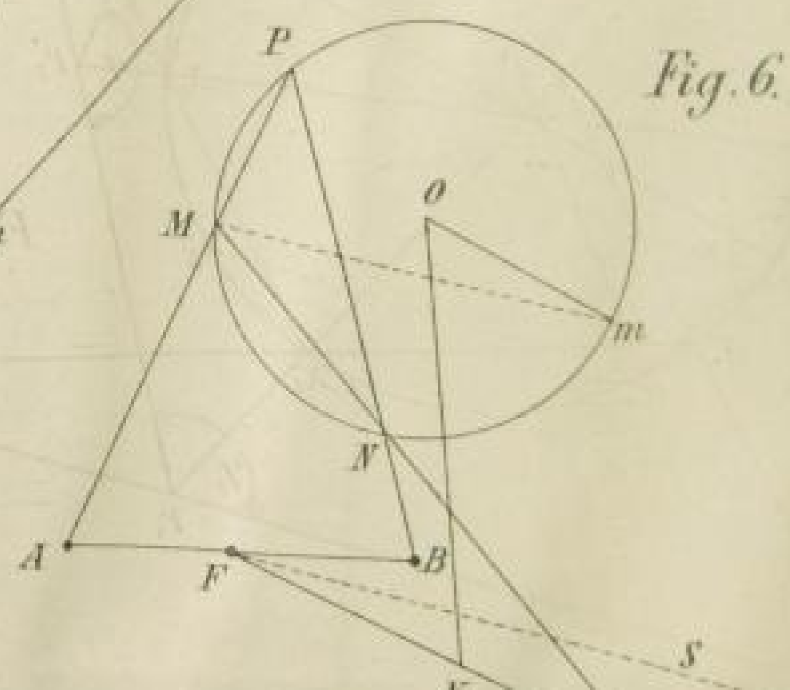


Fig. 6.



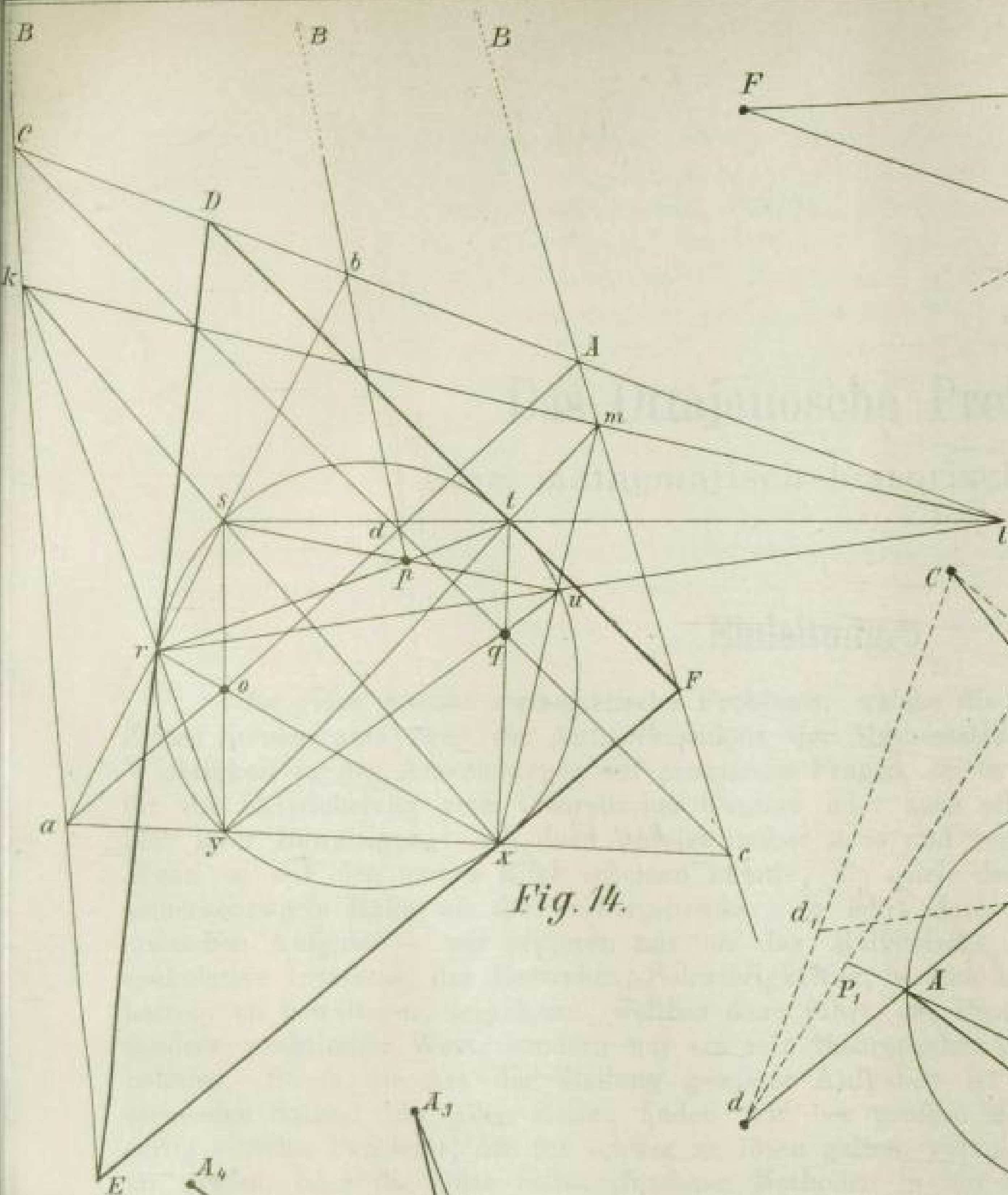


Fig. 14.

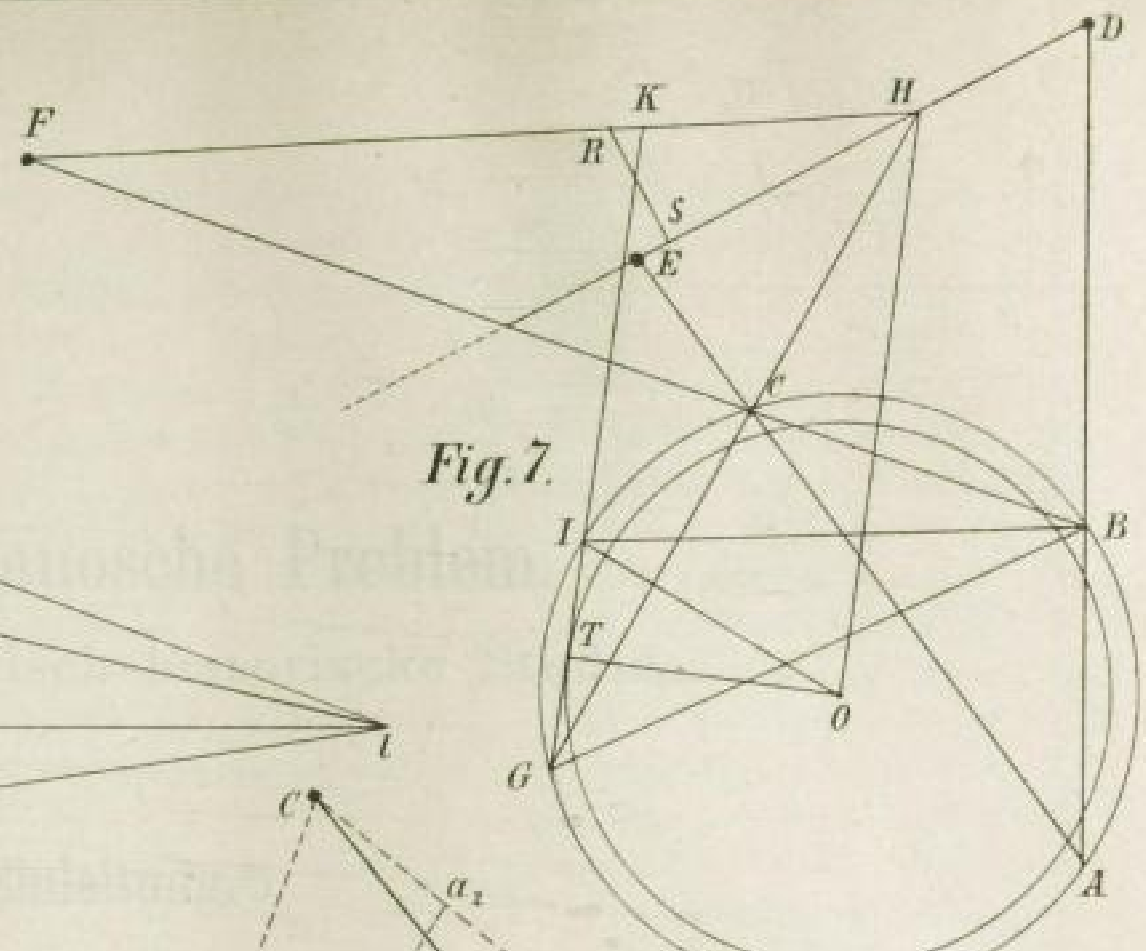


Fig. 7.

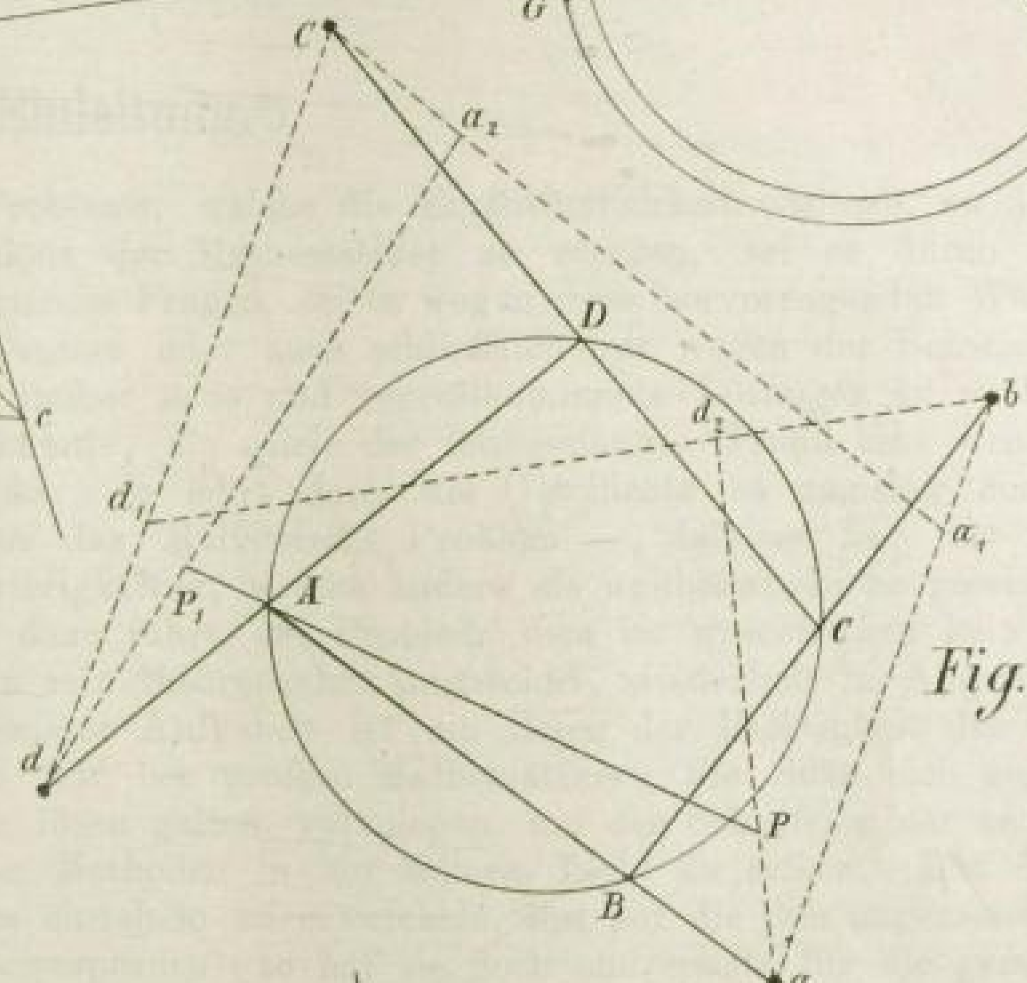


Fig. 15.

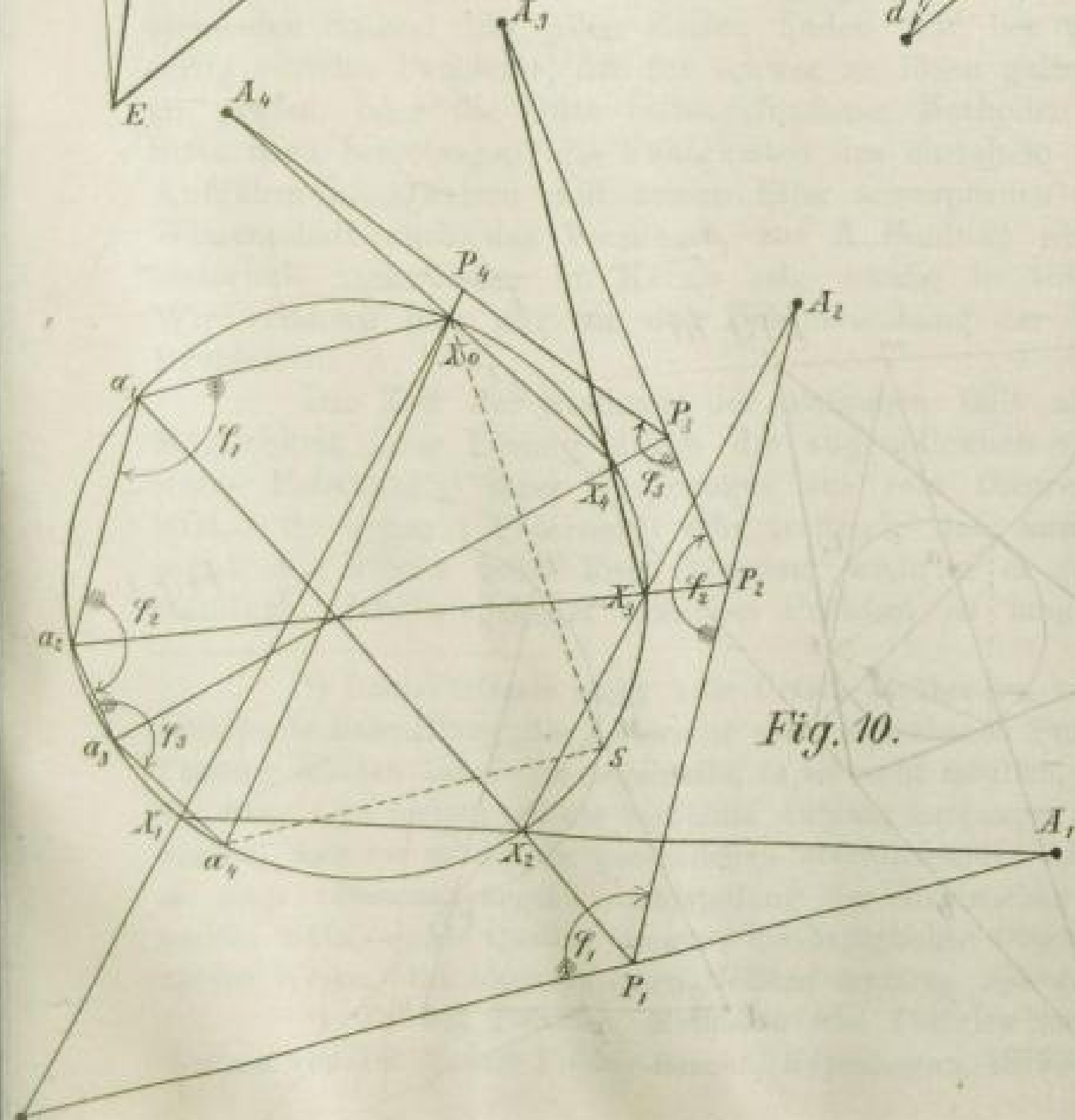


Fig. 10.

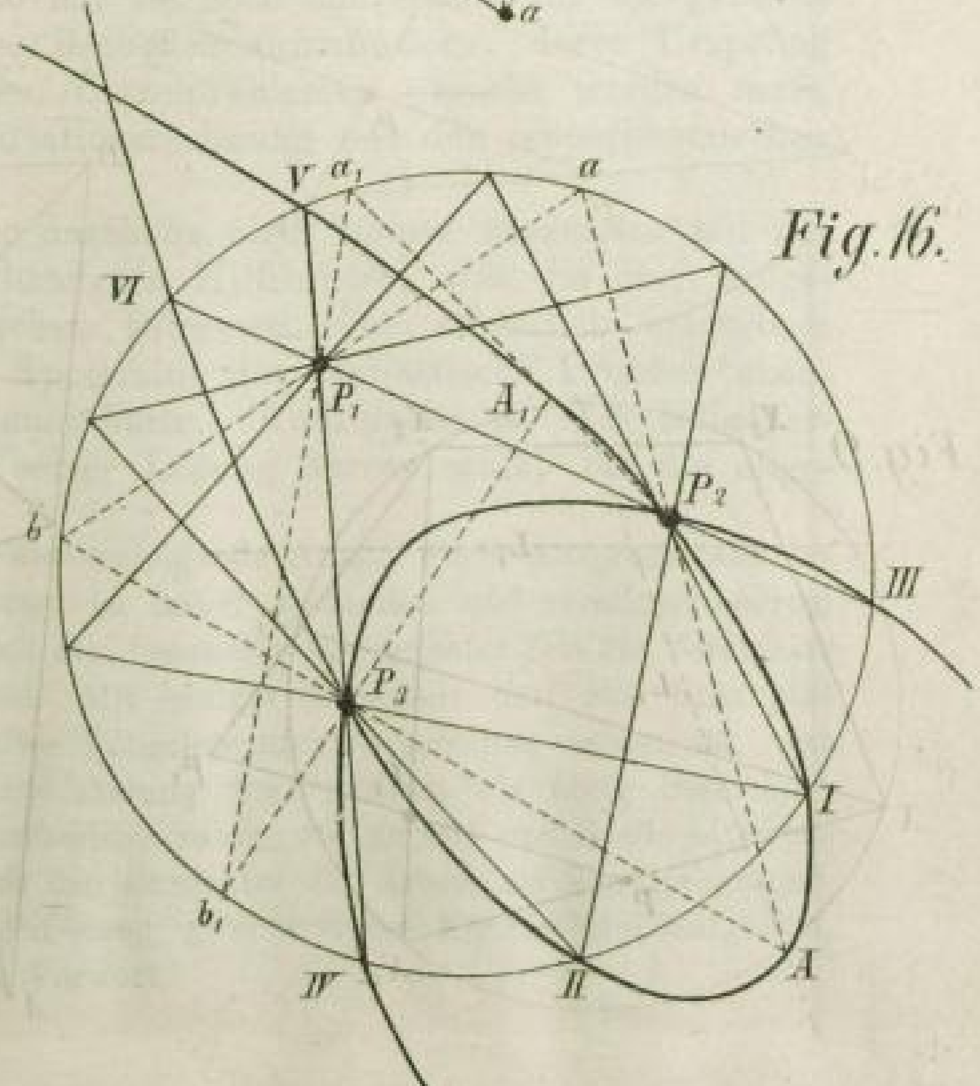


Fig. 16.

Lith. v. R. Zückler, Zwickau.

Das Ottajanosche Problem.

Eine mathematisch-historische Studie.

Einleitung.[1])

Es giebt gewisse mathematische Probleme, welche die Eigentümlichkeit besitzen, zu allen Zeiten immer aufs neue die Aufmerksamkeit der Mathematiker zu erregen, sei es durch ihre Wichtigkeit in den Anwendungen auf praktische Fragen, sei es wegen ihres hervorragenden Wertes für die Entwickelung rein theoretischer Gesetze oder auch schliefslich nur wegen der Schwierigkeit ihrer Bewältigung, die dazu anreizt immer neue und vervollkommnete Lösungen zu suchen. Wenn es auf den ersten Blick scheinen könnte, als spiele der letztgenannte Grund eine weniger bemerkenswerte Rolle als die vorhergehenden, so lehrt doch die Geschichte so mancher mathematischen Aufgabe — wir erinnern nur an das Malfattische Problem —, dafs es nur das rein spekulative Interesse, das Bestreben, Schwierigkeiten, welche andere als unüberwindliche geschätzt hatten, zu bewältigen, sein kann, welches dazu führt, ein Problem, dem im wesentlichen kein besondrer praktischer Wert, sondern nur ein rein theoretischer innewohnt, wiederholt in Angriff zu nehmen. Schon die Art der Stellung gewisser Aufgaben ist ein Beleg der Richtigkeit des vorstehenden Satzes. Zu allen Zeiten finden wir bei grofsen Mathematikern die Sitte sich gegenseitig einzelne Probleme, die für schwer zu lösen galten, vorzulegen, um den Scharfsinn der andern zu prüfen, oder die Güte selbstgefundener Methoden in ein helleres Licht zu setzen. Hat diese Sitte dazu beigetragen, die Fähigkeiten des einzelnen zu entwickeln, ihn auf die ihm angemessenen Aufgaben hinzuweisen und seinen Eifer anzuspornen, so hat sie doch andrerseits für die gesamte Wissenschaft auch das Verdienst, zur Auffindung neuer Methoden aufzufordern, deren Ursprung historisch nachweisbar im Keime sehr häufig in solchen Einzelproblemen gesucht werden mufs. Wir erinnern hier nur an den Zusammenhang der Variationsrechnung mit den isoperimetrischen Problemen.

Die Zeit der Stellung der Aufgaben fällt aber durchaus nicht immer zusammen mit der Möglichkeit ihrer Lösung durch die augenblicklich vorhandenen Hilfsmittel, was die oben aufgestellte Behauptung ihres Ursprunges aus rein theoretischem Interesse eben erklärlich erscheinen läfst. So bemerkt Petersen[2]) sehr treffend, dafs auch Apollonius das Malfattische Problem ebensogut wie Steiner hätte lösen können, wenn er es gekannt hätte. Andrerseits ist aber selbstverständlich, dafs umgekehrt manches Problem so lange seiner Lösung harren mufs, bis die allge-

[1]) Dem Verfasser steht kein Urteil darüber zu, ob die vorliegende Arbeit einen Anspruch auf erschöpfende Behandlung der Litteratur des besprochenen Problems in seiner speziellen und verallgemeinerten Fassung erheben kann. Im Gegenteile, es ist wohl möglich, dafs ihm besonders aus neuester Zeit die Verdienste des einen oder andern um die berühmte Aufgabe entgangen sind. Mit einiger Sicherheit darf aber behauptet werden, dafs bis zu den im wesentlichen abschliefsenden Arbeiten Poncelets nichts übersehen worden ist, was zu einer zusammenhängenden Darstellung der historischen Entwickelung des Problems als nötig bezeichnet werden mufs. — Als Quellen dienten die bezüglichen Originalarbeiten, sowie die an Ort und Stelle citierten andern Werke. Die biographischen Notizen erklären sich durch den Charakter der Arbeit als Schulprogramm.

[2]) Dr. Jul. Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben, deutsch von Dr. R. von Fischer-Benzon, Kopenhagen, 1879, im Vorwort.

meinen Methoden denjenigen Grad der Ausbildung erreicht haben, der die Möglichkeit einer Lösung zuläfst, und schliefslich gelangen vielleicht die Späteren dazu, ein Problem für leicht und seine Lösung als einleuchtend zu erklären, das den Früheren schwer dünkte und ihren ganzen Scharfsinn zur Bewältigung erforderte. Und so liegt wohl klar zu Tage, wie an der Hand der Geschichte einer Aufgabe die Entwickelung der allgemeinen Methoden sich *in nuce* darstellen lassen wird, wie die verschiedenartige Behandlung desselben Problems zu verschiedenen Zeiten zugleich ein Bild der jeweilig herrschenden Anschauungen geben mufs. Finden wir dasselbe Problem durch den griechischen Mathematiker und beim Wiederaufblühen antiker Geometrie in der neueren Zeit in der dem Altertum eigentümlichen rein geometrischen Weise gelöst, welches wir bei den Geometern des 18. Jahrhunderts analytisch-geometrisch oder rein auf algebraischem Wege bezwungen sehen, erhalten wir Kenntnis von den eleganten Verfahren der Synthetiker des 19. Jahrhunderts auf demselben Gebiete, von der Allgemeinheit der Auffassung und doch zugleich der Durchsichtigkeit moderner Betrachtungsweisen, so gewinnen wir nicht nur ein blofses Wissen einer bestimmten Zahl schöner Lösungen, sondern wir erhalten zugleich an der Hand einer einzigen Aufgabe einen Überblick über die gesamte Entwickelung geometrischer Forschungsmethoden. Zu den im vorstehenden gekennzeichneten Problemen gehört u. A. auch das folgende, dessen Geschichte in Kürze gegeben werden soll: **In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch 3 gegebene Punkte gehen.** Schon die blofse Formulierung des Problems und seiner Verallgemeinerungen giebt gewissermafsen einen Überblick über die historische Entwickelung desselben. In der obengenannten Form taucht es im Anfange des 18. Jahrhunderts auf, nachdem ein spezieller Fall desselben bereits im Altertum von Pappus behandelt worden war. Castillon, der zuerst eine vollständige Lösung desselben mittels der geometrischen Analysis der Alten fand, behandelt das Problem in völliger Allgemeinheit der Lage der 3 gegebenen Punkte zu dem festen Kreise. Spätere, wie Lagrange, Euler etc. wandten zwar moderne Hilfsmittel, bes. die algebraische Analysis an, aber das Problem blieb dasselbe, und erst Ottajano wagte die Erweiterung des Problems dahin, dafs er zwar den Kreis beibehielt, aber nicht mehr nur 3, sondern beliebig viele Punkte vorschrieb, durch welche die Seiten des dem Kreise einbeschriebenen Polygones hindurchgehen sollen. Auch an diesem allgemeineren Probleme versuchten sich, dem Geschmacke der Zeit gemäfs, nicht nur die reinen Geometer, sondern ganz besonders die Analytiker. Es gehören hierher aufser Ottajano und Malfatti namentlich Lhuilier und Carnot. Die geometrische Strömung am Anfang des 19. Jahrhunderts, charakterisiert durch die Namen der Monge, Poncelet u. A. liefs auch auf unserem in Frage kommenden Gebiete neue, durch die vorhergehenden Analytiker nicht zu lösende Probleme entstehen. Machte man von der künstlichen Methode der Coordinaten Gebrauch, so war schon die bisher behandelte Aufgabe, das bez. Polygon in den Kreis zu beschreiben, eine äufserst mühsam zu lösende, und eine Verallgemeinerung, dahin gehend, an die Stelle des Kreises einen beliebigen Kegelschnitt zu setzen, mufste auf unüberwindliche Schwierigkeiten stofsen. Es tritt gerade bei Behandlung solcher Aufgaben, wie der unsrigen der grofse Vorteil rein geometrischer Verfahren vor dem algebraischen Calcul hervor, da bei jenen, was im Interesse der Eleganz der Konstruktionen sehr schwer wiegt, nur Überlegungen gebraucht werden, welche der gestellten Aufgabe nicht fremd sind; abgesehen davon, dafs bei Fragen, welche, wie hier, auf Curven höherer Grade führen, die Methoden der algebraischen Analysis ganz unübersehbare Resultate liefern. Es zeigt sich, dafs die reine Geometrie, wo es auf Lagen der Linien ankommt, durch ihre sehr einfachen Mittel viel mehr vermag, als die Analysis durch ihre weitgreifenden Untersuchungsweisen, weil diese die Winkel nur mittelbar durch die trigonometrischen Funktionen in Rechnung bringt. So gelang es denn den neuern Geometern, zunächst das Problem für das Dreieck und einen Kegelschnitt zu lösen, wobei den 3 festen Punkten zwar anfangs eine besondere Lage gegeben werden mufste, während die Späteren auch hierin wieder zur völligen Allgemeinheit übergingen, bis endlich zum Schlusse auch die Dreizahl verlassen wurde und die Lösung der Aufgabe: In einen Kegelschnitt ein Polygon zu beschreiben, dessen n Seiten durch n feste Punkte gehen durch Poncelet die langen Bemühungen der vorhergehenden Geometer würdig krönte.

War es unthunlich, den Wortlaut eines Problems, das schon in seiner Fassung so mannigfache Umformungen und Erweiterungen im Laufe der Zeit erlitt, an die Spitze unsrer Abhandlung zu stellen, so dürfte der von uns gewählte Name Ottajano'sches Problem mit Nachsicht aufgenommen werden. Wir wählten diese Bezeichnung nicht allein, weil dieser junge Mathematiker die erste leicht ausführbare rein geometrische Lösung nicht nur des Dreiecksproblems, sondern auch des verallgemeinerten gab, sondern besonders deshalb, weil auf ihn alle folgenden Behandler unsrer Aufgabe mit Vorliebe zurückweisen, was für ihre Wertschätzung jener Lösung ein beredtes Zeugnis ablegen dürfte.

Ehe wir auf die Vorgeschichte unsrer Aufgabe im Altertum zurückblicken, sei es noch gestattet, im allgemeinen den Unterschied der geometrischen Lösungen nach Art der Alten von denen der Neueren, wie er durch die verschiedenen später zu besprechenden Arbeiten illustriert wird, mit den Worten Ofterdingers zu charakterisieren [3]): „Haben die griechischen Mathematiker hauptsächlich darnach gestrebt, die Eigenschaften der Linien, Flächen und Körper zu erforschen und dieselben zu beweisen, wozu sie sich der theoretischen Analysis bedienten . . . . so suchen die neuern Mathematiker allgemeine Methoden aufzustellen, wie Untersuchungen zu machen sind, aus denen sich Eigenschaften von Linien, Flächen und Körpern von selbst ergeben.“ Ein treffliches Beispiel für die analytische Methode der Alten [4]) bildet in der That die Lösung des folgenden speziellen Problems bei Pappus: „In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten durch 3 feste Punkte einer Geraden gehen.“ Pappus löst diese Aufgabe als Hilfssatz zum zweiten Buche der Berührungen *(de tactionibus)* des Apollonius, [5]) und Zeuthen [6]) hat die verlorene Konstruktion des Apollonius hiernach wiederhergestellt, indem er zeigt, wie sich in der That ohne Zuziehung andrer Sätze die Berührungsaufgabe mit blofser Hilfe des Problems von Pappus im Sinne des antiken Geometers lösen läfst. Pappus' Analysis ist folgende (Fig. 1). Es sei ABG das Dreieck, dessen Seiten bez. durch die 3 Punkte D, E, F einer Geraden gehen. Mache BG parallel DF. Ziehe GC, welches DF in H schneide. Dann ist $\sphericalangle BGC = BAC$, (als Peripheriewinkel über demselben Bogen) und $\sphericalangle BGC = CHF$. Also sind $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle DHC$ Supplementwinkel, d. h. $ADHC$ ist ein Sehnenviereck, und somit ist $ED \,.\, EH = EC \,.\, EA$ d. h. gleich dem Quadrat der Tangente aus E an den Kreis. Da diese bekannt ist, so ist H konstruierbar. — Jetzt ist die Aufgabe auf die folgende zurückgeführt: Aus F und H Sekanten so durch einen Punkt C des gegebenen Kreises zu führen, dafs die Gerade, welche die andern Schnittpunkte B und G dieser Sekanten mit dem Kreise verbindet, parallel FH wird. Die Lösung dieser einfacheren Aufgabe findet sich bei Pappus [7]) als Hilfssatz zum ersten Buche über die Berührungen des Appollonius. Ist GK die Tangente in dem gesuchten Punkte G an den Kreis, so ist $GCFK$ ein Sehnenviereck, weil $\sphericalangle CGK = CFK$ und beide gleich $\sphericalangle CBG$ sind. Also ist K dadurch bestimmt, dafs $HF \,.\, HK = HC \,.\, HG$ wird, d. h. gleich dem Quadrat der Tangente aus H an den gegebenen Kreis. Da sich aus K zwei Tangenten an den Kreis legen lassen, welche zwei verschiedene Punkte G ergeben, so hat die letzte Aufgabe im allgemeinen zwei Lösungen; dasselbe gilt dann auch von der vorhergehenden.

