Anmerckungen
über des
Freyherrn und Canzlers
von Wolff
Geometrie
zum Gebrauch seiner Zuhörer
verfertiget
von
[illegible]
[illegible]

Halle im Magdeburgischen
Verlegts Carl Hermann Hemmerde.
17[illegible]

Anmerckungen
über des
Freyherrn und Cantzlers
von Wolff
Geometrie
zum Gebrauch seiner Zuhörer
entworffen
von

Johann Gottlob Krügern
Der Artzneygelahrheit Prof. der Römisch-Käyserl. und Königl. Preußl. Academie der Wissenschafften Mitgliede.

Halle im Magdeburgischen
Verlegt von Carl Hermann Hemmerde.
1747.

Dem

Hochwohlgebohrnen, Hochgelahrten und Weltberühmten Herrn,

Herrn Christian Freyherrn von Wolff

Sr. Königl. Majestät in Preussen Hochbetrauten Geheimdenrathe, Cantzlern der Köngl. Preußl. Friedrichsuniversität, und auf derselben Professori matheseos und juris naturæ & gentium publico ordinario, Professori Honorario zu St. Petersburg, der Königl. Frantzösischen, Grosbrittannischen und Preußischen Academie der Wissenschafften Mitgliede
2c. 2c. 2c.

Meinem gnädigen und grossen Gönner.

Hochwohlgebohrner
Freyherr,

Gnädiger Herr,

Erlauben Sie, Hochwohlgebohrner Herr Cantzler, daß ich Ihnen diese Blätter, als ein Zeichen meiner Hochachtung und Veneration überreichen darf. Ich weiß

zwar

zwar wohl, daß es viel gewagt sey, den Nahmen des grösten Weltweisen einer so kleinen Schrift, einer Schrift, welche nur für die ersten Anfänger in der Gelehrsamkeit gehöret, vorzusetzen. Aber ich müste Ew. Hochwohlgebl. Großmuth und die Pflichten, welche man seinen Lehrern schuldig ist, nicht kennen, wenn ich besorgen wollte, daß Dieselben meine Freyheit ungnädig aufnehmen würden. Nein, Hochwohlgebohrner Herr Cantzler, ich achte mich vielmehr verbunden Denenselben diese Blätter vor Augen zu legen. Denn sie enthalten Anmerckungen über DERO Geometrie. Was ist also billiger, als daß ich Ew. Hochwohlgebl. dasjenige überliefre, was Ihnen von Rechtswegen zugehört? Aber dieses ist noch nicht alles. Ich habe Ew. Hochwohlgebl. unsterbliche Schriften von Jugend auf mit grossem Vergnügen gelesen, ich habe diesem Lichte gefolgt und gefunden, daß durch dasselbe die dunckelsten Sa-

 chen

chen in der Naturlehre und Artzneygelahrheit deutlich gemacht werden. Da ich nun dieses vor aller Welt zu rühmen, die Ehre habe: so erfülle ich einigermassen die Pflichten der Danckbarkeit.

Schuldigkeit und Danckbegierde sind es also, Hochwohlgebohrner Herr Cantzler, welche mir die Feder in die Hand gegeben haben. Wüste ich nun dieselbe mit der gehörigen Geschicklichkeit zu führen: so würde ich mich bemühen, von DE-

RO unsterblichen Verdienſten einen lebhaften Abriß zu machen: ich würde zeigen, daß alle Wiſſenſchaften durch Ew. Hochwohlgebl. auf gewiſſere Gründe gebauet, höher getrieben und in eine Vollkommenheit verſetzt worden wären, darinnen ſie ſich noch niemahls befunden. Aber was würde ich damit geſagt haben? Nicht etwas das in Teutſchland, nein, etwas, das in der gantzen Welt bekant und von niemand in Zweifel gezogen wäre. Denn Ew. Hochwohlgebl. ſind eine Zierde des menſchlichen

Geschlechts, ein Lehrer Europens, und, ist mir es erlaubt hinzuzusetzen? ein Gönner dessen, welcher mit der vollkommensten Ehrerbietung ersterben wird,

Hochwohlgebohrner
Freyherr,

Gnädiger Herr,

Ew. Hochwohlgebl.

Halle den 6. April. 1747.

unterthänig gehorsamster

Krüger.

Vorrede.

Niemahls hat wohl die Geometrie bey den Teutschen in grösserm Werthe gestanden als heute zu Tage. Denn diese Wissenschaft von der man sonst glaubte, daß sie nur für die Feldmesser gehörte, ist gegenwärtig eine fast unentbehrliche Beschäfftigung aller Studirenden geworden, sie hat sich bey den Gelehrten in eben das Ansehen gesetzt, darinnen die Vernunftlehre steht und wird sich vermuthlich jederzeit darinnen zu erhalten wissen. Das macht, sie erleuchtet den Verstand, lehret ordentlich dencken und behütet ihre Schüler für gefährlichen Sprüngen in ihren Schlüssen. Wer weiß aber nicht, daß die allzuweit-

her-

hergeholte Folgerey und Consequentzienmacherey die fruchtbareste Mutter unzähliger Irrthümer ist? Ich habe es daher seit mehrern Jahren beständig im Gebrauche gehabt, bey meinen Lectionen, die ich über des Weltberühmten **Freyherrn von Wolff** überaus nützlichen Auszug der Geometrie gehalten, die in diesem Buche befindlichen Beweise in lauter förmliche aneinanderhängende Schlüsse zu verwandeln. Man würde mir zu viel thun, wenn man mich beschuldigen wollte, als wenn ich glaubte, es könne kein Beweiß gründlich aufgesetzt werden, wenn man ihn nicht in lauter förmliche Schlüsse verwandelte. Nein, dieses hiesse verlangen, daß alle Menschen so kleine und langsame Schritte thun sollten, dergleichen die Kinder zu machen pflegen, wenn sie gehen lernen. Aber wer wird jemahls fertig und geschwind gehen lernen, ohne im Anfange langsam gegangen zu seyn? Es ist daher bey einem Anfänger im Demonstriren meines Erachtens nichts nöthiger, als alle in der Geometrie befindliche Beweise in ordentliche Vernunftschlüsse zu zerlegen. Denn auf diese Weise wird ihnen diese Wissenschaft sehr erleichtert und so zu sagen in eine Art von Spielen verwandelt, welche dem Verstande zugleich Nutzen und Ergötzlichkeit verschaffen. Die Erfahrung hat mich gelehret, daß dieses wircklich so sey, und daß man auf diese Art auch denen deren Fähigkeit nicht ausserordentlich ist, die geometrischen Beweise beybringen könne. Daher ist es geschehen, daß diese Zergliederung der Geometrie viel Liebhaber gefunden und von meinen Zuhörern so wohl als von andern zum öftern abgeschrieben worden. Die aufrichtigste Begierde ihnen ihre Bemühungen zu erleichtern, hat mich angetrieben, solche dem Drucke zu übergeben. Werde ich also auf weitläuftige Entschuldigungen meines Unternehmens zu sinnen Ursache haben? oder braucht man die Leute nicht um Vergebung zu bitten, wenn man thut, was sie haben wollen? Ich könnte also diese Vorrede beschliessen; aber ich finde doch noch zwey Sachen zu erinnern für nöthig. Ich habe Anmerckungen über des **Freyherrn von Wolffens** Geometrie geschrieben. Ist sie denn etwan so dunckel, daß sie ohne diese Anmerckungen nicht verstanden werden kann? Man müste blind seyn, wenn man dieses behaupten wollte. Denn wo haben wir ein deutlicheres und leichteres Compendium der Mathematick als in den Schriften dieses grossen Weltweisen? Ich vermuthe also vielmehr, daß man sagen wird, ich hätte meine Mühe ersparen können, indem ich deutliche Sachen noch deutlicher zu machen suchte. Ich glaube es selbst; aber eben darum gehört diese Schrift nicht für Männer sondern für Kinder im demonstriren, und ich irre sehr, oder es sind alle Männer einsmahls Kinder gewesen.

Ja last es uns nur gestehen, daß wir erst buchstabiren lernen müssen, ehe wir Redner werden können. Die Natur behält ihr Recht, und es ist eine vergebliche Bemühung, ihr solches streitig zu machen. Die geschicktesten Täntzer sind in ihrer Jugend am Laufzaume geführet worden, und ein Leibnitz würde kein Leibnitz geworden seyn, wenn er nicht erst hätte einen Triangel verfertigen gelernet. Man würde sich also sehr irren, wenn man sich einbilden wollte, durch diese Blätter ein grosser Geometer

ter zu werden. Keinesweges, sie sind nur ein Abriß des Grundes, auf welchem das prächtigste Gebäude seiner Art aufgeführet ist, ein Gebäude dessen Höhe man kaum absehen und von dem man doch nicht behaupten kan, daß bereits der Knopf darauf gesetzt wäre, weil man niemals aufhören wird daran zu arbeiten. Dem aber ohngeachtet verrichten die Bauleute die saureste Arbeit mit dem grösten Vergnügen. Aber was macht es? Es wird ihnen ihre Bemühung durch die Entzückung versüsset die ihnen der reitzende Anblick der prächtigsten Wercke der Natur verursacht, davon sie desto mehr entdecken je höher sie stehen, ob gleich sie alle auf einen Blick zu übersehen ein Vorrecht der Gottheit bleibet, welches die Weltweisen zu erhalten niemals Fähigkeit genug besitzen werden. Die Geometrie ist es also der wir dieses zu dancken haben, und wer sich mit derselben recht bekannt gemacht hat,

Ein solcher übersteigt das Ziel erschaffner Geister,
Findt die Natur im Werck, wird der Geschöpfe Meister,
Er wiegt die innre Kraft die sich in Cörpern regt,
Den einen sincken macht, und den in Kreiß bewegt.
Er schlägt die Tafeln auf von ewigen Gesetzen,
Die die Natur gemacht, und nimmer kan verletzen.

§. 1.

§. 1.

JEderman weiß, daß Geometrie ein griechisches Wort sey, welches im teutschen durch eine Wissenschaft die Erde zu messen ausgedruckt werden kann. Indessen ist es gewiß, daß das Feld-Messen eine der geringsten Beschäftigungen eines Geometers und nicht die eintzige Absicht sey, welche man bey Erlernung dieser Wissenschaft haben kann. Nein, die Geometrie besitzt weit grössere Reichthümer; sie dienet aber mit denenselben vielmehr anderen Wissenschaften als ihr selbst. Sie selbst gläntzet mit keiner entlehnten Pracht, sondern erscheinet iederzeit in einer schlechten wiewohl sehr natürlichen Kleidung; ohnerachtet ihr die Natur-Lehre allen den Glantz zu verdancken hat, dadurch sie das Gemüth eines wahren Weltweisen zu entzücken vermag. Sie hat unter den Wissenschaften ein ziemliches hohes Alter erreicht, und daher erwirbt sie sich ein desto ehrwürdiger Ansehen; da man ihr auch nicht einmal vorwerffen kann, daß sie sich in ihrer Jugend weder falscher, noch auch entlehnter Zierrathen bedienet habe, welches gleichwohl bey andern Wissenschaften von allen Zeiten her im Gebrauche gewesen und auch kaum hat vermieden werden können. Keine Gleichnisse, keine Aehnlichkeiten der Worte, keine Muthmassungen und Hypothesen sind iemals in der Geometrie Mode gewesen. Nein, richtige Erklärungen, überzeugende Beweise, eine natürliche Ordnung und vollkomne Uebereinstimmung sind iederzeit die Kennzeichen eines ächten Geometers gewesen. Hier giebt es keine Secten, keine Wiederlegungen und Controversien, keine Verlachung des Alterthums oder Verachtung der Neuern; sondern alle, welche diese Wissenschaft erlernet haben, sind so wohl mit den Alten als untereinander so einig, als wenn sie sich insgesamt darüber verglichen hätten. O wie glücklich wären die andern Wissenschaften, wenn man dieses von ihnen sagen könnte. Last uns also die Geometrie kennen lernen, vielleicht werden wir dadurch vermögend gemacht, einem so reitzenden Exempel zu folgen.

Zu dem 1. §.

§. 2.

Die Mathematick bemühet sich die Grössen auszumessen (Anmerck. zu der Rechenkunst §. 1.) Die Grösse aber ist entweder eine Zahl (quantitas discreta) oder eine stetige Grösse (quantitas continua). Die erstere haben wir in der Rechenkunst betrachtet, und nun würde von der andern

andern zu handeln seyn. Es ist aber die stetige Grösse entweder ausgedehnt oder unausgedehnt (Anmerck. zu der Rechenkunst §. 40. und 42.). Unausgedehnte Grössen (quantitates intensiuas) auszumessen, hat man noch keine allgemeine Regeln erfunden; wiewohl solches von einem, welcher in der Mathematick und Vernunft-Lehre genugsame Geschicklichkeit besässe, gar wohl geschehen könnte: indem wir in der That unausgedehnte Grössen ausmessen. Denn messen wir nicht die Geschwindigkeit aus, und ist dieses nicht eine Sache, welche eben so wenig eine Zahl als ein Ding genennet werden kan, welches nach der Länge, Dicke und Breite ausgedehnet wäre? Ich will daher alle diejenigen hierdurch aufmuntern, denen es niemals an Bereitwilligkeit, nicht selten aber an der Geschicklichkeit fehlt neue Wahrheiten zu entdecken, daß sie die allgemeinen Regeln unausgedehnte Grössen auszumessen erfinden. Sie werden der Gelehrsamkeit dadurch einen würcklichen Dienst thun, und sich hernach getrost in den Labyrinth der Seelen-Ausmessungen wagen dürffen, wenn sie diesen Leitfaden erst in den Händen haben. Da wir indessen noch keine **Dynamick** haben; so wollen wir uns mit der Ausmessung der ausgedehnten Grössen beschäftigen, und dieses ist eben dasjenige, was in der Geometrie abgehandelt wird. Es ist demnach die Ausdehnung das Object der Geometrie, und da es eine dreyfache Ausdehnung giebt: so bekömmt zugleich die gantze Geometrie 3. Theile, und wir haben darin von der Länge, Breite und Dicke, das ist, von Linien, Flächen und Cörpern zu handeln. Es ist aber wohl zu mercken, daß zwischen den mathematischen und natürlichen Cörpern, und daher auch zwischen der Geometrie und Naturlehre ein grosser Unterschied sey. Denn in der Naturlehre handeln wir von den Cörpern, welche würcklich in der Welt zu finden sind. Wir richten unsere Gedancken nicht nur auf ihre Ausdehnung, sondern auch auf ihre Structur, bewegende Kraft und die davon abhängenden Würckungen. Aber in der Geometrie bekümmern wir uns um dieses alles nicht; sondern sehen gantz allein auf die Ausdehnung nach der Länge, Breite und Dicke. Daher ist ein mathematischer Cörper weder weiß noch schwartz, weder weich noch hart, weder warm noch kalt; sondern er ist nur groß und klein und von einer gewissen Figur. Alle seine Theile sind von einerley Art und gehen in einem fort: weil er keine Zwischenräumgen hat. Wenn wir uns nun in der Welt umsehen, wo wir darinnen ein solches etwas antreffen: so werden wir, ausser den Raume, nichts finden was diese Eigenschaften besitzen sollte. Mein Vorsatz ist es nicht, und ich bin auch am allerwenigsten darzu geschickt, es zu entscheiden, ob der Raum in der Welt würcklich vorhanden sey, oder ob er blos in unserer Einbildung seinen Sitz habe. Denn ich weiß, daß Raum und Zeit zwey Seen der

Ver-

Verzweifflung sind, in welche sich schon viele Weltweisen hinein gestürtzet haben, um den Grund davon zu erreichen. Ich habe auch um desto weniger nöthig mich in diese Gefahr zu begeben, da uns in der Geometrie gar nichts dran gelegen ist, ob der Raum würcklich sey, oder ob wir ihn uns nur einbilden. Da indessen der mathematische Cörper mit dem Raume einerley ist; so hätte sich unser Hochberühmter Herr Verfasser nicht besser ausdrücken können, als er thut, da er die Geometrie eine Wissenschaft des Raumes nennet, welchen die Cörper nach ihrer Länge, Breite und Dicke einnimmt.

