allgemeinem Polyeder ein solches, bei welchem durch keine Ecke mehr als 3 Flächen gehen,[7]) und nennen die übrigen singulär, so sind die ersteren charakterisiert durch die Gleichung $3f = 2k$, während für alle singulären $3f < 2k$ ist. Ein Polyeder, dessen Grenzflächen nur Dreiecke sind, bezeichnet man seit Möbius mit dem Namen Trigonalpolyeder. Für ein solches gilt $3e = 2k$, während sonst $3e < 2k$ ist. Das Minimum der Eckenzahl bei konstanter Flächenzahl $f = n$ besitzen die Trigonalpolyeder, das Maximum die allgemeinen Polyeder, denn die Gleichungen 3) geben mit dem Eulerschen Satze kombiniert für jene

$$f = n,\ e = \frac{n}{2} + 2,\ k = \frac{3n}{2},$$

für diese

$$f = n,\ e = 2n - 4,\ k = 3n - 6,$$

woraus, nebenbei bemerkt, folgt, dafs für jede Zahl n der Flächen allgemeine Polyeder existieren, Trigonalpolyeder aber nur, wenn n eine gerade Zahl ist. Teilen wir nach dem Werte der Zahl n der Flächen alle möglichen Polyeder in Klassen, so enthält jede Klasse eine bestimmte Anzahl Ordnungen nach der zugehörigen Zahl e der Ecken, von denen die erste Ordnung, mit der Minimalzahl der Ecken, unter Umständen — wenn sie vorhanden ist — die Trigonalpolyeder umfafst, die letzte aber stets die allgemeinen Polyeder. Zu jeder Ordnung, d. h. demselben f und e, gehören eine Reihe verschieden gestalteter Typen. Zwei Polyeder, welche in den Zahlen e, f und k, aber auch in der Anzahl der einzelnen f_3, f_4, f_5 u. s. w. übereinstimmen, können in der Anordnung ihrer Grenzflächen noch differieren, d. h. allomorph nach Eberhards Bezeichnung sein. Als Beispiel dienen die Figuren 28a bis 28d auf Tafel B. Isomorph werden sie genannt, wenn sie gestaltlich, nicht metrisch, aber nicht nur nach Art, sondern auch nach Anordnung der Grenzflächen, vollkommen übereinstimmen.[8])

Einem gegebenen Polyeder P kann immer ein anderes P′ so zugeordnet werden, dafs mit Beziehung auf eine feste Kugel O die Ebenen des einen die Polarebenen zu den Ecken des andern als Polen sind und umgekehrt. Die Zahl der Flächen des einen ist somit gleich der Zahl der Ecken des andern und umgekehrt, während die Zahl der Kanten in beiden Polyedern übereinstimmt. Zwei solche Polyeder P und P′ heifsen polar, conjugiert oder reciprok.[9]) Sind die Zahlen für ihre Grenzgebilde e, f, k, bez. e′, f′, k′, so gelten also nicht nur die Gleichungen $e' = f$, $f' = e$, $k' = k$, sondern die Zahl der Kanten einer Seitenfläche des einen ist gleich der Zahl der Kanten in der entsprechenden Ecke des andern. So ist das reciproke eines allgemeinen Polyeders ein Trigonalpolyeder und umgekehrt. Ist das zu P reciproke Polyeder P′ isomorph mit P, so nennt man P sich selbst reciprok oder nach Kirkman autopolar.[10]) Die notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung hierfür ist $e = f = \frac{k}{2} + 1$. Da diese Gleichung nur aussagt, dafs $e_3 + e_4 + e_5 + \ldots\ldots = f_3 + f_4 + f_5 \ldots\ldots$ ist, so sind noch die Bedingungen $e_3 = f_3$, $e_4 = f_4 \ldots\ldots$ hinzuzufügen. Eine recht anschauliche Darstellung des bisher erläuterten gab Breton[11]) in einer Arbeit, die es wohl zu verdienen scheint, in ihren wesentlichen Punkten reproduziert zu werden. (Siehe hierzu Fig. 1 und 2, Tafel I.)

---

[7]) O. Hermes bezeichnet dieselben als „einfache Vielflache“. (Programm Kölln. Gymn. Berlin 1894.) Wir werden uns im folgenden des seit Wiener (Über Vielecke und Vielflache, Leipzig 1864) geläufigen Ausdruckes „Vielflach“ ebenfalls — besonders in Verbindung mit Zahlen — bedienen, ohne das Wort Polyeder grundsätzlich zu vermeiden.

[8]) Das genauere Characteristicum des Isomorphismus zweier Polyederindividuen s. bei Eberhard, Morphologie etc. S. 11 ff. C. Jordan nennt solche Polyeder homolog.

[9]) *Corpora reciproca voco, quorum utrumque tot habet angulos solidos, quot alterum latera; hinc et tota latera quot alterum angulos solidos.*“ Meister, Comment. soc. reg. Gotting. T. VII. 1785. Commentatio de solidis geometricis etc. S. 39.

[10]) Kirkman, On autopolar Polyedra. Philos. transact. 1857.

[11]) Ph. Breton, Note sur la classification des polyèdres. Compt. Rend. hebd. des séances de l'acad. des sciences. t. 51. (1860.)