§ 1. Ursprung des Problems. Die Lösungen von Castillon und Lagrange.

Der Ursprung des Dreiecksproblems für den Kreis, wie es in der Einleitung formulirt ist, läfst sich nicht völlig nachweisen. Castillon [8]) erhielt das Problem im J. 1742 von dem Genfer Geometer Cramer vorgelegt, damit er es in der Weise der Alten behandle. Cramer meinte, er solle es nur zu lösen versuchen und er werde sehen, wie schwierig es sei. Daraus dürfte folgen, dafs Cramer selbst schon Versuche in dieser Richtung angestellt hatte, ohne zu einem greifbaren

[3]) Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik, Ulm 1860, S. 2.

[4]) Dies bezeugt Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, indem er bei Besprechung der analytischen Methode dieses Beispiel anführt. S. daselbst S. 142—144.

[5]) Pappusausgabe von Hultsch, S. 848.

[6]) Zeuthen, die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.

[7]) a. a. O. S. 834.

[8]) Giovan Francesco Salvemini, genannt Castillon, nach seinem Geburtsorte Castiglione in Toskana, (geb. 1708 ?) studierte Philosophie und Mathematik, lebte seit 1737 in der Schweiz, wurde 1751 Prof. der Philosophie und Mathematik in Utrecht, 1763 Prof. der Math. bei dem Feldartilleriecorps in Berlin und starb hier 1791.

Resultate zu gelangen. In der That ist nach Castillons Überlieferung das Problem selbst weit älter und scheint seinen Ursprung in dem Bestreben zu haben, die obige Aufgabe bei Pappus zu verallgemeinern, wenn auch nicht mehr nachzuweisen ist, von wem und zu welcher Zeit dahinzielende Versuche unternommen worden sind. Dieser Meinung giebt Castillon in den Worten Ausdruck: „*Selon mes conjectures, quelque amateur de la géometrie des anciens généralisa le problême de Pappus, et, ne l'ayant résolu qu'avec beaucoup de peine, ou, peut-être ne l'ayant point résolu, il le proposa verbalement à quelqu'un qui courrait la même carrière. Celui-ci suivit l'exemple de son prédécesseur et de main en main le problême est parvenu jusqu'à moi. Il semble que le petit nombre de géomètres qui le connaissaient, le gardaient pour embarraser les autres dans les occasions.*" Zugleich kritisiert er die Lösung des speziellen Falles bei Pappus und meint, dieselbe lasse sich nicht auf weitere kompliziertere Fälle übertragen, eine Anschauung, die freilich durch die späteren Untersuchungen Fufs' und Ottajanos als nicht stichhaltig erwiesen wird. — Castillon unternahm nun auf Cramers Anregung wirklich die Behandlung des Problems, aber sei es, dafs die Schwierigkeiten der Bewältigung ihm damals noch unüberwindliche waren, sei es, dafs durch die Herausgabe von Newtons kleineren Schriften, die ihm oblag, seine Zeit anderweit zu sehr in Anspruch genommen wurde: man vernahm nichts mehr von ferneren Arbeiten über unser Problem, und es wurde wieder vergessen. Im Jahre 1755 aber ward ihm von seinem Freunde Bouquet im Haag mitgeteilt, dafs dasselbe von einem Anonymus wiederhergestellt worden sei, und da Castillons Ruf als Geometer und vorzüglicher Kenner der Methoden der Alten ein in der gelehrten mathematischen Welt weitverbreiteter und festbegründeter war, so scheint die Aufforderung gerade an ihn, sich an der Lösung zu versuchen, nicht auffallend. Das Glück scheint ihn nicht begünstigt zu haben. Er schreibt: „*Pendant quelques semaines je l'employai* (nämlich seine freie Zeit) *à cette recherche, mais sans fruit. L'inutilité de mes efforts me piqua sans me décourager. Comme personne ne déclarait publiquement avoir résolu ce problême, je continuai à y travailler. Je fis bien des tantatives inutiles, je l'avoue.*" Endlich bemerkte er, dafs sich auf seine Figur ein Theorem von Pappus anwenden lasse. Er versuchte diese Anwendung und gelangte zu der sofort zu besprechenden Lösung. Aber dies geschah so spät, dafs man schon nicht mehr von dem Anonymus und seinem Problem sprach. Er legte daher seine Lösung unter seine Papiere und veröffentlichte sie erst[9]) 1776, „*pour épargner aux géomètres à venir la peine et la perte du temps que ce problême pourrait leur coûter.*"

Nach den lange andauernden vergeblichen Versuchen unsres Geometers wird es nicht Wunder nehmen, dafs die Lösung sofort nach ihrem Erscheinen ein gewisses Aufsehen erregte, was sich besonders durch die Anteilnahme Lagranges belegen läfst, der schon am Tage nach der Verlesung von Castillons Memoire in der Akademie eine analytische Untersuchung über dasselbe Problem zu Gehör brachte. Späterhin, als die antiken geometrischen Methoden weniger im Vordergrunde des Interesses standen, besondes aber, als andere kürzere Lösungen gefunden waren, ereilte Castillons, allerdings recht weitschweifige Abhandlung das Schicksal, sehr absprechend beurteilt zú werden, wie von Poncelet in den Worten: „*c'est une solution, qui n'a guère d'autre merite que celui d'avoir été obtenu par l'analyse géometrique des Grecs.*"[10]) Frühere hatten über die Arbeit sich günstiger ausgesprochen, so Lhuilier 1809: „*On regretteroit la longeur de son procédé, si les lemmes qu'il lui donne lieu de développer n'étoient pas interéssans par eux-mêmes.*"[11])

Das hauptsächlich für die Entwickelung in Frage kommende Lemma[12]) ist das folgende: „Fällt man (Fig. 2) aus dem Peripheriepunkte A eines Kreises die Senkrechte AD auf den Durchmesser, verlängert dieselbe bis E, zieht die Sekante AFG, und verbindet E mit F, welche Linie den Durchmesser in H schneide, so gilt stets $BG : GC = BH : HC$, wie auch Punkt F liegen möge." Beweis. Es ist $\sphericalangle AFB = BFE$, als Peripheriewinkel über gleichen Bogen; also ist BF die Winkelhalbierende des Winkels AFE. Da nun BF senkrecht auf FC,

[9]) „*Sur un problême de géométrie plane, qu'on regarde commne fort difficile*", par *M. de Castillon*, Mem. der Berliner Acad. 1776.

[10]) Poncelet; *Traité des proprietés projectives des figures*, Paris, 2. ed. 1865. T. I. p. 338.

[11]) Lhuilier, *Elemens d'analyse géométrique et d'analyse algebrique.* à Paris 1809.

[12]) Dieses Lemma ist von Pappus unzureichend bewiesen; der obige Beweis rührt von Castillon selbst her. Übrigens ist der Satz auch anwendbar auf Kegelschnitte, wie Grandi beweist in seinem *Traité des sections coniques.* Prop. 35.

so ist FC die Winkelhalbierende von $\sphericalangle EFG$. d. h. $\sphericalangle EFC = CFG$. Dann gelten nach bekanntem Satze aus den Elementen die Gleichungen $GC : HC = GF : FH$ und $BG : BH = GF : FH$; und daraus folgt die zu beweisende Proportion: $BG : GC = BH : HC$. Dabei sind die beiden Punkte G und H stets durch die Kreisperipherie getrennt. Ist ferner G gegeben, so läfst sich immer der Punkt H so konstruieren, dafs die obige Proportion gilt. —

Die Analysis zu Castillons Lösung ist nun diese (Fig. 3). Es sei die Aufgabe gelöst durch die Punkte M, N, O, so dafs MN durch A, NO durch B, OM durch C gehe.[13]) Verbinde A mit C; ziehe zu AC durch O die Parallele OG; die Linie NG schneide AC in K. Dann ist $\sphericalangle MOG = MCA$ und $\sphericalangle MOG + MNG = 2$ Rechte, als Gegenwinkel im Sehnenviereck $MOGN$; also ist auch $\sphericalangle MCA + MNG = 2$ Rechte, d. h. $MCKN$ ist ebenfalls ein Sehnenviereck oder M, C, K, N liegen auf einem Kreise. Somit gilt: $CA \,.\, AK = MA \,.\, AN$ gleich dem Quadrat der Tangente aus A an den gegebenen Kreis. Da nun diese Tangente und CA bekannt sind, so ist AK konstruierbar, d. h. die Lage des Punktes K ist bestimmt.

Verbinde weiter K mit dem Centrum L des gegebenen Kreises und nenne die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Peripherie D und E. Da K konstruierbar ist, so sind es auch die Punkte D und E, und es ist also das Verhältnis $EK : KD$ gegeben. Es sei ferner GR senkrecht zu KE, und schneide den Kreis zum zweiten Male in F. Verbinde F mit N, welche Gerade EK in Q schneide. Dann ist nach dem vorangesetzten Lemma $EQ : QD = EK : KD$. Da aber das letztere Verhältnis bekannt ist, so ist auch mittelst des erwähnten Lemmas der Punkt Q konstruierbar. — Von den Schenkeln des Winkels FNO geht der eine durch den gegebenen Punkt B, der andere durch den konstruierbaren Punkt Q: es liegt also N auf einem Kreise durch B und Q, welcher Winkel QNO als Peripheriewinkel in sich fafst. Dieser Winkel ist nun zu bestimmen.

Ziehe LS senkrecht zu AC, wodurch Winkel KLS bekannt wird. LS treffe GO in H, und GO die Strecke KL in V. Dann ist Winkel $RGV = VLH$, weil LH senkrecht zu GO und LR senkrecht zu GF ist. Da nun Winkel $ONF = RGV$ ist, als Peripheriewinkel über gleichen Bogen, so ist Winkel ONF oder Winkel QNO gleich Winkel KLS, womit die oben geforderte Bestimmung des Winkels QNO erreicht ist.

Die Konstruktion hat also den folgenden Weg zu nehmen: Zunächst ist K zu bestimmen, was auf elementarem Wege erfolgt, und dann Q. Durch B und Q ist ein Kreis zu beschreiben, welcher $\sphericalangle KLS$ als Peripheriewinkel in sich fafst. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem gegebenen sind die Punkte N, welche die Aufgabe lösen. Es giebt somit im allgemeinen 2 Lösungen. Ebenso wie von A und C kann man auch von B und C oder A und B ausgehen, und erhält dann immer dieselben beiden Dreiecke.

Die vorstehende Lösung Castillons zeigt ohne Zweifel grofsen Scharfsinn und verrät bedeutende Gewandtheit in der Handhabung der Hilfsmittel der alten Geometer, und doch läfst sie in verschiedener Hinsicht unbefriedigt. Wir haben am Ende nicht das Bewufstsein, die Aufgabe vollkommen gelöst zu haben; es treten noch eine Reihe Fragen an uns heran, deren Beantwortung das vorliegende Memoire unberücksichtigt läfst, wenngleich der Autor selbst sich der Mangelhaftigkeit seiner Sätze am Schlusse bewufst ist. Da ist zunächst auffallend das Fehlen eines strengen Beweises für die Thatsache, dafs sich immer dieselben 2 Lösungen ergeben sollen, wie man sich auch 2 der gegebenen 3 Punkte als Ausgangspunkte für Analysis und Konstruktion wähle. Denn man kann hier nicht ohne weiteres von cyklischer Vertauschung sprechen, was auch dem Verfasser ferngelegen zu haben scheint, denn er gesteht selbst zu, dafs für jede andre Lage der 3 festen Punkte nicht nur in der Konstruktion, sondern auch in der Analysis sich Modifikationen nötig machen. Es ist dies derselbe wunde Punkt, den wir auch bei mehreren der folgenden Lösungen wieder vorfinden werden. Sie alle geraten in Widerstreit bez. ihrer Analysen mit dem Satze, den Hankel[14]) dahin formuliert: „Die problematische Analysis allein, wenn sie nicht nur vorläufig und oberflächlich, um sich einigermafsen über das Problem zu orientieren, sondern mit Umsicht und

[13]) Natürlich braucht nur einer der 3 Punkte M, N, O, z. B. N konstruiert zu werden, da sich die andern dann von selbst ergeben.

[14]) Hankel, Zur Geschichte der Math. etc. p. 148.

Sorgfalt angestellt wird, reicht vollständig aus zur Lösung eines Problems, dem Beweise der Konstruktion und Erörterung ihrer Bedingungen und bedarf der Synthesis nicht.“ Eine Analyse, wie die Castillons, lässt unbefriedigt, weil sie in Folge ihrer grofsen Künstlichkeit im Leser das Bewufstsein wachruft, dafs genau genommen die angestellten Betrachtungen, bes. das verwandte Lemma, der fraglichen Aufgabe fremd sind. Hierin erkennen wir aber gerade den Charakter der Lösung als einer im Geiste antiker Geometrie: Es fehlt die Methode und damit der Lösung die rechte Eleganz und Durchsichtigkeit. Dies kommt noch weit stärker zum Ausdruck, wenn wir zum letzten erforderlichen Teile einer jeden Lösung, dem Diorismus oder der Determination fortschreiten. Auch eine solche hat Castillon versucht. Wir sehen aber um so leichter davon ab, sie vollständig zu reproducieren, als der Inhalt derselben absolut in keinem Verhältnis zu ihrer Ausdehnung steht. Es handelt sich nicht nur darum, die Zahl der Lösungen für die verschiedene gegenseitige Lage der gegebenen Punkte zu finden, sondern bes. um die Bedingungen der Möglichkeit einer Lösung überhaupt. Da dieselbe nicht nur von der successiven Konstruierbarkeit der einzelnen Hilfspunkte, sondern wesentlich von der Lage der Punkte K, S und Q abhängt, so ergiebt sich eine solche Menge verschiedener Fälle, dafs der Diorismus nicht nur unübersichtlich, sondern, was mehr wiegt, viel zu compliciert für die Entscheidung des einzelnen Falles wird. Ein Diorismus im Sinne der Alten mufs aber, einmal durch die Analysis gewonnen, der Lösung des Einzelproblems vorhergehen können; denn es verdient nicht mehr den Namen einer Bestimmung der Aufgabe, wenn in jedem vorgelegten Falle die Konstruktion erst durchgeführt sein mufs, um ihre Möglichkeit zu erkennen. — Dafs die Zahl der Lösungen von der Anzahl der Schnittpunkte des Kreises durch B und Q mit dem gegebenen Kreise abhängt, leuchtet ein, aber es ist Castillon nicht gelungen, in dieser Hinsicht den Diorismus zu Ende zu führen. Er schliefst: „*Il y a donc une détermination, qu'il faudrait donner. Mais la détermination n'est bonne que lorsqu'elle épargne une partie considerable de la construction: et j'avoue que je n'en ai pas pu trouver de telle pour le problême.*“

Am Tage nach der Vorlesung seiner Abhandlung erhielt, wie schon berichtet, Castillon von Lagrange[15]) eine analytische Lösung der Aufgabe, die er nebst einigen andern Theoremen in dem Aufsatze: „*Sur une nouvelle propriété des sections coniques*“[16]) veröffentlichte. Lagranges Lösung ist die folgende: Es seien (Fig. 4) A, B, C die 3 gegebenen Punkte, durch welche die Seiten MN, MP, NP des Dreiecks MNP gehen. Es sei der Radius des Kreises mit dem Centrum O gleich r, und $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, $\sphericalangle AOB = m$, $\sphericalangle AOC = n$. Verlangt ist die Bestimmung der Winkel $AOM = x$, $AON = y$ und $AOP = z$, oder genauer gesagt, eines derselben. — Es ist im gleichschenkligen Dreieck NOM bei obiger Bezeichnung $\sphericalangle MON = y - x$, also $\sphericalangle ONM = 90^0 - \frac{1}{2}(y - x)$ und im Dreieck AON ist somit $\sphericalangle AON = y$, $\sphericalangle ONA = 90^0 - \frac{1}{2}(y - x)$ und $\sphericalangle OAN = 90^0 - \frac{1}{2}(y + x)$. Nun ist nach dem sinus-satz: $AO : NO = \sin ONA : \sin OAN$ oder

$$a : r = \cos\frac{y-x}{2} : \cos\frac{y+x}{2}.$$

Durch Rechnung ergiebt sich hieraus:

$$1) \ldots . \tan\frac{x}{2} . \tan\frac{y}{2} = \frac{a-r}{a+r}.$$

Die Anwendung des sinus-satzes auf die Dreiecke POB und POC führt zu den weiteren Gleichungen:

$$2) \ldots . \tan\frac{x-m}{2} . \tan\frac{z-m}{2} = \frac{b-r}{b+r},$$

---

[15]) Joseph Louis Lagrange, geb. 1736 in Turin, stammt aus einer seit 1672 dort ansässigen französischen Adelsfamilie. Schon 1755 Prof. der Math. an der Artillerieschule daselbst. 1766 wurde er von Friedrich II. an Eulers Stelle zum Präsidenten der math. Klasse der Gesellschaft der Wissenschaften zu Berlin ernannt. Nach Friedrichs Tode ging er nach Paris, wurde später von Napoleon mit Ehren überhäuft und starb 1813. Seine *méchanique analytique* ist epochemachend für die Mechanik und Astronomie. Aufserdem schrieb er „Theorie der analytischen Funktionen“, „Lehrbuch der Auflösung der numerischen Gleichungen“ und vieles andere.

[16]) Memoiren der Berliner Akad. 1776. p. 284.

$$3) \ldots\ \tan\frac{y-n}{2} \cdot \tan\frac{z-n}{2} = \frac{c-r}{c+r}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\tan\frac{x}{2} = s$, $\tan\frac{y}{2} = t$, $\tan\frac{z}{2} = u$, $\tan\frac{m}{2} = p$, $\tan\frac{n}{2} = q$, und die rechten Seiten der Gleichungen gleich A, B, C, so nehmen letztere die Form an:

$$s.t = A;\quad \frac{s-p}{1+ps} \cdot \frac{u-p}{1+pu} = B;\quad \frac{t-q}{1+qt} \cdot \frac{u-q}{1+qu} = C.$$

Wir bestimmen t aus der ersten dieser Gleichungen, u aus der zweiten und setzen die erhaltenen Werte in die dritte Gleichung ein. Diese enthält dann nur noch s, und hat die Form:

$$\frac{A-qs}{Aq+s} \cdot \frac{F+G.s}{H+K.s} = C; \quad \text{dabei ist:}$$

$$F = B - p^2 + (1+B)pq;\quad G = (1+B)p - (1-Bp^2)q;$$
$$H = -(1+B)p + (B-p^2)q;\quad K = 1 - Bp^2 + (1+B)pq.$$

Für s ergiebt sich schliefslich die quadratische Gleichung:

$$(CK+Gq)s^2 + \big(CH - AG + (CKA+F)q\big).s = A(F-CHq).$$

Da $s = \tan\frac{x}{2}$, so folgt aus unsrer Schlufsgleichung, dafs die tan des gesuchten Winkels $\frac{x}{2}$ sich mit Zirkel und Lineal konstruieren läfst. Es giebt zwei Lösungen, wenn die Diskriminante der quadrat. Gleichung gröfser ist als Null, u. s. w. Diese Lösung von Lagrange ist insofern bemerkenswert, als sie den Ausgangspunkt bildet für eine spätere rein analytische Lösung des verallgemeinerten Problems und ihre geometrische Darstellung einen der weiter zu nennenden Mathematiker beschäftigt hat.

§ 2. Die Lösungen von Euler, Fuss und Lexell.

Die Worte Lhuiliers über die Castillonsche Lösung, wonach die zu ihr dienenden Lemmen fast mehr das Interesse zu erregen geeignet seien, als jene selbst, möchten wir in erhöhtem Mafse auf die Lösung Eulers anwenden. Euler[17]) behandelt das Problem ganz in der Weise, wie wir es von ihm, dem gröfsten Meister in der Analytik, erwarten dürfen. Aus einigen vorausgeschickten Formeln, die er streng beweist, berechnet er die zu konstruierenden Gröfsen und giebt dann eine kurze, fast zu gedrängte Darstellung der Konstruktion, deren Zusammenhang mit den vorhergehenden Entwickelungen zu finden, dem Scharfsinn des Lesers überlassen bleibt. In seinen Entwickelungen[18]) benutzt er folgende beiden Theoreme. Erstens einen Satz von Stewart:[19])

---

[17]) Leonhard Euler, deutscher Mathematiker; gröfster Analytiker des 18. Jahrhunderts. Er leistete das bedeutendste auf fast allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik. Geboren 1707 in Basel, studierte hier erst Theologie, dann Mathematik und Physik unter Johann Bernoulli, später auch Medizin. 1727 ging er als akademischer Adjunct der höheren Math. nach Petersburg und ward 1730 daselbst Prof. der Physik, 1733 auch der höheren Math. 1741 wurde er nach Berlin durch Friedrich II. berufen, welcher ihn 1744 zum Direktor der math. Klasse der neubegründeten Gesellschaft der Wissenschaften ernannte. 1766 ging er wieder nach Petersburg. Nachdem er bereits 1735 auf einem Auge erblindet, wurde er 1766 gänzlich blind, wodurch aber seine erstaunliche Productivität nicht beeinträchtigt wurde. Er schrieb über 700 Abhandlungen und gröfsere Werke. Er starb 1783 zu Petersburg.

[18]) *Problematis cujusdam Pappi Alexandrini constructio. Auctore L. Eulero. Acta Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae, pro anno 1780, pars prior.* (p. 91.)

[19]) Dieser Satz findet sich zuerst in Stewarts „*de quibusdam theorem. generalibus.*“ Edinburg 1746 (Satz 4.) Bewiesen wurde derselbe von Simpson 1752, (in *Select exercises for young proficients in mathematics*), von Euler 1780 in der oben besprochenen Abhandlung und von Leslie im 3. Buche seiner *Geometrical analysis* 1809. Er verdient, wie Chasles *(Aperçu historique,* deutsch von Sohnke, p. 173) bemerkt, seiner weitreichenden Anwendungen wegen, in die Elemente der Geometrie aufgenommen zu werden. S. auch Baltzer, Elem. d. Math. II. p. 125.

Sind A, C, B drei Punkte auf einer Geraden, und D ein Punkt aufserhalb derselben, so ist stets:

$$4) \ldots\ldots DA^2 \,.\, BC + DB^2 \,.\, AC - DC^2 \,.\, AB = AB \,.\, AC \,.\, BC.$$

Das zweite Theorem lautet: Sind im Dreieck OAB von O nach 2 Punkten F und G auf AB die Transversalen OF und OG so gezogen, dafs $OF = OG$, so ist:

$$5) \ldots AO^2 - AF \,.\, AB = BO^2 - BG \,.\, AB = FO^2 - AF \,.\, BG = GO^2 - AF \,.\, BG =$$

const $= \triangle$. und umgekehrt, gelten die Gleichungen 5), so ist $OF = OG$.

Eulers Betrachtungen sind nun zunächst die folgenden. Gegeben sei ein Kreis mit dem Centrum O und aufserhalb desselben die Strecke AB (Fig. 5). Ein beliebiger Punkt P der Peripherie werde mit A und B verbunden. Diese Linien mögen den Kreis in A_1 und B_1 schneiden. Wählt man dann auf AB die Punkte F und G so, dafs:

$$6) \ldots .\ AF = \frac{AP \,.\, AA_1}{AB} \text{ und } BG = \frac{BP \,.\, BB_1}{AB}$$

und bezeichnet die Schnittpunkte des Kreises mit FP und GP bez. mit F_1 und G_1, so gilt:

$$7)\ FP \,.\, FF_1 = GP \,.\, GG_1 = AF \,.\, BG.$$

Nach den Gleichungen 6) liegen die Punkte P, B, A_1, F und P, A, B_1, G je auf einem Kreise, also sind F_1 und G_1 gemäfs diesen Gleichungen konstruierbar. Es ist nun $AP \,.\, AA_1 = (AO + r)\ (AO - r) = AO^2 - r^2$, wo r der Radius des gegebenen Kreises ist. Ebenso ist $BP \,.\, BB_1 = BO^2 - r^2$; $FP \,.\, FF_1 = FO^2 - r^2$, und $GP \,.\, GG_1 = GO^2 - r^2$, sodafs also

$$6^1) \ldots .\ AF = \frac{AO^2 - r^2}{AB}, \text{ u. s. w.}$$

Die zu beweisende Gleichung 7) nimmt somit die Form an:

$$7^1)\ FO^2 - r^2 = GO^2 - r^2 = \frac{(AO^2 - r^2)\ (BO^2 - r^2)}{AB^2}.$$

Wendet man nun auf das Dreieck OAB den Stewartschen Satz 4) zweimal an, indem man erst OF, dann OG als die in Frage kommende Transversale betrachtet, und berücksichtigt dabei die Werte für AO^2 und BO^2, welche aus 6^1) folgen, so ergiebt sich leicht die zu beweisende Gleichung 7^1). Aus derselben folgt nun, dafs $FO = GO$ ist. Es gilt also für das Dreieck AOB das zweite Theorem. Nach diesem ist: $AF = \dfrac{AO^2 - \triangle}{AB}$, und ein Vergleich mit 6^1) lehrt dann, dafs $\triangle = r^2$ ist. Nun folgt die Lösung des eigentlichen Problems: Gegeben die 3 Punkte A, B, C; das verlangte Dreieck in den Kreis zu beschreiben. O sei Centrum des Kreises und dessen Radius gleich 1. (Fig. 6).

Nimm aus B zunächst $BF = \dfrac{BO^2 - 1}{AB}$. Dann wird nach Gleichung 7^1):

$FO^2 - 1 = \dfrac{BF\,(AO^2 - 1)}{AB}$. Verbinde F mit C. Nimm

$$FK = \frac{FO^2 - 1}{FC} = \frac{BF\,(AO^2 - 1)}{AB \,.\, FC}.$$

Dann wird nach Gleichung 7^1):

$$KO^2 - 1 = FK \,.\, \frac{CO^2 - 1}{FC}.$$

Ziehe aus O den Radius Om so, dafs $\cos KOm = \dfrac{\cos BFC}{KO}$.

Wird dann Winkel BFC durch die Gerade FS halbiert und von m aus zu dieser Halbierungslinie die Parallele mM gezogen, so ist M einer der 3 gesuchten Eckpunkte des Dreiecks.

Von den Corollarien, die Euler nun noch anfügt, ist besonders das erste bemerkenswert. Die eine Seite des Dreiecks gehe durch B; die beiden anderen seien parallel den gegebenen Geraden BA und BC —. Ziehe aus B die Sekante BNP in den Kreis so, dafs der Peripheriewinkel über PN gleich Winkel CBA wird. Ziehe $NM \parallel BA$ und $MP \parallel BC$; so ist MNP das gesuchte Dreieck.

Bezüglich der Zahl der Lösungen der Aufgabe finden wir noch folgende Bemerkung: Da man den Winkel KOM auf beiden Seiten von KO in O antragen kann, so giebt es zwei Lösungen. Da ferner die 3 Punkte A, B, C permutierbar sind, so kann die Konstruktion aufser mit A, B, C auch mit A, C, B und C, A, B vorgenommen werden. Es scheint also im ganzen 6 Lösungen zu geben; dieselben kommen aber in Wirklichkeit immer auf dieselben zwei hinaus: „*cujus rei tamen nulla ratio patet.*“ [20])

Eine Lösung von derselben Art wie die Eulers, nämlich analytisch-geometrisch, ist die seines Schülers Nikolaus Fuss. [21]) Sie unterscheidet sich jedoch von der eben behandelten besonders dadurch, dafs sie, weniger originell wie diese, ausgesprochenermafsen an die frühere bei Pappus, die zunächst in algebraischer Sprache auszudrücken ist, anknüpft; dadurch zugleich Castillons Meinung, dafs deren Verallgemeinerung unmöglich sei, widerlegend.

Ist O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, und gelten die Bezeichnungen, wie bei der Lösung von Pappus, so ist, nach den daselbst gemachten Betrachtungen $EH = \frac{EO^2 - r^2}{DE}$. Zieht man OH, so lautet die zweite Gleichung gemäfs der dort aufgestellten Proportion $HK = \frac{HO^2 - r^2}{HF}$. Konstruiert man nach diesen Gleichungen die Punkte H und K, so bleibt dann noch aus K die Tangente KG an den Kreis zu legen, und $GB \,||\, FD$ zu ziehen, wodurch der eine Eckpunkt B des gesuchten Dreiecks gefunden ist.

Fuss zeigt nun [22]), dafs diese Konstruktion ein spezieller Fall der folgenden ist, bei welcher die gegebenen Punkte D, E, F beliebig liegen (Fig. 7). Ziehe DE und EO. Nimm EH gemäfs

$$8) \ldots . \; EH = \frac{EO^2 - r^2}{DE}.$$

Ziehe HF. Nimm hierauf HK nach ... 9) $HK = \frac{HO^2 - r^2}{HF}$.

Trage auf HF ferner $HR = r$ ab. Fälle aus R die Senkrechte RS auf DE. Beschreibe mit HS als Radius um O einen Kreis. Ziehe an diesen Kreis aus K die Tangente KTG. Ziehe $GB \,||\, DE$, und vollende aus B das gesuchte Dreieck.

Diese Konstruktion ist nun zu beweisen. Es sei das Dreieck fertig und $BG \,||\, DE$ gezogen. Ziehe durch C die Linie GH; verbinde H mit F und ziehe parallel hierzu BI. Endlich ziehe durch I die Linie GK. Dann ist die Gültigkeit der Gleichungen 8) und 9) zu zeigen.

Es ist Winkel $BGC = CHE = BAE$, also $\triangle ECH \sim \triangle EDA$, und somit $EC : EH = ED : EA$, oder $EC \,.\, EA = EH \,.\, ED$. Da $EC \,.\, EA = EO^2 - r^2$ ist, so ist $EH = \frac{EO^2 - r^2}{ED}$. Ferner ist Winkel $IBC = HFC = IGC$, also $\triangle HFC \sim \triangle HGK$, d. h. $HC : HF = HK : HG$, oder

$$HK = \frac{HC \,.\, HG}{HF} = \frac{HO^2 - r^2}{HF}.$$

---

[20]) Beiläufig sei erwähnt, dafs Euler als erster das Problem auf die Kugel überträgt, wo es dann dahin lautet: In einen (kleinen) Kreis auf der Kugel ein sphärisches Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten gröfste Kreise sind, welche durch gegebene Punkte auf der Kugel hindurchgehen. Die Lösung erfolgt durch Zurückführung des Problems auf das frühere mittels centraler Projektion der sphärischen Figur auf eine Ebene, welche die gegebene Kugel in einem Punkte tangiert, der gleichweit von sämtlichen Punkten des kleinen Kugelkreises entfernt ist (sphärischer Mittelpunkt).