Zu dem 2ten §.

§. 3.

In der Natur ist zwar die Länge, Breite und Dicke iederzeit verbunden. Auch das allerkleinste Stäubgen der Materie hat eine Ausdehnung nach allen Gegenden zugleich. Aber wir haben auch ein Vermögen von einem besondern Begriffe, einen allgemeinen abzusondern, und uns nur etwas von einer Sache vorzustellen, ohne an das übrige zu gedencken, welches sich gleichfalls dabey befindet. Unser Verstand sieht sich genöthiget, sich dieses Hülfsmittels zu bedienen, weil er nicht vermögend ist, viele Sachen auf einmal vollkommen zu übersehen. Wer will es nun den Geometern verdencken, wenn sie eben dasselbe thun, und sich die Länge allein ohne

ohne die Breite und Dicke vorstellen, und solches eine Linie nennen, ohneracht keine Länge ohne Breite und Dicke in der Welt seyn, und also keine mathematische Linie mit Menschen Händen verfertiget werden kann. Indessen bemühet man sich doch die Linien so zart zu ziehen, als es nur möglich ist, damit sie zum wenigsten keine merckliche Breite bekommen. Eine Linie, welche endlich ist, muß nothwendig ihren Anfang und Ende haben, und wenn wir uns den Ort, wo sie anfängt und aufhört, vorstellen, so bekommen wir einen Begriff von einem mathematischen Puncte. Ein solcher Punct kann eben so wenig wie die Linie eine Breite und Dicke haben, daß er aber auch keine Länge haben könne, kann darum nicht angehen, weil er sonst eine Länge ohne Breite und Dicke, das ist, eine Linie seyn würde. Hat also Euclides wohl unrecht, wenn er sagt; daß ein Punct ein Ding sey, welches keine Theile hat? Sind wir unvermögend eine mathematische Linie zu ziehen: so sind wir es noch vielmehr, wenn wir einen mathematischen Punct machen sollen. Ohnerachtet wir es aber nicht vermeiden können, daß ein Punct, welchen wir mit unsern Händen gemacht haben, eine Ausdehnung besitzen solle, so geben wir ihm doch eine so geringe Ausdehnung als nur immer möglich ist. Ein grosser Gelehrter hat behauptet, daß die mathematischen Puncte unter die unmöglichen und sich selbst wiedersprechenden Dinge gehöreten. Da nun aus der Bewegung

wegung der Puncte Linien, aus der Bewegung der Linien Flächen, und aus der Bewegung der Flächen Cörper erzeuget werden, so hat er gefolgert, daß die Geometrie von lauter unmöglichen, und sich selbst wiedersprechenden Dingen handelte. Thut man also wohl daran, wenn man ihm einräumt, daß der mathematische Punct etwas unmögliches sey; oder fodert man nicht mit grössern Rechte, daß gezeiget werde, es sey in diesem Begriffe von eben derselben Sache einerley bejahet und verneinet worden? wie kann aber dieses geschehen, wo nichts bejahet wird. Unser Herr Verfasser behauptet mit den alten Geometern, daß eine Linie erzeugt werde, wenn sich ein Punct gegen den andern bewegt. Denn durch die Zusammensetzung der Puncte kan keine Ausdehnung und folglich keine Linie entstehen, indem die Puncte selbst keine Ausdehnung besitzen. Die Ungereimtheit dieses Satzes, daß die Linien aus Puncten zusammen gesetzt wären, erhellet noch deutlicher daraus, wenn man sich einbildet, daß eine gerade Linie solle in zwey gleiche Theile getheilt werden. Denn die Anzahl der in der Linie befindlichen Puncte ist entweder gerade oder ungerade. Wäre sie gerade, so müste der Theilungspunct zwischen zwey einander berührende Puncte der Linie gestellt werden, wäre sie aber ungerade, so müste ein Punct in zwey gleiche Theile getheilt werden, welches beydes unmöglich ist.

Zu dem 4. 5. und 6. §.

§. 4.

Damit kann verglichen werden der 26. 27. 28. 29. §. der Anmerckungen über die Rechenkunst.

Zu dem 7. §.

§. 5.

Wenn sich ein Punct von einem Orte zu den andern bewegt, so beschreibt er eine Linie. Nun behält dieser Punct in seiner Bewegung entweder immer einerley Richtung oder nicht. In dem erstern Falle wird eine gerade, und in dem andern eine krumme Linie beschrieben. Wenn der Punct in seiner Bewegung immer einerley Richtung behält: so wird der Theil der Linie auf eben die Art, und von eben derselben Sache wie die gantze Linie hervor gebracht. Derowegen ist bey einer geraden Linie allemahl der Theil der gantzen Linie ähnlich. Hingegen weil bey Erzeugung einer krummen Linie der Punct seine Direction alle Augenblick verändert; so besitzt die gantze Linie andere Eigenschaften, als ihr Theil, und daher ist in einer krummen Linie der Theil der gantzen Linie nicht ähnlich.

Zu dem 8. §.

§. 6.

Weil sich das Licht nach geraden Linien fortbewegt; so kann man auf dem Felde eine gerade Linie beschreiben, wenn man viele Stäbe hintereinander steckt, daß der erste alle übrige dem Auge verbirget, und dieses mag wohl Plato in

dem

dem Kopfe gehabt haben, da er uns die gerade Linie beschreibt, per lineam cuius extrema obumbrant omnia media, das ist, eine Linie deren Enden alles verdunckeln, was mitten in derselben anzutreffen ist.

Zu dem 9. §.

§. 7.

Der Maasstab und die zu messende Sache müssen iederzeit von einerley Art seyn weil man sich das eine als einen Theil des andern einbilden muß. Daher wird eine Zahl durch eine Zahl, eine Linie durch eine Linie, eine Fläche durch eine Fläche, und ein Cörper durch einen Cörper ausgemessen.

zu den 10. §.

§. 8.

Die Verhältniß einiger Maaße gegen einander erhellet aus nachfolgender Tabelle. Wenn der Pariser Schuh in 1440. Theile eingetheilt wird: so bekömmt der

Parisische	1440	der Constantinopolitanische	3140
der Rheinländische	$1391\frac{3}{10}$	der Bononische	$1682\frac{2}{5}$
der Römische	1320	der Strasburgische	$1282\frac{3}{4}$
der Londensche	1350	der Nürnberger	$1346\frac{3}{4}$
der Schwedische	1320	der Dantziger	$1271\frac{1}{2}$
der Dänische	$1403\frac{2}{5}$	der Hallische	1320
der Venetische	1540		

Zu dem 11. §.

§. 9.

Man bilde sich einen Kegel, das ist, einen Cörper ein, welcher die Gestalt eines Zuckerhuts hat. Dieser Kegel hat in der Mitten seine Achse. Wenn man nun ein Stücke davon abschneidet, dergestalt, daß der Schnitt mit der Achse parallel ist, das ist, allenthalben gleichweit davon entfernt bleibet: so bekommt man eine Fläche, die von einer krummen Linie eingeschlossen ist, und diese krumme Linie wird eine **Hyberbel** genennt. Durchschneidet man aber den Kegel dergestalt, daß der Schnitt mit seiner einen Seite parallel ist: so bekömmt man eine **Parabel**. Ein ieder anderer Durchschnitt des Kegels aber bringt eine **Ellipsin** hervor. Der Circul ist nichts anders als eine solche Ellipsis, darinnen die Brennpuncte in den Mittelpunct kommen, und der entsteht, wenn in dem Kegel ein Durchschnitt mit der Grund-Fläche parallel gemacht wird. Diese drey krummen Linien, welche aus Durchschneidung des Kegels entspringen, werden die Kegelschnitte genennt, und es haben sich so wohl die alten als neuen Geometer mit Untersuchung ihrer Eigenschaften beschäftiget. Die Naturlehrer aber haben die Früchte davon genossen, indem sie gefunden, daß sich die Planeten in elliptischen, die Cometen bisweilen in hyperbolischen, und alle fortgeworfene schwere Cörper in parabolischen Linien bewegen. Diese Kegelschnitte werden wie alle krumme Linien in der höhern Geometrie betrach-

betrachtet, und selbst der Circul ist davon nicht ausgenommen. Man würde auch diesen vor den Augen der Anfänger in der Geometrie verborgen, und sie blos mit den geraden Lienien beschäftiget haben, wenn nicht die Erkäntniß des Circuls zu der Ausmessung der Winckel ohnumgänglich erfodert würde.

Zu dem 12. §.

§. 10.

Bey allen diesen Arten einen Circul zu machen, läst sich die gegebene Erklärung mit leichter Mühe wieder anbringen, und zeigen, daß sich eine gerade Linie um einen festen Punct herum bewegt habe, bis an den Ort, wo sich die Bewegung angefangen habe.

Zu dem 13. §.

§. 11.

Dem Cörper wird von Flächen, den Flächen von Linien, und den Linien von Puncten die Grentze gesetzt. Eine Ausdehnung, welche die Grentze einer andern Ausdehnung ist, heist der Perimeter. Da nun die Circulfläche nothwendig einen Perimeter haben muß, welches die Circullinie ist: so hat man denselben die Peripherie des Circuls genennet. Denn wenn sich eine gerade Linie um einen festen Punct bewegt, so beschreibt diese Linie die Circulfläche, ihr anderer Endpunct aber eine krumme Linie, und diese ist die Peripherie des Circuls. Eine gerade Linie, welche von einem Puncte der Peripherie zu den andern gezogen wird, heist eine Sehne, eine Sehne, welche durch den Mittelpunct geht, der Diameter, und der Theil, welcher durch die Sehne von der Peripherie abgeschnitten wird, ein Bogen. Der Theil der Circulfläche, welcher von einer Sehne und Bogen eingeschlossen wird, wird ein Abschnitt (segmentum) und der Theil der Circulfläche, welcher von einem Bogen und zweyen Radiis eingeschlossen wird, ein Ausschnitt des Circuls (sector circuli) genennt.

Zu dem 15. §.

§. 12.

Wenn man zwey gerade Linien gegen einander hält: so behalten sie entweder immer einerley Weite von einander oder nicht. In dem ersten Falle sind sie parallel, in dem andern aber müssen sie, wenn sie verlängert werden, zusammen stossen, und alsdenn machen sie einen Winckel. Je grösser die Oeffnung ist, welche zwischen ihnen ist, desto grösser, und ie kleiner diese ist, desto kleiner ist der Winckel. Solchergestalt treffen wir bey iedem Winckel dreyerley an, nemlich zwey gerade Linien, einen Punct da sie zusammenstossen, und eine Oefnung, welche zwischen ihnen bleibt. Diese Oefnung wird in engern Verstande der Winckel, die beyden Linien die Schenckel, und der Punct da sie zusammen stossen, die Spitze des Winckels genennt.

nennt. Sonst kan freylich auch eine krumme Linie mit der andern, und eine krumme mit einer geraden einen Winckel machen, hier aber ist blos die Rede von geradlinichten Winckeln.

Zu dem 17. §.

§. 12.

Zwey Winckel, welche einerley Spitze haben, werden anguli contigui genennt, Winckel aber, welche dergestalt neben einander auf einer geraden Linie stehen, daß sie die Schenckel mit einander gemein haben, heissen anguli deinceps positi. Daher sind alle anguli deinceps positi auch contigui, nicht aber alle contigui auch auguli deinceps positi. Wenn nun eine Linie auf der andern dergestalt aufgericht ist, daß sie auf derselben angulos deinceps positos æquales macht, so steht sie auf derselben perpendicular. Die Mathematicker hätten gewiß Ursache die Perpendicularlinie höher zu halten, wenn man gewis wüste, daß die Worte des Ozanams eines berühmten Mathematickers und Mitgliedes der Parischen Academie der Wissenschaften vollkommen gegründet wäre. Denn der Herr von Fontenelle erzehlet in seiner Lobrede, welche er bey der Academie auf diesen Mann gehalten, daß er ein Jude gewesen, und alle abergläubische Ceremonien dieser Religion mitgemacht hätte, ohngeachtet die Mathematicker gegen die übrigen Gelehrten nicht anders als die Männer gegen die Weiber zu betrachtrachten wåren. Diese Verwunderung aber sey verschwunden, da er auf seinem Todtenbette gesagt: Last die Sorbonne disputiren, und den Pabst die Decision geben. Genung, ich weiß, ein Mathematicus geht nach der Perpendicularlinie ins Paradies. Ich will mich weder des Herrn von Fontenelle noch des Ozanams annehmen. Denn was würde ich mir nicht vor ein Unglück auf den Halß laden, wenn ich mit dem erstern behaupten wollte, es wåren die andern Gelehrten gegen die Mathematicker nicht anders als die Weiber gegen die Månner zu betrachten, indem sie sich kaum die Mühe nehmen, bisweilen zu der Weltweisheit und Mathematick ein großmüthiges Hagar trit mir nach zusprechen, sondern ich will nur die Ursache anzeigen, warum der gute Ozanam eben nach der Perpendicularlienie in das Paradies gehen wollen. Vermuthlich aber ist es keine andere gewesen, als weil die Perpendicularlinie allemahl der kürtzeste Weg von einem Orte nach den andern ist. Denn ich mag von einem Puncte gegen eine krumme oder gerade Linie, oder gegen eine krumme oder geradlinichte Fläche eine gerade Linie ziehen, was ich vor eine will, so ist sie iederzeit länger, als diejenige Linie welche von diesem Puncte gegen die gegebene Linie oder Fläche perpendicular gezogen werden kan.

Zu dem 22. §.

§. 14.

So wohl gerade als krumme Linien können unter einander parallel seyn, wenn sie nur von einerley Art sind, und beständig einerley Weite von einander behalten. So kann z. E. ein Circul mit einem andern Circul parallel seyn, wenn beyde aus einerley Mittelpuncte, obgleich mit verschiedener Eröffnung des Zirkels, beschrieben worden sind.

Zu dem 23. §.

§. 15.

Quadrate, Rectangula, Rhombi, und **Rhomboides,** sind **Parallelogramma** nur das **Trapezium** verdient nicht diesen Nahmen, weil seine Seiten nicht parallel sind.

Zu dem 24. §.

§. 16.

Die Wahrheit dieses Grundsatzes fließt aus der Eigenschaft der geraden Linie, daß sie der kürtzeste Weg zwischen zweyen Puncten sey.

Zu dem 25. §.

§. 17.

Zwey gerade Linien berühren einander zum wenigsten, wenn sie verlängert werden, oder sie berühren einander nicht. Wenn sie einander nicht berühren, sie mögen verlängert werden so weit als man will, so sind sie parallel, und schliessen keinen Raum ein. Wenn sie aber einan-

einander berühren, so berühren sie einander entweder nur in einem Puncte oder in zweyen. Berühren sie einander nur in einem Puncte; so entsteht ein Winckel; ein Winckel aber schliest keinen Raum ein. Berühren sie einander in zweyen Puncten: so machen sie beyde nur eine gerade Linie aus, und schliessen folglich ebenfalls keinen Raum ein. Derowegen können zwey gerade Linien keinen Raum einschliessen. Ein Raum welcher in Linien eingeschlossen ist, heist eine Figur. Folglich kan man aus zwey geraden Linien keine Figur machen, sondern ein geradelinichtes Zweyeck gehöret in das Reich der Unmöglichkeiten.

Zu dem 26. §.

§. 18.

Die Wahrheit dieses Satzes erhellet wieder daraus, daß die gerade Linie der kürtzeste Weg zwischen zweyen Puncten sey.

Zu dem 27. §.

§. 19.

Dieser Satz fliest aus der Erklärung des Circuls.