[21]) Nikolaus von Fuss, geboren 1755 in Basel, ging in seinem 17. Lebensjahre nach Petersburg, wo er Eulers Unterricht genofs. 1776 Adjunct der Akademie der Wissenschaften für die höhere Math., 1784 Prof. der Math. am Kadettencorps, 1797 Prof. der Math. bei dem Marinecorps und 1800 Sekretär der Akademie der Wissenschaften. Er starb 1828 als Staatsrat in Petersburg. Mathematische und Militärwissenschaftliche Schriften.

[22]) *Solutio problematis geometrici Pappi Alexandrini, auctore Nicolao Fuss. Act. Acad. Scient. imp. Petrop. 1780.* (p. 97.)

Nun war aber, dank der Konstruktion $BI \parallel HF$. Es war nämlich $HR = r$ und $OT = HS$, folglich $TI = RS$, also Winkel $EHR = FOI = GBI$. Da aber $BG \parallel DE$ ist, so ist auch $BI \parallel HF$.

Da sich an den inneren Kreis aus K zwei Tangenten legen lassen, so hat die Aufgabe zwei Lösungen. Nun wird noch von Fuss ohne Beweis behauptet, dafs man die Punkte D, E, F permutieren könne, dafs sich aber dabei immer dieselben beiden Lösungen ergeben.

In den Abhandlungen von Castillon, Lagrange, Euler und Fuss sind die drei festen Punkte aufserhalb des Dreiecks liegend für die Analysis angenommen worden. Bei Lagrange's Lösung ist dies nicht von Belang, da, wenn z. B. $a < r$ ist, nur A negativ wird; bei Euler und Fuss aber, ebenso wie bei Pappus und Castillon wäre die ganze Lösung, wenn die Punkte innerhalb des Kreises liegen, zu modifizieren; an Stelle des Satzes über die Gleichheit der Produkte der Sekanten in ihre äufseren Abschnitte tritt dann der auf die Abschnitte zweier sich schneidenden Sehnen bezügliche.

Noch einen zweiten seiner Schüler, Lexell,[23]) hat Euler veranlafst, sich mit der Castillonschen Aufgabe zu beschäftigen, und zwar sollte dieser untersuchen, ob die Lagrange'sche analytische Lösung zu einer durchsichtigen Konstruktion führe, was Euler bezweifelte. Lexell konstruierte nun in der That die komplizierten Ausdrücke Lagranges, nachdem er durch eine etwas modifizierte Ableitung ihnen eine elegantere Gestalt gegeben hatte.[24]) Wir müssen aber unterlassen, diese Untersuchungen vorzuführen, da sie zu weiten Raum in Anspruch nehmen und doch im Grunde nichts andres zeigen, als was selbstverständlich ist: die Möglichkeit der Umsetzung der Formeln in eine Konstruktion überhaupt. Denn es wird niemand allen Ernstes auf diesem Wege eine Zeichnung ausführen wollen, für welche es weit einfachere und elegantere Vorschriften giebt. Zu bemerken ist noch, dafs Lexell auch die Determination vollständig angiebt; aber auch sie ermangelt nicht der Weitschweifigkeit. — Eine zweite Konstruktion gab, wie Brianchon in seiner später zu besprechenden Arbeit anführt, Romano 1793; wir haben aber diese Konstruktion nicht zu Gesicht bekommen.

§ 3. Die Lösungen von Ottajano und Malfatti.

Die bisher vorgeführten Lösungen des Dreiecksproblems waren teils rein geometrische (Castillon), teils rein analytische (Lagrange) oder endlich solche, bei denen wir von Anwendung der Algebra auf die Geometrie zu sprechen haben. Es lag nun zunächst nahe, in Anbetracht der Kompliziertheit jener ersten geometrischen Konstruktion, eine andere rein geometrische Lösung des Dreiecksproblems zu versuchen, und dann die Betrachtungen auf ein Vier- und Vieleck zu erweitern. Diese beiden Schritte verdanken wir einem jungen italienischen Mathematiker, Giordano di Ottajano.[25]) Derselbe war zur Zeit der Abfassung seiner Arbeit,[26]) wie der Herausgeber einleitend berichtet, wenig über 16 Jahre alt; und wir bewundern um so mehr das von ihm geleistete, als seine Arbeit sich vor den bisherigen ganz besonders durch die strenge Methodik, durch die Klarheit der Auffassung, durch die Allgemeinheit der Entwickelungen auszeichnet. Malfatti nennt sie voller Begeisterung *una soluzione breve e ingegnoso* und ihren Verfasser *un valoroso giovanetto*; und Lhuilier weifs in seinem bereits citierten Werke über die geometrische und algebraische Analysis den jungen Mathematiker zu ehren, indem er die Lösung desselben bis auf geringe Änderungen reproduziert. — Die „*aliquanti altri problemi affini*," die in dem Titel der Ottajanoschen Arbeit angezeigt werden, stehen in engem Zusammenhange mit dem Hauptproblem; es sind Aufgaben, die passend vor

[23]) Andreas Johann Lexell, geb. 1740 zu Abo. Anfangs Docent für Math. an der Universität daselbst, seit 1768 Prof. der Math. in Petersburg, wo er 1784 starb. Als astronomischer Rechner bekannt.

[24]) *Solutio problematis geometrici; in actis Academiae scientiarum Berolinensis, pro anno 1776 a celeb. Castillon propositi, auctore A. J. Lexell. Act. Acad. Sc. Petrop. 1780.*

[25]) Eine Biographie Ottajanos war nicht aufzufinden; bei Poggendorff (bibliogr. Handwörterbuch) ist er nicht angeführt.

[26]) *„Considerazioni sintetiche sopra di un celebre problema piano, e resoluzione di alquanti altri problemi affini" del Sig. D. Annibale Giordano di Ottajano, presentata dal Sig. Cavaliere Lorgna. in Memorie di matematica e fisica della società Italiana.* Tomo IV. Verona 1788. pag. 4.

diesem behandelt werden, weshalb sie auch Ottajano an die Spitze seiner Entwickelungen stellt, und Lhuilier folgt ihm auch hierin, wenngleich er noch eine später zu erwähnende Modifikation eintreten läfst.

Wir formulieren die Ottajanoschen Aufgaben in folgende 4 Probleme. Problem a: In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten 3 gegebenen Geraden parallel sind. Problem b: In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, von dem eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht und die beiden andern parallel gegebenen Geraden sind. Problem c: In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, von dem 2 Seiten durch gegebene Punkte gehen und die dritte parallel einer gegebenen Geraden wird. Problem d: In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen 3 Seiten durch gegebene Punkte gehen. In dem allmäligen Fortschreiten von den leichteren Aufgaben zu der letzten allgemeinen ist die Methodik Ottajanos, die er dann auch bei dem erweiterten Problem befolgt, enthalten. Wir reproduzieren nun die Lösungen der Probleme a) bis d).

Problem a. Da hier die drei Winkel des Dreiecks gegeben sind und zugleich der Kreisradius, so sind auch die Seiten des Dreiecks bekannt, und dieses ist also vollständig bestimmt.

Problem b. Es ist ein Winkel des Dreiecks und somit durch den Radius des Kreises auch die gegenüberliegende Seite bekannt. Es handelt sich also nur um die Lösung der elementaren Aufgabe: „Durch den gegebenen Punkt eine Sekante so in den Kreis zu legen, dafs eine Sehne von gegebener Länge abgeschnitten wird.“ Diese Sekante ist bekanntlich die Tangente an einen dem gegebenen konzentrischen Kreis, und es sind stets zwei Lösungen möglich, wenn der gegebene Punkt P aufserhalb des gegebenen Kreises liegt. Liegt P innerhalb desselben, so hängt die Zahl der Lösungen von der Gröfse des Winkels α ab, den die festgelegten Geraden mit einander bilden, und ferner von der äufsern oder innern Lage des Punktes P in Bezug auf den Kreis, an welchen aus P die Tangente zu legen ist. Ist die Lösung überhaupt möglich, d. h. liegt P aufserhalb des innern Kreises, so giebt es zwei Lösungen, wenn $\alpha \gtrless 90^0$ ist, und eine Lösung für $\alpha = 90^0$. Liegt bei $\alpha = 90^0$ P im Centrum des gegebenen Kreises, so wird das Problem unbestimmt.[27])

Problem c. Es sei $X X_1 X_2$ das verlangte Dreieck, in welchem $X X_1$ durch P, $X_1 X_2$ durch P_1 gehe, und $X X_2$ parallel einer gegebenen Geraden L sein soll. (Fig. 8). Ziehe $X x_1 \parallel P P_1$. Es treffe $X_2 x_1$ die Gerade $P P_1$ in p_1. Dann ist Winkel p_1 = Winkel x_1. Da aber auch Winkel X_1 = Winkel x_1 (als Peripheriew. ü. gl. B.), so ist Winkel p_1 = Winkel X_1 d. h. $\triangle X_2 P_1 p_1 \sim \triangle P P_1 X_1$. Es gilt demnach die Proportion: $P P_1 : P_1 X_1 = X_2 P_1 : P_1 p_1$, oder es ist $X_2 P_1 \cdot P_1 X_1 = P P_1 \cdot P_1 p_1$. Nun ist P_1 der Lage nach gegeben, also ist das Rechteck $X_2 P_1 \cdot P_1 X_1$ bekannt, denn es ist dasselbe für jede Sehne durch P_1. Da ferner $P P_1$ eine gegebene Länge besitzt, so ist nach obigem Satze die Lage von p_1 bestimmt. Damit ist nun das Problem auf b) zurückgeführt: Das $\triangle X x_1 X_2$ so in den Kreis zu beschreiben, dafs $X_2 x_1$ durch den festen Punkt p_1 geht und die Seiten $X x_1$ und $X X_2$ parallel den Geraden $P P_1$ und L sind.

Problem d. Die Seiten $X X_1$, $X_1 X_2$, $X_2 X$ sollen bez. durch die Punkte P, P_1, P_2 gehen (Fig. 8). Es seien x_1 und p_1 bestimmt wie vorher. Im $\triangle X x_1 X_2$ ist dann $X x_1 \parallel P P_1$ und die Seiten $X X_2$ und $X_2 x_1$ gehen durch die gegebenen Punkte P_2 und p_1. Es ist also die Aufgabe auf das Problem c) zurückgeführt. — Da es nun leicht ist, sich die Lösung dieses letzten allgemeinen Falles d) mit Hilfe der Probleme b) und c) selbst zu konstruieren, gehen wir sofort zur Darstellung der Verallgemeinerung Ottajanos zunächst auf das Viereckssproblem über.

Es sind hier den Problemen a) bis d) beim Dreieck entsprechend, in selbstverständlicher Weise 5 Probleme a) bis e) aufzustellen, indem bei jedem folgenden eine vorgeschriebene Gerade, der eine Vierecksseite parallel gehen sollte, ersetzt wird durch einen Punkt P. Aber das entsprechende Problem a), das beim Dreieck, wenn überhaupt lösbar, 2 Lösungen zuliefs, wird hier entweder unmöglich oder es wird unbestimmt. Denn die 4 gegebenen Geraden, denen die Vierecksseiten parallel werden sollen, müssen, wenn die Konstruktion möglich sein soll, der bekannten Bedingung für die Gegenwinkel im Sehnenviereck entsprechen. Thun sie dies jedoch, so ist mit $X X_1 X_2 X_3$ jedes andre Viereck $Y Y_1 Y_2 Y_3$ eine Lösung, dessen Seiten der Reihe nach

[27]) Dieser Diorismus ist für die folgenden Probleme mafsgebend.

denen des ersteren parallel sind. Es soll nun, Problem b, XX_1 durch P gehen, während die 3 andern Seiten parallel gegebenen Geraden sind. Dann sind Winkel X_2 und X_3 gegeben, und da das Viereck ein Sehnenviereck ist, auch Winkel X und X_1. Die Gerade XX_1 durch P ist also auch der Richtung nach bekannt, d. h. konstruierbar, und damit ist es das ganze Viereck. Liegt P innerhalb des gegebenen Kreises, so ist stets eine Lösung möglich, nicht aber, wenn es aufserhalb liegt, denn dann kann die Gerade durch P den Kreis meiden.

Das Problem c) für das Viereck möge in folgender Form vorliegen: (Fig. 9). Im Viereck $XX_1X_2X_3$ sollen XX_1 und X_1X_2 durch P, bez. P_1 gehen und X_2X_3, X_3X parallel gegebenen Geraden sein. Ziehe $Xx_1 \parallel PP_1 \cdot X_2x_1$ treffe PP_1 in p_1. Dann ist wie früher: $X_2P_1 \cdot P_1X_1 = PP_1 \cdot P_1p_1$; d. h. p_1 ist der Lage nach bekannt. Hiermit ist aber das Problem auf das vorige zurückgeführt: Das Viereck $Xx_1X_2X_3$ zu konstruieren, dessen Seiten Xx_1, XX_3, X_2X_3 parallel gegebenen Geraden sind und dessen vierte Seite X_2x_1 durch einen gegebenen Punkt p_1 geht. — Die Probleme d) und e) werden in derselben Weise wie bei der Dreiecksaufgabe durch die vorhergehenden gelöst.

Ehe wir nun zu dem allgemeinsten Problem für das n-eck vorschreiten, seien bez. der Ottajanoschen Lösung noch einige Bemerkungen gestattet. Die Bedingung, dafs gewisse Seiten der zu konstruierenden Figur parallel gegebenen Geraden sein sollen, hat Ottajano durch die andre ersetzt, dafs sie mit vorgelegten Geraden bestimmte Winkel einschliefsen sollen, was aber nichts wesentliches ist, weshalb wir bei der einfacheren Fassung verharrten. Ferner unterläfst Ottajano völlig den Diorismus; derselbe ist vielmehr von Lhuilier der Lösung zugefügt worden. Endlich hat auch Ottajano nicht die einzelnen Probleme so auseinander gehalten wie wir es thaten; er reproduciert vielmehr bei jeder folgenden Lösung zugleich die früheren in einer Figur.

Bei der allgemeinsten Aufgabe[28]) sind 2 Fälle zu unterscheiden: Ob die Zahl der Seiten eine ungerade oder gerade ist. Es sei zunächst die Zahl der Seiten ungerade, etwa $2n+1$. Es sind dann dem früheren analog $2n+2$ Probleme zu unterscheiden. Im ersten derselben, wo die $2n+1$ Seiten parallel gegebenen Geraden werden sollen, sind sämtliche Winkel des Polygons bekannt, und es ist alsdann leicht zu zeigen, dafs auch die Centriwinkel zu allen Polygonseiten bestimmt sind, damit aber das verlangte Vieleck selbst. Ist nämlich C der Mittelpunkt des Kreises und sind $X, X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots\ldots$ die Winkel des Vielecks, so ist $X_2 = 2R - \frac{1}{2}X_1CX_3$; $X_4 = 2R - \frac{1}{2}X_3CX_5$ u. s. w. bis $X_{2N} = 2R - \frac{1}{2}X_{2N-1}CX$. Durch Addition folgt hieraus: $X_2 + X_4 + \cdots + X_{2N} = n \cdot 2R - \frac{1}{2}(4R - XCX_1) = (n-1) \cdot 2R + \frac{1}{2}XCX_1$, das heifst: $\frac{1}{2}XCX_1 = X_2 + X_4 \ldots\ldots + X_{2N} - (n-1) \cdot 2R$.

Bei dem zweiten Problem, wo XX_1 durch P gehen möge, während sonst alles wie vorher bleibe, ist der Winkel XCX_1 bekannt, da ja durch die Lage der gegebenen $2n$ Geraden $2n$ Winkel des Polygons bestimmt sind und die Summe aller gleich $(2n-1) \cdot 2R$ sein mufs. Damit ist auch die Sehne XX_1 gegeben. Es ist also dasselbe Problem zu lösen, wie früher beim Dreieck. Das Problem c) wird ebenfalls wie dort durch Bestimmung eines Punktes p_1 gelöst, und so sieht man dann leicht, wie dem früheren analog jede folgende Aufgabe auf die vorhergehende zurückzuführen ist.

Ist die Zahl der Seiten des zu konstruierenden Vielecks gerade, gleich $2n$, so gilt nach einem bekannten Satze für die Winkel $X, X_1, X_2 \ldots$ die Gleichung

$$X + X_2 + X_4 + \ldots = X_1 + X_3 + \ldots\ldots = (2n-2)R.$$

Ist diese erfüllt, so ergeben sich hier unendlich viel Lösungen des Problems a), im Verneinungsfalle keine. Soll eine erste Seite XX_1 durch einen Punkt P gehen, so ist, wie früher beim Viereck gezeigt, XX_1 der Richtung nach gegeben und somit ist das ganze Polygon völlig bestimmt. Die folgenden Probleme sind auf dieses Problem b) durch Bestimmung eines Punktes p_1 zurückführbar u. s. w. u. s. w.

Es unterliegt keinem Zweifel, dafs die Lösung Ottajano's durch diejenige des einfachen Spezialfalles bei Pappus gefunden worden ist, denn wenn wir nicht wie Lhuilier die Punkte P_i innerhalb des Kreises, sondern wie Ottajano in seinen Figuren aufserhalb wählen, so ist die Konstruktion des Punktes p_1 dieselbe wie die des Punktes H bei dem griechischen Geometer. Das

[28]) *„In un dato cerchio inscrivere una figura rettilinea di un qualunque dato numero di lati, i quali distesi passino per altrettanti punti dati communque di sito."*

Hauptverdienst des neuern Mathematikers besteht also in der konsequenten Durchführung des einfachen Gedankenganges auch bei den complicierteren Fällen der Aufgabe. Am Ende weist Ottajano noch auf die analytische Behandlung des Vielecksproblems als wünschenswert hin; aber er hält einen Versuch in dieser Hinsicht wenn nicht für verzweifelt, so doch sehr schwer. Er schliefst: „*Sarebbe veramente cosa desiderabile, che qualche perspicace algebrista si prendesse la pena di rinvenire una soluzione puramente analitica, di un sì elegante problema piano, che nella simplicita non la cedesse alla sintetica già rapportata.*"

Die Lösung Malfatti's[29]) befindet sich in demselben (4.) Bande der Veroneser Memoiren kurz nach der vorigen[30]). Sie unterscheidet sich im Wesen nicht bedeutend von derselben, wenn auch die Anordnung der Entwickelungen eine andre ist. Poncelet spricht beide Lösungen direkt für identisch an, indem er sagt: Malfatti fand dieselbe Konstruktion wie Ottajano, „wie es scheint", ohne von dessen Lösung vorher zu wissen. Eine fernere synthetische Lösung des Dreiecksproblems gab nach einem Citat Brianchon's auch Giordano; doch findet sich die Quelle bei unsrem Gewährsmann nicht verzeichnet.

Klügel, dessen „Mathematisches Wörterbuch" sich bezüglich historischer Angaben eines guten Rufes erfreute, gab daselbst[31]) die Ottajanosche Lösung für das Dreiecks- und Vierecksproblem wieder nebst einigen Litteraturnachweisen. Er kommt am Schlusse seines Artikels auch auf das n-ecksproblem zu sprechen, teilt aber nur in kurzen Worten, ohne auf die Konstruktion näher einzugehen, das Ottajanosche Resultat mit. Wir geben im folgenden die ausführliche Analysis für das allgemeine Problem, um ein vollständiges Bild der Ottajanoschen Lösung zu erhalten, für welche wir bisher nur den Zusammenhang mit den Hilfsproblemen klargelegt haben und um zugleich zu zeigen, dafs sich in der That das schwierige Problem zu Ende führen läfst ohne dafs, wie in Ottajanos Abhandlung die Hilfsprobleme einzeln vorausgeschickt werden!

Es sei (Fig. 10) $X_0 X_1 X_2 \ldots X_n$ das Vieleck im Kreise, dessen Seiten $X_0 X_1$, $X_1 X_2$, $\ldots X_{n-1} X_n$, $X_n X_0$ durch die Punkte $A_0 A_1 \ldots A_n$ aufserhalb des Kreises gehen mögen. Ziehe $A_0 A_1$ und dazu durch X_0 die Parallele $X_0 a_1$ bis an den Kreis. Es bestimme $a_1 X_2$ auf $A_0 A_1$ den Punkt P_1. Ziehe $P_1 A_2$ und dazu durch a_1 die Parallele $a_1 a_2$. Es bestimme $a_2 X_3$ auf $P_1 A_2$ den Punkt P_2. Ziehe $P_2 A_3$ und hierzu durch a_2 die Parallele $a_2 a_3$. Durch $a_3 X_4$ ergebe sich auf $P_2 A_3$ der Punkt P_3. u. s. w. Zum Schlusse ziehe die Gerade $P_{n-1} A_n$ und dazu durch a_{n-1} die Parallele $a_{n-1} a_n$. Dann bestimme $a_n X_0$ auf $P_{n-1} A_n$ den Punkt P_n; es liegen also P_n, X_0 und a_n auf ein und derselben Geraden. Es ist nun zunächst zu zeigen, wie die Punkte $P_1 P_2 \ldots P_n$ unabhängig von $a_1 a_2 \ldots a_n$ bestimmt sind.

Es ist

$$\text{Winkel } A_1 A_0 X_1 = a_1 X_0 X_1 = a_1 X_2 X_1 = P_1 X_2 A_1,$$

also:

$$\triangle X_2 P_1 A_1 \sim \triangle A_0 X_1 A_1 \quad .$$

d. h.:

$$A_0 A_1 \cdot P_1 A_1 = A_1 X_1 \cdot A_1 X_2,$$

oder da dies gleich dem Quadrat der Tangente aus A_1 ist, so hat man in abgekürzter leichtverständlicher Schreibweise:

$$A_0 A_1 \cdot P_1 A_1 = \tan^2 (A_1).$$

Ferner ist:

$$\text{Winkel } P_2 P_1 X_2 = a_2 a_1 X_2 = a_2 X_3 X_2 = P_2 X_3 A_2$$

also:

$$\triangle X_3 P_2 A_2 \sim \triangle P_1 X_2 A_2$$

d. h.:

$$P_1 A_2 \cdot P_2 A_2 = \tan^2 (A_2).$$

---

[29]) Johann Franz Joseph Malfatti, italienischer Mathematiker, geb. 1731 zu Ala; seit 1771 Prof. für höhere Math. an der päpstlichen Universität Ferrara; gestorben daselbst 1807.

[30]) *Soluzione generale di un problema geometrica di Pappo Alessandrino del Sig. Gian. Francesco Malfatti, Publico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara.* a. a. O. p. 201.

[31]) s. Klügel, Math. Wörterbuch. Bd. III, 1808. Artikel „Kreis", p. 159 ff.

Weiter ergeben sich so durch analoge Betrachtungen die Gleichungen:

$$P_2 A_3 \cdot P_3 A_3 = \tan^2 (A_3)$$

bis

$$P_{n-1} A_n \cdot P_n A_n = \tan^2 (A_n).$$

Es lassen sich nun durch diese Gleichungen die Punkte $P_1 \ldots P_n$ bestimmen und X_0 ist alsdann der Schnittpunkt der Geraden $P_n a_n$ mit dem Kreise. Es handelt sich also dann noch um die Bestimmung des Punktes a_n. Hier sind 2 Fälle zu unterscheiden: Ob die Zahl $n+1$ der Ecken des Polygons gerade oder ungerade ist. Man sieht zunächst leicht ein, dafs das Polygon $X_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ ebensoviel Ecken hat, als das zu konstruierende $X_0 X_1 \ldots X_n$, d. h. $X_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ ist von gerader oder ungerader Eckenzahl in Übereinstimmung mit $X_0 X_1 \ldots X_n$. Es ist ferner gemäfs der Konstruktion der Geraden $X_0 a_1$, $a_1 a_2$, ... $a_{n-1} a_n$ immer:

Winkel $X_0 a_1 a_2 = A_0 P_1 P_2 = \varphi_1$; Winkel $a_1 a_2 a_3 = P_1 P_2 P_3 = \varphi_2$, Winkel $a_2 a_3 a_4 = P_2 P_3 P_4 = \varphi_3$ u. s. w. bis Winkel $a_{n-2} a_{n-1} a_n = P_{n-2} P_{n-1} P_n = \varphi_{n-1}$ wo also die Winkel φ sämtlich bekannt sind.

Es sei nun die Zahl der Ecken eine gerade (d. h. $n+1$ gerade, also n ungerade). Dann ist nach dem früher schon angeführten Satze über die Winkel des Vielecks von gerader Seitenzahl:

$$\text{Winkel } a_n X_0 a_1 + \varphi_2 + \varphi_4 + \cdots + \varphi_{n-1} = (n-1) \text{ Rechte},$$

oder, da Winkel $a_n X_0 a_1$ gleich dem Winkel von $P_n a_n$ mit der Geraden $A_0 A_1$ ist, so ist dieser letztere Winkel gleich $(n-1)\, R - \varphi_2 - \varphi_4 - \cdots - \varphi_{n-1}$, d. h. die Gerade $P_n a_n$ bildet mit $A_0 A_1$ einen bekannten Winkel, ist demnach aus P_n konstruierbar.

Es sei die Zahl der Ecken eine ungerade (d. h. $n+1$ ungerade, also n gerade). Dann schneidet $P_n a_n$ von dem Kreise einen gegebenen Bogen ab; durch diesen ist die Sehne $X_0 a_n$ bekannt, und es erübrigt nur, das Problem zu lösen: Aus P_n eine Sekante in den Kreis zu legen, dafs eine Sehne von gegebener Länge abgeschnitten wird. Die Richtigkeit der eben gemachten Behauptung läfst sich folgendermafsen erkennen. Verbindet man irgend einen Punkt S der Peripherie mit X_0 und a_n, so ist Winkel $X_0 S a_n$ ein Peripheriewinkel und zugleich ein Winkel des Vielecks $S X_0 a_1 a_2 \ldots a_n$. Dieses ist nun von gerader Seitenzahl, da zu den Ecken X_0, a_1, ... a_n noch die Ecke S hinzugekommen ist. Es ist also nach dem früheren Satze wieder:

$$\text{Winkel } S + \varphi_1 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_{n-1} = 2n \text{ Rechte},$$

(da das Vieleck $S X_0 a_1 \ldots a_n$ $n+2$ Ecken hat!) oder:

$$\text{Winkel } S = 2n R - \varphi_1 - \varphi_3 - \cdots - \varphi_{n-1}.$$

Es ist also Winkel S bekannt, und damit auch die Sehne $a_n X_0$.

Bezüglich der Determination ist zu bemerken: Ist die Zahl der Ecken des Polygons eine gerade, so lassen sich aus P_n zwei Gerade ziehen, welche mit $A_0 A_1$ den bestimmten Winkel bilden; ist die Eckenzahl eine ungerade, so giebt es 2 Gerade aus P_n, welche im Kreise eine Sehne von derselben gegebenen Länge besitzen; es existieren also im allgemeinen in jedem Falle zwei Lösungen. Bei gerader Eckenzahl giebt es nur eine oder keine Lösung, wenn die eine, oder beide Geraden aus P_n den Kreis meiden. Bei ungerader Eckenzahl des Polygons hängt die Zahl der Lösungen noch von der Lage des Punktes P ab, wie sich aus der früheren Darstellung der Determination des speziellen Problems für das Dreieck ergiebt.

§ 4. Die Lösungen von Lhuilier und Carnot.

Lhuilier[32]) kannte zunächst nur die geometrische und analytische Behandlung des Dreiecksproblems durch Castillon und Lagrange, als er sich die Aufgabe stellte, das Problem für ein beliebiges Polygon zu lösen. Er versuchte es zuerst auf algebraischem Wege, da er meinte, es sei ihm wohl auf geometrischem nach der Methode der Alten nicht beizukommen. Er bemerkt, dafs

[32]) Simon Antoine Jean Lhuilier, geb. 1750 in Genf. Erst Hauslehrer beim Fürsten Czartorisky in Warschau, dann, nach mehrjährigem Aufenthalt in Tübingen bei Pfleiderer, Prof. d. Math. an der Akademie zu Genf, von 1795–1823, wo er in den Ruhestand trat. Er starb 1840. Bedeutender Geometer.

die Versuche von Euler, Fuss und Lexell diese seine Meinung noch mehr bestärkt hätten. „*Les solutions données du problême particulier sur le triangle par Euler, Fuss et Lexell, loin de me donner des espérances pour une solution géometrique du problême général sur les polygones, changèrent en une persuasion presque complète mes présomptions sur son impossibilité,*“ schreibt er in der Einleitung zu der Abhandlung, in welcher er zuerst eine völlig allgemeine analytische Lösung für das n-ecksproblem giebt.[33]) Erst nach Vollendung seiner Rechnungen gelangte er in den Besitz der Ottajanoschen Arbeit, und da er vorher an der Möglichkeit einer rein geometrischen Lösung gezweifelt hatte, begrüfste er die Resultate des Italieners mit um so lobenderen Ausdrücken, indem er sie den jüngeren Mathematikern als ein treffliches Beispiel des Vorzuges rein geometrischer Verfahren vor dem blos algebraischen anpreist. In der That finden wir bei Vergleichung der Lhuilierschen Abhandlung, wie sie aus dem Jahre 1796 vorliegt, mit der Ottajanoschen, dafs für ein wirkliches Verständnis der Sache, für ein tieferes Eindringen in die Eigenschaften der in Frage kommenden Figuren eigentlich wenig gewonnen wird, zumal die verschiedenen Fälle der geraden oder ungeraden Zahl der Seiten des Polygons, die bei geometrischer Behandlung streng auseinander gehalten werden mufsten, hier im algebraischen Gewande völlig zusammenfliefsen. „Das wahre Wesen der Sache liegt nicht immer in der Art des Ausdruckes, und der Zauber der Formeln oder andrer mathematischer Äufserlichkeiten dürfte alles in allem wenig mehr bedeuten als ein Sceneriewechsel auf der Bühne. Die Zurückführung auf Formeln ist in Wahrheit eine Abstraktion, deren Ergebnis nicht immer einen Gewinn bietet; in der That kann das Objekt durch diesen Prozefs in einer Hinsicht mehr verlieren, als es in der anderen gewinnt.“[34]) — In seinem 1809 erschienenen berühmten Werke[35]) wiederholte Lhuilier nicht nur, wie schon früher gemeldet, die geometrische Lösung Ottajanos, sondern fügte ihr auch noch eine neue analytische bei, die weniger sich an seine eigne Abhandlung vom Jahre 1796 anschliefst, als vielmehr an die Arbeit Lagranges, dessen Lösung er hier als „*rémarquable par sa simplicité et par son élégance*“ bezeichnet. Wir halten uns an die erste originelle Lösung Lhuiliers, welche auf der Anwendung des folgenden Satzes beruht: „Zieht man von der Spitze A des gleichschenkligen Dreiecks ABC nach einem Punkte P der Basis die Transversale AP und bezeichnet deren Winkel mit AB und AC resp. durch α_1 und α_2, so gilt die erste oder zweite der Gleichungen

$$\frac{AB+AP}{AB-AP}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha_1}{2}\,.\,\tan\frac{\alpha_2}{2}},\quad \frac{AP+AB}{AP-AB}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha_1}{2}\,.\,\tan\frac{\alpha_2}{2}},$$

je nachdem P auf BC oder seiner Verlängerung liegt.“[36])

Es sei nun in den Kreis, dessen Centrum C und dessen Radius r ist, das $n+1$-eck $X_0X_1X_2\ldots X_n$ einzuschreiben, dessen Seiten X_0X_1, X_1X_2 u. s. w. bez. durch die Punkte A_0, A_1, ... A_n gehen. — Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. (Fig. 11.) Die gegebenen Strecken CA_0, $CA_1 \ldots CA_n$ seien $a_0, a_1, \ldots a_n$. Die gegebenen Winkel A_nCA_0, $A_0CA_1 \ldots$, $A_{n-1}CA_n$ seien $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$. Ferner seien die Winkel $X_0CA_0 = x_0$, $X_1CA_1 = x_1$, ... $X_nCA_n = x_n$, so dafs Winkel $A_nCX_0 = \varphi_0 - x_0$, $A_0CX_1 = \varphi_1 - x_1$ u. s. w. und endlich mögen die Werte $\frac{r-a_0}{r+a_0}, \frac{r-a_1}{r+a_1}, \ldots \frac{r-a_n}{r+a_n}$ mit $p_0, p_1, \ldots p_n$ bezeichnet sein. Wenden wir dann auf das Dreieck CX_0X_1 den oben vorausgeschickten Satz an, so ergiebt dies:

$$\frac{CX_0+CA_0}{CX_0-CA_0}=\frac{1}{\tan\frac{x_0}{2}\,.\,\tan\frac{\varphi_1-x_1}{2}},$$

[33]) „*Solution algébrique du problème suivant: A un cercle donné, inscrire un polygone dont les côtés passent par des points donnés*“. *Mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles lettres, 1796. (lu à l'Académie le 23 avril 1795.)*

[34]) s. W. Spottiswoode, die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften. Leipzig 1879, p. 4.