Zu dem 28. §.

§. 20.

Alle Bogen welche aus der Spitze eines Winckels innerhalb seinen Schenckeln beschrieben werden, haben gegen ihre Peripherien einerley Verhältniß. Alle Bogen aber, welche gegen ihre

ihre Peripherien einerley Verhältniß haben; haben eine gleiche Anzahl Grade. Derowegen haben alle Bogen, welche aus der Spitze eines Winckels innerhalb den Schenckeln beschrieben werden, eine gleiche Anzahl Grade.

Zu dem 30. §.

§. 21.

Wenn gerade Linien und Winckel einander decken, so haben sie einerley Grentzen. Es fallen also die Endpuncte der geraden Linien auf einander, wenn sie einander decken; derowegen sind sie einander gleich (§. 24. Geom.) Wenn Winckel einander decken sollen: so muß die Spitze des einen auf die Spitze des andern gelegt werden, und die Schenckel des einen müssen auf die Schenckel des andern fallen. Doch ist nicht nöthig, daß die Schenckel des einen Winckels die Schenckel des andern decken.

Zu dem 31. §.

§. 22.

Wenn Figuren einander decken, so decken auch alle ihre Seiten und Winckel einander. Da nun solchergestalt alle Seiten Winckel, und der eingeschlossene Raum der einen Figur so groß sind, als die Seiten, Winckel und der eingeschlossene Raum der andern Figur: so ist nichts in der einen Figur, was nicht auch in der andern seyn solte. Derowegen sind sie einander gleich und ähnlich. (§. 33. der Anm. zu der Rechenkunst) Eben darum müssen die Figuren, welche einander decken sollen, nicht nur gleich, sondern auch ähnlich seyn.

Zu dem 35. §.

§. 23.

Es sey der eine Winckel $= A$. Der andere $= B$. Das Maaß $= M$. So ist

$A = M$.
$B = M$. (per hypothesin.)

Derowegen $A = B$. (§. 22. Ar.)

Zu dem 37. §.

CD ist perpendicular auf AB (per hypoth.)

Das Maaß des Winckels o ist der Bogen AD
Das Maaß des Winckels x ist der Bogen DB
(§. 16. Geom.)

Derowegen ist das Maaß von $o + x$ der Bogen ADB (§. 24. Ar.)

Nun ist der Bogen ADB auf einer geraden Linie aus einem auf derselben angenommenen Puncte beschrieben worden, und ist folglich ein halber Circul (§. 36 Geom.)

Also ist das Maaß von $o + x = \frac{1}{2}$ Circul.
$\frac{1}{2}$ Circ. $= 180^\circ$ (§. 14. Geom.)

$o + x = 180^\circ$
Nun ist $o = x$ (§. 17. Geom.)

$o = 90^\circ$ Grad.

Der

Der Winckel o ist von der Perpendicularlinie gemacht worden, und also ein rechter Winckel (§. 18. Geometr.)

Derowegen hat ein rechter Winckel zu seinem Maaße 90°. Und da 90°. der vierte Theil von 360°. das ist, der vierte Theil von einem Circul ist: so hat ein rechter Winckel zu seinem Maaße einen Quadranten.

Zu dem 38. §.

§. 25.

o und x sind anguli deinceps positi. Das Maaß des Winckels x ist der Bogen AD. Das Maaß des Winckels o der Bogen DB. (§. 16. Geom.) Derowegen ist

$$x + o = AD + DB.$$
$$AD + DB = \tfrac{1}{2}\ \text{Circ.}\ (\text{§. 36. Geom.})$$

$$x + o = \tfrac{1}{2}\ \text{Circ.}\ (\text{§. 22. Ar.})$$
$$\tfrac{1}{2}\ \text{Circ.} = 180^\circ\ (\text{§. 14. Geom.})$$

$$x + o = 180^\circ\ (\text{§. 22. Ar.})$$

Zu dem 40. §.

$$o + u = 180^\circ\ (\text{§. 38. Geom.})$$
$$x + u = 180^\circ\ (\text{§. 38. Geom.})$$

$$o + u = x + u\ (\text{§. 22. Arith.})$$
$$u = u\ (\text{§. 20. Ar.})$$

$$o = x\ (\text{§. 25. Ar.})$$

Zu dem 49. §.

§. 26.

Die Natur bringet die grösten Wercke mit sehr geringer Mühe hervor, und sie hat nur einige wenige Maximen, nach welchen sich alle diejenigen Veränderungen richten müssen, welche in der Welt geschehen. In der Geometrie folgt man ihrer Spur auf das genaueste, und führet das prächtigste Gebäude auf sehr wenige Grundsteine auf, weil man überzeuget ist, daß die Uberzeugung der Beweise nicht so wohl von der Menge der Gründe, als vielmehr von der Gewißheit derselben ihren Ursprung erhalte. Denn wie ofte geschieht es nicht, daß dreysig mit vieler Mühe zusammen gesuchte Gründe durch einen eintzigen über den Haufen gestossen werden, welcher wichtiger ist, als diese alle zusammen genommen. Daher thun die neuern Weltweisen sehr wohl daran, daß sie sich nicht so wohl um die Menge, als vielmehr um die Gewißheit der Gründe bekümmern, aus welchen sie ihre Meinung erweißlich zu machen gedencken. Sie folgen den Geometern und diese folgen der Natur. Wir haben hier eine Probe davon. Denn die drey Lehrsätze von dem Triangel, welche in dem 49. 50. und 51. §o unsers Herrn Verfassers enthalten sind, sind beynahe alleine hinreichend alles dasjenige zu erweisen, was in der gantzen Geometrie abgehandelt wird, und es ist daher nöthig, daß man sie wohl in das Gedächtdächtniß fasse, um sie allenthalben wieder anbringen zu können. Ueberhaupt ist dabey zu mercken, daß sich bey einem ieden Triangel sieben Sachen von einander unterscheiden lassen. Dieses ist der Raum welcher eingeschlossen wird, drey Linien welche ihn einschliessen, und drey Winckel. In allen diesen dreyen Sätzen wird geschlossen, daß wenn drey Stücke in dem einen Triangel eben so groß sind, als dreye in dem andern; so müssen auch die übrigen vier Stücke in dem einen Triangel so beschaffen seyn, wie in dem andern. Freylich ist es aber nicht einerley um diesen Schluß zu machen, was man vor drey Sachen annimmt, welche in dem einem Triangel eben so groß sind als in dem andern. Denn wenn man zum Exempel annehmen wollte, daß die drey Winckel in dem einem Triangel so groß wie in dem andern wären, so würde dennoch daraus nicht folgen, daß auch die drey Seiten des Triangels, und der Raum den diese drey Linien in dem einen einschliessen, den Seiten und dem Raume des andern gleich seyn müste. Damit wir also sehen, welches die Bedingungen sind, aus welchen man auf die vollkommene Gleichheit und Aehnlichkeit zweyer geradlinichten Triangel einen Schluß machen könne: so wollen wir den Inhalt des 49. §. betrachten. Dieser aber ist folgender: **Wenn zwey Seiten eines Triangels nebst dem Winckel welchen sie einschliessen, zweyen Seiten eines andern Triangels und den Winckel so sie einschliessen,** einzeln genommen gleich sind: so sind die gantzen Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich. Wenn nun zwey Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich sind: so ist nichts in dem einen, daß sich nicht auch in dem andern befinden sollte. Derowegen sind sie einerley. (§. 11. Einl.) Und da sie nicht nur in der Grösse, sondern auch in den übrigen Eigenschaften mit einander übereinkommen, so sind sie einander gleich und ähnlich, (§. 14. 27. Einleit.) und haben folglich eine Congruentz (§. 32. Einleit.) Der Beweiß dieses Lehrsatzes, welchen unser Herr Verfasser gegeben hat, ist folgender: Man soll beyde Triangel in den Gedancken auf einander legen, so wird, weil die Linie ab = AB, und Linien die einander gleich sind, einander decken (§. 30. Ge.): so wird, sage ich, auch die Linie ab des einen Triangels die Linie AB. des andern decken müssen. Wenn aber eine Linie die andere deckt; so fallen ihre äussersten Puncte auf einander (§. 21). Derowegen fällt der Punct a auf den Punct A und der Punct b auf den Punct B. Weil ferner vermöge der Bedingung des Satzes der Winckel a = A, und gleiche Winckel einander decken (§ 30. Geom.): so wird auch der Winckel a den Winckel A decken müssen. Winckel die einander decken, deren Schenckel fallen auf einander, derowegen wird nicht nur die Linie ab auf die Linie AB fallen müssen, welches schon vorher ausgemacht ist, sondern es muß auch die

Linie

Linie ac auf die Linie AC fallen, das ist, es muß der Punct c in die Linie AC kennen. Dadurch aber ist noch nicht ausgemacht daß der Punct c auf den Punct C fallen müsse. Nein, dieses fließt erst aus der dritten Bedingung unseres Lehrsatzes. Denn weil vermöge derselben die Linie ac = der Linie AC und Linien die einander gleich sind, einander decken, wenn sie auf einander gelegt werden: (§. 30. Geom.) so muß auch die Linie ac die andere Linie AC decken, indem es bereits ausgemacht ist, daß sie auf einander fallen. Wenn Linien einander decken, so fallen ihre Endpuncte auf einander. Derowegen fällt der Punct c auf C. Fällt aber der Punct b auf B und c auf C: wer sieht nicht, daß auch die Linie cb die andere Linie CB decken müsse (§. 21.). Da nun solchergestalt alle Seiten des einen Triangels die Seiten des andern, die Winckel des einem, die Winckel des andern und der eine gantze Triangel den andern gantzen Triangel decken, so müssen freylich die gantzen Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich seyn (§. 31. Geom.). W. Z. E.

Zu dem 50. §.

§. 27.

Wenn eine Seite und die zwey daran liegende Winckel in einem Triangel so groß sind als in einem andern Triangel; so sind die

gantzen Triangel und die gleichnahmigen Stücke einander gleich.

Beweiß.

Weil die Linie AB = ab: so müssen sie einander decken (§. 30. Geom.). Derowegen fällt der Punct A auf a und der Punct B auf b Weil ferner der Winckel A = dem Winckel a, und Winckel die einander gleich sind, einander decken (§. 30. Geom): so muß auch der Winckel A den Winckel a decken. Solchergestalt fällt nicht nur die Linie AB auf die Linie ab, sondern es muß auch die Linie AC auf die Linie ac fallen. (§. 30. Geom.) Folglich muß der Punct C in die Linie ac kommen. Weil endlich auch der Winckel B dem Winckel b gleich ist: so decken auch diese beyden Winckel einander, (§. 30. Geom.) und der Punct C muß also in die Linie bc fallen. Da er nun auch in die Linie ac kommen soll: so muß er auf den Punct c kommen, welcher Punct so wohl in die Linie ac als bc gehöret. Da nun hieraus erhellet: es müsse der Punct A auf a, der Punct B auf b und der Punct C auf c fallen: so muß auch die Linie AC die Linie ac, die Linie BC die Linie bc, der Winckel C den Winckel c und der gantze Triangel ABC den gantzen Triangel abc decken. Derowegen sind die gantzen Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich.

W. Z. E.

Zu dem 51. §.

§. 28.

Wenn alle drey Seiten eines Triangels den dreyen Seiten eines andern Triangels, eintzeln genommen, gleich sind: so sind die gantzen Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich.

Beweiß.

Weil die Linie ac = AC: so decken sie einander. (§. 30. Geom.) Es fällt also der Punct a auf A und c auf C. Nun ist nur noch zu erweisen, daß auch der Punct b auf den Punct B kommen müsse. Man beschreibt zu dem Ende mit der Linie AB den Bogen y und mit der Linie CB den Bogen x: so kann man hierbey folgenden Satz appliciren. Wenn eine gerade Linie die dem Radio eines Circuls gleich ist mit ihrem einem Endpuncte an den Mittelpunct des Circuls gesetzt wird: so muß der andere Endpunct in die Peripherie kommen. (§ 27 Geom.) Nun ist die Linie ab = der Linie AB. Es wird ferner der Punct a auf den Punct A und also an den Mittelpunct des Circuls y gesetzt. Derowegen muß der Punct b in die Peripherie dieses Circuls, das ist, in den Bogen y kommen. Eben so ist klar, weil cb = CB und der Punct c auf C fällt, so müsse der Punct b in den Bogen x kommen. Soll aber der Punct b zugleich in dem Bogen y und x seyn: so muß er auf den Punct B fallen. Denn dieser gehört so wohl in den Bogen x als y. Wenn aber der Punct a auf A, b auf B, c auf C fällt: so ist klar, daß die Linien und Winckel beyder Triangel einander decken, und daß also beyde Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich sind. W. Z. E.

Zu dem 61. §.

§. 29.

Beweiß.

AC = aC (per Operationem s. hypoth.)
BC = bC (per Operat.)
x = y (§. 40. Geom.)

---

ab = AB (§. 49. Geom.) W. Z. E.

Zu dem 64. §.

§. 30.

C = B (per Operat.)
CE = EB (per Operat.)
E = E (§. 40. Geom.)

CD = AB (§. 50. Geom.) W. Z. E.

Zu dem 67. §.

§. 31.

Am allerbequemsten kan man mit einer geraden Linie eine andere folgendergestalt parallel ziehen. Man nimmt einen rechtwinckelichten höltzernen oder elffenbeinern Triangel und legt den

den einen Cathetus desselben an die gerade Linie mit welcher eine andere Parallel gezogen werden soll, an die Hypothenuse dieses höltzernen Triangels aber legt man ein Lineal und schiebt an demselbigen den Triangel bis an den Punct hinauf; durch welchen eine Linie mit der gegebenen parallel gezogen werden sollte: so kan man an dem Cathetus des rechtwinckelichten Triangels die verlangte Linie ziehen.

Zu dem 69. §.

§. 32.

Satz.

CG ist perpendicular auf AB.

Beweiß.

DC = CE (per Oper. § 27. Geom.)
DF = FE (§. 27. Geom.)
FC = FC (§. 20. Ar.)

Also der Winckel DFG = EFG (§. 51. Geom.)
DF = FE (§ 27. Geom.)
FG = FG (§. 20. Ar.)

also sind die Winckel bey G einander gleich (§. 49. Geom.) Wenn eine Linie dergestalt auf einer andern aufgerichtet ist, daß die Winckel, welche sie auf beyden Seiten macht, einander gleich sind: so stehet sie perpendicular (§. 17. Geom.) Derowegen ist CG perpendicular auf AB. W. Z. E.

Zu dem 70. §.

§. 33.

Satz. GC ist perpendicular auf AB.

Beweiß.

CD = CE
DF = FE (§. 27. Geom.)
FC = FC (§. 20. Ar.)

Also sind die Winckel bey C gleich (§. 51 Geom.) und GC perpendicular auf AB. (§. 17. Geom.)

W. Z. E.

Zu dem 71. §.

§. 34.

Die zwey Seiten, welche in einem rechtwinckelichten Triangel den rechten Winckel einschliessen, werden **Catheti** genennet, und die Seite, welche dem rechten Winckel gegen über liegt, heist die **Hypothenuse**, welche Benennungen bey dem gegenwärtigen Lehrsatze gemerckt werden können. Es hat dieser Satz eben so als wie die 3. vorhergegangenen Lehrsätze eine häuffige Application. Gemeiniglich pflegt man ihn bey rechtwinckelichten Triangeln anzubringen, und alsdenn könte man ihn folgendergestalt ausdrücken: **Wenn in zweyen recht winckelichten Triangeln ein Cathetus des einen einem Cathetus des andern und die Hypothenuse des einem der Hypothenuse des andern gleich ist: so sind die gantzen Triangel**

gel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich.