[35]) *Elemens d'analyse géometrique et d'analyse algébrique, appliquées à la recherche des lieux géométriques; par Simon Lhuilier, professeur de Mathématiques à l'Académie de Genève etc. à Paris 1809.*

[36]) Der Beweis erfolgt durch Anwendung des bekannten trigon. Tangentensatzes auf das Dreieck ABP.

oder

$$\tan\frac{x_0}{2} \,.\, \tan\frac{\varphi_1 - x_1}{2} = \frac{r - a_0}{r + a_0} \equiv p_0 .$$

Durch Anwendung desselben Theorems auf die Dreiecke $C X_1 X_2$ u. s. w. erhalten wir ferner:

$$\tan\frac{x_1}{2} \,.\, \tan\frac{\varphi_2 - x_2}{2} = \frac{r - a_1}{r + a_1} \equiv p_1 ,$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\tan\frac{x_{n-1}}{2} \,.\, \tan\frac{\varphi_n - x_n}{2} = \frac{r - a_{n-1}}{r + a_{n-1}} \equiv p_{n-1} ,$$

$$\tan\frac{x_n}{2} \,.\, \tan\frac{\varphi_0 - x_0}{2} = \frac{r - a_n}{r + a_n} \equiv p_n .$$

Dies ist ein System von $n + 1$ Gleichungen, welches die $n + 1$ Unbekannten $x_0, x_1 \ldots . x_n$ enthält; es kommt darauf an, einen Winkel x, z. B. x_0 zu bestimmen. Zwischen den Konstanten φ besteht dabei, wie ein Blick auf die Figur zeigt, die Relation $\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_n = 4 R$.

Lhuilier zeigt nun die Auflösung der Gleichungen zunächst für $n = 2$, 3, 4 und schliefst dann durch Induction auf den allgemeinen Fall.

I. Es sei $n = 2$. Wenn im folgenden der Abkürzung wegen stets die halben Winkel mit x_i, $\varphi_i - x_i$ bezeichnet werden, lauten hier die Gleichungen:

$$\tan x_0 \,.\, \tan(\varphi_1 - x_1) = p_0 \text{ und } \tan x_1 \,.\, \tan(\varphi_0 - x_0) = p_1 .$$

Schreiben wir die erste Gleichung: $p_0 = \tan x_0 \,.\, \dfrac{\tan\varphi_1 - \tan x_1}{1 + \tan\varphi_1 \,.\, \tan x_1}$, erweitern rechts mit $\tan(\varphi_0 - x_0)$, und ersetzen dann $\tan x_1 \,.\, \tan(\varphi_0 - x_0)$ durch p_1, so ergiebt sich:

$$p_0 = \tan x_0 \,.\, \frac{\tan\varphi_1 \,.\, \tan(\varphi_0 - x_0) - p_1}{\tan(\varphi_0 - x_0) + p_1 \tan\varphi_1} .$$

Lösen wir die Funktionen der Winkeldifferenzen in die Funktionen der einzelnen Winkel auf, so ergiebt sich schliefslich für x_0 die quadratische Gleichung:

$$\tan^2 x_0 (\tan\varphi_1 + p_1 \tan\varphi_0) - \tan x_0 (\tan\varphi_0 \tan\varphi_1 - p_1 + p_0 - p_0 p_1 \tan\varphi_0 \tan\varphi_1) + p_0 \,.\, (\tan\varphi_0 + p_1 \tan\varphi_1) = 0.$$

Soll das Problem lösbar sein, so mufs zwischen den vier Gröfsen $\varphi_0\ \varphi_1\ p_0\ p_1$ eine Relation bestehen, nämlich die Diskriminante dieser Gleichung mufs gröfser sein als Null.

II. $n = 3$. Die Gleichungen lauten hier: $\tan x_0 \,.\, \tan(\varphi_1 - x_1) = p_0$, $\tan x_1 \,.\, \tan(\varphi_2 - x_2) = p_1$, $\tan x_2 \,.\, \tan(\varphi_0 - x_0) = p_2$. Dieselben lösen das Problem für das eingeschriebene Dreieck. Eliminieren wir in derselben Weise wie beim ersten Fall erst x_1, dann x_2, so erhalten wir die quadratische Gleichung: $p_0 = \tan x_0 \,.\, \dfrac{r - s \tan x_0}{r' - s' \tan x_0}$, worin:

$$r = \tan\varphi_1 \tan\varphi_2 \tan\varphi_0 - p_1 \tan\varphi_0 - p_2 \tan\varphi_1 - p_1 p_2 \tan\varphi_2 ,$$
$$s = \tan\varphi_1 \tan\varphi_2 - p_1 + p_2 \tan\varphi_0 \tan\varphi_1 - p_1 p_2 \tan\varphi_0 \tan\varphi_2 ,$$
$$r' = \tan\varphi_0 \tan\varphi_2 + p_1 \tan\varphi_0 \tan\varphi_2 - p_2 + p_1 p_2 \tan\varphi_1 \tan\varphi_2 ,$$
$$s' = \tan\varphi_2 + p_1 \tan\varphi_1 + p_2 \tan\varphi_0 - p_1 p_2 \tan\varphi_0 \tan\varphi_1 \tan\varphi_2 .$$

III. Es sei nun vorgelegt das allgemeine System von $n + 1$ Gleichungen:

$$\tan x_k \,.\, \tan(\varphi_{k+k} = x_{k+1}) = p_k ;\ k = o,\ 1,\ \ldots n \text{ und } n + 1 \equiv o .$$

Wir eliminieren zunächst x_1 aus der ersten Gleichung durch die zweite, dann x_2 durch die dritte Gleichung u. s. w. Wir mögen dann durch fortgesetzte Elimination zu der Gleichung gelangt sein:

$$p_o = \tan x_o \,.\, \frac{r_{i-1} - s_{i-1} \,.\, \tan x_i}{r'_{i-1} - s'_{i-1} \,.\, \tan x_i}$$

worin die r_{i-1}, s_{i-1}, r'_{i-1}, s'_{i-1} Funktionen sind von $\tan\varphi_0$, $\tan\varphi_1 \ldots .$, $\tan\varphi_{i-1}$, $\tan\varphi_i$ und von $p_1 p_2 \ldots . p_{i-1}$, deren Bildungsgesetz angegeben werden soll. Multiplicieren wir Zähler und Nenner des Bruches mit $\tan(\varphi_{i+1} - x_{i+1})$, so kommt:

$$p_0 = \tan x_0 \cdot \frac{r_{i-1} \tan(\varphi_{i+1} - x_{i+1}) - s_{i-1} \tan x_i \tan(\varphi_{i+1} - x_{i+1})}{r'_{i-1} \tan(\varphi_{i+1} - x_{i+1}) - s'_{i-1} \tan x_i \tan(\varphi_{i+1} - x_{i+1})}.$$

Nun ist $\tan x_i \,.\, \tan(\varphi_{i+1} - x_{i+1}) = p_i$. Berücksichtigen wir diese Gleichung; drücken wir ferner $\tan(\varphi_{i+1} - x_{i+1})$ in dem ersten Gliede des Zählers und Nenners durch die Funktionen der Winkel selbst aus, und entfernen alsdann durch Erweitern die auftretenden Doppelbrüche, so ergiebt sich:

$$p_0 = \tan x_0 \cdot \frac{(r_{i-1} \tan \varphi_{i+1} - s_{i-1} p_i) - (r_{i-1} + s_{i-1} p_i \tan \varphi_{i+1}) \tan x_{i+1}}{(r'_{i-1} \tan \varphi_{i+1} - s'_{i-1} p_i) - (r'_{i-1} + s'_{i-1} p_i \tan \varphi_{i+1}) \tan x_{i+1}}.$$

Diese Gleichung zeigt das recurrende Bildungsgesetz der Coeficienten r_i, s_i, r'_i, s'_i. Es ist immer:

$$r_i = r_{i-1} \tan \varphi_{i+1} - s_{i-1} p_i \;;\quad s_i = r_{i-1} + s_{i-1} p_i \tan \varphi_{i+1};$$
$$r'_i = r'_{i-1} \tan \varphi_{i+1} - s'_{i-1} p_i \;;\quad s'_i = r'_{i-1} + s'_{i-1} p_i \tan \varphi_{i+1}.$$

Nun ist aber $r_0 = \tan \varphi_1$, $s_0 = 1$, $r'_0 = 1$, $s'_0 = -\tan \varphi_1$ laut der ersten Gleichung $p_0 = \tan x_0 \dfrac{\tan \varphi_1 - \tan x_1}{1 + \tan \varphi_1 \tan x_1}$; also lassen sich die $r_k s_k r'_k s'_k$ successive berechnen für jedes k. Das Schlufsresultat ist die in $\tan x_0$ quadratische Gleichung $p_0 = \tan x_0 \dfrac{r_n - s_n \tan x_0}{r'_n - s'_n \tan x_0}$, aus welcher sich für x_0 ergiebt:

$$\tan x_0 = \frac{p_0 s'_n + r_n \pm \sqrt{(p_0 s'_n + r_n)^2 - 4 p_0 r'_n s_n}}{2 s_n}.$$

Diorismus. Die Aufgabe hat stets 2 reelle Lösungen, wenn $p_0 r'_n s_n < o$ ist. Ist $p_0 r'_n s_n > o$, so ergeben sich zwei oder eine reelle Lösung nur, wenn $(p_0 s'_n - r_n)^2 \geqq 4 p_0 r'_n s_n$ ist. Ist $s_n = o$, so ergiebt sich nur die eine Lösung $\tan x_0 = \dfrac{p_0 r'_n}{r_n + p_0 s'_n}$. Ist mit $s_n = o$ auch $r'_n = o$, so wird das Problem unbestimmt.

Nun zeigen wir noch, dafs die vollständige Gleichung für $\tan x_0$ aus einem Kettenbruche für p_0 zu erhalten ist. Es ist nämlich:

$$\tan(\varphi_i - x_i) = \frac{\tan \varphi_i - \tan x_i}{1 + \tan \varphi_i \tan x_i} = \frac{\tan \varphi_i + \tan^2 \varphi_i \tan x_i - \tan^2 \varphi_i \tan x_i - \tan x_i}{1 + \tan \varphi_i \tan x_i}$$
$$= \tan \varphi_i - \frac{\sec^2 \varphi_i \tan x_i}{1 + \tan \varphi_i \tan x_i}.$$

Da aber nach der Gleichung $\tan x_i = \dfrac{p_i}{\tan(\varphi_{i+1} - x_{i+1})}$ ist, so ist auch:

$$\tan(\varphi_i - x_i) = \tan \varphi_i - \frac{p_i \sec^2 \varphi_i}{p_i \tan \varphi_i + \tan(\varphi_{i+1} - x_{i+1})}$$

Dann ergiebt sich aber durch fortlaufende Entwickelung für p_0 der Kettenbruch:

$$p_0 = \tan x_0 \left(\tan \varphi_1 - \frac{p_1 \sec^2 \varphi_1}{p_1 \tan \varphi_1 + \tan \varphi_2} \; \frac{\cdot}{-} \; \frac{p_2 \sec^2 \varphi_2}{p_2 \tan \varphi_2 + \tan \varphi_3} \; \frac{\cdot}{-} \; \frac{p_3 \sec^2 \varphi_3}{p_3 \tan \varphi_3 + \tan \varphi_4} \; \frac{\cdot}{-} \right.$$
$$\left. \ldots \frac{\cdot}{-} \; \frac{p_{n-1} \sec^2 \varphi_{n-1}}{p_{n-1} \tan \varphi_{n-1} + \tan \varphi_n} \; \frac{\cdot}{-} \; \frac{p_n \sec^2 \varphi_n}{p_n \tan \varphi_n + \tan \varphi_0} \; \frac{\cdot}{-} \; \frac{\sec^2 \varphi_0 \,.\, \tan x_0}{1 + \tan \varphi_0 \tan x_0} \right).$$

Dieselbe Abhandlung Lhuiliers enthält alsdann noch die Lösungen einiger spezieller Probleme, welche sich ergeben, wenn in dem eben dargelegten allgemeinen einige oder alle Punkte A_i in vorgeschriebener Richtung ins unendlich weite rücken, d. h. einige oder alle Seiten des Polygons parallel gegebenen Geraden werden sollen. Das sind also in analytischer Form die einleitenden Probleme bei Ottajano. — Nun aber verallgemeinert Lhuilier das Hauptproblem dahin, dafs er den Kreis durch eine Ellipse ersetzt. Die Lösung erfolgt hier auf die Weise, dafs durch geeignete

Parallelprojektion die Ellipse in einen Kreis in der Projektionsebene übergeführt wird. Die Geraden der einen Ebene sind dann ebensolche in der andern und die Lösung des Problems für die Ellipse setzt nur die für den Kreis in der anderen Ebene voraus. Allgemeiner ist für jeden beliebigen Kegelschnitt die Lösung die folgende. Lege den Kegelschnitt auf einen Kegel und suche für diesen einen Kreisschnitt. Die nPunkte in der Kegelschnittsebene projizieren sich aus der Spitze des Kegels in n entsprechende Punkte in der Kreisebene, und die Aufgabe, das betr. Polygon in den Kegelschnitt zu beschreiben, ist wieder auf die für den Kreis zurückgeführt. Diese Auseinandersetzungen sind interessant, aber befriedigen nicht, da das Bestreben, das Kegelschnittsproblem direkt ohne Zuhilfenahme desjenigen für den Kreis zu lösen, bestehen bleibt und um so berechtigter ist, als ein vollkommen planimetrisches Problem ohne Benutzung stereometrischer Mittel gelöst werden möchte.

Der berühmte Geometer Carnot[37]), beschäftigte sich ebenfalls mit dem Problem des dem Kreise eingeschriebenen, durch n vorgelegte Punkte gehenden Polygons.[38]) Seine Lösung nähert sich der Lagrange'schen für das Dreieck, doch hat er die Ansetzung der Gleichungen etwas vereinfacht. Wenn wir die Lhuilierschen Bezeichnungen beibehalten, können wir Carnot's Gleichungen schreiben:

$$\tan x_k = \frac{p_k + p_k \tan \varphi_{k+1} \tan x_{k+1}}{\tan \varphi_{k+1} - \tan x_{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots n, \; n+1 \equiv 0.$$

Carnot zeigt, dafs durch fortgesetzte Substitution der Werte der aufeinanderfolgenden Unbekannten in die je vorhergehende Gleichung die Form dieser nicht geändert wird, sodafs also die Schlufsgleichung quadratisch werden mufs. Jedoch führt er weder diese Rechnung wirklich aus, noch stellt er eingehendere Untersuchungen über das Problem an, sodafs also seine Lösung nach Wiedergabe der Lhuiliers hier nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht.

§ 5. Das allgemeinere Problem von Brianchon, Gergonne, Servois und Rochat.

Am Ende des 18. Jahrhunderts entstand das Bestreben, von der analytischen Geometrie möglichst wenig Gebrauch zu machen, besonders bei den Technikern und allen denen, die in den Rechnungen weniger geübt waren, als im Zeichnen. Auf die Periode der Analysis, die einen Lagrange gezeitigt hatte, der sich eine Mechanik geschrieben zu haben rühmte, in welcher sich keine Figur fand, mufste notwendig eine Reaktion folgen, und diese ging von Frankreich aus, das unbestritten in unsrer Wissenschaft in jener Zeit das geistige Prinzipat in Europa behauptete. Aus den vereinzelten Bestrebungen einiger Vorgänger zog der geniale Monge das Fazit, indem er die *géométrie descriptive* schuf. Seine Leistungen und die seiner Schüler Hachette, Dupin, Brianchon u. A. führten zur Begründung der neueren Geometrie, wie sie in den Werken eines Poncelet und Gergonne, und als Deutschland die geistige Führung übernommen hatte, in denen eines Steiner, Plücker, Möbius u. A. enthalten ist. Es kann hier nicht der Ort sein, auch nur in wenigen Worten auf die Geschichte der neueren synthetischen oder projektiven Geometrie hinzuweisen; erwähnt sei nur, dafs es u. a. die Lehre von den homologen Figuren Poncelets, das Prinzip der Dualität von Gergonne, wie dieser es 1826 begründete[39]), gewesen sind, die der neueren Geometrie ihr ganz eigenartiges Gepräge gaben. Andere Prinzipien, wie das fast gleichzeitig, 1833 und 1834, von den Deutschen Magnus und Plücker bekannt gemachte der Inversion oder der reciproken Radien haben wir erst im nächsten § zu verwenden, aber das oben genannte der Dualität, das zwar bei Ab-

---

[37]) Lazare Carnot wurde 1753 in Nolay geb.; Schüler von Monge. Während der Revolution der Bergpartei angehörend, wurde er 1793 in den Wohlfahrtsausschufs gewählt und erhielt den Oberbefehl über die militärischen Operationen zur „Organisation des Sieges". Unter dem Direktorium und dem ersten Konsul Kriegsminister, lebte er nach Aufrichtung des napoleonischen Kaisertums, das er bekämpfte, als Privatmann, und von den Bourbonen 1815 verbannt, ging er nach Magdeburg, wo er 1823 starb. Er schrieb militärwissenschaftliche und math. Werke, besonders die gen. epochemachende *géométrie de position.*

[38]) *Géométrie de position, par L. N. M. Carnot, an XI. 1803. à Paris* p. 383. *T. XII.* In der deutschen Übersetzung von Schumacher (Altona 1808—1810.) t 2. p. 144.

[39]) Gergonnes *Annales de Mathématiques.*

fassung unsrer zu besprechenden Abhandlungen Brianchons und Gergonnes noch nicht in allgemeiner Form aufgestellt war, spielt doch in den von diesen Mathematikern gegebenen Lösungen eine nicht unwichtige Rolle, und wir dürfen, um einem allseitigen Verständnis der folgenden Entwickelungen nicht hinderlich zu sein, nicht unterlassen, wenigstens die Hauptkonstruktionen Gergonnes hier einzufügen.

a) Läfst man den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnittes auf einer Geraden gleiten, so geht die Verbindungslinie der jeweiligen Berührungspunkte stets durch denselben Punkt, der der Pol jener Geraden heifst. Durch die Gerade (Polare) ist der Pol bestimmt und umgekehrt. Die Konstruktion desselben mit blofser Anwendung des Lineals ist die folgende: Ist C ein beliebiger Punkt der Geraden, so ziehe man von C aus in den Kegelschnitt die Sekanten CGD und CFE. Es mögen sich DF und GE in I schneiden, DE und GF in H. Dann liegt der gesuchte Pol auf HI. Führe dieselbe Konstruktion für einen zweiten Punkt C_1 aus, wodurch sich die Gerade $H_1 I_1$ ergiebt. Der Schnittpunkt von HI mit $H_1 I_1$ ist der gesuchte Pol.

b) Ist an einen gegebenen Kegelschnitt von einem Punkte P aufserhalb die Tangente zu legen, so bestimme wie in der vorigen Konstruktion zu P die Polare HI. Dieselbe schneidet den Kegelschnitt in den beiden Berührungspunkten der Tangenten aus P.

c) Soll in einem Punkt P des Kegelschnittes die Tangente an denselben gelegt werden, so nimm beliebig auf der Kurve die 3 Punkte A, B, D an. Dann mögen sich AD und BP in M schneiden, und AB und DP in N. Ziehe MN. Konstruiere für 3 andre Punkte P_1, B_1, D_1 in derselben Weise die Gerade $M_1 N_1$, welche MN in X schneide. Dann ist PX die gesuchte Tangente in P.

Wir kehren nun zurück zur Geschichte unseres Problems. Dasselbe ist ein anderes geworden, nicht nur dem Wortlaut nach, sondern besonders in der Art seiner Lösung. An die Stelle des vorgeschriebenen Kreises tritt der Kegelschnitt, an Stelle der vorgeschriebenen festen Punkte, durch welche die Seiten der einbeschriebenen Figur gehen sollen, treten Gerade, nämlich die Polaren zu jenen Punkten, diese als Pole aufgefafst. Das Problem lautet dann zunächst: „Um einen gegebenen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen Ecken auf drei gegebenen Geraden liegen sollen.“ — Ist (Fig. 12) $\alpha\beta\gamma$ das umbeschriebene Dreieck für den gegebenen Kegelschnitt, und liegen die Ecken α, β, γ auf den Geraden L_1, L_2, L_3, so gehen die Seiten des dem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecks $T_1 T_2 T_3$, dessen Ecken T_1, T_2, T_3 die Berührungspunkte der Tangenten $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ mit dem Kegelschnitte sind, durch die Pole P_1, P_2, P_3 der Geraden L_1, L_2, L_3. Die für den Kegelschnitt erweiterte Ottajanosche Aufgabe, durch P_1, P_2, P_3 das Dreieck $T_1 T_2 T_3$ zu beschreiben, wird auf die obige zurückgeführt, indem man zu P_1, P_2, P_3 die Polaren L_1, L_2, L_3 bestimmt. Durch das dem Kegelschnitt umbeschriebene Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ergeben sich dann die gesuchten Punkte T_1, T_2 T_3. Es handelt sich also im folgenden um die Lösung der dualistischen Aufgabe für das umbeschriebene Dreieck. — Allerdings haben wir hiermit in der Geschichte unseres Problems insofern etwas vorgegriffen, als nicht sofort bei dem ersten neueren Geometer, der sich mit demselben beschäftigte, diese Fragestellung anzutreffen ist. Brianchon[40]) machte zunächst auf anderem Wege noch eine Reihe Versuche, direkt die Aufgabe für das eingeschriebene Dreieck und Vieleck in den Kegelschnitt zu lösen, die das Verdienst besitzen, auf einige interessante allgemeine Sätze hinzuweisen. Der wichtigste dieser Sätze ist der folgende: „Ist irgend ein Kegelschnitt gegeben, und in demselben ein Polygon, dessen Ecken alle bis auf eine auf dem Kegelschnitt liegen, und nimmt man auf jeder dieser Geraden einen festen Punkt (*pôle*) an, um den sie sich dreht, während die Ecken des Polygons auf dem Kegelschnitt gleiten, so wird die letzte freie Ecke eine Kurve beschreiben, welche ein Kegelschnitt ist, wenn sämtliche Pole sich auf ein und derselben Geraden befinden.“ Die ganze Bedeutung dieses Satzes wird erst später erhellen; hier sei nur bemerkt, dafs in der That die Lösung selbst des n-eckproblems für den Kegelschnitt durch denselben angegeben ist, für den Fall, dafs die n Pole auf einer Geraden liegen; denn die Schnittpunkte des von der freien Ecke des beweglichen Polygons beschriebenen Kegelschnittes mit dem vorgelegten sind die ersten Ecken der Polygone, welche das Problem lösen. Eine wirklich durchgeführte Konstruktion giebt aber Brianchon nur für den Fall des Dreiecks im Kegelschnitt, wenn die 3 Pole in gerader Linie liegen.

[40]) *„Solutions de plusieurs problèmes de géométrie, par M. Brianchon, ancien élève de l'école polytechnique, officier d'artillerie.“ Journal de l'école polytechnique. Tome IV. dixième cahier. A Paris. Nov. 1810.*

Wir verfolgen nun die Entwickelung des dualistischen Problems weiter, das sich jetzt immer nur auf das Dreieck erstreckt, aber bei beliebiger Lage der 3 vorgeschriebenen Geraden (d. h. dieselben sollen nicht durch einen Punkt gehen etc.). Zunächst forderte Gergonne[41]) in der von ihm redigierten Zeitschrift auf, das Problem für den Kreis zu lösen, aber unter alleiniger Anwendung des Lineals. Da er keine Lösung eingesandt erhielt, gab er selbst eine solche, jedoch ohne sie zu beweisen. Es ist die folgende. (Fig. 13.) Es seien A, B, C die Schnittpunkte der 3 Geraden a, b, c, auf denen die Scheitel des dem Kreis umbeschriebenen Dreiecks liegen sollen. Suche zu a den Pol α, zu b den Pol β. Dann schneidet $A\alpha$ die Gerade a in m, $B\beta$ die Gerade b in n. Verbinde m mit n. Dieses mn schneidet den Kreis in t (und t_1), und das ist der gesuchte Tangentialpunkt. Es giebt im allgemeinen zwei Lösungen. —

Gergonne forderte nun auf, diese Konstruktion zu beweisen. Daraufhin zeigte zunächst Encontre, in demselben Bande der genannten Zeitschrift, dafs sich das Problem vom Kreis auf einen Kegelschnitt erweitern lasse, da das eben verwandte Theorem der Polaren nicht nur für den Kreis, sondern alle Kurven zweiten Grades gelte, mit andern Worten, er stellte das Problem so allgemein, wie wir es an der Spitze dieses § angeführt haben. Er machte überdies darauf aufmerksam, was für uns jetzt selbstverständlich ist, dafs das von Gergonne gestellte Problem mit blofser Hilfe des Lineals lösbar ist, wenn die Ottajanosche Lösung für das eingeschriebene Dreieck vorausgesetzt wird. Er leistet aber insofern durch diese Bemerkung nur einen geringen Dienst, als es sich ja wesentlich darum handelt, das neue Problem direkt zu lösen, ohne das frühere zu benutzen, da es zudem jetzt weniger auf die Kreisaufgabe, als auf die erweiterte für den Kegelschnitt ankommt. Es erschienen nun sehr bald gleichzeitig zwei Beweise dieser Gergonne-Encontre'-schen Aufgabe; der eine ist von Servois[42]), der andre mit ihm fast ganz übereinstimmende von Rochat.[43]) Servois behandelt das Problem sehr ausführlich für einen Kegelschnitt. Wir geben im folgenden den Inhalt seiner Abhandlung, indem wir auf die vorausgeschickten Hilfstheoreme hinweisen.

In einem Kegelschnitt sei das Sechseck $srtuxy$ eingeschrieben (Fig. 14). Verlängere rs, tu, xy, dafs sie das Dreieck abc bilden. Bestimme die Schnittpunkte o, p, q der Diagonalen rx und ys, su und tr, tx und uy. Ziehe die unbegrenzten Geraden sx, ru, yt, welche ry, st, xu bezüglich in k, l, m schneiden mögen. Ziehe ka, lb, mc, welche das Dreieck ABC bilden sollen. Ziehe ao, bp und cq. — Dann ist o der Pol zu BC, denn ao ist die Berührungssehne der beiden Tangenten des Punktes k und ko wäre diejenige der Tangenten aus a. Ebenso ist p der Pol von AC und q der von AB. Nach dem Theorem von Pascal[44]) über das Sechseck im Kegelschnitt liegen l, m und k auf einer Geraden. Es sind aber ao, bp, cq die Berührungssehnen für die je zwei Tangenten aus den Punkten k, l, m. Da nun k, l, m auf einer Geraden liegen, so gehen ao, bp, cq durch einen gemeinsamen Punkt d, den Pol der Geraden klm.

Nach dem Satze vom vollständigen Vierseit[45]) wird im Viereck $tuxy$ die Diagonale uy durch die Geraden tu, xy, cq, cm harmonisch geteilt; also sind ca, cq, cb, cA harmonische Strahlen, welche jede Gerade harmonisch teilen, die nicht durch c selbst geht. Aus demselben Grunde bilden ac, ao, ab, aC und ba, bp, bc, bA je einen harmonischen Strahlenbüschel.

Es sei nun α der Schnittpunkt von ao mit bc, und A_1 und A_2 die Schnittpunkte von ao mit AB resp. AC. (Diese Punkte A_1 und A_2 sind in der Figur nicht angeschrieben, da bewiesen werden soll, dafs sie mit A identisch sind). Dann schneidet das Büschel ca, cq, cb, cA die Gerade ao harmonisch in a, d, α und A_1. Das Büschel ba, bp, bc, bA schneidet ao

41) *Annales de mathématiques pures et appliquées. Recueil périodique, redigé par J. D. Gergonne et J. E. Thomas Lavernède. T. I. A Nismes 1810/1811.* p. 17 und p. 126. Joseph Diez Gergonne, geb. 1771 in Nancy, gest. 1859 in Montpellier. Anfangs Artillerieleutnant, später Prof. der Mathematik am Lyceum zu Nimes.

42) *Servois, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de Lafère. Gergonne's Ann. T. I.* p. 331.

43) *Autre solution du même problème, par M. Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St. Brieux. Gerg. Ann. T. I.* p. 342.

44) S. Baltzer, Elem. d. Math. II. S. 380. Satz 17.

45) S. Baltzer, Elem. d. Math. II. S. 371. Satz 11 oder Fort und Schlömilch, Analyt. Geom. der Ebene. S. 48.

harmonisch in a, d, α und A_2. Es liegen somit auf $a o$ zwei Reihen harmonischer Punkte, von denen die 3 ersten zusammenfallen; dann müssen aber auch die vierten Punkte coincidieren, d. h. es ist A_1 identisch mit A_2. Da nun A_1 auf $A B$, A_2 auf $A C$ liegt, so können A_1 und A_2 nur identisch mit A sein, d. h. die Gerade $a o$ geht durch A. Ebenso wird bewiesen, dafs $b p$ durch B und $c q$ durch C geht.