Der Beweiß ist folgender;

Man beschreibe durch C in der Weite BC einen Bogen FG und lege in Gedancken den Triangel abc auf den andern ABC, dergestalt, daß der Punct a auf A und ab auf AB fällt. Da nun die Linie ab der Linie AB gleich ist: so müssen beyde einander decken (§. 30. Geom.) und folglich der Punct b auf den Punct B fallen. (§. 21.) Weil ferner der Winckel a dem Winckel A gleich ist: (§. 37. Geom.) so müssen auch diese beyden Winckel einander decken (§. 30. Geom.) das ist, es müssen ihre Schenckel auf einander fallen (§. 21.). Es fällt also die Linie ab nicht nur auf AB, sondern es muß auch die Linie ac auf die Linie AC fallen. Wenn aber dieses geschehen soll: so muß der Punct c in die Linie AC zu stehen kommen, obgleich der Ort dadurch noch nicht bestimmt ist, wo eigentlich der Punct c hinzustehen kommt. Es kann aber dieser folgendergestalt bestimmt werden. Weil die Linie bc = der Linie BC und wie vorher erwiesen, der Punct b auf den Punct B fällt: so muß der Punct c in den Bogen FG kommen, von welchem die Linie BC der Radius ist. (§. 28.) Solchergestalt soll der Punct c zugleich in den Bogen FG und die Linie AC zu stehen kommen, er fällt also dahin wo der gedachte Bogen und die Linie AC einander durch-

schnei-

schneiden: denn so ist er zugleich in der Linie AC und dem Bogen FG anzutreffen. Es fällt also der Punct c auf C. Da nun vorher schon ausgemacht ist, daß der Punct a auf A und b auf B komme: so sieht iedermann, daß alle Seiten und Winckel des einen Triangels die Seiten und Winckel des andern decken, und daß folglich die gantzen Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich sind. W. Z. E.

Zu dem 72. §.

§. 35.

Hypoth. AB ist parallel mit CD.

Thes. 1) $x = y$

2) $o = y$

3) $u + y = 180°$

Beweiß.

Es sey AB parallel mit CD; so behalten die beyden Linien AB und CD beständig einerley Weite von einander (§. 22. Geom.). Die Entfernung einer Sache von der andern wird allemahl durch die kürtzeste Linie gemessen, welche man von einem Orte nach den andern ziehen kann. Nun ist die Perpendicularlinie iederzeit die kürtzeste Linie, welche zwischen zweyen Sachen anzutreffen ist (§. 12.). Derowegen ist die Perpendicularlinie der Maasstab der Entfernung. Da nun die beyden Linien AB und CD beständig einerley Weite von einander

behal-

behalten (per hypoth.): so müssen die Perpendicularlinien zwischen ihnen gleich groß seyn. Man ziehe also HI perpendicular auf AB und GK perpendicular auf CD: so ist HI = GK. Weil ferner allemahl ein rechter Winckel entsteht, wenn eine Perpendicularlinie gezogen wird: (§. 18. Geom.) so ist bey I und K ein rechter Winckel. Nun sind alle rechte Winckel einander gleich. (§. 37. Geom.). Derowegen ist der Winckel I = K = 90°. Es ist also der Triangel HIG eben so wohl als der Triangel HKG ein rechtwincklichter Triangel und die Linie HG ist die Hypothenuse zugleich von dem Triangel HIG und GKH. Da nun

HI = GK
I = K = 90°
HG = HG (§. 20. Ar.)

so ist ein Cathetus HI in dem rechtwincklichten Triangel HIG einem Catheto GK in dem rechtwinckelichten Triangel HKI und die Hypothenuse HG des einem Triangels der Hypothenuse HG des andern gleich. Derowegen sind die gantzen Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben gleich. (§. 71. Geom.) Folglich ist auch der Winckel x = y. Nun sind x und y Wechselswinckel an Parallellinien. Also ist klar, daß die Wechselswinckel an Parallellinien einander gleich sind. **Welches das erste war.**

Es sey wie vorhin AB parallel mit CD: so ist vermöge des vorhergebenen Beweises

$$x = y \quad (\text{n. 1.})$$

Da aber auch $x = o$ (§. 40. Geom.)

so ist $o = y$ (§. 22. Ar.)

Das ist der äussere Winckel o ist dem innern y gleich, wenn die beyden Linien AB und CD mit einander parallel sind. **Welches das andere war.**

Es sey wiederum AB parallel mit CD: so ist vermöge des zweyten Beweises

$$o = y \quad (\text{n. 2.})$$

Nun $o + u = 180^{\circ}$ (§. 38. Geom.)

so ist $u + y = 180^{\circ}$ (§. 15. Einl.)

das ist, die beyden innern Winckel an Parallelinien u und y machen zusammen genommen 180°. **Welches das dritte war.**

Zu dem 73, §.

§. 36.

Der vorige Lehrsatz läst sich auch umkehren, das ist, man kann seine Bedingung zu den Satze, und den Satz zu der Bedingung machen. Da es nun nicht erlaubt ist, dergleichen mit einem jeden Satze zu thun: so muste der Satz bewiesen werden. Wir haben hier wieder wie in dem vorhergehenden Lehrsatze drey Sätze von einander zu unterscheiden:

1) Wenn

1) Wenn zwey Linien von einer dritten dergestalt durchschnitten werden, daß die Wechselswinckel einander gleich sind: so sind die Linien parallel.

2) Wenn zwey Linien von einer dritten durchschnitten werden, und es ist der äussere Winckel dem innern gleich: so sind die Linien parallel.

3) Wenn zwey Linien von einer dritten durchschnitten werden, und es machen die beyden innern Winckel zusammen genommen 180°: so sind die Linien parallel.

Beweiß.

1) Man lasse aus dem Puncte G einen Perpendickel GK auf die Linie CD herunter fallen. Man fasse ferner die Linie HK mit dem Zirckel und trage sie aus G in I das ist, man mache GI = HK und ziehe von H nach I eine gerade Linie.

Weil nun x = y (per Hypoth.)
GI = HK (per Hypoth.)
HG = HG (§. 20. Ar.)

so sind zwey Seiten nebst dem Winckel welchen sie einschliessen in dem Triangel HIG zweyen Seiten und dem Winckel den sie einschliessen in dem Triangel GHK gleich. Es sind also die gantzen Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich. (§. 49. Geom.) Es ist also auch der Winckel I = K. Und da der Winckel K ein rechter Winckel ist: so muß auch der Winckel I ein rechter Winckel seyn. (§ 37 Geom.) Wo ein rechter Winckel ist, da ist auch eine Perpendicularlinie. (§. 18. Geom.) Derowegen sind HI und GK zwey Perpendicularlinien, welche wegen der Gleichheit der Triangel HIG und GKH einander gleich sind. Nun sind die Perpendicularlinien das Maaß der Entfernungen. Es haben also die Linien AB und CD einerley Entfernung. Linien welche einerley Entfernungen von einander behalten, sind parallel. (§. 22. Geom.). Also ist die Linie AB mit der Linie CD parallel. **Welches das erste war.**

2) $o = y$ (per Hypoth.)
$o = x$ (§. 40. Geom.)

Also ist $x = y$ (§. 22. Arith.)
Folglich AB parallel mit CD. (num. 1.)

3) $y + u = 180°$. (per Hypoth.)
$o + u = 180°$ (§. 38. Geom.)

$y + u = o + u$ (§ 22. Arith.)
$= u$ (§. 20. Ar.)

$y = o$ (§. 25. Ar.)
Folglich AB parallel mit CD. (num. 2.)

Zu

Zu dem 74. §.

Satz.

$$1 + 2 + 3 = 180^\circ.$$

Beweiß.

§. 37.

Es sey DE parallel mit AB (per Hypoth.):

N. 1. so sind 1 und $|$ ingleichen 2 und $\|$ Wechselswinckel an Parallellinien. Derowegen

$1 = |$ (§. 72. Geom.)

$2 = \|$ (§. 72. Geom)

$3 = 3$ (§. 20. Ar.)

$| + 2 + 3 = | + \| + 3$ (§..24 Ar.)

$| + \| + 3 = 180^\circ$ (§. 83. Geom.)

$| + 2 + 3 = 180^\circ$ (§. 24. Ar.)

W. Z. E.

N. 2. $1 + 2 + 3 = 180^\circ$ (num. 1.)

$3 + 4 = 180^\circ$ (§. 38 Geom.)

$1 + 2 + 3 = 3 + 4$ (§. 22. Ar.)

$3 = 3$

$1 + 2 = 4.$ (§. 25. Ar.) W. Z. E.

Zu dem 75. §.

§. 38.

1) Ein rechter Winckel hat 90° (§. 37. Geom.) Wenn also zwey rechte Winckel in einem

Triangel wären: so würden diese beyde Winckel 180° ausmachen. Nun halten die drey Winckel zusammen genommen 180° (§. 74. Geom.). Derowegen würde für den dritten Winckel nichts übrig bleiben. Es würde demnach ein Triangel entstehen, welcher nur zwey Winckel hätte, und da dieses ungereimt ist, so können nicht zwey rechte Winckel in einen Triangel seyn.

2) Wenn der eine Winckel ein rechter Winckel ist: so hält er 90° (§. 37. Geom.). Da nun alle drey Winckel in den Triangel zusammen genommen 180° haben. (§. 74. Geom.): so bleibet in diesem Falle für die übrigen beyden noch 90° übrig.

3) Wenn zwey Linien auf einer dritten perpendicular stehen, so machen sie mit derselben zwey rechte Winckel. (§. 18. Geom.). Gesetzt nun sie sollten zusammen stossen, wenn sie verlängert würden: so würde ein Triangel entstehen, in welchem zwey rechte Winckel wären; da aber dieses unmöglich ist (no. 1.): so können zwey Linien die auf einer dritten perpendicular stehen, wenn sie verlängert werden, niemals zusammen stossen. Sie behalten also immer einerley Weite von einander und sind folglich parallel. (§. 22. Geom.)

Zu dem 76. §.

§. 39.

Wenn zwey stumpfe Winckel in einem Trianangel wären: so würden diese zusammen genommen mehr als 180° ausmachen (§. 18. Geom.) und solchergestalt würde vor den dritten Winckel weniger als nichts übrig bleiben. (§. 74. Geom.)

Zu dem 79. §.

Hypoth. AC = CB.
CD perpendicular auf AB.

§. 40.

Thes. 1) x = y
2) m = n
3) AD = DB
4) △ ADC = △ BDC

Beweiß.

Es sey CD perpendicular auf AB (per Hypoth.)
AC = CB (per Hyp.)
CD = CD (§ 20. Ar.]

so ist x = y (§. 71. Geom.)
und m = n
AD = DB
△ ADC = △ BDC
W. Z. E.

Zu dem 81. §.

§. 41.

Hypoth. x = y

Thes. AC = CB

Beweiß.

Es sey $m = n$ (per Hypoth.)
$x = y$ (per Hypoth)

$o = u$ (§. 78. Geom.)
$m = n$ (per. Hyp.)
$CD = CD$ (§. 20. Ar.)

$AC = CB$ (§. 50. Geom.)
W. Z. E.

Zu dem 83. §.

Beweiß.

Num. 1. $AC = CB$ (§. 27. Geom.)

$u = x$ (§. 79. Geom.)
$o = x + u$ (§. 74. Geom.)

$o = u + u$ (§. 15. Einleit.)
$u + u = 2u$ (§. 71. Anmerck. d. Arith.)

$o = 2u$ (§. 22. Ar.) W. Z. E.

Num. 2. $x = 2y$ (n. 1.)
$u = 2o$ (n. 1.)

$x + u = 2y + 2o$ (§. 24. Ar.)
W. Z. E.

Num.

$$\begin{array}{l} \text{Num. } 3.\ o + x = 2u + 2y \quad (\text{n. } 1.) \\ \qquad o = 2u \qquad (\text{n, } 1.) \\ \hline \qquad x = 2y \quad (\S.\ 25.\ \text{Ar.}) \end{array}$$

W. Z. E.

Zu dem 90. §.

§. 42.

$$\begin{array}{l} AC = CB \ (\S\ 27.\ \text{Geom.}) \\ AD = DB \ (\S.\ 27\ \text{Geom.}) \\ CD = CD \ (\S\ 20.\ \text{Ar.}) \\ \hline o = y \ (\S.\ 51.\ \text{Geom.}) \\ CE = CE \ (\S.\ 20.\ \text{Ar.}) \\ AC = CB \ (\S.\ 27.\ \text{Geom.}) \\ \hline AE = EB \ (\S.\ 49.\ \text{Geom.}) \end{array}$$

W. Z. E.

§. 43.

Weil vermöge des (§. 90.) gegebenen Beweises auch der Winckel AEC dem Winckel BEC gleich ist: so steht die Linie CE auf AB perpendicular, (§. 17 Geom.) und ist folglich so wohl der Winckel AEC als BEC ein rechter Winckel. (§. 18 Geom.) Es wird also durch diese Auflösung die Linie AB allemahl durch eine Perpendicularlinie in zwey gleiche Theile getheilt.

Zu dem 91. §.

§. 44.

Eine geometrische Auflösung ist diejenige, welche nach einer richtigen Regel geschiehet, und also nothwendig zutreffen muß. Dergleichen Auflösung kann durch den Verstand völlig begriffen werden und man kann von allem was da geschiehet, einen zureichenden Grund anzeigen. Eine mechanische Auflösung hingegen wird diejenige genennt, die durch Versuchen geschiehet, und von deren Richtigkeit man weiter keinen Grund als die Erfahrung anzuführen weiß. Ohngeachtet nun die geometrischen Auflösungen iederzeit besser sind als die mechanischen: so sind doch diese deswegen sonderlich in der Ausübung nicht zu verwerfen, indem sie uns bisweilen geschwinder zu unserm Zwecke führen und der Irrthum, wenn ja einer begangen wird, unendlich klein ist. Gleichwie man geometrische und mechanische Auflösungen von einander unterscheidet: so macht man auch zwischen geometrischen und mechanischen Beweisen einen Unterscheid. Ein geometrischer Beweiß ist nichts anders als eine Menge aneinanderhängender Vernunftschlüße, darinnen kein Satz angenommen wird, welcher nicht entweder vollkommen gewiß ist, oder vollkommen erwiesen worden. Ein mechanischer Beweiß hingegen ist ein blosses Experiment oder Probe, ob eine Sache eintreffe. So haben wir z. E. einen geometrischen

Beweiß davon gegeben, daß die Winckel in einem Triangel zusammen genommen 180° ausmachen. Denn dieser Beweiß war aus vorher erwiesenen Gründen durch an einanderhängende, das ist, durch solche Schlüsse hergeleitet, da der Hintersatz des vorhergehenden allemahl zum Fordersatze des folgenden wird. Und dieses ist der sicherste Weg zu der Gewißheit zu gelangen, aber ein Weg der ausser den Geometern von gar wenigen betreten wird. Nun wollen wir sehen, wie man den gedachten Satz mechanisch erweisen können. Man hätte mit einerley Eröfnung des Zirkels aus der Spitze eines ieden Winckels in dem Triangel einen Bogen beschrieben; wenn man nun diese drey Bogen auf einem mit eben diesem Radio beschriebenen halben Circul getragen hätte: so würde man gefunden haben, daß diese drey Bogen zusammen genommen, den halben Circul ausgemacht hätten. Hätte man nun ferner bedacht, daß der halbe Circul 180° hätte: so würde man daraus den Schluß gemacht haben, daß diese drey Bogen und folglich auch diese drey Winckel, deren Maaß diese drey Bogen sind, zusammen 180° ausmachen müssen. Jedermann siehet, daß ein geometrischer Beweiß einem mechanischen weit vorzuziehen sey. Denn jener zeigt mir, daß die Sache so und nicht anders seyn müsse, dieser aber thut nur dar, daß sie in einem gewissen und besondern Falle eintrifft, wodurch, wenn man genau von der Sache sprechen will, keine richtige allgemeine Erkäntniß entstehen kann. Denn in dem angeführten Exempel schliessen wir in der That folgendermassen: weil ich sehe, daß in dem Triangel, welchen ich auf dem Papiere beschrieben habe, die drey Winckel zusammen genommen, 180° ausmachen, und ich gleichwohl keinen Grund finde, warum dieses nicht auch bey den übrigen Triangeln so seyn sollte; so werden in iedem Triangel die Winckel zusammen genommen, 180° ausmachen müssen. Aber wir finden öfters keinen Grund, wo doch einer vorhanden ist, und alsdenn sind wir der Gefahr zu irren unterworffen, wie zum Exempel geschehen würde, wenn man auf eine ähnliche Art schliessen wolte und sagen: der Magnet zieht das Eisen an sich, nun finde ich keinen Grund, warum das Kupfer nicht auch das Eisen an sich ziehen sollte; derowegen zieht das Kupfer das Eisen an sich. Ein anderes ist es erweisen, daß eine Sache keinen zureichenden Grund haben könne, weil sie etwas wiedersprechendes in sich hat, ein anderes aber, den Grund von einer Sache nicht einsehen. In dem letztern Falle haben wir weiter nichts als einen sehr geringen Grad der Wahrscheinlichkeit, welcher mit der Menge der angestellten Proben wächst, und nur alsdenn den Nahmen einer völligen Gewißheit haben kann, wenn man in allen möglichen Fällen die Probe gemacht hat, welches letztere aber zu thun öfters unmöglich ist.