Es sei nun in irgend einem Eckpunkte des ursprünglichen Sechsecks z. B. in r, die Tangente an den Kegelschnitt gezogen, welche $A C$ in D, $B C$ in E schneiden möge. Die Verbindungslinie $E x$ schneide $A B$ in F, und es werde schliefslich $F t$ gezogen. — Nun ist $E r$ die Tangente aus E an den einen Endpunkt von $x r$, welches durch den Pol o geht, also ist $E x$ die andere Tangente. Ferner ist $F x$ nun Tangente im Endpunkte x von $x t$, welches durch q geht, also ist $F t$ die Tangente in t. Es sind also $F t$ und $E r$ Tangenten in den Endpunkten von $t r$, welches durch den Pol p geht, und diese Tangenten müssen sich somit auf der zu p gehörigen Polaren d. h. auf $A C$ schneiden; mit andern Worten: $F t$ geht durch den Punkt D. Das Dreieck $E F D$ liegt also mit seinen Ecken auf den Seiten des Dreiecks $A B C$. Eine zweite Lösung erhält man durch die Tangenten in s, u, y.

Ist nun der Kegelschnitt und das Dreieck $A B C$ gegeben, und soll das Dreieck $D E F$ gefunden werden, so ist die Konstruktion die folgende. Bestimme die Pole o und p zu $B C$ und $A C$. Ziehe $A o$ und $B p$. Dies giebt die Punkte a und b. Die Gerade $a b$ erzeugt auf dem Kegelschnitte die Punkte r und s. Die Konstruktion der Tangente in r führt auf $B C$ und $A C$ bez. zu den Punkten E und D. Die zweiten Tangenten aus E und D schneiden sich in F auf $A B$, und $D E F$ ist dann das verlangte Dreieck. Die zweite Lösung ergiebt sich, wenn statt in r in s die Tangente benutzt wird. Die Zahl der Lösungen sinkt von zwei auf eine oder keine, wenn $a b$ den Kegelschnitt nur berührt oder völlig meidet. Ganz illusorisch wird die Lösung, wenn sich die drei gegebenen Geraden in einem Punkte schneiden, denn dann liegen ihre Pole o, p, q auf einer Geraden, und die Punkte a und b fallen mit dem Schnittpunkte der gegebenen Geraden zusammen, also ist die Lage von $a b$ nicht mehr bestimmbar.

Zunächst sehen wir, dafs durch das vorstehende die Gergonne'sche Lösung bewiesen ist; aber auch das Problem für das eingeschriebene Dreieck in den Kegelschnitt findet nach den vorausgeschickten Betrachtungen seine Erledigung. Der Spezialfall, dafs die drei Polaren durch einen Punkt gehen, also die drei Pole auf einer Geraden liegen, war schon vorher durch Brianchon klargestellt.

§ 6. Die Untersuchungen von Poncelet. Die Lösungen von Steiner und Petersen. Schlufsbemerkungen.

Die Untersuchungen Poncelet's[46]), welche sich auf unser Problem in seiner allgemeinsten Fassung beziehen, finden sich niedergelegt in seinem berühmten geometrischen Hauptwerk[47]). Es hiefse aber viele Seiten des Buches abschreiben müssen, wollten wir die gesamten Entwickelungen Poncelet's, seine Sätze nebst den Beweisen hier reproducieren. Wir können uns daher nur seinen Gedankengang vergegenwärtigen und die Resultate seiner Untersuchungen anführen. Auf pag. 338 des unten genannten Werkes löst er das allgemeinste Problem, welches den Schlufsstein aller in unsrer Abhandlung betrachteten Probleme bilden mufs: „*Inscription aux sections coniques de polygones, dont les côtés passent par des points donnés.*“ Er behandelt also die Aufgabe der einbeschriebenen Figur, deren Seiten durch festgelegte Pole gehen, und erwähnt nur beiläufig, dafs dadurch auch die dualistische Aufgabe, wie wir sie bei Gergonne antrafen, ihre Erledigung findet.

[46]) Jean Victor Poncelet, Genieoffizier und Physiker. Geb. 1788 in Metz. 1812 Leutnant in der Armee, befand sich 2 Jahre lang zu Saratow in russischer Gefangenschaft und lehrte dann an der *école d'application* in Metz. Hier veröffentlichte er 1823 sein schon genanntes geometrisches Hauptwerk. 1838—48 lehrte er an der Fakultät der Wissenschaften zu Paris. Er starb daselbst 1867. Durch ihn gelangte das russische Rechenbrett in die französischen Kleinkinderschulen. Er schrieb über Mechanik, Hydraulik u. a. Erfinder der vertikalen Wasserräder mit gebogenen Schaufeln.

[47]) *Traité des propriétés projectives des figures; par J. V. Poncelet.* Paris. 2. ed. 1865. T. I. p. 338 ff. —

Eigenartig ist zunächst der folgende Satz, der sich bereits pag. 328 findet: „Ist $abcde\ldots.$ irgend ein ebenes Polygon von n Seiten, dessen Ecken, eine ausgenommen, welche freibleibt (die Ecke n) sich beständig auf irgend einer algebraischen Kurve vom m-ten Grade bewegen, während die aufeinanderfolgenden Seiten na, ab, bc, $cd\ldots.$ gezwungen sind, durch die festen Punkte (Pole) $p\,p_1\,p_2\,p_3\ldots$ zu gehen, so durchläuft der freie Punkt n eine Kurve vom Grade $2m \,.\, (m-1)^{n-2}$, welche sich auf eine Kurve vom Grade $m(m-1)^{n-2}$ reduciert, wenn alle Pole auf ein und derselben Geraden liegen.“ [48]) Wir machen vor allem auf folgenden Spezialfall dieses Satzes aufmerksam. Bewegen sich $n-1$ Scheitel des n-ecks auf einem Kegelschnitte, $(m = 2)$ so beschreibt der n-te Scheitel allgemein eine Kurve vierter Ordnung, welche in einen Kegelschnitt übergeht, wenn die n Pole auf einer Geraden liegen. Dies ist aber das bereits von Brianchon bewiesene Theorem. Für $m = 2$ und $n = 3$ haben wir die Kurve 4. Ordnung für den Fall, dafs die Kurve zweiten Grades ein Kreis ist und die 3 Pole innerhalb desselben liegen (dem Ottajanoschen Problem entsprechend) in Figur 16 dargestellt. Wir verweisen hierüber auf den Schlufs unsrer Abhandlung.

Durch den angeführten Satz Poncelet's ist zuvörderst klar, dafs das Problem, das betreff. Polygon, dessen Seiten durch n Punkte gehen, in eine Kurve m-ter Ordnung einzuschreiben, theoretisch gelöst wird durch alle die Punkte, in denen die fragliche Kurve vom Grade $2m(m-1)^{n-2}$ die Kurve m-ter Ordnung schneidet. Jeder solcher Schnittpunkt ist Ausgangspunkt für ein gesuchtes Polygon; aber es ist noch eine weitere Frage, ob alle diese Punkte, ihre Reellität vorausgesetzt, Anlafs zu einem wirklichen Polygon geben. Diese Frage ist schon zu verneinen für $m = 2$, $n = 3$, wie sich später zeigen wird. — Poncelet verläfst diese Betrachtungen bald, um 2 Lösungen des allgemeinen Problems des Vielecks im Kegelschnitt zu geben, die auf von dem genannten verschiedenen Sätzen beruhen. Die erste dieser Lösungen fand sich bereits von ihm ohne Beweis im 8. Bande der *Annales de Mathématiques*, und ist selbst für den Fall von mehr als 3 Punkten ausführbar mittelst des Lineals allein. Beschreibt man nämlich in den Kegelschnitt irgend ein Polygon durch die n Punkte, so wird im allgemeinen der freie Endpunkt a der ersten Polygonseite nicht zusammenfallen mit dem freien Endpunkt k der letzten Polygonseite. Geschähe es, so hätte man bereits das gesuchte Polygon, und es wäre ak Tangente an den Kegelschnitt, während es im allgemeinen nur Sekante ist. Poncelet hatte nun S. 295 seines Werkes den Satz bewiesen: „Drehen sich die Seiten des eben besprochenen nicht geschlossenen Polygons um die festen Punkte, durch welche sie gehen, so hüllen die aufeinanderfolgenden Geraden ak einen Kegelschnitt ein.“ Es werden also a und k in den Punkten zusammenfallen, wo dieser Kegelschnitt und der gegebene gemeinsame Tangenten haben. Nun läfst sich aber der fragliche Kegelschnitt vollständig durch fünf Tangenten bestimmen und das Problem ist also gelöst.

Die zweite Lösung, eleganter und direkter, ist die folgende. Beschreibe in den Kegelschnitt in derselben Reihenfolge der Pole drei beliebige Polygone, deren freie Anfangs- und Endpunkte bezüglich a, a_1, a_2 und k, k_1, k_2 seien. Betrachte diese 6 Punkte als die Scheitel eines dem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseckes, so dafs a und k, a_1 und k_1, a_2 und k_2 entgegengesetzte Ecken desselben sind. (Der Perimeter des Sechseckes wird sich also im allgemeinen selbst durchsetzen.) Dann liegen die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Sechseckes bekanntlich in einer Geraden, der Pascalschen Linie. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem gegebenen Kegelschnitte sind die gesuchten Punkte, d. h. die ersten Scheitel des verlangten, dem Kegelschnitt einbeschriebenen Polygons. Es giebt demnach im allgemeinen, bei vorgeschriebener Reihenfolge der Pole, zwei Lösungen. — Die Reihenfolge der Pole mufs bei Einschreibung jedes Polygons dieselbe sein, denn wird von derselben abgesehen, so sind zwischen den n Punkten $\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots. (n-1)}{2}$ Polygone möglich; das Problem hätte also dann im ganzen $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots. (n-1)$ Lösungen.

[48]) Nach Chasles, *Aperçu historique* (in d. Uebers. S. 147) findet sich bereits in den *Philosophical Transactions* d. J. 1735 von Maclaurin der Satz: „Wenn ein Polygon von veränderlicher Gestalt sich so bewegt, dafs alle seine Seiten respektive durch ebensoviele gegebene feste Punkte gehen, und dafs alle seine Eckpunkte, mit Ausnahme eines, algebraische Kurven von den Graden $m, n, p, q\ldots$ durchlaufen, so wird der freie Eckpunkt eine Kurve beschreiben, welche im allgemeinen vom Grade $2\,m\,n\,p\,q\ldots$ ist, und welche sich auf den halb so hohen Grad $m\,n\,p\,q\ldots$ reduciert, wenn alle Punkte in gerader Linie liegen.“ Für $m = 1$, $n = 1$ giebt dies die bekannte Entstehungsweise eines Kegelschnittes durch perspektivische Büschel.

Besonders bemerkenswert ist die Lösung, wenn die n Pole auf einer Geraden liegen. Es sind alsdann zwei Fälle zu unterscheiden (a. a. O. p. 344). Es sei erstens n eine gerade Zahl. Schliefst sich das Polygon dann nicht von selbst, so schliefst sich überhaupt kein Polygon, d. h. es giebt keine Lösung. Schliefst es sich aber einmal, so schliefst es sich immer, d. h. die Aufgabe hat unendlich viele Lösungen oder ist unbestimmt. Es sei zweitens n eine ungerade Zahl. Dann schneidet bei einem beliebig eingezeichneten Polygon die Gerade ak diejenige Gerade, welche die Pole trägt, in einem Punkte. Die Polare dieses Punktes schneidet den Kegelschnitt in den gesuchten Punkten, d. h. den Anfangspunkten des verlangten Polygons.

Die Lösung des dualistischen Problems, wo die n Geraden alsdann durch einen Punkt gehen (der Fall, welchen Servois ausschied) ergiebt sich hieraus leicht. Ist $n = 2\lambda + 1$, also ungerade, so zeichne man ein beliebiges Polygon um den Kreis, von dem 2λ Ecken auf gegebene Gerade fallen. Den letzten freien Punkt, der nicht auf die letzte Gerade von selbst fällt, verbinde man mit dem gemeinsamen Schnittpunkte der $2\lambda + 1$ Geraden. Diese Gerade schneidet den Kegelschnitt in den zwei gesuchten Punkten. — Ist $n = 2\lambda$, so schliefst sich das Polygon entweder stets oder nie.

Wir dürfen mit diesen Untersuchungen Poncelet's die Geschichte unsres elementaren geometrischen Problems insofern für abgeschlossen erklären, als eine noch weitergehende Verallgemeinerung auf Grund des ersten Poncelet'schen Satzes, also auf Polygone in algebraischen Kurven höherer Ordnung, sich zu weit von der anfangs gestellten Aufgabe entfernt, als dafs sie hier noch in Betracht kommen könnte. Auch spätere Behandler der Aufgabe gehen nicht über das Problem, ein Vieleck von den verlangten Eigenschaften in einen Kegelschnitt zu zeichnen, hinaus. Andre, wie Brianchon, unterschätzen dagegen schon das Dreiecksproblem; so, wenn dieser Geometer schreibt: „*cette question, autrefois célèbre, est aujourd'hui fort peu de chose*". Hält doch noch Steiner[49]) die allgemeinste Aufgabe für behandelnswert in der berühmten Schrift: „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises".[50]) Die 20. und 21. Aufgabe, nach dem Gesetz der Dualität einander zugeordnet, enthalten unser Problem. Aufgabe 20 lautet nämlich: „In einen, durch irgend 5 Punkte (oder Bedingungen) gegebenen Kegelschnitt ein n-eck zu beschreiben, welches zugleich irgend einem gegebenen n-eck umschrieben ist, d. h. dessen Seiten zugleich nach bestimmter Ordnung durch n beliebig gegebene Punkte gehen." Wir führen die Steinersche Lösung wörtlich an, indem wir, wie er selbst, für die Gründe, auf denen die Auflösung beruht, auf seine „Systematische Entwickelung etc." (Werke, Bd. I, S. 229) hinweisen, sowie auf die die Auflösung der Aufgabe enthaltende Abhandlung selbst. Die anzuführende Lösung ist eines von den vielen Beispielen, welche Steiner zur Illustration seines Satzes giebt, demzufolge alle Konstruktionen mittels des Lineals allein ausführbar seien, sobald in der Ebene irgend ein fester Hilfskreis gegeben ist.

Der Kegelschnitt heifse M_2 und das gegebene n-eck N_2. Durch irgend drei der fünf gegebenen Punkte des Kegelschnittes, die etwa durch $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, bezeichnet werden mögen, ist ein Kreis bestimmt; er heifse M_1. Zuvörderst lassen sich nun mittels des Hilfskreises M die Ähnlichkeitspunkte A und I der Kreise M, M_1 finden (wozu man von M_1 nicht mehr als jene drei Punkte nötig hat). Mittelst A und I bestimme man irgend zwei neue Punkte des Kreises M_1, etwa $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$. Sodann läfst sich für M_1 und M_2, da von jedem fünf Punkte gegeben sind, ein Projektionspunkt (der nämlich in den meisten Fällen der Durchschnittspunkt zweier gemeinschaftlichen Tangenten derselben ist) finden; er heifse P. Mittels P und einer gemeinschaftlichen Sekante von M_1 und M_2, etwa der Sekante $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$, findet man sofort das zu M_1 gehörige n-eck N_1, wel-

[49]) Jacob Steiner, einer der bedeutendsten deutschen Geometer des 19. Jahrh. Geb. 1796 zu Utzendorf bei Solothurn; lernte erst im 14. Jahre schreiben und bildete sich dann gröfstenteils selbst aus. Nachdem er sich in den verschiedenartigsten Stellungen befunden, wurde er durch die Humboldt's in die wissenschaftlichen Kreise Berlins eingeführt. Im Vertrauen auf seine und Abels Fähigkeiten gründete Crelle sein math. Journal, in welchem Steiners Arbeiten erschienen. 1835 Prof. der Math. in Berlin. Seine letzten Lebensjahre waren durch schwere Krankheit getrübt. Er starb 1863 in Bern. Hauptwerk neben der oben gen. Schrift: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander."

[50]) Erschienen im J. 1833. S. Steiners Gesammelte Werke, Bd. I p. 461.

ches dem zu M_2 gehörigen gegebenen n-ecke N_2 entspricht; und sodann findet man ferner mittels A und I leicht das zu M gehörige n-eck N, welches dem zu M_1 gehörigen n-ecke N_1 entspricht. Hierauf beschreibe man mittels des Lineals allein in den gezeichnet vorliegenden Kreis M ein n-eck $\mathbf{N}$, welches zugleich dem gegebenen n-eck N umschrieben ist (z. B. nach dem ersten Ponceletschen Verfahren), suche sofort mittels A und I das ihm in Bezug auf den Ähnlichkeitspunkt A (oder I) entsprechende, zum Kreise M_1 gehörige n-eck $\mathbf{N}_1$, und sodann (mittelst P und $\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{b}_2$) das diesem entsprechende zum Kegelschnitte M_2 gehörige n-eck $\mathbf{N}_2$, so wird dieses letztere der Forderung der Aufgabe genugthun.

Wir wollen nicht unterlassen, endlich noch auf eine schöne Lösung des Dreiecks- und Vierecksproblems für den Kreis hinzuweisen, welche sich in Petersen's „Methoden und Theorien“ findet.[51]) Dieselbe setzt nur die Bekanntschaft mit der Methode der Inversion voraus, welche daselbst p. 34 ff. ausführlich dargelegt wird. Dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt P, das Inversionscentrum, während zugleich ein beweglicher Punkt A der Geraden auf einer Kurve K gleitet, und bestimmt man auf derselben Geraden einen Punkt A_1 derart, dafs immer $PA \,.\, PA_1$ konstant ist, gleich der Inversionspotenz I, so beschreibt A_1 die zu K inverse Kurve K_1. Ist K eine beliebige Gerade, so ist K_1 ein Kreis durch P. Ist K eine Gerade durch P, so ist K_1 eine mit ihr zusammenfallende Gerade. Ist K ein Kreis durch P, so ist K_1 eine Gerade. Ist K ein beliebiger Kreis, so ist auch K_1 ein Kreis und P ist ein Ähnlichkeitspunkt von K und K_1. Zudem gelten die Sätze: „Falls zwei Kurven sich in A schneiden oder berühren, werden die inversen Kurven sich in dem A correspondierenden Punkte A_1 schneiden oder berühren“ und: „Schneiden sich zwei Kurven in A unter gegebenem Winkel, so werden die inversen Kurven sich in A_1 unter demselben Winkel schneiden.“

Die Lösung für das Viereck ist nun die folgende. Die Seiten AB, BC, CD und DA mögen beziehungsweise durch die Punkte a, b, c und d gehen. Man benutze diese Punkte als Inversionscentra, indem man für jeden Punkt die Potenz desselben mit Beziehung auf den Kreis[52]) als Inversionspotenz nimmt. A wird dann durch vier successive Inversionen um a, b, c und d wieder auf A fallen. P sei der Punkt, welcher durch drei Inversionen um a, b und c auf d fällt; man findet diesen Punkt, indem man nach und nach d um c, b und a invertiert. Jeder Kreis oder jede Gerade durch P geht durch Inversion um a, b und c über in einen Kreis durch d und darauf, durch Inversion um d, über in eine Gerade. Die Gerade PA geht deshalb nach den vier Inversionen über in eine Gerade P_1A, wo P_1 der Punkt ist, welchen man erhält, wenn man a nach und nach um b, c und d invertiert. Da nun der Winkel zwischen PA und dem Kreise weder Gröfse noch Vorzeichen bei den vier Inversionen verändert, und der Kreis liegen bleibt, müssen PA und P_1A eine gerade Linie bilden. Die Lösung wird hiernach folgende: Man bestimme P_1 durch Inversion von a um b, c und d; darauf P durch Inversion von d um c, b und a. Die Linie PP_1 schneidet dann den Kreis in A. (Fig. 15.) Diese Lösung läfst sich leicht auf jede Figur mit gerader Seitenzahl ausdehnen.

Soll in einen Kreis ein Dreieck ABC beschrieben werden, so dafs jede Seite durch einen gegebenen Punkt (a, b und c) geht, so verfährt man wie in der vorigen Aufgabe, wobei man nur 3 Inversionen, anstatt 4 erhält. Die Folge hiervon ist indessen, dafs PA und PA_1 keine gerade Linie bilden, da die Winkel mit dem Kreis entgegengesetzte Vorzeichen bekommen. Man invertiere deshalb einen der Punkte, in welchen Pa den Kreis schneidet, um a, b und c; der dadurch gefundene Punkt sei Q. Die Linien aP und PA sind dann nach der Inversion übergegangen in QP_1 und P_1A, welche deshalb denselben Winkel mit einander bilden wie die beiden ersten Linien. Diese Winkel haben dasselbe Vorzeichen (den Grund hierfür begreift man leicht, wenn man den Inversionen folgt; die geraden Linien entsprechen sich paarweise, aber ihre Durschnittspunkte entsprechen sich nicht), und die 4 Linien begrenzen deshalb ein Sehnenviereck, sodafs A durch einen Kreis durch P, P_1 und den Durchschnittspunkt von aP und P_1Q bestimmt wird. — Diese Lösung läfst sich leicht auf jedes Polygon von ungerader Seitenzahl ausdehnen.[53])

---

[51]) A. a. O. (S. Anm. 2.) p. 38. Aufg. 200 und 201.

[52]) Unter Potenz eines äufsern Punktes auf den Kreis bekanntlich das Quadrat der Tangente aus demselben an den Kreis verstanden. Für einen innern Punkt aber ist die Potenz gleich dem Quadrat der Hälfte derjenigen Sehne, welche auf dem durch diesen Punkt gehenden Radius senkrecht steht.

[53]) Wörtlich nach Petersen p. 39.

Wir kommen zum Schlusse noch einmal auf Poncelet's ersten allgemeinen Satz zurück, den wir auf das eingeschriebene Dreieck durch 3 Punkte anwenden. Lassen wir (Fig. 16) die Seite ab des Dreiecks abA sich um P_1 drehen, während a und b auf dem Kreise gleiten und aA und bA beständig durch P_2 und P_3 gehen, so beschreibt A die gezeichnete Kurve vierter Ordnung, welche den Kreis in den sechs reellen Punkten I, II, III, IV, V und VI schneidet. Davon geben aber nur I und II Veranlassung zu wirklichen Dreiecken. III und VI, sowie IV und V liegen je auf derselben Geraden durch P_1 und P_2, resp. P_1 und P_3, und diese Geraden sind in gewissem Sinne ebenfalls als Lösungen zu betrachten. Es ist z. B. $III\,VI$ ein Dreieck, dessen eine Seite, die durch P_3 gehende, in einen Punkt (III oder VI) zusammenschrumpft, während die beiden anderen Seiten, $III\,VI$ und $VI\,III$ durch P_1 und P_2, oder umgekehrt, gehen. Es zählt also die Gerade $VI\,III$ für 2 Lösungen, je nachdem man Punkt III oder VI als eine verschwindende Dreiecksseite betrachtet. Dasselbe gilt von der Geraden $IV\,V$. — Die Kurve selbst hat 3 Doppelpunkte, deren zwei die Punkte P_2 und P_3 sind. Da ihr Grad $n = 4$ ist, und sie $d = 3$ Doppelpunkte besitzt (und keine Spitzen), so ist ihre Klasse $c = n(n-1) - 2d = 6$, und ihr Geschlecht $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d = 0$. Für eine andere Lage der 3 Punkte $P_1\,P_2\,P_3$ wird natürlich die Kurve eine andre Gestalt besitzen. Ihre Gleichung analytisch zu bestimmen, hat keine prinzipielle Schwierigkeit; aber die gefundene Gleichung ist viel zu kompliziert, als dafs sie sich für eine durchsichtige Diskussion verwerten liefse. Schon Lhuilier bemerkte über diese Art der Behandlung des Problems: „*l'application générale de la méthode des coordonnées au problème me paraît conduire à des expressions trop compliquées, soit dans la recherche, soit dans les résultats.*“

Schulnachrichten.

A. Chronik.

Über die in den Schlufs des Schuljahres 1890/91 fallenden Vorkommnisse ist zuvörderst nachzutragen, dafs die schriftlichen Klassenprüfungen vom 23. Februar bis 3. März, die öffentlichen Prüfungen am 16. und 17. März, die Entlassung der Abiturienten durch den Rektor zugleich mit der Prämien- und Censurenverteilung am 20. März stattfanden. Der Abiturient Johannes Hertel verabschiedete sich mit einer englischen Rede über den Nutzen des Sprachstudiums, der Abiturient Fritz Wiede verglich in französischer Sprache die Geistesart des Mittelalters und die der Neuzeit; die deutschen Abschiedsworte der Abiturienten sprach Heinrich Hartung, ausgehend von einer Betrachtung des Spruches: die Hälfte ist mehr als das Ganze. Im Namen der zurückbleibenden Schüler erwiderte der Unterprimaner Anton Puppe. Der Schulchor trug die Motette von Hauptmann: Herr, ich schrei' zu dir! vor.

Bücherprämien erhielten in VI: Ernst Dietrich, Alfred Günther, Ernst Schauer; in V: Georg Heise, Rudolf Held, Ewald Schürer, Rudolf Thiermann; in IV: Albert Bauch, Karl Kirsch, Hugo Teichmann; in U-III: Paul Klopfer, Kurt Richter, Arthur Tittel; in O-III: Otto Falk, Ernst Kegel, Wilhelm Meves; in U-II: Bruno Engelmann, Camillo Grötzsch, Volkmar Klopfer, Alfred Mälzer, Max Ruder, Kurt Schönrich; in O-II: Max Grünert, Richard Schlechte, Rudolf Zschweigert; in O-I: Heinrich Hartung (Prämie aus der Stiftung des Herrn Oberl. Zimmermann), Johannes Hertel, Fritz Wiede.

Die Freundlichkeit mehrerer werter Gönner ermöglichte es uns auch an diesem Schulschlusse, abgesehen von der Vergebung der Logen-, Streit- und Kellerstipendien (siehe D. 2), einer Anzahl strebsamer Schüler Studienbeihülfen zu gewähren. Die auf diese Weise Ausgezeichneten waren der Unterprimaner Arno Tetzner, die Obersekundaner Max Grünert und Alexander Kniese, der Obertertianer Wilhelm Meves, sowie die Untertertianer Kurt Fritzsche und Alfred Möckel.

Am Tage des Schulschlusses verliefsen uns aufser den 8 Abiturienten folgende 29 Schüler: aus O-II: Fritz Buschmann (wird Kaufmann); aus U-II: Ottomar Becher (Architekt), Martin Beyer (Buchhändler), Alfred Demmrich (Kaufmann), Adolf Förster (Buchdrucker), Alfred Gutmann (Postdienst), Johannes Hertel (Kaufmann), Kurt Hertel (Architekt), Hermann Jacob (Techniker), Felix Rauschke (Kaufmann), Otto Ruder (Kaufmann), Hugo Schmidt (H. Gewerbeschule), Alfred Tröger (Techniker), Georg Weigel (Apotheker), Walter Weller (Kaufmann), Johannes Zinkeisen (H. Gewerbeschule); aus O-III: Paul Böttcher (Kaufmann), Franz Dix (Kaufmann), Arno Gerber (Realgymnasium Borna); aus U-III: Paul End (Realgymnasium Freiberg), Willy Kratz (Zinngiefser); aus IV: Curt Klöppel (Handelsschule); aus V: Johannes Liebe (Realschule Reichenbach), Albin Näser (Kaufmann), Otto Opitz (Gymnasium Greiz), Ewald Schürer (Thomasgymnasium); aus VI: Johannes Fröhlich (Bürgerschule), Max Meichfsner (Kaufmann), Ernst Schwarz (Bürgerschule).

An demselben 20. März verabschiedeten wir den Kandidaten des höheren Schulamtes Herrn Paul Grofs, welcher, nach Erstehung des Probejahres bei uns, einer Berufung an die Realschule zu Werdau als Lehrer der neueren Sprachen zu folgen im Begriffe stand.

Zum hocherfreuenden Abschlusse der Erlebnisse des Schuljahres 1890/91 fand an dem mehrgenannten Tage die Errichtung einer neuen Stiftung zu Gunsten würdiger und einer Studienbeihülfe bedürftiger Schüler statt durch Herrn Kohlenwerksbesitzer Gotthelf Anton Wiede in Bockwa, welcher an ebenjenem Tage den dritten seiner uns anvertraut gewesenen Söhne mit dem Reifezeugnis die Schule verlassen sah. Mit einem Grundkapitale von 5000 Mark 3 procentiger Anleihe des deutschen Reiches ausgestattet soll diese Stiftung, deren Satzungen als die der „Drei-Brüder-Stiftung“ am 4. Juni 1891 die Genehmigung der höchsten Schulbehörde gefunden haben, zunächst Schülern der drei oberen Klassen zu gute kommen, in der Weise, dafs der Anteil eines

Empfängers in der Regel 50 Mark beträgt. Der Tag der Verleihung wird der des Sedanfestes oder bei dessen Ausfalle der des Schulschlusses zu Michaelis sein. Die Vertretung und Verwaltung der Stiftung hat der Rat unserer Stadt gütigst übernommen; die Beschlufsfassung über die Verwendung der Erträgnisse steht dem Lehrer-Kollegium des Realgymnasiums zu. Ein warmer Dank für die durch die Gründung dieser Stiftung uns bewiesene Gesinnung sei auch an dieser Stelle ausgesprochen.

Durch die am 6. April vorgenommene Aufnahmeprüfung wurden uns 44 Schüler zugeführt, von denen 2 auf die O-II, 1 auf die O-IIIB, 3 auf die U-III, 1 auf IV, 1 auf die VA, 36 auf die VIA und B entfielen.

Der Unterricht des Sommerhalbjahres begann am 7. April mit 248 Schülern.

In dem am 23. April zur Feier des Geburtstages Seiner Majestät des Königs abgehaltenen Festaktus sprach Herr Oberlehrer Dr. Brückner, nachdem er die Bedeutung des Tages hervorgehoben, über Dante Allighieri's kosmographische Ansichten, welche zum Teil den genialen Versuch einer Befreiung von den irrtümlichen Anschauungen der Scholastik darstellen. Der Oberprimaner Georg Schuster gab in englischer Sprache eine Charakteristik des Grafen von Moltke, der Oberprimaner Martin Just würdigte in französischer Rede die Verdienste P. Corneille's, der Oberprimaner Anton Puppe sprach deutsch über die allmähliche Erweiterung des Schauplatzes der Weltgeschichte. Mit dem Vortrage vaterländischer Gedichte traten auf Walter Pöhlandt aus O-IIIB und Max Fiedler aus IVB. Der Schulchor brachte das Salvum fac regem von Richter zu Gehör.

Die Pfingstferien fielen in die Zeit vom 16 bis 24. Mai.

Vom 26. Mai bis zum 26. Juni war der Berichterstatter beurlaubt zur Teilnahme an der 5. ordentlichen evangelisch-lutherischen Landessynode des Königreichs Sachsen und wurde für diese Zeit in den Geschäften des Rektorats durch Herrn Konrektor Pietzsch vertreten.

Am 17. Juni fand die 1. Abendmahlsfeier statt. Die Beichtrede hielt Herr Diakonus Klotz, die vorbereitende Andacht Herr Oberlehrer Francke.

Die grofsen Ferien fielen in die Zeit vom 18. Juli bis zum 16. August.