ist. Denn man wird solchergestalt durch mehrere angestellte Versuche gar leicht aus dem Irrthume geholfen, wenn ja einer begangen seyn sollte. Sollen wir also die mechanischen Beweise verwerffen? Nein! wir würden fast alle menschliche Erkäntniß, ausser der Arithmetick und Geometrie, über den Haufen stossen, wenn wir dieses thun wollten. Denn nur in diesen Wissenschaften kann man von allen gewiß seyn, ohne eine Probe anzustellen. Dem aber ohngeacht haben auch hier die mechanischen Beweiße ihren Nutzen, sie sind eine Nahrung für diejenigen, welche noch Kinder am Verstande sind, gleichwie die geometrischen Beweiße für diejenigen gehören, deren Verstand bereits zu der gehörigen Reiffe gelanget ist. Ich bin daher der Meinung, daß es thöricht sey, Kindern, welchen man die Geometrie beybringen will, solche ohne alle Beweiße vorzutragen. Ich halte es aber für noch viel thörichter, sie mit geometrischen Demonstrationen zu quälen. Denn wenn man ihnen die Geometrie ohne alle Beweiße erlernen läst: so nehmen sie alles auf guten Glauben an, und gewöhnen sich dadurch alles dasjenige für wahr zu halten, was ihnen von iemanden gesagt wird, von dem sie sich einbilden, daß er es besser wissen müsse, als wie sie. Sie verfallen also dadurch in das Vorurtheil des Ansehens, das ist, in eine Kranckheit, welche noch schlimmer ist als die Pest, indem sie beynahe das gantze menschliche Geschlecht angesteckt hat, und ohneracht sie schon viel tausend Jahre gedauret hat, dennoch keine Hoffnung übrig läst, daß sie iemals aufhören werde. Ohngeachtet nun sonsten die Geometrie das sicherste Gegengifft darwieder ist: so würde sie doch eine gantz andere Würckung verrichten, wenn man sie ohne Beweise vortragen wollte. Soll man also einem Kinde von sieben Jahren den Euclides zu lesen geben, und ihm alles auf das schärffste beweisen? In Wahrheit dieses wäre eben so klug, als wenn man ein neugebohrnes Kind auf Pumpernickel und Westphälischen Schincken zu Gaste bitten wollte; aber was, soll man denn thun? Ich sage, man soll ihnen mechanische Beweise von den geometrischen Lehrsätzen geben. Denn diese können sie begreiffen, und dadurch werden sie angewöhnt, nichts ohne zureichenden Grund für wahr zu halten, welches die Hauptabsicht ist, die man bey Erlernung der Geometrie in einer noch zarten Jugend haben kann.

Zu dem 92. §.

§. 45.

Hier ist von einem Circul (de vno eodemque circulo) die Rede. Denn gleiche Bogen aus verschiedenen Circuln haben nicht gleiche Sehnen, gleichwie auch gleiche Sehnen von verschiedenen Circuln nicht gleiche Bogen haben können.

Num. 1. Hypothesis. der Bogen AB = DE

Thesis. die Sehne AB = DE

Beweiß.

Der Bogen AB = DE (per Hypoth.)

o = x (§. 16. Geom.).

AC = CE

BC = CD (§. 27. Geom.)

Die Sehne AB = DE (§. 49. Geom.)

W. Z. E.

Num. 2. Hypoth. Die Sehne AB = DE

Thesis. Der Bogen AB = DE

Beweiß.

Die Sehne AB = DE (per Hypoth.)

AC = CE

BC = CD (§ 27. Geom.)

o = x (§. 51. Geom.)

Der Bogen AB = DE. W. Z. E.

Zu

Zu dem 94. §.

§. 46.

AF = FB (per Operat. §. 90.)
Bey F sind rechte Winckel (§. 43.) (§. 18. Geom.).
EF = EF (§. 20. Ar.)

Also ist die Sehne AE = EB (§. 49. Geom.)

Folglich der Bogen AE = EB (§. 92. Geom.)

W. Z. E.

Zu dem 95. §.

§. 47.

Dieser Lehrsatz enthält zwey Hauptsätze in sich, deren ieder wieder aus zwey andern bestehet. Wir wollen einen nach den andern betrachten. Der erste ist also:

Num. 1. **Die Perpendicularlinie, welche die Sehne in zwey gleiche Theile theilt, theilt auch den Bogen in zwey gleiche Theile.**

Beweiß.

Der Beweiß kann entweder eben der seyn, welcher bey dem 94. §. gegeben worden ist, oder man kann ihn auch folgendergestalt abfassen: Weil

DA perpendicular auf EF (per Hypoth.)

so

so sind bey G rechte Winckel. (§. 18. Geom.)
Weil ferner EG = GF (per Hypoth.)
GA = GA (§. 20. Ar.)

so ist der Winckel EAD = DAF (§. 49. Geom.)

Winckel die einander gleich sind, haben einerley Maaß (§. 35. Geom.) also muß das Maaß des Winckels EAD dem Maaße des Winckels DAF gleich seyn. Nun sind dieses Winckel an der Peripherie des Circuls, und der Winckel an der Peripherie hat zu seinem Maaße den halben Bogen, worauf er stehet. (§. 83. Geom.) Es steht aber der Winckel DAF auf dem Bogen DF und der Winckel DAE auf dem Bogen DE. Derowegen ist der halbe Bogen DF dem halben Bogen DE gleich. Wenn zwey Hälften einander gleich sind: so sind auch die gantzen einander gleich. (§. 24. Arith.) Also ist der gantze Bogen DF dem Bogen DE gleich.

W. Z. E.

Num. 2. Die Perpendicularlinie, welche die Sehne in zwey gleiche Theile theilt, gehet durch den Mittelpunct des Circuls.

Beweiß.

Weil DA perpendicular ist auf EF (per Hypoth.)
so sind bey G rechte Winckel (§. 18. Geom.)

Weil

Weil ferner EG = GF (per Hypoth.)
und GA = GA (§. 20. Arith.)

So ist die Sehne EA = AF (§. 49. Geom.)

Folglich auch der Bogen EA = AF (§. 92. Ge.)
Da nun ferner DE = DF (num. 1.)

So ist der Bogen DEA = DFA (§. 24. Arith.)

Nun machen diese beyde Bogen zusammen genommen den gantzen Circul aus, und da sie einander gleich sind: so muß der Bogen DEA ein halber Circul seyn. Es ist also die Linie DA die Sehne des halben Circuls. Die Sehne des halben Circuls ist der Diameter und der Diameter geht durch den Mittelpunct des Circuls. Also geht die Linie DA durch den Mittelpunct des Circuls. W. Z. E.

Num. 3. **Wenn aus dem Mittelpuncte des Circuls ein Perpendicul auf eine Sehne gezogen wird: so theilet derselbe die Sehne in zwey gleiche Theile.**

Beweiß.

Es sey CG perpendicular auf EF (per Hyp.)
So sind bey G rechte Winckel (§. 18. Geom.)
EC = CF (§. 27. Geom.)
CG = CG (§. 20. Geom.)

Also ist EG = GF (§. 71. Geom.)
W. Z. E.

Num

Num. 4. **Wenn aus dem Mittelpuncte eines Circuls eine Perpendicularlinie auf die Sehne gezogen wird: so theilet sie den Bogen dieser Sehne in zwey gleiche Theile.**

Beweiß.

Wenn CG auf EF perpendicular ist: so sind die Winckel bey C einander gleich (num. 3.) sie haben folglich einerley Maaß (§. 35 Geom.) Nun ist der Bogen DE das Maaß des einen, und der Bogen DF das Maaß des andern Winckels (§. 16. Geom.). Derowegen ist der Bogen DF = DE. W. Z. E.

Zu dem 96. §.

§. 48.

Beweiß.

AD = AE (per operat.)
DF = EF (§. 27. Geom)
AF = AF (§. 22. Arith.)

o = x (§. 51. Geom.) W. Z. E.

Zu dem 97. §.

§. 49.

Beweiß.

DE ist eine Perpendicularlinie, welche die Sehne AB in zwey gleiche Theile theilt. (§. 90. Geom.) Die Linie DE geht also durch den Mittelpunct des Circuls (§. 95. Geom.) das ist, es muß der Mittelpunct des Circuls irgendswo in der Linie DE befindlich seyn. Die Linie FG ist gleichfals eine Perpendicularlinie, welche die Sehne BC in zwey gleiche Theile theilet. (§ 90. Geom.) Es geht also auch die Linie FG durch den Mittelpunct des Circuls (§. 95. Geom.): solchergestalt muß der Mittelpunct des Circuls in beyden Linien DE und FG zugleich befindlich seyn. Kein Punct ist in beyden Linien zugleich anzutreffen als der Punct H. Es ist also der Mittelpunct des Circuls in dem Puncte H, wo die beyden Linien DE und FG einander durchschneiden. W. Z. E.

Zu dem 102. §.

§. 50.

Beweiß.

AC = DB (per construct.)
AB = CD (per construct.)
AD = AD (§. 20. Arith.)

$\triangle$ ACD = $\triangle$ ABD (§. 51. Geom.)

x = x
o = o
u = u

Folglich AB parallel mit CD (§. 73. Geom.)
AC parallel mit BD (§. 73. Geom.)

W. Z. E.

Zu

Zu dem 104. §.

§. 51.

Beweiß.

Der Winckel ABC ist ein Winckel an der Peripherie. Er hat also zu seinem Maaß den halben Bogen, darauf er stehet, das ist, den Bogen AD (§. 83. Geom.) Der Bogen AD kömmt heraus, wenn man von dem Bogen BAD den Bogen AB subtrahirt. Nun ist der Bogen BAD ein halber Circul und hält folglich 180°. (§. 14. Geom.). Derowegen kömmt das Maaß des Winckels ABC heraus, wenn man den Bogen AB von 180° subtrahirt. Der Bogen AB aber ist der sechste Theil von der Peripherie, wenn der Winckel ABC ein Winckel in dem regulären Sechsecke ist, und der achte Theil von der Peripherie, wenn dieser Winckel von einem regulären Achtecke seyn soll. Nun hält die Peripherie 360° (§. 14. Geom.) Man findet also den Bogen AB, wenn man mit der Anzahl der Seiten des Vielecks in 360 dividirt.

Zu dem 105. §.

§. 52.

Ein iedes Vieleck, es mag regulär oder irregulär seyn, läst sich durch die Diagonallinie in zwey Triangel weniger als es Seiten hat, zertheilen; folglich kann man ein Viereck in zwey, ein Fünfeck in drey, ein Sechseck in vier Triangel zertheilen. Da nun die Winckel in einem Triangel niemals mehr als 180° ausmachen können (§. 74. Geom.): so ist zugleich die Summe der Winckel in einem jeden Vielecke bestimmt. Man hat daher nur nöthig 180 durch die um zwey verminderte Anzahl der Seiten des Vielecks zu multipliciren, wenn man die Summe der Winckel desselben zu wissen verlangt. Diesem zufolge ist die Summe der Winckel

						Grad
in dem Dreyecke	=	1	×	180	=	180
in dem Vierecke	=	2	×	180	=	360
in dem Fünfecke	=	3	×	180	=	540
in dem Sechsecke	=	4	×	180	=	720
in dem Siebenecke	=	5	×	180	=	900
in dem Achtecke	=	6	×	180	=	1080
in dem Neunecke	=	7	×	180	=	1260
in dem Zehnecke	=	8	×	180	=	1440

u. s. w.

Wenn man innerhalb dem Vielecke einen Punct annimmt: so läst es sich aus demselben in so viel Triangel zertheilen, als es Seiten hat.

Zu dem 108. §.

§. 53.

Hypothesis. AB ist die Seite des Sechsecks, AC der Radius.

Thesis. AB = AC

Beweiß.

Die Linie AB ist die Seite des regulären Sechseckes (per Hypoth.). Es ist also der Bogen

Bogen AB der sechste Theil der Peripherie (§. 92. Geom.). Nun hat die Peripherie 360° (§. 14. Geom.). Derowegen ist der Bogen $AB = \frac{360}{6} = 60$ Grad, und da dieser Bogen AB das Maaß des Winckels C ist (§. 16. Geom.): so hält der Winckel C 60 Grade.

$$\begin{aligned}
A + B + C &= 180^\circ \text{ (§. 74. Geom.)}\\
C &= 60^\circ \text{ (per dem.)}\\
\hline
A + B &= 120 \text{ (§. 25. Arith.)}\\
AC &= BC \text{ (§. 27. Geom.)}\\
\hline
A &= B \text{ (§. 79. Geom.)}\\
A + B &= 120^\circ \text{ (per dem.)}\\
\hline
A &= 60^\circ\\
B &= 60^\circ\\
C &= 60\\
\hline
A = B &= C \text{ (§. 35. Geom.)}\\
\hline
AB &= AC \text{ (§. 81. Geom.)}
\end{aligned}$$

W. Z. E.

§. 54.

Tab. I. Fig. 1. Aus diesem Lehrsatze, daß die Seite des Sechseckes dem Radio des Circuls gleich sey, läst sich folgende bequeme Art auf einer geraden Linie AB einen Perpendicul BF aufzurichten, herleiten.

1) Setzet den Zirckel in den Punct B und beschreibet mit beliebiger Eröffnung desselben den Bogen CDE.
2) Traget den Radium des Circuls aus C in D und D in E.
3) Beschreibet aus E einen Bogen und aus D durchschneidet ihn mit eben derselben Eröffnung des Zirckels in F.
4) Ziehet die Linie FB. Diese stehet auf AB perpendicular.

Beweiß.

CD ist der 6te Theil des Circuls (n. 2.) und folglich 60 Grad (§. 14. Geom.). Aus eben dieser Ursache ist auch DE = 60 Grad. (n. 2.) Da nun der Bogen DG = GE (n. 3. §. 92. Geom.): so ist DG = 30 Grad. Folglich CD + DG = 60° + 30° = 90 Grad. Der Bogen CDG ist das Maaß des Winckels x (§. 16. Geom.) Derowegen ist der Winckel x = 90° und folglich ein rechter Winckel (§. 37. Geom.). Wo aber ein rechter Winckel ist, da ist auch eine Perpendicularlinie (§. 18. Geom.). Folglich FB perpendicular auf AB.

W. Z. E.

Zu dem 114. §.

§. 55.

Die gantze Geometrie läst sich in 3. Theile abtheilen. Der erste ist die Evthimetrie, der andere

dere die **Planimetrie**, und der dritte die **Stereometrie**. Von der **Evthimetrie** haben wir bisher gehandelt. Es folgt also nun die **Planimetrie**, oder die Lehre von Ausmessung der Flächen. Weil man aber ohne Maaßstab nichts ausmessen kann (§. 9. Anmerck. zur Arith.): so müssen wir uns für allen Dingen um einen Maaßstab der Flächen bekümmern. Dieser Maaßstab aber muß mit der zu messenden Sache von einerley Art, und folglich auch eine Fläche seyn. So gewiß dieses ist, so wenig ist dadurch bestimmt, was man vor eine Fläche zum Maaßstabe anzunehmen habe; soll es ein **Quadrat** ein **Rhombus** oder **Triangel** seyn? Die Natur bestimmt hier nichts eben so wie bey dem Längenmaaße und wir können also eine iede Fläche, welche uns gefällt, zum Maaßstabe der Flächen erwählen. Man hätte z. E. den Circul darzu annehmen können, und sich einen Circul einbilden, dessen Diameter eine Ruthe gewesen wäre, welcher 100 kleinere, deren ieder im Diameter einen Schuh gehabt hätte, in sich gefaßt haben würde. Gleichwie ein solcher Circul dessen Diameter ein Schuh gewesen wäre, weiter in 100. kleinere hätte eingetheilt werden können, deren Diameter einen Zoll gehalten hätte. Auf diese Weise hätte man eine Fläche ausgemessen, wenn man die Anzahl der kleinen Circul bestimmt hätte, welche darinnen Platz gehabt hätten. Man spreche nur nicht, daß sich auf diese Art keine Fläche genau hätte ausmessen lassen, weil immer zwischen den Circuln Räume übrig geblieben seyn würden. Denn man würde allemahl kleine Circul im Vorrathe haben, um diese Zwischenräumgen zu erfüllen, und noch kleinere, die sich aufs neue in die noch kleinere Zwischenräumgen gepast haben würden. Wäre dieses nicht, wie wollte man mit dem Quadrate als dem gewöhnlichen Maaßstabe der Flächen eine parabolische Fläche so genau ausmessen können? Ja, wir würden so gar von dem Circu maaße in einigen Fällen eine Bequemlichkeit gehabt haben. So findet man z. E. die Fläche einer Ellipsis auf einmahl im Circulmaaße, wenn man den grossen Diameter mit dem kleinen multiplicirt. Ohneracht man sich nun des Circulmaaßes nicht bedinet: so können doch dergleichen Auflössungen gebraucht werden, weil es leicht ist, das Circulmaaß in Quadratmaaß zu verwandeln. Ob schon hieraus erhellet, daß man die Freyheit gehabt hätte, eine Fläche zum Maaßstabe zu erwählen, welche man nur gewollt: so hat man dennoch dem Quadrate den Beyfall gegeben, und da dieses einmahl von den ältesten Zeiten her in der Welt Mode ist: so würden wir nicht wohl thun, wenn wir eine Aenderung darinnen vornehmen wollten. Ich habe also nur zeigen wollen, daß es nicht nothwendig sey, unter allen möglichen Figuren gerade das Quadrat zum Maaßstabe der Flächen zu erwählen. Es ist wahr, man muß Gewohnheiten nicht ohne Ursache ändern, aber man

man muß doch auch wissen, daß es Gewohnheiten sind. Man nennt also eine Quadratmeile ein Quadrat, das eine Meile lang und breit ist, eine Quadratruthe ein Quadrat, welches eine Ruthe lang und breit ist, einen Quadratschuh ein Quadrat, das einen Schuh lang und breit ist, und einen Quadratzoll und Quadratlinie, das einen Zoll oder Linie lang und breit ist. Bestimmen wie viel solcher Quadrate in einem gewissen Raume neben einander stehen können, heist eine Fläche ausmessen.

Zu dem 116. §.

§. 56.

Wenn das Längenmaaß immer in 10. Theile eingetheilt wird: so bekömmt das Flächenmaaß iederzeit 100 Theile. Da nun die Zahl der dritten Stelle allemahl hundertmahl mehr gilt, so ist klar, daß man bey der dritten Zahl allemahl eine neue Classe haben müsse, und daß folglich iederzeit zwey Zahlen in eine Classe gehören, wenn man Flächenmaaß aussprechen will. Ob aber eine Zahl Flächen oder Längen bedeuten solle, siehet man entweder aus dem Zusammenhange der Rede, oder es wird ein kleines □ dazu gesetzt, wenn es Flächenmaaß anzeigen soll. Bey dem Längenmaaße, welches durch 10. steiget, rechnet man nur allemahl eine Zahl zu einer Classe.

Zu dem 117. §.

§. 57.

Man würde sich sehr betrügen, wenn man sich einbilden wollte, man könne aus dem blossen Umfange einer Fläche abnehmen, ob sie grösser oder kleiner sey als eine andere. Nein es kann eine Fläche einen grössern Umfang als eine andere haben, und dennoch kleiner seyn, als die andere. Man bilde sich ein Quadrat ein, dessen Breite 10. Schuh ist: so wird sein Umfang 40. Schuh ausmachen. Hingegen der Umfang eines Rectanguli, dessen Länge 50. Schuh und die Höhe 2. Schuh ist, würde 104. Schuh betragen. Dem aber ohngeachtet würde dieses Rectangulum nicht grösser seyn, als das vorgedachte Quadrat.

Zu dem 118. §.

§. 58.

Parallelogramma, welche gleiche Basin und Höhe haben, sind einander gleich.

Beweiß.

AB = CD (§. 20. Geom.)
CF = CD (§. 20. Geom.)

AB = EF (§. 22. Arith.)
EE = BE (§. 20. Ar.)

AE = BF (§. 24. Ar.)

AC

AC = BD (§. 20. Geom.)
EC = DF (§. 20. Geom.)

△ AEC = △ BDF (§. 51. Geom.)
△ BGE = △ BGE (§. 20. Arith.)

Trapez. ABCG = Trap. EGDF (§. 25. Ar.)
△ CGD = △ CGD (§. 20. Arith.)

ABCD = CDEF (§. 24. Arith.)
W. Z. E.

Zu dem 119. §.

§. 59.

Ein Triangel ist die Hälfte von einem Parallelogrammo, mit welchem er gleiche Grundlinie und Höhe hat (§. 102. Geom.). Da nun Parallelogramma, welche gleiche Basin und Höhe haben, einander gleich sind: (§. 118. Geom.) so müssen auch ihre Hälften, das ist, die Triangel, welche gleiche Grundlinien und Höhe haben, einander gleich seyn. Es haben aber Parallelogramma und Triangel einerley Höhe, wenn sie zwischen einerley Parallellinien stehen. Denn ihre Höhe wird durch die Perpendicularlinie gemessen, und diese bleibt bey Parallellinien jederzeit gleich groß, weil sie zu gleicher Zeit das Maaß ihrer Entfernung ist, und Parallellinien immer einerley Entfernungen voneinander behalten. (§. 22. Geom.)

Zu dem 122. §.

§. 60.

Es sey die Grundlinie des Triangels = b. Seine Höhe = a: so ist ab der Innhalt eines Parallelogrammi, von welchem der Triangel die Hälfte ist (§. 120 Geom.). Derowegen ist der Innhalt des Triangels = $\frac{1}{2}$ ab. Er wird also gefunden, wenn man a mit b multiplicirt, und durch 2. dividirt, oder wenn man $\frac{1}{2}$ a mit b multiplicirt, oder wenn man endlich $\frac{1}{2}$ b mit a multiplicirt.

Zu dem 125. §.

§. 61.

Man bilde sich ein, daß alle die Triangel, in welche das Vieleck aus dem Mittelpuncte zertheilet worden, neben einander auf die Linie DB gesetzt würden. Wenn man nun in D einen Perpendicul aufrichtet, welcher der Höhe dieser Triangel gleich ist: so kann man lauter Triangel machen, die mit den gegebenen gleiche Grundlinie und Höhe haben, und die denselben also gleich seyn müssen. (§ 118. Geom.) Nun machen diese Triangel zusammen genommen, einen Triangel aus, dessen Grundlinie die Linie DB und die Höhe BC ist. Es sind also die Triangel aus welchen das Vieleck bestehet, zusammen genommen, das ist, es ist das gantze Vieleck einem Triangel gleich, dessen Grundlinie der Umfang des Vieleckes und die

Höhe

Höhe eines der Triangel ist, darein sich das Vieleck aus dem Mittelpuncte bes Circuls zertheilen läst.

Zu dem 126. §.

§. 62.

Je mehrere, und folglich le kleinere Seiten ein innerhalb einen Circul beschriebenes Vieleck hat, desto kleiner wird der Unterscheid zwischen dem Radio des Circuls und der Höhe eines von den Triangeln, in welche sich das Vieleck zertheilen läst. Wenn man also die Seiten des Vieleckes so in einem Circul beschrieben werden, unendlich klein annimmt, das ist, wenn man ein Vieleck von unendlich vielen Seiten in einem Circul beschreibt: so muß der Unterschied zwischen dem Radio des Circuls und der Höhe eines von den Triangeln, in welche sich ein solches Vieleck aus dem Mittelpuncte des Circuls zertheilen läst, unendlich klein seyn. Ein unendlich kleiner Unterschied ist kein Unterschied. Derowegen ist kein Unterschied zwischen dem Radio und der Höhe der Polygontriangel, wenn ein Vieleck von unzähligen Seiten in dem Circul beschrieben wird Es ist aber auch in diesem Falle nur ein unendlich kleiner, das ist, gar kein Unterschied zwischen der Fläche des Circuls und des Vielecks. Gleichwie nun hieraus erhellet, daß man den Circul mit Recht für ein Vieleck von unzähligen Seiten halte, darinnen der Radius die Höhe der Polygonaltriantriangel vorstellet: so ist auch ferner klar, daß alles von dem Circul gelten müsse, was von einem ieden Vielecke gilt. Nun ist erwiesen worden, daß ein iedes Vieleck einem Triangel gleich sey, dessen Grundlinie der Perimeter des gantzen Vieleckes und dessen Höhe, die Höhe eines der Triangel ist, in welche es aus dem Mittelpuncte des Circuls zertheilet worden. (§. 125. Geom.) Was kann also natürlicher hieraus geschlossen werden, als das die Circulfläche der Fläche eines Triangels gleich sey, dessen Grundlinie so groß ist, als die Peripherie des Circuls, die Höhe aber dem Radio desselben gleichet.

Zu dem 127. §.

§. 63.

Daß der Ausschnitt eines Circuls (Sector circuli) einem Triangel gleich sey, dessen Grundlinie der Bogen des Ausschnitts, die Höhe aber der Radius ist, läst sich eben so wie der Satz im 125. §. erwiesen, wenn man die unendlich schmalen Triangel, daraus der Ausschnitt besteht, in Gedancken neben einander setzt, und sie in andere verwandelt, welche mit ihnen gleiche Grundlinie und Höhe haben. Man kann es auch leicht daraus beurtheilen, wenn man bedenckt, daß der gantze Circul einen Triangel gleich ist, dessen Höhe der Radius und dessen Grundlinie die gantze Peripherie ist: so muß freylich der Ausschnitt, welcher nur ein Theil des Circuls ist, einem Triangel gleich

seyn,

seyn, dessen Höhe zwar der Radius, die Grundlinie aber nicht die gantze Peripherie, sondern nur ein Theil derselben, und zwar der Bogen ist, welcher zu dem Ausschnitt gehöret.

Zu dem 128. §.

§. 64.

Weil der Circul einem Triangel gleich ist, welcher die Peripherie zur Grundlinie und den Radium zur Höhe hat: (§. 126. Geom.) so hat man die Circulfläche gefunden, so bald man den Triangel ausgerechnet hat, welcher dem Circul gleich ist. Nun wissen wir, wie wir diesen Triangel ausrechnen. (§. 122. Geom.) Derowegen kann es uns auch nicht unmöglich fallen, den Inhalt des Circuls zu finden. Nemlich wenn wir einen Triangel ausrechnen, so multipliciren wir seine Grundlinie mit seiner halben Höhe. (§. 122. Geom.) Da nun bey dem Triangel, welcher dem Circul gleich ist, die Grundlinie die Peripherie, die Höhe aber der Radius ist (§. 126. Geom.): so finden wir seinen Inhalt und folglich auch den Inhalt des Circuls, wenn wir die Peripherie durch den halben Radium multipliciren. Nun ist der halbe Radius der vierte Theil vom Diametro. **Derowegen wird der Inhalt des Circuls gefunden, wenn man die Peripherie durch den vierten Theil des Diametri multiplicirt.** Es sey der Diameter = d die Peripherie = p: so so ist der Inhalt des Circuls $= \frac{1}{4} dp = \frac{1}{4} pd$ $= \frac{pd}{4} = \frac{1}{2} p. \frac{1}{2} d$ das ist, man bekommt auch den Inhalt des Circuls, wenn man den Diameter mit dem vierten Theile der Peripherie multiplicirt; ingleichen wenn man den Diameter mit der Peripherie multipliciret und das Product durch 4. dividirt, wie auch wenn man den halben Diameter mit der halben Peripherie multiplicirt. Dieses Ausrechnen des Flächeninhalts einer Figur nennt man die Quadratur derselben, weil man durch dergleichen Ausrechnung in den Stand gesetzt wird, eine Fläche in ein Quadrat zu verwandeln, das ihr gleich ist. Gesetzt man wolte ein Quadrat machen, daß dem Circul gleich wäre: so nenne man die Seite dieses Quadrates x. Weil nun

$$\frac{1}{4} pd = x^2 \quad \text{(per Hypoth.)}$$

so ist $\sqrt{\frac{1}{4} pd} = x$

Dieses giebt folgende Proportion an die Hand:

$$\frac{1}{4} p : x = x : d$$
$$\frac{1}{4} d : x = x : p$$
$$\frac{1}{2} d : x = x : \frac{1}{2} p$$

das ist, man suchet entweder 1) zwischen dem 4ten Theile der Peripherie und dem Diametro, oder 2) zwischen dem 4ten Theile des Diameters und der Peripherie, oder 3) zwi-

zwischen der halben Peripherie und dem halben Diametro eine mitlere Proportionallinie. Diese ist die Seite eines Quadrates, welches dem Circul gleich ist.

Man kann auf gleiche Art den Circul in ein Rectangulum verwandeln, wenn man zu dessen Grundlinie annimmt $\frac{1}{4}$ p. das ist, die halbe Peripherie und zur Höhe $\frac{1}{2}$ d, das ist, den halben Diameter. Denn so ist der Inhalt dieses Rectanguli $\frac{1}{4}$ dp. und dieses ist auch der Inhalt des Circuls. Ist die Grundlinie dieses Rectanguli = p: so ist die Höhe $\frac{1}{4}$ d. Eben so erhellet aus dem vorhergehenden, daß man den Circul in einen Triangel verwandeln könne. Denn es sey die Grundlinie dieses Triangels = p die Höhe = $\frac{1}{2}$ d: so bekömmt man seinen Inhalt, wenn man seine Grundlinie = p mit der halben Höhe = $\frac{1}{4}$ d multipliciret = $\frac{1}{4}$ dp.

Zu dem 129. §.

§. 65.