Zur Feier des 2. September gab uns Herr Oberlehrer Dr. Noellner einen Abrifs des Kampfes der Heldenscharen Werders und Manteuffels gegen das Bourbakische Corps. Mit dem Vortrage vaterländischer Gedichte traten auf Emil Bretschneider aus VIA, Otto Pietzsch aus IVB, Georg Opitz aus U-III, Fritz Werner aus O-IIIB, Fritz Thümmler aus U-II; aufserdem als Darsteller einiger Scenen aus Zriny Max Grünert und Otto Falck aus U-I, sowie Kamillo Grötzsch und Alfred Mälzer aus O-II. Der Schulchor sang auf die Weise des Hohenfriedbergermarsches ein Kaiserlied.

An demselben Tage erfolgte die erstmalige Gewährung einer Studienbeihülfe aus der Drei-Brüder-Stiftung. Dieselbe erhielt Max Grünert aus U-I. Des weiteren gelangte zur Verteilung insonderheit an die Deklamatoren dieses Festaktus eine Anzahl von Exemplaren der Gedichte unseres heimischen Sängers Gustav Mosen, welche uns ein werter Freund zur Verfügung gestellt hatte.

Die schriftlichen Michaelisprüfungen wurden am 12., 14. und 15. September erledigt.

Am 23. September früh 7 Uhr versammelten wir uns in der Aula, um den 100. Geburtstag Theodor Körners zu begehen. Nachdem der Schulchor die Webersche Komposition des „Vater, ich rufe dich!“ vorgetragen, entwickelte als Festredner Herr Oberlehrer Dr. Rauschke die Hauptzüge des Lebens und Charakters Körners. Hiernach brachten die im Berichte des Sedanaktus genannten Unterprimaner und Obersekundaner, welchen sich Wilibald Franz, Karl Grundig, Paul Kiefsling, Alexander Kniese und Richard Schlechte aus U-I zugesellten, die Hauptscenen aus dem 3. Akte des Zriny zur Darstellung. Die für den Rest des Tages geplanten Klassenausflüge kamen zwar zur Ausführung, wurden aber mehrenteils durch herbstliche Regenschauer beeinträchtigt.

Der Schulschlufs des Sommerhalbjahres fiel auf den 25. September, der Beginn des Unterrichts nach den Michaelisferien auf den 5. Oktober.

Am 17. Oktober verstarb im elterlichen Hause zu Kertzsch bei Waldenburg, wo er vergeblich Heilung von einem Brustleiden gesucht hatte, der Schüler der Oberprima Friedrich Wilhelm Graichen. Der Genannte hatte unserer Anstalt seit Neujahr 1887 angehört und hatte sich durch seinen sittlichen Ernst und sein unermüdliches Streben die Hochschätzung — man darf es sagen — seiner Lehrer und der ihm näher stehenden Mitschüler erworben. Der Beerdigung des früh verklärten Freundes, welche auf dem Friedhofe zu Remse stattfand, wohnte der Rektor, begleitet von den Oberprimanern Karl Ebert und Kurt Kratz, bei.

Zur zweiten Feier des heil. Abendmahles gingen wir am 25. November. Die Beichtrede wurde von Herrn Diak. Lindner gehalten, der Redner der Vorbereitungsandacht war Herr Kand. Müller.

Zur ehrerbietigen Beglückwünschung des jungen Fürstenpaares, Sr. Königl. Hoheit des Prinzen Friedrich August und seiner hohen Gemahlin, der Prinzessin Luise, waren die Realgymnasien des Landes vertreten durch eine Abordnung, gebildet aus den Herren Rektoren Professor Dr. Örtel-Dresden, Prof. Dr. Rühlmann-Döbeln und Prof. Dr. Vogel-Dresden.

Am 7. December verliefs uns nach erstandenem Probejahr der Kandidat des höheren Schulamtes Herr Dr. phil. Karl Hermann Rau, um an das Realgymnasium Chemnitz als Lehrer für neuere Sprachen überzugehen.

Gemäfs der freundlichen Anregung der Glückauf-Stiftung, deren Erträgnisse alljährlich zuvörderst zur Ausrüstung eines Schulfestes zu verwenden sind, vereinigte uns, d. h. Alt und Jung vom Realgymnasium samt vielen lieben Angehörigen und sonstigen Gönnern und Freunden der Abend des 11. Dezember in den Sälen des „Deutschen Kaisers“ zur Feier eines Wintervergnügens, welches uns als das dritte der durch jene Stiftung hervorgerufenen Feste bis über Mitternacht zumeist durch das Vergnügen des Tanzes zusammenhielt. Die werten Gäste wurden bewillkommnet mit der Wiederaufführung eines allegorischen Spieles, welches, die Hauptpunkte der sächsischen Geschichte berührend, einen Teil unserer Wettinfeier am 17. Juni 1889 gebildet hatte. Die vier Darsteller waren die Unterprimaner Otto Falk, Max Grünert, Alexander Kniese und der Obersekundaner Kamillo Grötzsch. Die Überleitung vom Ernste dieses Viergespräches zur Fröhlichkeit des Tanzes lag den Quintanern Karl Friedrich Behr, Johannes Falck und Arthur Schmidt in der Rolle von Heinzelmännern ob. Ein Trompeter von Säkkingen in der Person des Oberprimaners Max Geipel versäumte auch dieses Jahr nicht Fanfare und Lied zu blasen.

Bei den Trauerfeierlichkeiten nach dem am 23. Dez. erfolgten Heimgange des langjährigen Leiters des sächsischen Schulwesens, Herrn Staatsministers Dr. von Gerber, von dessen hohen Eigenschaften die Geschichte der Wissenschaften und die unseres Staates noch lange sprechen wird, — sowie fernerhin bei der ehrerbietigen Begrüfsung des zur Nachfolge des Verewigten von Sr. Maj. dem Könige berufenen Herrn Staatsministers von Seydewitz hatten die Dresdener Herren Rektoren im Vereine mit Herrn Rektor Prof. Dr. Schütze-Zittau aufs neue die Güte uns zu vertreten.

In der Influenzazeit, welche nach den Weihnachtsferien (23. Dezember bis 7. Januar) auch für unsere Stadt hereinbrach, hat unsere Schule verhältnismäfsig nur wenige Fälle von Erkrankungen zu beklagen gehabt.

Am 27. Januar, als am Geburtstage Sr. Majestät Kaiser Wilhelms II., versammelte sich nach der dritten Vormittagsstunde der Coetus in der Aula, um, nach einer Ansprache seitens des Rektors, ein Hoch auf den hohen Geburtstäger auszubringen.

Dankbarst ist zu verzeichnen, dafs durch ein Vermächtnis des am 2. November 1891 verstorbenen Herrn August Gustav Wagner, in Vollziehung von dessen letztem Willen Frau Marie Therese Schweizer, geb. Wagner hier am 23. Februar dem Stadtrat den Betrag von 1000 Mark in einem $3^1/_2{}^0/_0$ Zwickauer Stadtschuldschein für die Streitstiftung übergeben hat, der genannten Stiftung eine beträchtliche Vermehrung zuteil geworden ist.

Zur diesjährigen Reifeprüfung hatten sich die 12 Schüler der Oberprima gemeldet. Von denselben wurden die schriftlichen Clausur-Arbeiten in der Zeit vom 27. Februar bis 5. März gefertigt; und zwar wurden folgende Aufgaben bearbeitet:

1. Deutscher Aufsatz: Über die Gründe, welche das Erlernen der lateinischen Sprache empfehlen.
2. Französischer Aufsatz: über den Spruch: Was du ererbt von deinen Vätern hast, erwirb es, um es zu besitzen.
3. Übersetzung ins Lateinische: C. Julius Caesar (Lebensbeschreibung).
4. Übersetzung ins Englische: Voltaire als Historiker.
5. In Mathematik:
   a) Die Gleichung einer Parabel lautet in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $y^2 = 2px$. Von einem Punkte P (ξ, η) sind an dieselbe die beiden Tangenten gezogen. 1) Welchen Winkel schliefsen diese 2 Tangenten ein? 2) Welchen Ort beschreibt der als veränderlich gedachte Punkt P, wenn die Tangenten auf einander senkrecht stehen? 3) Welche Gestalt erhält dagegen der geometrische Ort

dieses Punktes, wenn die beiden Tangenten mit einander 45^0 einschliefsen? Es sei $y^2 = 5 \times x$, $\xi = -3$, $\eta = 7$.

b) Von einem Dreieck ist ein Winkel α, die auf die Gegenseite gefällte Höhe h und der Radius r des umbeschriebenen Kreises gegeben. Wie grofs ist der Flächeninhalt, und wie grofs sind die Seiten und Winkel des Dreiecks? Es sei $\alpha = 60^0$, $h = 4$ dcm, $r = 6$ dcm.

c) Einem regelmäfsigen Oktaeder, dessen Oberfläche $O = 10$ qdcm beträgt, ist eine Kugel einbeschrieben. Es soll die Oberfläche derselben berechnet und das Verhältnis der Volumina beider Körper durch die 5 ersten Näherungswerte eines einfachen Kettenbruches bestimmt werden. Welche Höhe besitzt ferner der Kegel, dessen Inhalt gleich dem Unterschied der Volumina beider Körper und dessen Grundfläche gleich einem gröfsten Kreis der eingeschriebenen Kugel ist?

6. In Physik:

a) Ein Schlitten wird auf einer Bahn, deren Steigung 1 : 50 beträgt, mit einer Anfangsgeschwindigkeit c abwärts gestofsen. Nach einer Strecke l wird die Bahn wagrecht. Der Reibungskoefficient sei gleich ϱ. 1) Mit welcher Geschwindigkeit verläfst der Schlitten die schiefe Ebene? 2) Mit welcher Geschwindigkeit geht er auf der wagrechten Ebene weiter? 3) Wie weit gleitet er auf letzterer fort? Es sei $c = 2$ m, $l = 10$ m, $\varrho = 0{,}005$.

b) Ein Pendel macht am Äquator in einer gewissen Zeit $n = 479$ Schwingungen, während es an einem anderen Ort in derselben Zeit $n = 480$ Schwingungen ausführt. Wie grofs ist daselbst die Beschleunigung der Schwerkraft, wenn dieselbe am Äquator $g_0 = 9{,}781$ m beträgt? Unter welcher geographischen Breite φ befindet sich dieser Ort, wenn die Erde als eine Kugel betrachtet wird?

Die mündliche Prüfung fand am 19. März unter Vorsitz des Rektors als Königlichen Prüfungskommissars statt. Sämtlichen Geprüften wurde das Zeugnis der Reife zugesprochen. Die Abiturienten erhielten folgende Hauptcensuren:

	Verhalten.	Leistungen.	Beruf.
Benndorf, Curt, geb. zu Zwickau, 23. März 1873	I.	IIb.	Ingenieur.
Dulheuer, Hermann, geb. zu Lissabon, 3. November 1870	I.	III.	Hüttenkunde.
Ebert, Karl, geb. zu Bockwa, 28. Dezember 1871	Ib.	II.	Ingenieur.
Geipel, Max, geb. zu Zwickau, 15. November 1871	I.	IIIa.	Bergwissenschaft.
Just, Martin, geb. zu Planitz, 20. Februar 1873	I.	II.	Chemie.
Kratz, Kurt, geb. zu Zwickau, 15. Mai 1872	I.	IIb.	h. Postdienst.
Lange, Alfred, geb. zu Zwickau, 16. Juni 1873	I.	IIa.	Offizier im Eisenbahnregiment.
Pietzsch, Karl, geb. zu Zwickau, 6. Juni 1873	I.	II.	Hüttenchemie.
Puppe, Anton, geb. zu Biebrich, 7. Oktober 1872	I.	Ib.	Kaufmann.
Schuster, Georg, geb. zu Auerbach i. V., 27. Juli 1877	I.	II.	Offizier im Eisenbahnregiment.
Surmann, Max, geb. zu Klingenthal, 20. März 1872	I.	III.	Kaufmann.
Tetzner, Arno, geb. zu Leubnitz, 26. December 1872	I.	II.	Hüttenchemie.

Zur Vervollständigung der Mitteilungen über den Besuch der Schule sei berichtet, dafs im Laufe des Schuljahres 2 Schüler aufgenommen wurden und zwar 1 nach O-IIIB und 1 nach VIA. Sechs Schüler verliefsen die Anstalt in derselben Zeit, nämlich aus O-I: Karl Goetsch (Buchhändler), Curt Schubert (Kaufmann); aus O-III: Hans Blau (Kaufmann), Kurt Fritzsche (Realgymnasium Leipzig); aus VIB: Paul Uebe (Bürgerschule), Arthur Lippmann (Realschule Leipzig).

Wie Anfang und Ende fast eines jeden unserer Berichte frohe Kunde über Erweisungen des Wohlwollens gegenüber unserer Anstalt hat bringen dürfen, so kann auch der Schlufs dieser Chronik Mitteilung machen von sehr erfreulichen Beschlüssen der städtischen Behörden, durch welche in jüngster Zeit eine beträchtlichere Summe zur Erhöhung von Lehrergehalten festgestellt ist.

Über die übrigen in das Ende dieses Schuljahres fallenden Vorkommnisse wird das nächstjährige Programm berichten.

B. Vermehrung der Unterrichtsmittel.

1. Bibliothek.

Es wurden angekauft:

a) für die Lehrerbibliothek:

Strack, Centralorgan für das Realschulwesen, 1891; v. Sybel, histor. Zeitschrift, 1891; Ermisch, neues Archiv für sächs. Geschichte, 12. Bd.; Krumme, pädagogisches Archiv, 1891; Hübner, statistische Tafel, 1891; Gretschel und Bornemann, Jahrbuch der Erfindungen, 27. Jahrg.; Kürschner, deutsche Nationallitteratur, 147. bis 168. Bd.; Rein, pädagogische Studien, 1891; Weiske, Zeitung für das höhere Unterrichtswesen, 1891. 1. und 2. Quartal; Hottenroth, Trachten der Völker, 20. Lieferung. (Schlufs); Koerting und Behrens, Zeitschrift für neufranzösische Sprache und Litteratur, 12. Bd.; Arendts, deutsche Rundschau für Geographie und Statistik, 1890 und 1891; Ostwald, Klassiker der exakten Wissenschaften, No. 11 und 24; Forbiger, Hellas und Rom, 1.—6. Bd.; Wustmann, allerhand Sprachdummheiten; Richter, Pädagogischer Jahresbericht von 1890.

b) für die Schülerbibliothek:

Felix Dahn, die Bataver, histor. Roman; Riehl, aus der Ecke, 7 Novellen; Basedow, Germania; Falkenhorst, Emin Pascha, Schmelzer, Erzählungen aus dem Mittelalter, 2 Bde.; Bibliothek der Deutschen Nationallitteratur des 18. und 19. Jahrh.: Kleist, Dramen, 2 Bde.; Klopstock, Hermannschlacht; Lessing, Minna von Barnhelm; Novalis, Heinr. v. Offterdingen; Müller, Dichtungen, 2 Bde.; Göthe, Faust, 2 Bde.; Werner, Buch der deutschen Flotte; Brehm, Tierleben, 1.—3. Band; Tanera, die Befreiungskriege, 1813—15. 2 Bde.; Thomas, Buch denkwürdiger Erfindungen, 2 Bde.; derselbe, Buch der Entdeckungen, 2 Bde.; Ruge, Christoph Kolumbus; Wagner, Entdeckungsreisen, 8. Bdch.; Meyergang, Theodor Körner und sein Vaterhaus.

Geschenkt wurden:

Vom Königl. Sächs. Hohen Kultusministerium: 34 Inaugural-Dissertationen; von dem Königl. Sächs. meteorologischen Institut in Chemnitz: Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1889 und 1890; von Herrn Rektor Prof. Dr. Lippold: Revue des deux mondes, Jahrg. 1890; von demselben: Frick und Richter, Lehrproben und Lehrgänge aus der Praxis der Gymnasien und Realschulen, Jahrg. 1885 bis 1890; Rethwisch, Jahresbericht über das höhere Schulwesen, Jahrg. 1887—1890; Killmann, die Direktoren-Versammlungen des Königreichs Preufsen von 1860—1889; Verhandlungen der vierten Direktoren-Versammlung in der Rheinprovinz 1890; von Herrn Prof. Schnorr: 5 Schriften des Vereins für Reformationsgeschichte; von Herrn Dampfschneidemühlenbesitzer Röhling: Dickens, The Pickwick Papers; The heir of Redclyffe; Harte, Idyls of the Foothills; V. Hugo: Histoire d'un Crime, 1—2; Sadler, Grammaire Anglaise; Récits moraux et instructifs von Rendu.

2. Physikalisches Kabinet.

Wiederherstellung einiger schadhaft gewordener Apparate. Anschaffung einer Wasserluftpumpe, einer gröfseren Luftpumpen-Glocke, einer Leydner Flasche, deren innere und äufsere Belegung abhebbar ist, eines Mikrophons, zweier Leclanché-Elemente.

3. Chemisches Kabinet.

Aufser dem Ersatz für die verbrauchten Chemikalien und untauglich gewordenen Gefäfse wurden käuflich erworben: ein Kolben mit Helm, ein Filtrier-Apparat, einige tubulierte Flaschen, einige Pipetten und Mefscylinder, Präparatengläser, Gummischläuche und diverse Werkzeuge.

4. Naturhistorisches Kabinet.

Neu angeschafft wurde die weitere Folge von Hartinger's und Zippel's Wandtafeln, dieselben wurden auf Pappe aufgezogen. Eine biologische Darstellung des Seidenspinners wurde von Meyer VIb, eine Cacaofrucht von Bauer IVa, ein Flaschenkürbis von Lieber IV, einige Mineralien von Geipel I geschenkt. Kleinere Beiträge lieferten: Geih und Junghans in VIb, Leonhardt in VIa, Pflugbeil und Schmidt in Vb.

5. Für den geographischen Unterricht

wurde ein Globus aus Zinkblech (Durchmesser 60 cm) nebst fünf Horizontscheiben angeschafft.

6. Für den Zeichenunterricht.

8 Blatt Chromolithographien, Vorlagen für Aquarellmalerei; 20 farbige Vorlagen für Freihandzeichnen von Grohberger und Seyffert.

7. Für den Gesangunterricht.

Der musikalische Hausschatz von Fink.

C. Lehrplan.

Sexta A. und B. Ordinarien: **Maletzke** und **Müller.**

Religionsunterricht: 3 Std. wöch. A. u. B. verbunden. — a) 2 Std. bibl. Geschichte des alten Testaments, b) 1 Std. Erklärung des 1. Hauptstücks. Hersagen desselben, sowie einer Anzahl von Bibelsprüchen und Gesangbuchsliedern. Francke.

Deutsch: 4 Std. wöch. Leseübungen. Wiedererzählen. Hersagen kleiner Gedichte. Wortarten. Deklination und Konjugation. Der einfache Satz. Jede Woche ein Aufsatz oder ein Diktat. Mehner. Müller.

Latein: 8 Std. wöch. Die regelmäfsige Deklination, Genusregeln, Komparation, Numeralia, Pronomina, die regelmäfsige Konjugation. Einübung von Vokabeln. Mündliche und schriftliche Übung im Übersetzen nach Spiefs, Übungsbuch für Sexta, Kapitel 1—21. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit, abwechselnd Exercitium und Extemporale. Maletzke. Müller.

Geographie: 2 Std. wöch. Heimatskunde (Entwickelung geographischer Grundbegriffe), Sachsen, Deutschland, Übersicht über die gesamte Erdoberfläche. Dr. Gelhorn. Dr. Noellner.

Geschichte: 1 Std. wöch. Alte Geschichte in biographischer Form. Maletzke. Müller.

Naturbeschreibung: 2 Std. wöch. Ausbildung der botanischen Grundbegriffe durch Anschauung und Beschreibung der häufigeren Vertreter der heimatlichen Pflanzenwelt. Überblick über die inneren Organe und das Knochengerüst des Menschen. Vertreter aus den Klassen der Wirbeltiere. Dr. Noellner. Dr. Gerndt.

Rechnen: 5 Std. wöch. Befestigung der vier Rechnungsarten in benannten und unbenannten Zahlen. Zerlegung in Primfaktoren, das gröfste gemeinschaftliche Mafs und der kleinste Dividuus. Das Dezimalsystem in Münzen, Mafsen und Gewichten. Hase. Dr. Gerndt.

Zeichnen: 2 Std. wöch. Einübung der geraden Linien durch Darstellung von geradlinigen ornamentalen Figuren; Anleitung im Kombinieren geradliniger Flachornamente. Zimmermann.

Schreiben: 2 Std. wöch.

Singen: 2 Std. wöch. verbunden mit IV. und V. Francke.

Turnen: 2 St. wöch. A. und B. verbunden. Haubold.

Quinta A. und B. Ordinarien: Dr. Gelhorn und Dr. Noellner.

Religionsunterricht: 3 Std. wöch. 2 Std. biblische Geschichten des neuen Testaments nach Berthelt. 1 Std. Erklärung des 2. und Wiederholung des 1. Hauptstücks. Bibelsprüche, Kirchenlieder und das 2. Hauptstück wurden auswendig gelernt, der religiöse Memorierstoff von Sexta wiederholt. Mehner. Francke.

Deutsch: 4 Std. wöch. Übung im Lesen und Nacherzählen. Lehre vom einfachen Satze, Satzverbindung, Relativsatz. Hauptregeln der Orthographie (Fremdwörter) und Interpunktion. Präpositionen im Anschlufs an die Lektüre. Einige Gedichte wurden auswendig gelernt und vorgetragen. Aufsätze und Diktate wöchentlich abwechselnd. Dr. Gelhorn. Francke.

Latein: 8 Std. wöch. Wiederholung des Sextapensums. Unregelmäfsige Deklination und Komparation, Numeralia, Pronomina, Präpositionen, Adverbia, Konjunktionen, unregelmäfsige Verba, Deponentia und Semideponentia. Anleitung zum Präparieren, Übungen im Konstruieren und Übersetzen. Exercitia und Extemporalia wöchentlich abwechselnd.
Dr. Gelhorn. Dr. Rauschke.

Französisch: 4 Std. wöch. Magnin und Dillmann, 1. Abteilung, Leçon 1 bis 72. Exercitia und Extemporalia wöchentlich abwechselnd. Prof. Silling. Wespy.

Geographie: 2 Std. wöch. Erweiterung der geographischen Grundbegriffe. Europa.
Dr. Gerndt. Dr. Noellner.

Geschichte: 1 Std. wöch. Bilder aus der mittleren und neueren Geschichte.
Dr. Gelhorn. Francke.

Naturbeschreibung: 2 Std. wöch. Erweiterung der in Sexta gewonnenen morphologischen Grundbegriffe durch Besprechung und Zeichnung zahlreicher Pflanzengattungen nach lebenden Vertretern. Einführung in das Linné'sche System. Erweiterung des zoologischen Pensums der Sexta. Eingehendere Behandlung der Familien der Wirbeltiere.
Dr. Gerndt. Dr. Noellner.

Rechnen: 4 Std. wöch. Dezimalbrüche und gemeine Brüche. Hase. Dr. Noellner.

Zeichnen: 2 Std. wöch. Einübung der Kreislinie; Übergang zu nichtkreisförmigen Bogenlinien, Verwertung derselben zu Zusammenstellungen ornamentaler Gebilde. Zimmermann.

Schreiben: 1 Std. wöch. Es wurde Sicherheit in den Formen der deutschen Kurrent- wie der englischen Kursivschrift angestrebt, mit den schreibgewandteren Schülern wurde im 2. Halbjahr Rundschrift geübt. In A. und B. Tänzer.

Singen: 2 Std. wöch. vereinigt mit IV. und VI. Francke.

Turnen: 2 Std. wöch. Claus. Haubold.

Quarta A und B. Ordinarien: Dr. Brückner und Tittel.

Religionsunterricht: 3 Std. wöch. A und B verbunden. — 2 Std. Wiederholung der biblischen Geschichte des A. T. und N. T. — Erklärung des 3., 4. und 5. Hauptstücks (wöchentl. 1 Std.), Wiederholung des 1. und 2. — Memorieren der drei letzten und Wiederholung der ersten Hauptstücke. — Bibelsprüche und Gesangbuchlieder. — Mehner.

Deutsch: 3 Std. wöch. — Leseübung. — Wiederholung der Lehre vom einfachen Satz. — Erweiterung der Lehre vom zusammengesetzten Satz und Interpunktionsübungen. — Orthographische Übungen nach dem neuen Regelbuche. — Memorieren und Deklamieren einer Anzahl Gedichte nebst Wiederholung der früher gelernten. — Alle drei Wochen eine deutsche Ausarbeitung und ein Diktat. — Quarta A: Francke. Quarta B: Von Ostern bis Weihnachten Probandus Dr. Rau, von da an: Mehner.

Latein: 6 Std. wöch. Verba anomala. Übersicht der Hauptregeln der Syntax mit besonderer Betonung der Konstruktion des Acc. c. inf. und des Abl. abs. — Gelesen wurden zusammenhängende Lesestücke in Spiefs' Übungsbuche. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit, Exercitium und Extemporale abwechselnd. Maletzke. Tittel.

Französisch: 6 Std. wöch. Lehrbuch von Magnin und Dillmann, 1. Abteilung von Lektion 78—94. 2. Abteilung Lektion 1—59. Lektüre nach Wershovens „Französisches Lesebuch für höhere Lehranstalten." Wöchentlich eine schriftliche Arbeit, Exercitium oder Extemporale abwechselnd. Dr. Brückner. Tittel.

Geographie: 2 Std. wöch. Die aufsereuropäischen Erdteile; das Klima. Dr. Gelhorn.
Geschichte: 2 Std. wöch. Alte Geschichte. Francke. Mehner.
Naturbeschreibung: 2 St. wöch. Übungen im Beschreiben und Bestimmen von Pflanzen. Einführung in das natürliche Pflanzensystem. Behandlung der wichtigeren Pflanzenfamilien. — Wiederholung und Fortsetznng der Wirbeltiere. Vertreter aus den Klassen der Wirbellosen. Dr. Noellner. Dr. Gerndt.
Rechnen: 3 Std. wöch. Bruchrechnung. Einfache Schlufsrechnung. Dr. Brückner. Hase.
Geometrie: 2 Std. wöch. Geometrische Formenlehre. Die Kongruenz der Dreiecke. Dr. Brückner. Hase.
Zeichnen: 2 Std. wöch. Blatt- und Blütenformen nach Vorzeichnungen an der Wandtafel. Kombinieren von Flachornamenten nach natürlichen Pflanzenformen. Zimmermann.
Singen: 2 Std. wöch. Verbunden mit VI und V. Francke.
Turnen: 2 Std. wöch. A und B verbunden. Claus.

Untertertia. Ordinarius: Tänzer.

Religionsunterricht: 2 Std. wöch. Allgemeine Bibelkunde. Lektüre des Evangeliums Matthäi und einzelner Abschnitte aus den übrigen Evangelien. Wiederholung der Erklärung des Katechismus. Wiederholung von Bibelsprüchen und Kirchenliedern. Mehner.
Deutsch: 3 Std. wöch. Kleinere epische Gedichte wurden zum Verständnis gebracht und gelernt, auch dem Leben der Verfasser derselben wurde einige Aufmerksamkeit zugewendet, die Satzlehre wurde wiederholt und es fand insbesondere das Satzgefüge eingehende Behandlung. Auch die Leseübungen wurden fortgesetzt, desgleichen die Übungen im Disponieren. Alle drei Wochen eine deutsche Arbeit. Tänzer.
Latein: 6 Std. wöch. Wiederholung der Formenlehre, sowie des Pensums der Quarta. Kasuslehre und Konjunktionen. Lektüre: Cornelius Nepos, Ausgabe von Lattmann: Alexander Magnus Kap. 1—40. Exercitia und Extemporalia wöchentlich abwechselnd. Dr. Fritsche.
Französisch: 4 Std. wöch. Grammatik nach Magnin und Dillmann, französische Grammatik, Teil 2. Lektüre nach Wershovens „Französisches Lesebuch für höhere Lehranstalten". Lernen von Sätzen, Gedichten und Prosastücken. Exercitien und Extemporalien wöchentlich abwechselnd. Tänzer.
Englisch: 3 Std. wöch. Grammatik von Deutschbein, Lektion 1—35. Auswendiglernen zahlreicher Sätze, Sprichwörter, Redensarten, Citate und mehrerer kleiner prosaischer auch poetischer Stücke. Exercitien und Extemporalien wöchentlich abwechselnd. Tänzer.
Geographie: 2 Std. wöch. Mitteleuropa, insbesondere Deutschland physisch und politisch und unter Berücksichtigung der geognostischen Verhältnisse, der Industrie, des Handels und der Verkehrswege. Dr. Gerndt.
Geschichte: 2 Std. wöch. Mittlere Geschichte. Mehner.
Naturbeschreibung: 2 Std. wöch. Bestimmung von Pflanzen. Das natürliche System der Pflanzen. Bau und Leben des Menschen. Vergleichend-anatomische Rückblicke auf den Tierkörper. Dr. Noellner.
Geometrie: 2 Std. wöch. Anwendung der Kongruenzsätze. Vier- und Vielecke. Konstruktionsaufgaben nach analytischer Methode. Dr. Brückner.
Arithmetik und **Algebra:** 2 Std. wöch. Die 4 Spezies mit allgemeinen Gröfsen. Einfache lineare Gleichungen mit einer Unbekannten. Textgleichungen (Bardey, 1. Stufe).
Rechnen: 2 Std. wöch. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri. Procent-, Zins- und Diskontrechnung mit Anwendung auf die verschiedenen Aufgaben des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Dr. Brückner.
Zeichnen: 2 Std. wöch. Plastische Darstellung von geometrischen Vollkörpern in Kreidemanier, hierbei Darstellung der perspektivischen und Beleuchtungsgesetze. Zimmermann.
Stenographie: 1 Std. wöch. Francke.
Singen: 1 Std. wöch. Verbunden mit O.-III., II. und I. Francke.
Turnen: 2 Std. wöch. Claus.

Obertertia A. und B. Ordinarien: Kunz und Dr. Fritsche.

Religionsunterricht: 2 Std. wöch. A. und B. verbunden. Lektüre der Hauptabschnitte des alten Testamentes. Wiederholung des Katechismus, einzelner Kirchenlieder und Bibelsprüche. Müller.

Deutsch: 3. Std. wöch. Erklärt und zum grofsen Teile gelernt und deklamiert wurden folgende Dichtungen: „Der Graf von Habsburg; die Kraniche des Ibykus; des Sängers Fluch; die Bürgschaft; der Taucher; der Kampf mit dem Drachen; das Lied von der Glocke." — Abschnitte aus „Hermann und Dorothea." — Abrifs der Metrik. Überblick über die Dichtungsarten. Besprechung einiger vaterländischer Dichter aus der Zeit der Befreiungskriege. Wiederholung und Ergänzung der Satzlehre. Lesestücke aus Viehoff gelesen, disponiert und nacherzählt. Besprechung der vierwöchentlichen Aufsätze.
Müller. Dr. Fritsche.

Latein: 6 Std. wöch. Wiederholung der Formenlehre, sowie des Pensums der Untertertia. Relativ- und Fragesätze: direkte und indirekte Rede; Gerundium und Gerundivum. Lektüre: Caesar de bello Gallico A. IV. und V. B. VII. Kap. 1—80. Exercitia und Extemporalia wöchentlich abwechselnd. Maletzke. Dr. Fritsche.

Französisch: 4 Std. wöch. Grammatik: Magnin und Dillmann, Teil III, Lektion 1—46. Auswendiglernen von Sätzen und Gedichten. Sprechübungen. Lektüre: „Histoire de la guerre de sept ans" (A. p. 11—81); (B. p. 114—170). Exercitia und Extemporalia wöchentlich abwechselnd. Wespy. Dr. Fritsche.

Englisch: 3 Std. wöch. Grammatik von Deutschbein von Lekt. 34—50. Lektüre aus dem Anhang der Grammatik. Lernen einer Anzahl prosaischer und poetischer Stücke, sowie zahlreicher Einzelsätze. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit: Exercitien und Extemporalien abwechselnd. Silling. Tänzer.

Geographie: 2 Std. wöch. A. und B. verbunden. Physische und politische Geographie des aufserdeutschen Europas. Repetition und Erweiterung der mathematischen Geographie.
Schnorr.

Geschichte: 2 Std. wöch. Neue Geschichte von der Reformation bis zur Gegenwart. Wiederholung des Mittelalters. Müller. Dr. Fritsche.

Naturbeschreibung: 2 Std. wöch. Ausbau des natürlichen Pflanzensystems; insbesondere die Sporenpflanzen. Anatomie und Physiologie der Pflanzen unter Verwertung des Sonnenmikroskops. — Mineralogie mit besonderer Berücksichtigung der Krystallographie und des krystallographischen Zeichnens. Dr. Noellner. Dr. Gerndt.

Physik: 2 Std. wöch. Allgemeine Einleitung in die Naturlehre. Die wichtigsten und einfachsten Erscheinungen aus der Mechanik fester, flüssiger und luftförmiger Körper, aus der Akustik und Optik. Kunz. Dr. Brückner.

Arithmetik und **Algebra** (Rechnen): 2 Std. wöch. Zusammengesetzte Reduktionen. Potenzen mit ganzen, positiven Exponenten. Auflösung linearer Gleichungen mit einer Unbekannten, Proportionen. Wiederholung der bürgerlichen Rechnungsarten.
Kunz. Dr. Brückner.

Geometrie: 2 Std. wöch. Kreislehre. Flächenvergleichung. Konstruktionsaufgaben nach analytischer Methode. Proportionalität gerader Linien im Dreieck.
Kunz. Dr. Brückner.

Freihandzeichnen: 2 Std. wöch. Zeichnen nach Gipsmodellen ornamentalen Charakters.
Zimmermann.

Stenographie: 1 Std. wöch. Francke.

Singen: 1 St. wöch. verbunden mit U-III., II. und I. Francke.

Turnen: 2 Std. wöch. A. und B. verbunden. Frank.

Untersekunda. Ordinarius: Hase.

Religionsunterricht: 2 Std. wöch. Lektüre des neuen Testaments: Apostelgeschichte, Markus-Evangelium, Johannes-Evangelium. Kirchengeschichte bis zu Gregor dem Grofsen.
Müller.

Deutsch: 3 Std. wöch. Lektüre und Erläuterung von gröfseren epischen Dichtungen der neueren Klassiker — Schiller: Kassandra; das Siegesfest; Pompeji und Herkulanum; die vier Weltalter. Goethe: der Schatzgräber; der Sänger; der Zauberlehrling — und von Teilen der Odyssee nach Vofs' Übersetzung. Erörterung der Dichtungsarten; Prosodie und Metrik. Vorträge und Deklamationen. Übersicht der deutschen Litteraturgeschichte von Luther bis Goethe. Alle fünf Wochen ein Aufsatz. Tittel.

Latein: 5 Std. wöch. Wiederholung der Kasuslehre, der Infinitiv- und Participialkonstruktionen; Konjunktionen. Prosodische Regeln. Lektüre: Caesar, de bello Gall. comm. I.; Abschnitte aus dem Tirocinium poeticum von Siebelis. Exercitia und Extemporalia abwechselnd. Tittel.

Französisch: 4 Std. wöch. Grammatik nach Magnin und Dillmann, III. Abteilung von Lektion 36 bis Ende und IV. Abteilung von Lektion 7 bis 29. Lektüre: Expédition d'Egypte par Thiers. Exercitien, Extemporalien, Diktate, Recitationen. Wespy.

Englisch: 3 Std. wöch. Grammatik von Deutschbein. Lektion 62—82. Lektüre der Autobiographie Benjamin Franklins (Students' Tauchnitz edition). Exercitien, Extemporalien, Diktate, Recitationen. Tänzer.

Geographie: 2 Std. wöch. Asien, Afrika. Repetitionen aus dem Gesamtgebiete der Geographie. Dr. Gelhorn.

Geschichte: 2 Std. wöch. Alte Geschichte. Tittel.

Naturbeschreibung: 2 Std. wöch. Mineralogie und Geologie mit gelegentlichen Wiederholungen aus dem Gebiete der Zoologie und Botanik. Dr. Noellner.

Physik: 2 Std. wöch. Repetition des Obertertiapensums. Akustik. Magnetismus. Elektrizität. Hase.

Arithmetik und **Algebra:** 2 Std. wöch. Potenz- und Wurzellehre. Gleichungen 1. Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen 2. Grades mit einer Unbekannten. Hase.

Geometrie: 3 Std. wöch. Lehre von den Proportionen. Ähnlichkeitslehre und Anwendung derselben. Cyclometrie. 1 Std. wöch. geometrisches Zeichnen: geradlinige und Kreisfiguren. Hase.

Freihandzeichnen: 2 Std. wöch. Zeichnen von Gips-Ornamenten. Zimmermann.

Stenographie: 1 Std. wöch. Francke.

Singen: 1 Std. wöch. Verbunden mit III., O.-II. und I. Francke.

Turnen: 2 Std. wöch. Verbunden mit O.-II. Frank.

Obersekunda. Ordinarius: Konrektor Prof. Pietzsch.

Religionsunterricht: 2 Std. wöch. Kirchengeschichte bis zur Reformation. Der erste Brief des Johannes erklärt. Pietzsch.

Deutsch: 3 Std. wöch. Einführung in die klassische Litteratur des Mittelalters. Vortragsübungen. Alle sechs Wochen ein deutscher Aufsatz. Schillers Wallenstein. Pietzsch.

Latein: 5 Std. wöch. Abschlufs der Satzlehre. Alle 14 Tage Scripta oder Extemporalia abwechselnd. Sallust's Iugurthinischer Krieg. Ovids Metamorphosen, Abschnitte aus dem ersten, zweiten und vierten Buch. Pietzsch.

Französisch: 4 Std. wöch. Grammatik nach Magnin und Dillmann IV. Abteilung, Lektion 29 bis zu Ende. Lekture: Histoire de Napoléon et de la Grande Armée en 1812 par Ségur. Exercitia und Extemporalia wöchentlich abwechselnd. Gallicismen und Memorieren mehrerer Gedichte. Phraséologie aus Ploetz' Vocabulaire systématique. Wespy.

Englisch: 3 Std. wöch. Grammatik von Deutschbein von Lektion 80 bis Ende. Lektüre: England before the Restoration by Lord Macaulay. Students' Tauchnitz edition. Übersetzungen, Extemporalien, Diktate, Recitationen. Silling.

Geographie: 2 Std. wöch. Australien, Amerika; allgemeine Erdkunde. Repetitionen aus dem Gesamtgebiete der Geographie. Dr. Gelhorn.

Geschichte: 2 Std. wöch. Geschichte des Mittelalters. Pietzsch.

Physik: 2 Std. wöch. Lehre vom Licht und von der Wärme. Allgemeine Witterungskunde. Kunz.

Chemie: 2 Std. wöch. Einleitung in das Verständnis chemischer Prozesse. Speziellere Betrachtung der Metalloide. Repetition der Mineralogie. Dr. Gerndt.
Arithmetik und Algebra: 2 Std. wöch. Bruch-Potenzen. Imaginäre Gröfsen. Logarithmen. Gleichungen ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Schnorr.
Geometrie: 3 Std. wöch. Repetition der Planimetrie. Ebene Trigonometrie. Algebraische Auflösung planimetrischer Aufgaben. Schnorr.
Darstellende Geometrie: 2 Std. wöch. Darstellung von Punkten, begrenzten Linien und Ebenen, sowie von einfachen Körpern im Grundrifs und Aufrifs. Netze der einfachen ebenen und krummflächigen Körper. Kunz.
Freihandzeichnen: 1 Std. wöch. (fakultativ). Zeichnen nach Gipsabgüssen. Zimmermann.
Singen: 1 Std. wöch. Verbunden mit III., U.-II und I. Francke.
Turnen: 2 Std. wöch. Verbunden mit U.-II. Frank.

Unterprima. Ordinarius: Dr. Rauschke.

Religionsunterricht: 2 Std. wöch. Verbunden mit O.-I.
Deutsch: 3 Std. wöch. Litteraturgeschichte von der Reformation bis Klopstock. Übungen im freien mündlichen Vortrage. Eingehende Lektüre von Schillers Maria Stuart. Aufserdem wurden im Anschlufs an die Litteraturgeschichte Abschnitte aus den Schriften von Luther, Hans Sachs und Fischart gelesen und erläutert. Besprechung der in Zwischenräumen von 6 Wochen eingelieferten freien Arbeiten. Dr. Rauschke.
Latein: 5 Std. wöch. Gelesen wurden Abschnitte aus Ovids Metamorphosen (Pentheus und Bacchus, Pyramus und Thisbe, Perseus); Liv. XXI, 1—5. 21—63. Wiederholung der wichtigsten und schwierigsten Kapitel der Syntax. Exercitien und Extemporalien. Dr. Rauschke.
Französisch: 4 Std. wöch. Gelesen wurde: Nouvelles Genevoises. La Bibliothèque de mon oncle par Töpffer. Manuel von Ploetz: Biographien mehrerer Dichter: Corneille, Pascal, Molière, La Fontaine, M^me^ de Sévigné, M^me^ de Maintenon, Bossuet, Fléchier, Massillon, Racine, Boileau etc.; Vocabulaire systématique, Exercitien, Extemporalien, freie Arbeiten. Wespy.
Englisch: 3 Std. wöch. Lektüre: The Sketch Book of Washington Irving: The Author's Account of himself. The Voyage. Roscoe. The Wife. Rip van Winkle. Rural Life in England. The broken Heart. The Widow and her Son. The Inn Kitchen. The Spectre Bridegroom. Westminster Abbey. — Recitierübungen, Sprechübungen und litterargeschichtliche Bemerkungen. Exercitien, Extemporalien, freie Arbeiten. Silling.
Geschichte: 2 Std. wöch. Von der Reformation bis zum Westfälischen Frieden. Pietzsch.
Physik: 3 Std. wöch. Mechanik der festen und flüssigen Körper. Schnorr.
Chemie: 2 Std. wöch. Systematische Behandlung der Elemente (Nichtmetalle und Metalle der Alkalien) mit Rücksicht auf Mineralogie und Industrie. Stöchiometrische Aufgaben. Dr. Noellner.
Geometrie: 3 Std. wöch. Repetition der Trigonometrie. Stereometrie. Einleitung in die analytische Geometrie der Ebene. Kunz.
Arithmetik und Algebra: 2 Std. wöch. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinses-Zins- und Rentenrechnung. Kombinatorik und Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Binomischer Satz für positive ganze Exponenten. Diophantische Gleichungen. Kunz.
Darstellende Geometrie: 2 Std. wöch. Darstellung unbegrenzter Geraden und Ebenen. Ebene Schnitte von Prismen, Pyramiden, Cylindern und Kegeln im Grundrifs, Aufrifs und Abwickelung. Durchdringungen. Kunz.
Freihandzeichnen: 1 Std. wöch. (fakultativ). Verbunden mit O.-I. Zeichnen nach Gips; Vorübungen zum Aquarellmalen. Zimmermann.
Singen: 1 Std. wöch. Verbunden mit III., II. und O.-I. Francke.
Turnen: 2 Std. wöch. Verbunden mit O.-I. Frank.

Oberprima. Ordinarius: Rektor Professor Dr. **Lippold.**

Religionsunterricht: 2 Std. wöch. Augsburger Konfession. Unterscheidungslehren. Galaterbrief. Pietzsch.

Deutsch: 3 Std. wöch. Überblick über die neuere Litteratur mit besonderer Hervorhebung Klopstocks und Lessings. Betrachtung einiger Jugendgedichte Goethes, sowie der Zueignung und des Epilogs zur Glocke. Freie Arbeiten. Rektor.

Latein: 5 Std. wöch. 1 Std.: Auswahl aus Catull, Tibull, Properz, Vergil und Horaz. 2 Std.: Wiederholung der Syntax. Exercitien und Extemporalien. Dr. Rauschke. 2 Std.: Cicero pro Archia poëta; Tacitus Germania, I—XXXIII. Rektor.

Französisch: 4 Std. wöch. Vollständig gelesen wurde Britannicus von Racine; nach dem Manuel von Ploetz: les Précieuses ridicules, le Misanthrope, le Tartuffe; Hernani; Causerie von Sainte-Beuve. Wiederholungen aus dem Bereiche der Grammatik und Synonymik. Litteraturgeschichtliche Bemerkungen. Exercitien, Extemporalien, freie Arbeiten. Rektor.

Englisch: 3 Std. wöch. Gelesen: Selections from the Writings of Lord Macaulay: The Church of Rome. The Puritans. The Jesuits. The Revolution. Death of Queen Mary. Fire at Whitehall and Visit of Peter the Great to England. Death of William III. Travelling in the Seventeenth Century. The Duty of the State with Regard to Education. The Country Gentleman of the Seventeenth Century. — Litteraturgeschichte: Von Chaucer bis Samuel Johnson; the Life of Macaulay; Longfellow. Ausgewählte Lesestücke von Shakespeare u. s. w. Exercitien, Extemporalien, freie Arbeiten. Silling.

Geschichte: 2 Std. wöch. Neueste Geschichte. Pietzsch.

Physik: 3 Std. wöch. Mechanik der flüssigen und luftförmigen Körper. Wellenlehre, Optik. Mathematische Geographie nach Jochmann. Von Weihnachten ab Repetition. Schnorr.

Chemie: 2 Std. wöch. Systematische Behandlung der Metallverbindungen mit besonderer Berücksichtigung der technischen Betriebe. Die wichtigsten Kapitel aus der organischen Chemie. Dr. Gerndt.

Geometrie: 3 St. wöch. Analytische Geometrie der Ebene. Von Weihnachten ab Repetition. Schnorr.

Arithmetik und Algebra: 2 Std. wöch. Kubische Gleichungen. Allgemeine Lehrsätze über höhere Gleichungen und Auflösung numerischer Gleichungen. Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen. Alle 4 Wochen Hausarbeiten. Schnorr.

Darstellende Geometrie: 2 Std. wöch. Schattenkonstruktion. Einleitung in die Perspektive. Kunz.

Freihandzeichnen: 1 Std. wöch. (fakultativ). Zeichnen nach Gipsabgüssen. Übungen im Aquarellmalen. Zimmermann.

Singen: 1 Std. wöch. Verbunden mit III. II. und U-I. Francke.

Turnen: 2 Std. wöch. Verbunden mit U-I. Frank.

Themata der deutschen Arbeiten.

Oberprima: 1. Der erste Gesang des Fräuleins vom See, betrachtet als eine romantische Dichtung. 2. und 3. Bericht in Briefform über die zwei ersten Stücke der Lessingschen Abhandlung von der Fabel. 4. Anwendung der Lessingschen Fabel: der Mann mit dem Bogen. 5. Jüngling, merke dir in Zeiten, wo sich Geist und Sinn erhöht, dafs die Muse zu begleiten, doch zu leiten nicht versteht. 6. Was du ererbt von deinen Vätern hast, erwirb es, um es zu besitzen.

Unterprima: 1. Der Mensch bedarf des Menschen. 2. Teuer ist mir der Freund, doch auch den Feind kann ich nützen; zeigt mir der Freund, was ich kann, lehrt mich der Feind, was ich soll. (Schiller). 3. Abschied Hektors von Andromache und Siegfrieds von Kriemhilde. (Vergleich). 4. Not entwickelt Kraft. 5. Wodurch weifs Schiller in seiner Tragödie Maria Stuart unser innigstes Mitleid mit seiner Heldin zu erwecken? 6. Anrede Scipios an seine Soldaten vor dem Treffen am Ticinus (nach Livius). 7. Prüfungsarbeit.

Obersekunda: 1. Die Wurzel der Gelehrsamkeit ist bitter, die Frucht aber süfs. 2. Charakterschilderung einer beliebigen Persönlichkeit aus „Wallensteins Lager“. 3. Durch welche Mittel hat sich Jugurtha die Herrschaft über Numidien angeeignet? 4. Der Ackerbau, der Anfang der Kultur, mit besonderer Berücksichtigung des Eleusischen Festes. 5. Durch welche Gründe sucht die Gräfin Terzky Wallenstein zum Abfall vom Kaiser zu bewegen? 6. Übertragung der Rede des Marius gegen den Adel.

Untersekunda: 1. Das Schlofs Boncourt. 2. Schilderung des Zugs der Vertriebenen durch den Apotheker. 3. Das Orakel zu Delphi. 4. Es stürzt den Sieger oft sein eignes Glück. 5. Der Schlofsgarten zu Scheria. 6. Damon und der Knappe im „Taucher“. 7. Warum wählte wohl Hannibal statt des Seewegs den Landweg nach Italien? 8. Ein Gesuch. 9. Prüfungsarbeit.

Obertertia A.: 1. Unser Bahnhof. (Beschreibung.) 2. Der Apfelbaum ein Wirt. 3. Die Kraniche des Ibykus. (Erzählung.) 4. Ein Tag aus meinen Ferien. 5. Durch oftmals wiederholte Streiche fällt selbst zuletzt die schwerste Eiche. (Chrie.) 6. Die vorteilhaften Folgen der Buchdruckerkunst. 7. Bella gerant alii, tu, felix Austria, nube. 8. Die Kunst im Dienste der Religion. 9. Der letzte Brand in Zwickau (geschildert im Anschlufs an Schillers Glocke). 10. Ein Gesuch. 11. Prüfungsarbeit.

Obertertia B.: 1. Die Kraniche des Ibykus. (Inhaltsentwickelung.) 2. Durch oftmals wiederholte Streiche fällt auch zuletzt die schwerste Eiche. 3. Worin Gebirge und Meer einander gleichen. 4. Beschreibung des zweiten Wandgemäldes im Landgrafensaale der Wartburg. 5. Charakteristik des Knappen in Schillers Gedicht „der Taucher“. 6. Was treibt die Menschen in die Ferne? 7. Beschreibung einer Ritterburg im 13. Jahrhundert. 8. Bedeutung des Christbaumes. 9. Das Fichtelgebirge. 10. Ein Gesuch. 11. Prüfungsarbeit.

Untertertia: 1. Erzählung nach Goethes „Der Zauberlehrling“. (Unter Vermeidung des Präs.) 2. Die unberufene Hand an der Lokomotive. (Nachbildung zu Goethes „Der Zauberlehrling.) 3. Der Nutzen des Holzes. 4. Erzählung nach „Der Trompeter“ von Kopisch. (Klassenarbeit.) 5. Ein lithauisches Märchen. Nach Chamissos „Der Sohn der Witwe“. 6. Lob des Herbstes. 7. Einnahme und Zerstörung des Schlosses Edenhall, mit vorhergehender Charakterzeichnung des letzten Besitzers. Nach Uhlands „Das Glück von Edenhall“. 8. Eine Ritterburg des Mittelalters. 9. Warum lernt man fremde Sprachen? 10. Das Weihnachtsfest. 11. Dem Mutigen gehört die Welt. In Anlehnung an Schillers „Der Kampf mit dem Drachen“. 12. Irret euch nicht; Gott läfst sich nicht spotten. Klassenarbeit nach Viehoffs „Die Jungfrau von Stavoren“. 13. Gliederung desselben Gedichts. 14. Examenarbeit.

Quarta A.: 1. Kriemhild und Siegfried. 2. Brunhild. 3. Der Streit der Königinnen. 4. Siegfrieds Tod. 5. Fortsetzung. 6. Die Burgunden am Hofe Etzels. 7. König Karls Meerfahrt. (Prüfungsarbeit.) 8. Fortsetzung der 6. Arbeit. 9. Der Untergang der Burgunden. 10. Fortsetzung. 11.—14. Inhaltsangabe der Gedichte: Der Überfall im Wildbad — die drei Könige zu Heimsen — die Schlacht bei Reutlingen — die Döffinger Schlacht. 15. Prüfungsarbeit.

Quarta B.: 1. Der Apfelbaum. (Nach einer Erzählung von Chr. v. Schmid.) 2. Graf Wiprecht von Groitzsch. (Nach dem gleichnamigen Gedicht von Jul. Sturm.) 3. Die Fockbecker. (Nach einem Gedicht von Aug. Kopisch.) 4. Der Trompeter. (Desgleichen.) 5. Ein Besuch des Zwickauer Vogelschiefsens. 6. und 7. Briefwechsel im Anschlufs an die Erzählung: Das Wunderkästchen. a) Brief der Hausfrau an den Einsiedler. b) Brief des Einsiedlers an die Hausfrau. 8. Die Zwickauer Turnhalle. 9. Die Zwickauer Marienkirche. 10. Der Zigeunerknabe beim Erntefest. (Im Anschlufs an das Gedicht: Der Zigeunerbube im Norden von Em. Geibel). 10. Befreiung der Stadt Pegau von der zweiten Belagerung im Jahre 1644. 12. Wodurch belästigt uns der Winter? 13. Examenarbeit.

Themata der freien französischen Arbeiten.

Oberprima: 1. Oraison funèbre du Comte de Moltke. 2. Critique de la première composition allemande. 3. Critique de la deuxième composition allemande. 4. Critique de la quatrième composition allemande. 5. Marche des pensées de la Causerie du Lundi: Qu'est-ce que c'est qu'un classique?

Unterprima: 1. Influence des Croisades sur l'Europe. 2. 3. Analyse de notre lecture. La Bibliothèque de mon oncle, 1ère et 2me partie. 4. Un jour de mes vacances. 5. Hâte-toi lentement. 6. Quels sont les avantages du percement de l'Isthme de Suez pour le commerce de l'Europe.

Themata der freien englischen Arbeiten.

Oberprima: 1. On Spring. 2. The great northern War. 3. Death of Queen Mary (by Macaulay) related in an abridged form. 4. Hannibal, the great Carthaginian. 5. Life and Voyages of Christopher Columbus.

Unterprima: 1. A short description of my life. 2. Luther's Life before 1521. 3. Longfellow's poem: „Walter von der Vogelweide" in prose. 4. Frederick William, the great Elector. 5. The Wars of Charlemagne against the Saxons.

Bücher und Unterrichtsmittel für das Schuljahr 1891/92.

Religion: Bibel und Gesangbuch der evang.-luth. Landeskirche des Königr. Sachsen (IV—I); Zwickauer Spruchbuch, biblische Geschichte von Berthelt (VI—IV); Noacks Hülfsbuch für den evangelischen Religionsunterricht (III—I).

Deutsch: Deutsches Lesebuch für Realschulen, herausgegeben von den Lehrern der deutschen Sprache am Realgymnasium in Döbeln, 1. Teil (VI); 2. Teil (V); 3. Teil (IV); Deutsches Lesebuch von Viehoff 2. Teil (III); Handbuch der deutschen Nationallitteratur von Viehhoff (U-II—I); Geschichte der deutschen Nationallitteratur von Kluge (O-II—I).

Französisch: Praktischer Lehrgang zur Erlernung der französischen Sprache von Magnin und Dillmann. 1. Abt, (V); 1. und 2. Abt. (IV); 2. Abt. (U-III); 3. Abt. (O-III); 3. u. 4. Abt. (U-II); 4. Abt. (O-II). Wershoven, franz. Lesebuch (IV—III); Charles XII. par Voltaire (O-III); Sarcey, le Siége de Paris (herausgegeben von Dr. Krause) (U-II); Duruy, Histoire de France de 1789—95 (Dr. Hartmann) (O-II); Sandeau, Mademoiselle de la Seiglière (Dr. Hartmann) (U-I); Cinna par Corneille (Dr. Paul Schmid) (O-I); Plötz, Vocabulaire systématique (U-II—I); Plötz, Manuel (O-II—I).

Englisch: Deutschbein, Lehrgang der engl. Sprache (III—O-II); The autobiography of B. Franklin, Students' Tauchnitz Edition (U-II); Tales of the Alhambra by W. Irving. I. Teil Velhagen und Klasing) O-II); Sketchbook by W. Irving (U-I); Warren Hastings. (Historical Essay.) by Macaulay. Students' Tauchnitz Edition. (O-I); Manual of English literature by Silling (I).

Lateinisch: Kleine Schulgrammatik der lat. Sprache von A. H. Fromm (VI—III); Lateinische Schulgrammatik von Dr. Paul Harre. Zweiter Teil. Lateinische Syntax. (U-II, O-II); Übungsbücher von Spiefs in neuester Auflage: das für Sexta in VI u. V; das für Quinta in V u. IV; das für Quarta in U-III; das für Tertia in O-III. Cornelius Nepos bearbeitet von Lattmann (U-III). Caesar de bello Gallico (O-III u. U-II); Tirocinium poëticum (U-II); Livius, Buch VIII erklärt von Ziegeler und Ovid, Metamorphosen, ed. Siebelis (O-II); Livius, Buch IX erklärt von Ziegeler (Perthes) (U-I); Cicero pro Murena, erklärt von Strenge und Anthologie aus den römischen Elegikern erklärt von Peters (Perthes) O-I.

Geographie: Schulatlas von Debes für die mittleren Unterrichtsstufen, mit Karte von Sachsen (VI—IV); Schulatlas von Debes für die oberen Unterrichtsstufen (III—O-II); Schulgeographie von Kirchhoff (VI—II).

Geschichte: Hirsch, Tabellen (IV—I). J. C. Andrä, Geschichtlicher Leitfaden für Anfänger (VI—O-III); Herbst, Hist. Hülfsbuch (U-II—I).

Mathematik: Bothe, Rechenaufgaben Heft 1 (VI), Heft 2 (V—O-III), Heft 3 (IV—U-II); Bardey, Aufgabensammlung (neueste Ausgabe) für Arithmetik und Algebra (III—I); Boymann, Planimetrie (III—O-II); Trigonometrie und Stereometrie (O-II—I); Logarithmentafeln von Wittstein (O-II—I); Gandtner, Elemente der analytischen Geometrie (O-I).

Zeichnen: Ein Reifsbrett von 56 cm Länge und 47 cm Breite (III); 2 dergl. (U-II—I); ein Reifszeug (IV—I); Reisschiene und 2 Winkel(U-II—I).

Gesang: Kleines Melodienbuch zum Landesgesangbuch (VI—IV); Sängerhain von Erk und Greef, 2. Heft (VI—I).

D. Schulgeldermäfsigungen und Stipendien.

1. Schulgeldermäfsigungen.

1.—4. Vierteljahr; aus O-I: Puppe; aus U-I: Grünert, Kiefsling, Kniese; aus O-II: Grötzsch, Ruder; aus U-II: Beuchelt, Falck, Freund, Meves, Schneider; aus O-III A: Hetmank, Kranast, Möckel, Niedner, Schilling; aus O-III B: Hänchen, Karge, Müller, Petzold, von Schönberg; aus U-III: von Egidy, Kirsch, Müller, Schreiber; aus IV B: Fiedler, Heise, Hühn, Lieber, Wolf; aus VA: Berge; aus VB: Behr, Blechschmidt, Heise, Schmidt, von Schönberg, Süfs; aus VIA: Hesse.

1. Vierteljahr; aus O-III B: Fritzsche.

1. und 2. Vierteljahr; aus U-II; Zorn.

2.—4. Vierteljahr; aus O-II: Schönrich.

3. und 4. Vierteljahr; aus U-III: Neise; aus VIA: Modes.

2. Stipendien.

a) Das von der hiesigen Loge gewährte Stipendium im Betrage von 60 ℳ wurde dem Oberprimaner Wilhelm Wespy zuerkannt.

b) Streitstiftung:

Kapitalbestand am 31. Dezember 1890	4 904 ℳ
Kapitalzuwachs, bestehend in 1000 ℳ Stiftungskapital der Erben des Herrn August Gustav Wagner hier und 38 ℳ Zinsenersparnis . .	1 038 „
Überdies Stiftung des Herrn Realgymnasialoberlehrer Zimmermann . .	300 „
	6 242 ℳ

Angelegt sind die Stiftungskapitalien in $3^1/_2$—$5^0/_0$ Wertpapieren, sowie zum Teil in der Sparkasse.

Aus dieser Stiftung empfingen Ostern 1891 die Obersekundaner Kurt Büttner und Paul Kiefsling, die Untersekundaner Reinhard Höhne und Max Ruder, sowie die Obertertianer Johannes Beuchelt und Johannes Freund je 30 ℳ. Die Prämie für vorzügliche Leistungen im Freihandzeichnen erhielt der Abiturient Heinrich Hartung.

c) Kellerstiftung:

Kapitalbestand am 31. Dezember 1890	1 613 ℳ
Zuwachs durch Zinsersparnis	5 „
	1 618 ℳ

Das Kapital ist in $4^0/_0$ Zwickauer Stadtschuldscheinen angelegt; der Rest in der Sparkasse.

Aus dieser Stiftung erhielten Ostern 1891 der Abiturient Johannes Hertel und der Unterprimaner Puppe je 30 ℳ.

d) Anteil aus der Stiftung der früheren Tuchmacher-Innung: Ein Stipendium für das Jahr 1891 von je 47 ℳ 50 ₰ haben erhalten der Unterprimaner Alexander Kniese, der Obersekundaner Kamillo Grötzsch, die Untersekundaner Wilhelm Meves und Oskar Schneider.

e) Das Kohlenbauerstipendium, gestiftet von weiland Herrn Rittergutsbesitzer Ebert auf Leubnitz, ist im Betrage von 100 ℳ dem Obersekundaner Ernst Böhmer verliehen worden.

f) Die Glückaufstiftung, begründet von weiland Herrn Kohlenwerksbesitzer Ernst Ferdinand Ebert in Zwickau, hat am 31. Dezember 1890 12 130 ℳ Kapitalbestand (3 % K. S. Rente) gehabt. Von den für 1891 fälligen Zinsen sind in dem genannten Jahre in stiftungsgemäfsem Sinne 270 ℳ 30 ₰ verbraucht worden. Der Rest dieser Zinsen in der Höhe von 98 ℳ ist zum Kapital geschlagen worden.

g) Die Drei-Brüder-Stiftung, begründet von Herrn Kohlenwerksbesitzer Gotthelf Anton Wiede, hat ein Kapital von 5000 ℳ 3 % D. Reichsanleihe. Von den Zinsen desselben sind 75 ℳ dem Unterprimaner Max Grünert verliehen worden. Der Rest der Zinsen in der Höhe von 75 ℳ ist zum Kapital geschlagen worden.

E. Statistische Übersicht.

1. Lehrer.

Rektor: Professor Dr. Gottlob Friedrich Lippold.

Oberlehrer: Konrektor Professor Friedrich Wilhelm Pietzsch, Professor Christian Friedrich Silling, Professor Veit Hans Schnorr, Dr. Karl Rauschke, Dr. Leonhardt Gerndt, Hermann P. Hase, Ludwig Robert Tittel, Dr. Ernst Georg Oswald Fritsche, Jules Louis Wespy, Karl Friedrich Mehner, Adolf Francke, Julius Georg Zimmermann, Dr. Johannes Gelhorn, Wilhelm Maletzke, Gustav Kunz, Johann August Karl Tänzer, Dr. Alexander Noellner, Dr. Johannes Max Brückner.