Wenn ein Anfänger das vorhergehende liest, so geräth er gantz natürlich auf folgende Gedancken. Eine Figur quadriren, heist den Flächeninhalt derselben finden. Wenn man die Peripherie eines Circuls mit dem 4ten Theile seines Diameters multiplicirt: so hat man seinen Flächeninhalt gefunden. Derowegen wenn man die Peripherie eines Circuls mit dem 4ten Theile seines Diameters multiplicirt, so kann man den

Circul quadriren. Haben wir also nicht die Quadratur des Circuls gefunden? Dieses grosse Geheimniß, welches von den Geometern eben so ängstlich gesucht worden, als von den Chymisten der Stein der Weisen und die immerwährende Bewegung von den Mechanickverständigen. Aber in Wahrheit die Freude, welche man hierüber hätte, würde eben so eitel seyn, als das Frohlocken eines Chymisten, welcher sich einbilden wolte, er könne Gold machen, weil er gefunden hätte, daß dazu weiter nichts erfordert würde, als einem andern Metalle die Farbe, Schwere, Ductilität und Fixität zu geben, welche das Gold hat. Denn es ist wahr, wir können den Circul quadriren wenn wir seine Peripherie mit dem 4ten Theile seines Diameters multipliciren. Aber wie soll dieses zugehen, wenn wir nicht wissen, wie groß seine Peripherie ist, und wie können wir wissen, wie groß seine Peripherie ist, wenn wir sie nicht in eine gerade Linie verwandeln und dadurch bestimmen können, wie vielmahl sie grösser ist als der Diameter, das ist, was sie zu dem Diameter für eine Verhältniß habe. (§. 96. Anmerck. zu der Rechenkunst.) Solchergestalt kömmt die Quadratur des Circuls auf die Rectification seiner Peripherie, oder welches eben so viel ist, auf die Bestimmung der Verhältniß zwischen dem Diameter und der Peripherie an.

Würde

Würde es also nicht eine kindische und auslachenswürdige Bemühung seyn, wenn man einen meßingenen Circul an der Peripherie mit schwartzer Farbe beschmieren und auf einem Papiere hinrollen wolte, um seine Peripherie in eine gerade Linie zu verwandeln? Gleichwohl habe ich diesen sinnreichen Vorschlag einige mahl von Leuten, welche sich nicht wenig weise zu seyn einbildeten, machen gehöret. Aber wie eitel sind nicht bisweilen die Anschläge der Menschen und wie mühsam trachten sie nach dem was sie schon haben; gleichwohl verlachen sie einen Narren, der das Pferd suchet, auf welchem er reitet. Denn es hat ja schon **Archimedes** einer von den grösten Geistern, welche uns das graue Alterthum aufzuweisen hat, gefunden, daß sich der Diameter zu der Peripherie des Circuls verhalte wie 7 zu 22. Hätte er gesagt, es verhielte sich der Diameter zu der Peripherie wie 7 zu 21: so hätte er die Peripherie dreymahl grösser gemacht als den Diameter. Sie ist auch in der That dreymahl so groß als der Diameter, aber dieses ist zu wenig: denn sie ist noch etwas grösser. Daher nahm er an, daß die Peripherie 22 solcher Theile habe, deren der Diameter 7. hat. Aber so groß ist sie nicht. Es bringt also diese Verhältniß die Peripherie allzu groß heraus. Nun hat zwar Ludolph von Cöln gefunden, daß sich der Diameter zu der Peripherie verhalte wie 100000000000000000000 zu

3141592653589793238 46. Aber auch dieses ist nicht accurat. Denn ohnerachtet der Fehler welcher hier begangen wird, noch lange nicht den 31415926535897932 3846sten Theil des Diameters ausmacht: so ist es doch ein Fehler. So strenge sind die Mathematicker. Ach möchte man doch in der Sittenlehre die Fehler so vermindern können, wie glücklich wären die Menschen! Wir haben also die Verhältniß des Diameters zu der Peripherie so accurat, daß uns die allzugrosse Accuratesse beschwerlich fällt und dennoch haben wir sie noch nicht accurat genug. Ist es nicht mit dieser Sache fast eben so beschaffen wie mit der Ehre? Die Menschen verlangen immer mehr, und die so sie bereits besitzen, fällt ihnen schon beschwerlich.

So steigt ein grosser Geist von Ehr auf Ehre hin
Zu hoch für seine Ruh, zu tief für seinen Sinn.

Dürffen wir wohl iemahls befürchten, daß wir durch die Verhältniß des Ludolphs von Cöln einen mercklichen Fehler begehen werden? Gewiß dieses wird niemand behaupten? Warum giebt man sich also so viel Mühe, die vollkommen accurate Verhältniß des Diameters zu der Peripherie zu entdecken, ohnerachtet man doch immer findet, daß man in seinen algebraischen Rechnungen ein x für ein u gesetzt hat, wenn man sich einbildete, die Sache bey allen Zipfeln gefaßt zu haben? Es ist wahr, daß man es darum um thut, weil es in der Mathematick auch nicht erlaubt ist, einen unendlich kleinen Fehler zu begehen, und weil es eben so seltsam ist, eine geometrische Frage nicht mit vollkommner Ueberzeugung zu beantworten, als vielleicht in vielen andern Wissenschaften dieses zu thun. Indessen muß man doch gestehen, daß fast eine iede Wissenschaft ihr eigen Hirngespinste habe, welches meistentheils von der Beschaffenheit ist, daß durch Entdeckung desselben dem menschlichen Geschlechte entweder ein sehr geringer oder gar kein Vortheil gestiftet, oder endlich gar Schade geschehen würde. Wir haben eine Probe davon an der immerwährenden Bewegung in der Mechanick und an dem Goldmachen in der Chymie. Beyde Erfindungen würden die Anzahl der armen und unglücklichen Personen in der Welt vermehren, und was würde uns wohl durch die vollkommene Quadratur des Circuls für eine Glückselichkeit erwachsen, die wir nicht schon besässen? Indessen haben dennoch dergleichen Bemühungen ihren Nutzen. Sie gleichen einem Ziele, nach welchen man rennt, so lange man lebet, man erreichet es zwar niemahls, aber man gelangt doch dadurch an viele Oerter, an welche man ohne dasselbe nicht gekommen wäre. Wie viele schöne Artzneyen haben nicht die Goldmacher, wie viele vortrefliche Maschinen die Mechanickverständigen, wenn sie auf das perpetuum mobile gedacht, und wie viele unvergleichliche geometrische Wahrheiten die

Geometer wenn sie die Quadratur des Circuls erfinden wollen, entdeckt, welche sonst in ihrem ersten Nichts vergraben geblieben wären? Aber so ist es, die Begierden der Menschen sind niemals zu ersättigen, und es ist sehr gut, daß sie es nicht sind, sonst würden sie in Bildsäulen verwandelt werden. **Leibnitz** und **Newton** zwey Sterne der ersten Grösse in der Mathematick haben uns ebenfalls in der Quadratur des Circuls ein Licht gegeben, aber ein Licht, welches gleichfalls noch nicht helle genug ist. Denn sie geben uns den Inhalt des Circuls durch eine unendliche Reihe der Brüche an. Wir können also den Inhalt des Circuls gantz vollkommen finden, wenn wir diese unendliche Reihe zu Ende bringen. Wenn werden wir sie aber zu Ende bringen? Niemahls. Die Reihe des **Herrn von Leibnitzens** ist folgendermassen beschaffen. Man setzet den Diameter des Circuls = 1: so ist das Quadrat des Diameters = 1 (§. 114. Geom.). Nun ist das Quadrat des Diameters ohnstreitig grösser als der Inhalt des Circuls. Man muß also von dem Quadrate des Diameters $\frac{1}{3}$ subtrahiren, wenn man den Circul haben will. Wenn man aber $\frac{1}{3}$ dieses Quadrats davon subtrahirt: so hat man zu viel subtrahirt, und muß daher $\frac{1}{5}$ von dem Quadrate wieder addiren. Dieses ist zu viel, daher muß man $\frac{1}{7}$ wieder subtrahiren u. s. w. Daher ist der Inhalt des Circuls folgender:

gender: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21}$ ꝛc. in infinitum. Je weiter man demnach diese Reihe fortführet, desto genauer findet man den Inhalt des Circuls, nur das ist schlimm, daß man niemals zu Ende kömmt. Indessen steht es doch in unserer Macht, den Fehler immer kleiner zu machen, und was wollen wir weiter verlangen. Eben dieses gilt von Newtons Reihe, welche folgende ist: $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. in infinitum. Die Verhältniß des Diameters zu der Peripherie, welche Adrianus Metius angegeben, wie 113. zu 355. ist zwar accurater als die gewöhnliche wie 100. zu 314; man bleibt aber doch meistentheils lieber bey der letztern: weil sich mit den Nullen gut rechnen läst, und diese Verhältniß auch bey der gewöhnlichen zehntheilige Eintheilung des Maaßes ungemein bequem ist.

Zu dem 130. §.

§. 66.

Es sey der Diameter eines Circuls = 100 (per Hypoth.): so ist die Peripherie = 314 (§. 129. Geom.) und der vierte Theil des Diameters = 25. Da nun der Inhalt des Circuls heraus kömmt, wenn man die Peripherie durch den vierten Theil des Diameters multiplicirt (§. 128. Geom.): so ist der Inhalt des Circuls = $314 \times 25 = 7850$. Last uns nun auch sehen, wie groß das Quadrat des Diameters ist. Es kömmt aber solches heraus, wenn man den Diameter mit sich selbst multipliciret (§. 114. Geom.). Nun ist der Diameter = 100. (per Hypoth.). Derowegen ist das Quadrat des Diameters = 100 × 100 = 10000. Solchergestalt verhält sich der Inhalt des Circuls zum Quadrate des Diameters, wie 7850. zu 10000. Da aber allemahl wenn man zwey Zahlen durch eine dritte dividirt, die herauskommende Quotienten sich eben so wie die dividirten Zahlen verhalten (§. 59. Arith.): so dividire man die beyden Zahlen 7850 und 10000. durch 10: so verhält sich 7850. zu 10000. wie 785. zu 1000. Nun verhält sich der Inhalt des Circuls zum Quadrat des Diameters wie 7850. zu 10000. (per dem.). Derowegen verhält sich der Inhalt des Circuls zum Quadrate des Diameters wie 785 zu 1000. (§. 57. Arith.).

W. Z. E.

Aber warum heist es, es verhalte sich der Inhalt des Circuls zum Quadrate des Diameters bey nahe wie 785. zu 1000? Hierauf dienet zur Antwort, daß in dem Beweise dieses Satzes angenommen worden, es verhalte sich der Diameter zu der Peripherie wie 100 zu 314. Da nun dieses nur bey nahe zutrifft: so trifft auch alles nur bey nahe zu, was daraus geschlossen wird. So gewissenhaft ist man

in

in der Mathematick. Aber warum ist man es in andern Wissenschaften nicht auch? Ich weiß nicht ob man mir es wird glauben wollen, daß dieses die Ursache ist, weil der Buchdrucker nicht Buchstaben genug hat das **Beynahe** allenthalben hinzudrucken, wo es von Rechtswegen stehen sollte.

Zu dem 131. §.

§. 67.

Diesem Lehrsatze zufolge ist die Circulfläche viermahl grösser als die Fläche eines andern Circuls, wenn der eine im Diameter noch einmahl so groß ist als der andere, und neunmahl grösser, wenn der Diameter dreymahl so groß ist. u. s. w. Die Peripherien aber verhalten sich allemahl wie die Diametri. Es gilt ferner dieser Lehrsatz nicht nur von den Circulflächen, sondern überhaupt ohne Ausnahme von allen Flächen, welche einander ähnlich sind. Denn alle ähnliche Flächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter oder ihrer gleichnahmigen Seiten. Und dieser Satz: Superficies similes sunt in ratione duplicata diametrorum siue laterum homologorum, ist von einem ungemeinen Nutzen in der Mathematick so wohl als in der Naturlehre und dem gemeinen Leben.

Zu dem 138. §.

§. 68.

Wenn die Glieder einer Verhältniß mit den Gliedern einer andern Verhältniß multiplicirt werden: so entsteht eine zusammengesetzte Verhältniß, (ratio composita). Wenn nun die eine Verhältniß eine ratio æqualitatis ist: so ist die andere mit der zusammengesetzten Verhältniß einerley, und dieses vermöge des Satzes; wenn man zwey Zahlen durch eine dritte dividirt: so verhalten sich die herauskommenden Quotienten wie die dividirten Zahlen (§. 59. Arith.). Wir haben eine Probe davon an den Parallelogrammis. Denn diese sind in einer Zusammengesetzten Verhältniß ihrer Höhen und Grundlinien (in ratione composita basium & altitudinum). (§. 114. 117. 121. 23. Geom.) Wenn also zwey Parallelogramma gleiche Grundlinie haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen; und wenn sie gleiche Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien. Das ist, ein Parallelogrammum welches mit einem andern einerley Grundlinie hat, aber 3mahl so hoch ist, als das andere, ist auch 3mahl so groß, und ein Parallelogrammum welches eben so hoch ist als ein anders, aber eine 3mahl grössere Grundlinie hat, ist gleichfals 3mahl grösser als das andere. Der Beweiß ist leicht, denn es sey das eine Parallelogrammum = A. das andere = B. die Grundlinie des erstern = a, seine

seine Höhe = b. die Grundlinie des andern = c. seine Höhe = d: so verhält sich:

1) A: B = ab: cd (§. 114. 117. 121. 23. Geom.)

Setzet a = c (per Hypoth.)

so ist A: B = ab: ad (§. 15. Einleit.)
ab: ad = b: d (§. 59. Arith.)

A: B = b: d (§. 57. Arith.)

W. Z. E.

2) A: B = ab: cd (§. 114. 117. 121, 23. Geom.)

Setzet b = d (per Hypoth.)

so ist A: B = ab: cb (§. 15. Einleit.)
ab: cb = a: c (§. 59. Arith.)

A: B = a: c (§. 57. Arith.)

W. Z. E.

Weil man nun an statt ab und cd eine iede zusammengesetzte Verhältniß setzen kann: so ist dieses zugleich ein Beweiß, daß es mit dem vorher von den zusammengesetzten Verhältnissen angeführten Satze seine Richtigkeit habe.

Wenn sich die Grundlinien von den Parallelogrammis umgekehrt, wie die Höhen verhalten: so sind die Parallelogramma gleich.

Denn

Denn es sey alles wie vorhin: so ist

$$a : c = d : b \text{ (per Hypoth.)}$$

$$ab = cd \text{ (§. 81. Arith.)}$$

Nun ist $ab = A$

$cd = B$ (§. 114. 117. 121. 23. Geom.)

Derowegen $A = B$. W. Z. E.

Aus diesem Lehrsatze läst sich der 118. §. der Geometrie als ein Zusatz herleiten. Denn es sey

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array}\right\} \text{ (per Hypoth.)}$$

so ist $ab = cd$ (§. 26. Arith.)

Derowegen $A = B$. W. Z. E.

Zu dem 139. §.

§. 69.

Die Hälften müssen sich nothwendig allemahl wie die gantzen Grössen verhalten: denn sie entstehen, wenn man das Gantze durch 2. dividirt. (§. 59. Arith.) Indessen sey

der eine Triangel $= A$
der andere $= B$
die Grundlinie des erstern $= a$
seine Höhe $= b$

die

die Grundlinie des andern $= c$
seine Höhe $= d$:

so ist:

1) $A : B = \frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}cd$ (§. 122. Geom.).
$b = d$ (per Hypoth.)

$A : B = \frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}cb$ (§. 15. Einleit.)
$\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}cb = a : c$ (§. 59. Arith.)

$A : B = a : c$ (§. 57. Arith.)

W. Z. E.

2) $A : B = \frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}cd$ (§. 122. Geom.)
$a = c$ (per Hypoth.)

$A : B = \frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}ad$ (§. 15. Einleit.)
$\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}ad = b : d$ (§. 59. Arith.)

$A : B = b : d$ (§. 57. Arith.)

W. Z. E.

Zu dem 140. §.

§. 70.

Beweiß.

$AB = CE$ (§. 114. 117. 121. Geom.)
$AD = EF$ (per operat.)

$BD = CF$ (§. 25. Arith.)
AB ist parallel mit EC (§. 23. Geom.)