Ständiger wissenschaftlicher Lehrer: August Robert Müller, cand. rev. min.

Turnlehrer: Oberturnlehrer P. P. Frank, die Bürgerschullehrer und Turnlehrer Friedrich Louis Claus und Friedrich Hermann Haubold.

2. Schüler.

Bestand am Ende des Schuljahres 1890/91		241 Schüler.
Ostern 1891 verliefsen die Anstalt		
a) mit Reifezeugnissen	8	
b) ohne dieselben	29	
		37 „
		204 Schüler.
Ostern 1891 wurden aufgenommen		44 „
Schülerzahl zu Anfang des Schuljahres		248 Schüler.
Im Laufe des Schuljahres traten hinzu		2 „
Jahressumme		250 Schüler.
Davon gingen ab bis zum 1. März		7 „
Daher jetziger Bestand		243 Schüler.
Davon sind einheimische		160
„ „ auswärtige		83

Schülerverzeichnis.

(Die mit * Bezeichneten sind während des Schuljahres abgegangen.)

No.	Namen der Schüler.	Alter Ostern 1892.	Geburtsort.	Stand und Wohnort des Vaters oder Pflegevaters.
	Oberprima.			
1.	Puppe, Anton	$19^1/_2$	Biebrich	Obermeister in Cainsdorf.
2.	Just, Martin	19	Planitz	Kassendirektor in Zwickau.
3.	Lange, Alfred	$18^3/_4$	Zwickau	Direktor der Zw. Maschinenfabrik.
4.	Schuster, Georg	$19^3/_4$	Auerbach i. V.	Kaufmann in Auerbach i. V.
5.	Pietzsch, Karl	$18^3/_4$	Zwickau	Konrektor u. Prof. am Realgymn. zu Zwickau.
6.	Ebert, Karl	$20^1/_4$	Bockwa	Kaufmann in Zwickau.
7.	Tetzner, Arno	$19^1/_4$	Leubnitz	Schnittwarenhändler in Zwickau.
8.	Kratz, Kurt	20	Zwickau	Zinngiefsermeister in Zwickau.
9.	Benndorf, Kurt	19	Zwickau	Dr. med. in Zwickau.
10.	Geipel, Max	$20^1/_4$	Zwickau	Dr. med. in Zwickau.
11.	Surmann, Max	20	Klingenthal	Kaufmann in Klingenthal.
12.	Dulheuer, Hermann	$21^1/_2$	Lissabon	Kaufm. Dir. der König. Marienhütte.
*	Graichen, Wilhelm	$21^3/_4$	Kertzsch b. Waldenburg	Gutsbesitzer in Kertzsch.
*	Götsch, Karl	$20^3/_4$	Dresden	Kaufmann in Dresden. †
*	Schubert, Kurt	$19^3/_4$	Zwickau	Fleischermeister in Zwickau.
	Unterprima.			
1.	Zschweigert, Rudolf	$18^1/_2$	Plauen	Kaufmann in Plauen. †
2.	Schlechte, Richard	20	Wildenfels	Baumeister in Hohenstein.
3.	Grünert, Max	$17^1/_2$	Bockwa	Buchhalter in Bockwa.
4.	Pietzsch, Albert	$17^3/_4$	Zwickau	Konrektor u. Prof. am Realgymn. zu Zwickau.
5.	Kiefsling, Paul	$17^1/_2$	Crimmitschau	Briefträger in Crimmitschau.
6.	Falck, Otto	$20^1/_4$	Schedewitz	Buchhalter in Schedewitz.
7.	Mensing, Friedrich	$20^1/_2$	Boden in Böhmen	Fabrikbesitzer in Zwickau.
8.	Hassinger, Karl	$17^3/_4$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
9.	Büttner, Kurt	$18^1/_2$	Zwickau	Kasernenverwalter in Zwickau.
10.	Kniese, Alexander	$18^1/_2$	Zwickau	Buchbinder in Zwickau. †
11.	Grundig, Karl	$18^1/_4$	Pegau	Bürgermeister in Crimmitschau.
12.	Franz, Willibald	$18^3/_4$	Crimmitschau	Fabrikbesitzer in Crimmitschau.
	Obersekunda.			
1.	Grötzsch, Camillo	$17^1/_4$	Zwickau	Anstaltsoberaufseher in Zwickau.
2.	Klopfer, Volkmar	$17^1/_2$	Zwickau	Ziegeleibesitzer in Zwickau. †
3.	Mälzer, Alfred	$18^1/_2$	Kleingera	Rittergutspachter in Wolfersdorf.
4.	Höhne, Richard	$17^1/_2$	Zwickau	Kaufmann u. Stadtrat in Zwickau. †
5.	Wespy, Kurt	$17^1/_4$	Zwickau	Oberl. am Realgymn. in Zwickau.
6.	Fankhähnel, Kurt	$16^3/_4$	Lichtenstein	Fabrikant in Lichtenstein.
7.	Ebert, Max	17	Bockwa	Kohlenwerksbes. in Zwickau. †
8.	Ruder, Max	$19^1/_2$	Wildenau	Kaufmann in Stützengrün.
9.	Schönrich, Kurt	$18^1/_4$	Wernesgrün	Fabrikant in Wernesgrün.
10.	Poppe, Martin	$16^3/_4$	Planitz	Apotheker in Zwickau. †
11.	Engelmann, Bruno	$19^1/_4$	Mülsen St. Michael	Fabrikant i. Mülsen St. Michael.

No.	Namen der Schüler.	Alter Ostern 1892.	Geburtsort.	Stand und Wohnort des Vaters oder Pflegevaters.
12.	Tänzer, Peter	$17^3/_4$	Zwickau	Oberl. am Realgymn. in Zwickau.
13.	Böhmer, Ernst	$16^3/_4$	Ölsnitz i. E.	Berginspektor in Zwickau. †
14.	Beyreuther, Walter	$18^1/_2$	Zöblitz	Oberforstmeister in Eibenstock. †
15.	Unger, Otto	$16^1/_2$	Crimmitschau	Lehrer in Crimmitschau.
	Untersekunda.			
1.	Kegel, Ernst	16	Niederhafslau	Apotheker in Hafslau. †
2.	Pfeiffer, Bernhard	16	Ölsnitz i. V.	Betriebsdir.d.K.Staatsb.i.Zwickau.
3.	Falk, Otto	$16^3/_4$	Zwickau	Zeichenlehrer in Zwickau.
4.	Meves, Wilhelm	16	Zwickau	Dr. phil. u. Chemiker in Zwickau. †
5.	Pietzsch, Kurt	16	Zwickau	Konrektor a.Realgymn.in Zwickau.
6.	Freund, Johannes	$16^3/_4$	Breitenau b. Liebstadt	Oberl. an der Königl. Strafanstalt in Zwickau.
7.	Thümmler, Fritz	$16^1/_4$	Zwickau	Seilermeister u.Stadtrat i.Zwickau.
8.	Frey, Karl	$17^1/_2$	Zwickau	Baumeister in Zwickau.
9.	Werner, Paul	$16^1/_4$	Zwickau	Bürgerschullehrer in Zwickau.
10.	Schneider, Oskar	$17^3/_4$	Zwickau	Bürgerschuloberlehrer in Zwickau.
11.	Luger, Rudolf	$17^1/_4$	Zwickau	Lokomotivführer in Zwickau.
12.	Zorn, Albert	$18^1/_2$	Zwickau	Obersteiger im Fortunaschacht.
13.	Beuchelt, Johannes	$16^1/_2$	Altendorf bei Chemnitz	Kaufmann in Zwickau.
14.	Kretzschmar, Walter	$16^3/_4$	Zwickau	Eisenbahndirektor in Schedewitz.
15.	Wilson, Henry	$16^1/_2$	Pabianice in Polen	Oberfärbermeister in Zwickau.
16.	Franz, Walter	$17^1/_2$	Crimmitschau	Maschinenfabr. in Crimmitschau.
17.	Gelhorn, Karl	$15^3/_4$	Zwickau	Dr. phil. und Oberlehrer am Realgymnasium in Zwickau.
18.	Ehrler, William	16	Zwickau	Kohlenwerksbesitzer in Zwickau. †
19.	Denkert, Karl	$18^3/_4$	Zwickau	Zimmermeister in Zwickau.
20.	Knoll, Ewald	$16^1/_2$	Auerbach i. V.	Fabrikbesitzer in Auerbach i. V.
	Obertertia A.			
1.	Hetmank, Max	$15^3/_4$	Ebersbach bei Löbau	Steueraufseher in Zwickau.
2.	Richter, Kurt	$17^3/_4$	Bockau bei Aue	Oberförster in Bockau.
3.	Wilson, Frank	$15^1/_2$	Lodz in Polen	Oberfärbermeister in Zwickau.
4.	Heinrici, Joseph	15	Zwickau	Optikus in Zwickau.
5.	Möckel, Alfred	$14^3/_4$	Ölsnitz i. Erzgeb.	Obersteiger in Ölsnitz.
6.	Niedner, Fritz	18	Hubertusburg	Pastor in Zabeltitz b. Grofsenhain.
7.	Mälzer, Hans	$14^3/_4$	Treuen	Rittergutspachter in Wolfersdorf.
8.	Tittel, Arthur	16	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
9.	Schilling, Karl	$17^1/_2$	Zwickau	Steinmetzmeister in Zwickau.
10.	Donath, Kurt	$16^3/_4$	Schmölln	Fabrikbesitzer in Schmölln.
11.	Lange, Rudolf	$15^1/_4$	Zwickau	Fabrikdirektor in Zwickau.
12.	Haupt, Arthur	17	Öderan	Amtsgerichtsrat a. D. in Kötzschenbroda.
13.	Gelhorn, Otto	$14^1/_2$	Zwickau	Oberlehrer am Realgymnasium in Zwickau.
14.	Kranast, Arthur	$15^3/_4$	Dittersbach bei Stolpen	Bureau-Assistent in Zwickau.
15.	Dulheuer, Hugo	17	Lissabon	Kaufm. Direktor der Königin Marienhütte.
16.	Rödel, Heinrich	$15^3/_4$	Netzschkau	Ökonom in Zwickau. †

No.	Namen der Schüler.	Alter Ostern 1892.	Geburtsort.	Stand und Wohnort des Vaters oder Pflegevaters.
	Obertertia B.			
1.	Klopfer, Paul	16	Zwickau	Dr. med. in Zwickau.
2.	Petzold, Ernst	15	Oberplanitz	Bäckermeister in Planitz.
3.	v. Schönberg, Georg	$16^1/_2$	Potschappel	Insp. a. d. Kgl. Strafanst. i. Zwickau.
4.	Pöhlandt, Walter	$16^1/_2$	Lichtentanne	Pfarrer in Lichtentanne.
5.	Riedel, Rudolf	$14^3/_4$	Gr.-Weitzschen b. Leisnig	Oberförster i. Weifsig b. Schönfeld.
6.	Taubert, Richard	$15^1/_4$	Tettau bei Meerane	Brauereibesitzer in Rothenbach b. Glauchau.
7.	Werner, Friedrich	15	Zwickau	Bürgerschullehrer in Zwickau.
8.	Müller, Kurt	15	Schönfels	Pfarrer in Schönfels. †
9.	Höhne, Horst	$15^3/_4$	Zwickau	Kaufm. u. Stadtr. in Zwickau. †
10.	Sarfert, Paul	$15^1/_2$	Bockwa	Gutsbesitzer in Bockwa.
11.	Borries, Georg	17	Zwickau	Buchdruckereibesitzer in Zwickau.
12.	Fröhlich, Arno	$17^1/_2$	Zwickau	Schmiedemeister in Zwickau.
13.	Paulus, Theodor	$15^3/_4$	Zwickau	Sparkassen-Verwalter in Zwickau.
14.	Hänchen, Max	17	Oberstützengrün	Oberförster in Königswalde bei Annaberg.
15.	Börner, Max	$16^1/_4$	Frauenstein	Tierarzt in Werdau.
16.	Karge, Paul	$16^1/_4$	Zwickau	Ober-Telegr.-Assistent in Zwickau.
17.	Hentschel, Willy	$16^1/_2$	Zwickau	Bankier und Stadtrat in Zwickau.
18.	Ortloff, Ernst	17	Langenbernsdorf	Dr. med. in Langenbernsdorf bei Werdau.
19.	Bienengräber, Alfred	$16^1/_2$	Coswig in Anhalt	Oberpfarrer in Meerane.
*	Fritzsche, Kurt	$16^1/_2$	Liebschwitz	Pfarrer in Liebschwitz. †
*	Blau, Hans	$15^3/_4$	Weida	Kaufmann in Weida.
	Untertertia.			
1.	Teichmann, Hugo	$14^3/_4$	Zwickau	Bäckermeister in Zwickau.
2.	Kirsch, Karl	$15^1/_2$	Zwickau	Gerichtsschreiber in Zwickau.
3.	Rockstroh, Paul	$14^3/_4$	Eibenstock	Kaufmann in Eibenstock.
4.	Bauch, Albert	15	Zwickau	Bankier in Zwickau.
5.	Deimer, Karl	$14^3/_4$	Schwarzenberg	Fabrikbesitzer in Schwarzenberg.
6.	Matthes, Arthur	$16^1/_4$	Zwickau	Zahnarzt in Zwickau.
7.	von Egidy, Alfred	$16^1/_2$	Planitz	Buchhalter in Zwickau.
8.	Kästner, Kurt	15	Schwarzenberg	Rechtsanwalt in Schwarzenberg.
9.	Müller, Max	$14^1/_2$	Bad Elster	Steuerassistent in Zwickau.
10.	Pfretzschner, Hans	$15^1/_2$	Markneukirchen	Fabrikant in Markneukirchen.
11.	Weifsbach, Willy	$15^1/_2$	Zwickau	Schlossermeister in Zwickau.
12.	Feustel, Kurt	$14^1/_4$	Lengenfeld	Kaufmann in Lengenfeld.
13.	Leonhardt, Otto	$13^3/_4$	Crossen	Mühlenbesitzer in Crossen.
14.	Neise, Kurt	$15^1/_2$	Chemnitz	Zahnkünstler in Zwickau.
15.	Paulus, Rudolf	$14^1/_2$	Zwickau	Sparkassen-Verwalter in Zwickau.
16.	Schütze, Leopold	$15^3/_4$	Oberhohndorf	Lehrer in Bockwa.
17.	Weigel, Philipp	$13^3/_4$	Raschau b. Schwarzenberg	Kaufmann in Raschau.
18.	Schreibelmayer, Alfred	15	Chodau b. Karlsbad	Gastwirt in Zwickau.
19.	Dreverhoff, Max	$15^1/_2$	Zwickau	Gärtner in Zwickau.
20.	Opitz, Georg	14	Zwickau	Kaufmann in Zwickau. †
21.	Zippert, Hans	$15^3/_4$	Zschopau	Kaufmann in Zwickau.
22.	Barth, Heinrich	$16^3/_4$	Zwickau	Bezirksarzt in Zwickau.

No.	Namen der Schüler.	Alter Ostern 1892.	Geburtsort.	Stand und Wohnort des Vaters oder Pflegevaters.
23.	Leonhardt, Kurt	14	Schedewitz	Prokurist in Zwickau.
24.	Förster, Eugen	$14^1/_4$	Eibenstock	Kaufmann in Eibenstock. †
25.	Schreiber, Willy	$16^3/_4$	Zwickau	Bahnassistent in Zwickau.
	Quarta A.			
1.	Thiermann, Rudolf	14	Zwickau	Töpfermeister in Zwickau.
2.	Heinrich, Kurt	$13^1/_2$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
3.	Witthöft, Arnold	$13^1/_2$	Dresden	Garnisonverw.-Oberinsp.i.Zwickau.
4.	Bauer, Otto	13	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
5.	Räfsler, Ferdinand	$14^1/_2$	Bockwa	Ingen. d. Kön. Marienh. i. Cainsdorf.
6.	Hanisch, Rudolf	$13^1/_2$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
7.	Queck, Willy	$13^1/_4$	Schedewitz	Obersteiger in Zwickau.
8.	Tittel, Georg	$14^3/_4$	Eibenstock	Lehrer in Eibenstock. †
9.	Tänzler, Emil	$13^1/_2$	Glücksbrunn b. Eisenach	Fabrikdirektor in Zwickau.
10.	Böttner, Paul	$13^1/_2$	Zwickau	Civilingenieur in Zwickau.
11.	Rust, Karl	15	Zwickau	Gastwirt in Zwickau.
12.	Ehrler, Walter	$13^3/_4$	Zwickau	Ökonom in Zwickau. †
13.	Sieber, Reinhold	$12^3/_4$	Eckersbach	Kaufmann in Zwickau.
14.	Günther, Kurt	14	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
15.	Flemming, Kurt	13	Zwickau	Postsekretär in Zwickau.
16.	Redlich, Kurt	$13^1/_4$	Planitz	Ökonomie-Inspektor in Zwickau.
17.	Schrödter, Gerhard	$12^1/_2$	Königswart in Böhmen	Kaufmann in Zwickau.
18.	May, Kurt	$14^3/_4$	Riesa	Kaufmann in Zwickau.
	Quarta B.			
1.	Heise, Georg	$14^1/_2$	Mulda	Bahnhofsinspekt. in Franzensbad.
2.	Pietzsch, Otto	$13^1/_2$	Zwickau	Konrektor u. Prof. am Realgymnas.
3.	Künzel, Bruno	$15^1/_4$	Reinsdorf	Gutsbesitzer in Reinsdorf.
4.	Held, Rudolf	$13^1/_2$	Zwickau	Chemiker in Zwickau.
5.	Wolf, Ernst	$14^1/_2$	Zwickau	Dekorationsmaler in Zwickau.
6.	Schaller, Fritz	$13^3/_4$	Hartenstein	Apotheker in Hartenstein.
7.	Wilson, Robert	14	Pabianice	Färbermeister in Schedewitz.
8.	Grofse, Johannes	$13^1/_2$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
9.	Schmidt, Rudolf	$12^1/_2$	Mittweida	Kaufmann in Schwarzenberg.
10.	Lieber, Emil	$14^3/_4$	Eger	Oberschaffner in Zwickau.
11.	Schubert, Johannes	$13^3/_4$	Schwarzenberg	Kaufmann in Schwarzenberg.
12.	Fikentscher, Wilhelm	$13^3/_4$	Zwickau	Stadtrat in Zwickau. †
13.	Hühn, Rudolf	14	Zwickau	Ratsvollzieher in Zwickau.
14.	Fiedler, Max	14	Schedewitz	Lehrer in Schedewitz.
15.	Blei, Albert	$14^1/_2$	Treuen	Baumeister in Treuen.
16.	Alippi, Friedrich	$14^1/_4$	Crimmitschau	Bandagist in Zwickau.
	Quinta A.			
1.	Ackermann, Heinrich	13	Groitsch	Kaufmann in Zwickau.
2.	Seidel, Kurt	13	Oberhohndorf	Steiger in Oberhohndorf.
3.	Bretschneider, Wilhelm	$13^1/_4$	Eibenstock	Fabrikbesitzer in Eibenstock. †
4.	Georgi, Oskar	14	Zwickau	Bäckermeister in Zwickau.
5.	Dietrich, Ernst	$14^3/_4$	Schedewitz	Fleischermeister in Schedewitz.
6.	Bretschneider, Ernst	$14^1/_4$	Zwickau	Kaufmann in Schedewitz. †
7.	Berge, Hartwig	$12^1/_4$	Zwickau	Bürgerschullehrer in Zwickau.

No.	Namen der Schüler.	Alter Ostern 1892.	Geburtsort.	Stand und Wohnort des Vaters oder Pflegevaters.
8.	Burger, Paul	$14^1/_3$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
9.	Schauer, Ernst	$13^1/_4$	Planitz	Gastwirt in Planitz.
10.	Lenk, Bruno	$13^1/_2$	Planitz	Gastwirt in Planitz.
11.	Petzold, Kurt	13	Zwickau	Bürgerschullehrer in Zwickau.
12.	Fröhling, Otto	$14^1/_4$	Elberfeld	Buchhalter in Zwickau.
13.	Focke, Richard	$13^3/_4$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
14.	Heinrici, Ernst	$12^1/_4$	Zwickau	Optikus in Zwickau.
15.	Münch, Ernst	$12^1/_2$	Schedewitz	Holzhändler in Schedewitz.
16.	Schneider, Paul	13	Zwickau	Schirrmeister in Zwickau.
17.	Birkner, Walter	$12^1/_2$	Crimmitschau	Baumeister in Crimmitschau.
18.	Kunz, Max	$14^3/_4$	Reinsdorf	Gastwirt in Wildenfels.
19.	Wadewitz, Kurt	$13^1/_2$	Leipzig	Messerschmied in Zwickau.
20.	Kämpf, Edmund	$14^1/_4$	Wiesenburg	Gastwirt in Wiesenburg. †
21.	Eger, Alfred	$13^1/_4$	Schedewitz	Kaufmann in Zwickau.
22.	Junghans, Alfred	$13^1/_2$	Reinsdorf	Gastwirt in Reinsdorf.
23.	Bleyl, Fritz	$11^1/_2$	Zwickau	Buchhalter in Zwickau.
24.	Opitz, Volkmar	$13^3/_4$	Auerbach i. V.	Rittergutsbesitzer in Auerbach.
25.	Schwotzer, Albin	$14^1/_2$	Planitz	Gastwirt in Planitz.
	Quinta B.			
1.	Schmidt, Arthur	$12^1/_4$	Zwickau	Standesbeamter in Zwickau.
2.	Behr, Karl Friedrich	$12^1/_4$	Bützow in Meklenburg	Kaufmann in Oberhohndorf. †
3.	Beyer, Kurt	12	Zwickau	Anstaltsinspektor in Zwickau.
4.	Günther, Alfred	$12^3/_4$	Zwickau	Prokurist in Zwickau.
5.	Blechschmidt, Albert	$12^1/_4$	Bockenheim b. Frankf. a. M.	Postsekretär in Frankfurt. †
6.	Köhl-Krügel, Ernst	15	Neustädtel b. Schneeberg	Gastwirt in Neustädtel.
7.	Müller, Erich	$12^1/_4$	Zwickau	Buchhalter in Schedewitz.
8.	Hartmann, Fritz	$13^1/_4$	Zwickau	Fabrikbesitzer in Zwickau.
9.	Bülau, Hans	$12^3/_4$	Zwickau	Rechtsanwalt in Zwickau.
10.	v. Schönberg, Hans	$12^1/_4$	Stuttgart	Anstaltsinspektor in Zwickau.
11.	Heise, Walter	$12^3/_4$	Alt-Chemnitz	Bahnhofsinspektor in Franzensbad
12.	Holey, Richard	12	Zwickau	Kupferschmiedemeister i. Zwickau
13.	Kretzschmar, Johannes	$12^1/_2$	Zwickau	Stadtbaurat in Zwickau.
14.	Grofse, Wilhelm	$12^1/_2$	Zwickau	Lohgerbermeister in Zwickau.
15.	Pflugbeil, Walter	$12^1/_2$	Zwickau	Bäckermeister in Zwickau.
16.	Körner, Kurt	$12^1/_2$	Zwickau	Lederhändler in Zwickau.
17.	Falck, Hans	$12^3/_4$	Oberhohndorf	Buchhalter in Bockwa.
18.	Hahnemann, Kurt	$12^3/_4$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
19.	Lattermann, Gottfried	$12^3/_4$	Morgenröte b. Schönheide	Eisenwerksbesitzer in Morgenröte.
20.	Ramsdorf, Adolf	$12^1/_4$	Zwickau	Bäckermeister in Zwickau.
21.	Süfs, Hans	$11^3/_4$	Werdau	Postsekretär in Zwickau.
22.	Waase, Georg	$13^1/_4$	Schedewitz	Hutfabrikant in Schedewitz.
23.	Beyreuther, Walter	$12^1/_4$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
24.	Fritzsche, Paul	$13^3/_4$	Bockwa	Kohlenwerksbesitzer in Bockwa.
	Sexta A.			
1.	Modes, Siegfried	11	Zwickau	Gerichtsschreiber in Zwickau. †
2.	Hering, Johannes	13	Oberhohndorf	Steiger in Bockwa.
3.	Rosenhauer, Paul	$11^1/_2$	Schönberg b. Plauen	Stationsvorstand in Oberlichtenau bei Chemnitz.

No.	Namen der Schüler.	Alter Ostern 1892.	Geburtsort.	Stand und Wohnort des Vaters oder Pflegevaters.
4.	Ackermann, Ludwig	$11^1/_2$	Zeitz	Kaufmann in Zwickau.
5.	Streit, Willy	$12^1/_4$	Auma i. Thüringen	Viehhändler in Zwickau.
6.	Zschörner, Johannes	11	Crimmitschau	Kaufmann in Zwickau. †
7.	Greuner, Kurt	$11^1/_4$	Zwickau	Fabrikbesitzer in Zwickau.
8.	Ungewifs, Otto	12	Zwickau	Ingenieur in Zwickau.
9.	Händel, Arno	$12^1/_2$	Zwickau	Hauptsteueramtsassist. i. Zwickau.
10.	Schöl, Ernst	12	Augsburg	Zahlmeister in Augsburg. †
11.	Uhlstein, Fritz	$12^1/_2$	Schiedel	Pferdehändler in Schiedel.
12.	Fritzsche, Johannes	$12^1/_2$	Zwickau	Heizhausvorstand in Zwickau.
13.	Röpstorff, Gustav	$12^1/_2$	Zwickau	Maler in Zwickau.
14.	Hesse, Alexander	$12^1/_2$	Leipzig	Kassierer in Zwickau. †
15.	Zschörner, Karl	11	Crimmitschau	Kaufmann in Zwickau.
16.	Funke, Horst	$12^3/_4$	Meuselwitz	Bahnmeister in Bergen.
17.	Bretschneider, Emil	$11^3/_4$	Meerane	Kaufmann in Zwickau
18.	Vogel, Karl	$12^1/_2$	Oelsnitz	Prokurist in Bockwa.
19.	Wagner, Otto	$11^1/_2$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
20.	Weller, Walter	$11^1/_2$	Schedewitz	Kaufmann in Schedewitz.
21.	Leonhardt, Kurt	12	Crossen	Fabrikbesitzer in Crossen.
22.	Frankenstein, Rudolf	12	Reichenbach i. V.	Maschinenverwalter in Zwickau.
23.	Popp, Kurt	12	Cunnersdorf	Fabrikant in Wilkau.
	Sexta B.			
1.	Scheithauer, Paul	$11^1/_4$	Cainsdorf	Prokurist a. d. Marienh. i. Cainsd.
2.	Gruber, Hellmut	$11^3/_4$	Zwickau	Baumeister in Zwickau.
3.	Berger, Max	$11^3/_4$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
4.	Geih, Erich	$10^3/_4$	Zwickau	Bürgerschullehrer in Zwickau.
5.	Ketzschau, Richard	$11^1/_2$	Zwickau	Lokomotivenführer in Zwickau.
6.	Chilian, Walter	$11^1/_4$	Zwickau	Rechtsanwalt in Zwickau.
7.	Sieber, Alfred	$11^1/_4$	Eckersbach	Kaufmann in Zwickau.
8.	Graf, Karl	$11^1/_4$	Zwickau	Realgymnasial-Oberl. i. Zwickau. †
9.	Junghanns, Erwin	$11^3/_4$	Zwickau	Baumeister in Zwickau.
10.	Blume, Johannes	$11^1/_4$	Zwickau	Schneidermeister in Zwickau.
11.	Kratz, Robert	11	Zwickau	Zinngiefsermeister in Zwickau.
12.	Bauer Johannes	$11^3/_4$	Aue	Kaufmann in Zwickau.
13.	Jahn, Walter	$11^1/_4$	Bockwa	Buchhalter a. d. Marienh. Bockwa.
14.	Meyer, Reinhard	11	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
15.	Bauer, Kurt	12	Aue	Fabrikant in Aue.
16.	Beyreuther, Fritz	11	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
17.	Krause, Fritz	11	Schedewitz	Kaufmann in Schedewitz.
18.	Rehnitz, Egon	$13^3/_4$	Dresden	Anstaltsaufseher in Zwickau.
*	Lippmann, Arthur	$11^3/_4$	Zwickau	Kaufmann in Zwickau.
*	Uebe, Paul	$11^1/_4$	Chemnitz	Hotelbesitzer in Zwickau.

Ordnung der öffentlichen Prüfungen.

Montag, den 4. April.

Vormittag.

Quinta A	8 Uhr — Min.	Religion	Herr Oberlehrer Mehner.
	8 „ 30 „	Latein	„ „ Dr. Gelhorn.
Quinta B	9 „ — „	Geographie	„ „ Dr. Noellner.
	9 „ 30 „	Französisch	„ „ Wespy.
Sexta A	10 „ — „	Rechnen	„ „ Hase.
	10 „ 30 „	Latein	„ „ Maletzke.
Sexta B	11 „ — „	Naturgeschichte	„ „ Dr. Gerndt.
	11 „ 30 „	Deutsch	„ Kand. rev. min. Müller.

Nachmittag.

Quarta A	2 Uhr — Min.	Geschichte	Herr Oberlehrer Francke.
	2 „ 30 „	Rechnen	„ „ Dr. Brückner.
Quarta B	3 „ — „	Latein	„ „ Tittel.
	3 „ 30 „	Naturgeschichte	„ „ Dr. Gerndt.

Dienstag, den 5. April.

Vormittag.

Untersekunda	8 Uhr — Min.	Religion	Herr Kand. rev. min. Müller.
	8 „ 30 „	Geometrie	„ Oberlehrer Hase.
Obertertia A	9 „ — „	Latein	„ „ Maletzke.
	9 „ 30 „	Physik	„ „ Kunz.
Obertertia B	10 „ — „	Geschichte	„ „ Dr. Fritsche.
	10 „ 30 „	Englisch	„ Professor Silling.
Untertertia	11 „ — „	Arithmetik	„ Oberlehrer Dr. Brückner.
	11 „ 30 „	Französisch	„ „ Tänzer.

Nachmittag.

Obersekunda	2 Uhr — Min.	Deutsch	„ Konrektor Pietzsch.
	2 „ 30 „	Geographie	„ Oberlehrer Dr. Gelhorn.
Unterprima	3 „ — „	Latein	„ „ Dr. Rauschke.
	3 „ 30 „	Chemie	„ „ Dr. Noellner.
Obersekunda und Untersekunda	4 „ 15 „	in der Turnanstalt an der Gartenstrasse	„ Oberturnlehrer Frank.
Untertertia	4 „ 15 „		„ Turnlehrer Claus.
Sexten	4 „ 15 „		„ „ Haubold.

Während der Prüfungstage sind die geometrischen Zeichnungen im unteren Zeichensaale (I. Geschofs, Zimmer No. 23), die mineralogischen Zeichnungen im Naturalien-Kabinet (No. 27), die Freihandzeichnungen im oberen Zeichensaale (II. Geschofs, Zimmer No. 36) ausgestellt. Kinder haben nur in Begleitung Erwachsener Zutritt.