$y = u$

$$y = u \quad (\S.72.\ \text{Geom.})$$
$$o = x \quad (\S.\ 7.2\ \text{Geom.})$$

$$\triangle BGD = \triangle FGC \quad (\S.\ 50.\ \text{Geom.})$$
$$\triangle BAC = \triangle BEC \quad (\S.\ 102.\ \text{Geom.})$$

$$\text{Trapez. } GDAC = \text{Trapez. } FGBE \quad (\S.\ 25.\ \text{Arith.})$$
$$\triangle FGC = \triangle BGD \quad (\text{per dem.})$$

$$\text{Trapez. } FCAD = \text{Trapez. } FDBE \quad (\S.\ 24.\ \text{Arith.})$$

W. Z. E.

Zu dem 141. §.

§. 71.

Beweiß.

Der Inhalt eines Triangels ist ein Product aus seiner halben Grundlinie in seine Höhe (§. 122. Geom.) Die beyden Factores sind also die halbe Grundlinie und die Höhe. Wenn man aber mit dem einen Factore in das Product dividirt: so muß der andere Factor herauskommen (§. 137. Anmerck. zu der Rechenk.) Derowegen muß die Höhe des Triangels herauskommen, wenn man mit der halben Grundlinie in seinen Inhalt dividirt. W. Z. E.

Zu dem 144. §.

§. 72.

Dieser Satz: In einem rechtwinckelichten Triangel ist das Quadrat der Hypothenuse so groß, wie die Quadrate beyder Cathetorum zusammen genommen, wird von seinem Erfinder dem berühmten griechischen Weltweisen **Pythagoras** der pythagorische Lehrsatz, ingleichen Magister matheseos, Hecatombe oder Theorema centum boum mactatione dignum genennt: weil die Schüler des Pythagoras den Göttern für diese vortrefliche und durch die gantze Mathematick nützliche Erfindung hundert Ochsen geopfert, oder doch behauptet haben sollen, daß er es werth wäre, daß man den Göttern hundert Ochsen dafür opferte. Es kan uns gleichwie gelten, ob diese Ochsengeschichte wahr ist oder nicht. Laßt uns vielmehr den Satz selberbetrachten. Ehe wir aberden geometrischen Beweiß vornehmen, wollen wir vorher einen mechanischen Beweiß davon geben, welcher bey Kindern gebraucht werden, und zu einer Erläuterung dieses Satzes dienen kann.

Tab. I. Fig. 2.

1) Man ziehe eine gerade Linie ab und theile sie in 3 gleiche Theile.

2) In a richte man den Perpendickel ac auf und trage 4 solche Theile darauf, dergleichen auf ab sind.

3) Von

3) Von c bis b ziehe man eine gerade Linie: so wird man finden, daß sich 5 solcher Theile auf die Hypothenuse tragen lassen. Solchergestalt ist das Quadrat des einen Catheti ab = 9, das Quadrat des andern ac = 16 und das Quadrat der Hypothenuse = 25. Da nun 9 + 16 = 25: so sind die beyden Quadrate der Cathetorum zusammen genommen, dem Quadrate der Hypothenuse gleich. Wenn man der Linie ab sechs und der Linie ac acht Theile giebt: so bekömmt die Hypothenuse 10. Theile. Alsdenn sind die Quadrate der Cathetorum 36 + 64. und das Quadrat der Hypothenuse = 100 = 36 + 64.

Lehrsatz.

Tab. 1. Fig. 3.

HABI + BCDE = ACFG

Beweiß.

m = n (§. 20. 37. Geom.)
o = o (§. 20. Arith.)

---

mo = no (§. 24. Arith.)
EC = BC (§. 20. Geom.)
AC = CF (§. 20. Geom.)

△ ACE = △ BCF (§. 49. Geom.)
△ ACE = $\frac{1}{2}$ □ BCDE (§. 120. Geom.)

△ BCF

$\triangle$ BCF = $\frac{1}{2}$ $\square$ BCDE (§. 22. Arith.)
$\triangle$ BCF = $\frac{1}{2}$ CFKL (§. 120. Geom.)

$\frac{1}{2}$ $\square$ BCDE = $\frac{1}{2}$ CFKL (§. 22. Arith.)
$\frac{1}{2}$ $\square$ BCDE = $\frac{1}{2}$ CFKL

N. 1. $\square$ BCDE = CFKL (§. 24. Arith.)
p = r (§. 20. 37. Geom.)
o = o (§. 20. Arith.)

---

po = or (§. 24. Arith.)
HA = AB (§. 20. Geom.)
AC = AG (§. 20. Geom.)

$\triangle$ HAC = $\triangle$ BAG (§. 20. Geom.)
$\triangle$ HAC = $\frac{1}{2}$ $\square$ HABI (§. 120. Geom.)

$\triangle$ BAG = $\frac{1}{2}$ $\square$ HABI (§. 22. Arith.)
$\triangle$ BAG = $\frac{1}{2}$ AGKL (§. 120. Geom.)

$\frac{1}{2}$ $\square$ HABI = $\frac{1}{2}$ AGKL (§. 22. Arith.)
$\frac{1}{2}$ $\square$ HABI = $\frac{1}{2}$ AGKL

$\square$ HABI = AGKL (§. 24. Arith.)
$\square$ BCDE = CFKL (per dem. N. 1.)

HABI + BCDE = AGKL + CFKL
(§. 24. Arith.)
AGKL + CFKL = ACFG

HABI + BCDE = ACFG (§. 22. Arith.)
W. Z. E.

§. 73.

Es giebt viele Wege zu der Erkäntniß der Wahrheit zu gelangen. Einige führen uns gerade zu derselben, andere aber durch viele Umschweiffe, einige sind bequem, andere beschwerlich, einige angenehm und andere verdrießlich. Was ist nun vernünftiger durch weitläuftige beschwerliche und verdrießliche Wege sich dem Tempel der Weisheit zu nahen, oder dieselbe durch den geradesten, bequemsten und angenehmsten Gang zu erreichen? Man müste sich, man müste das Reich der Wahrheiten nicht kennen, wenn man das erstere behaupten wollte. Indessen giebt es doch viele, welche einen schweren dunckeln und weitläuftigen Beweiß eines Satzes einem leichten, klaren und kurtzen vorziehen. Aber im Vertrauen, sind dieses nicht Leute, welche es für sehr vernünftig halten, von Halle durch die arabische Wüsten nach Paris zu reisen? Gewiß, das menschliche Leben ist so kurtz, und die Menge der Sachen, welche man zu erlernen hat, so groß, daß man nichts weniger nöthig hat, als sich in unnöthige Weitläufftigkeiten und Beschwerlichkeiten zu verwickeln. Betrachten wir nun den Euclideischen Beweiß des Pythagorischen Lehrsatzes: so werden wir zwar gestehen müssen, daß er vollkommen richtig, und besonders deswegen schön sey, weil er uns in die ersten Gründe der Geometrie zurückeführet; aber hätte nicht ein kürtzerer, ein leichterer und na-

natürlicher er gegeben werden können? Worzu dienen die vielen Linien, welche man blos um des Beweises willen ziehen muß? Warum muß man sich eben durch die Triangel eine Brücke bauen, um aus dem Quadrate des Catheti in das Quadrat der Hypothenuse zu kommen? Wir wollen bald sehen, daß dieses nicht nöthig sey, und daß eine eintzige Linie eben so viel als alle diese ausrichten könne. Weil es aber doch eine Hauptabsicht ist, welche man bey Erlernung der Geometrie haben kann, daß man alle die Wege kennen lernt, durch welche man zu der nackenden Wahrheit, zu dieser Wahrheit gelangen kann, welche Vernünftigen so reitzend und der durch Vorurtheile verblendeten Welt so abscheulich, so eckelhafft ist: so wollen wir versuchen, wie sich der pythagorische Lehrsatz noch auf andere Art demonstriren lasse.

Tab. II. Fig. 1.

1) Man mache einen rechtwinckelichten Triangel ABC und die Quadrate der Cathetorum ABHI und ACDF.
2) Man verlängere die Linie IH und richte in B einen Perpendicul auf, welcher in G an die Linie IG anstößt.
3) Man richte gleichfalls in C einen Perpendickel auf, welcher in E an die Linie DF anstößt.
4) Man ziehe von E nach G eine gerade Linie. Ich sage:

I. GBCE ist das Quadrat der Hypothenuse.

II. $\square$ ABHI + ACDF = GBCE.

Beweiß.

$$
\begin{array}{llcll}
\text{I.} & op & = & pq & (\S.\ 20.\ 18.\ 37.\ \text{Geom.}) \\
 & p & = & p & (\S.\ 20.\ \text{Arith.}) \\
\hline
 & o & = & q & (\S.\ 25.\ \text{Arith.}) \\
 & m & = & n & (\S.\ 37.\ \text{Geom.}) \\
 & DC & = & AC & (\S.\ 20.\ \text{Geom.}) \\
\hline
\text{n. 1.} & EC & = & CB & (\S.\ 50.\ \text{Geom.}) \\
 & st & = & tu & (\S.\ 20.\ 18.\ 37.\ \text{Geom.}) \\
 & t & = & t & (\S.\ 20.\ \text{Arith.}). \\
\hline
 & s & = & u & (\S.\ 25.\ \text{Arith.}) \\
 & r & = & n & (\S.\ 37.\ \text{Geom.}) \\
 & BI & = & AB & (\S.\ 20.\ \text{Geom.}) \\
\hline
\text{n. 2.} & GB & = & BC & (\S.\ 50.\ \text{Geom.})
\end{array}
$$

Wenn nun EC = BC (n. 1.) und GB = BC (n. 2.) und bey C und B rechte Winckel sind (per Hypoth.): so wird man nicht zweifeln, daß GBCE das Quadrat der Hypothenuse sey (§. 20. Geom.). Welches das erste war.

$$
\begin{array}{lll}
\text{II.}\ \triangle\ GAB = \tfrac{1}{2}\square\ ABHI & & (\S.\ 120.\ \text{Geom.}) \\
\triangle\ GAB = \tfrac{1}{2}\ GBLK & & (\S.\ 120.\ \text{Geom.}) \\
\hline
\end{array}
$$

$\tfrac{1}{2}\ \square$

$\frac{1}{2}\ \square$ ABHI $= \frac{1}{2}$ GBLK (§. 22. Arith.)

n. 3. $\square$ ABHI $=$ GBLK (§. 24. Arith.)

$\triangle$ AEC $= \frac{1}{2}\ \square$ AFDC (§. 120. Geom.)
$\triangle$ AEC $= \frac{1}{2}$ KLEC (§. 120. Geom.)

$\frac{1}{2}\ \square$ AFDC $= \frac{1}{2}$ KLEC (§. 22. Arith.)

$\square$ AFDC $=$ KLCE (§. 22. Arith.)
$\square$ ABHI $=$ GBLK (n. 3.)

$\square$ ABHI $+$ AFDC $=$ GBLK $+$ KLCE
GBLK $+$ KLCE $=$ GBCE (§ 24 Ar.)

$\square$ ABHI $+$ AFDC $=$ GBCE (§. 22. Ar.)
Welches das andere war.

§. 74.

Tab. II. Fig. 2.

1) Man mache einen rechtwinckelichten Triangel ABC.
2) Ingleichen die Quadrate der Cathetorum ABDR und AKHC.
3) Man verlängere die Linie RD und die Linie KH.
4) Man richte die Perpendicularlinien CG und BF auf: so ist

I) CBFG das Quadrat der Hypothenuse.
II) ABDR $+$ AKHC $=$ CBFG.

Beweiß.

$op = pq$ (§. 20. 18. 37. Geom.)
$p = p$ (§. 20. Arith.)

$o = q$ (§. 25. Arith.)
$m = n$ (§. 37. Geom.)
$CH = AC$ (§. 20. Geom.)

---

n. 3. $CG = BC$ (§. 50. Geom.)

$st = tu$ (§. 20. 18. 37. Geom.)
$t = t$ (§. 20. Arith.)

$s = u$ (§. 25. Arith.)
$r = n$ (§. 37. Geom.)
$BD = AB$ (§. 20. Geom.)

$BF = CB$ (§. 50. Geom.)
$CG = CB$ (n. 3.)
$op = st = 90^\circ$ (per Hypoth.)

Derowegen ist CBFG das Quadrat der Hypothenuse. (§. 20. Geom.)
Welches das erste war.

II. $ABDR = ABFE$ (§. 118. Geom.)
$ABFE = BFLI$ (§. 118. Geom.)

---

n. 3. $ABDR = BFLI$ (§. 22. Arith.)

$AKHC = AEGC$ (§. 118. Geom.)
$AEGC = CGLI$ (§. 118. Geom.)

$$\begin{array}{l} AKHC = CGLI \quad (\S.\ 22.\ Arith.) \\ ABDR = BFLI \quad (n.\ 3.) \\ \hline AKHC + ABDR = CGLI + BFLI \\ \qquad (\S.\ 24.\ Arith.) \\ CGLI + BFLI = CBFG \\ \hline AKHC + ABDR = CBFG \ (\S.22.Arith.) \end{array}$$

Welches das andere war.

§. 75.

Aus folgenden allgemeinem Satze läst sich der Pythagorische Lehrsatz als ein Zusatz herleiten.

Lehrsatz.

Tab. II. Fig. 3.

In einem jedem Triangel sind die Quadrate der beyden kleinsten Seiten AC und CB zusammengenommen, so groß, als die Summe aus dem doppelten Quadrate der halben größten Seite AF und dem doppelten Quadrate der Linie CF welche die gröste Seite AB in zwey gleiche Theile theilet.

Beweiß.

Beschreibet mit der kleinsten Seite AC einen Circul. Verlängert die Linie FC in D, und BC in E: so ist vermöge des Beweises §. 29. Trigonometr.

$$AB : BE = BG : BH.$$

Nennet $AF = FB = a$

$AC = EC = DC = CG = b$

$BC = c$: so ist

$2a : c + b = c - b : \frac{c^2 - b^2}{2a}$ (§. 85. Arith.)

$a : m + b = m - b : \frac{m^2 - b^2}{a}$ (§. 29. Trig. 85. Arith.)

$$a = \left(\frac{c^2 - b^2}{2a}\right) - \left(\frac{m^2 - b^2}{a}\right)$$

$$a = \frac{c^2 + b^2 - 2m^2}{2a}$$

$2a)\ 2a^2 = c^2 + b^2 - 2m^2$

$c^2 + b^2 = 2a^2 + 2m^2$ W. Z. E.

Zusatz.

Es sey ACB ein rechter Winckel: so ist $m = a$ ((§. 86. Geom.). Folglich

$$c^2 + b^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2.$$

Das ist: die Quadrate der Cathetorum sind zusammengenommen dem Quadrate der Hypothenuse gleich.

Zu

Zu dem 146. §.

§. 76.

Weil sich alle ähnliche Figuren wie die Quadrate der gleichnahmigen Seiten verhalten: so gilt der Pythagorische Lehrsatz von allen Figuren, welche einander ähnlich sind. So kann ich z. E. sagen: **der Circul, welcher mit der Hypothenuse eines rechtwinckelichten Triangels beschrieben worden, ist so groß wie die Circul, welche mit den beyden** Cathetis **beschrieben worden sind, zusammengenommen.** Daher ist klar, wie man einen Circul oder eine iede Figur machen könne, die so groß ist, wie zwey oder mehrere ähnliche zusammengenommen.

Zu dem 147. §.

§. 77.

Bey einer ieden Figur bemerckt man 1) die Grösse des eingeschlossenen Raumes, 2) die Grösse der Linien, welche ihn einschliessen, 3) die Grösse der Winckel, 4) die Verhältniß der Linien. Die beyden ersten Stücke werden nicht zur Aehnlichkeit erfordert.

Zu dem 148. §.

§. 78.

Wenn eine Seite und die beyden daran liegenden Winckel in einem Triangel so groß sind als in dem andern: so sind die Triangel gleich und ähnlich. (§. 50. Geom.) Von der Grösse der Seite rührt, wenn das übrige einerley ist, die Grösse des Triangels her. Da wir aber bey der Aehnlichkeit nicht auf die Grösse zu sehen haben (§. 27. Einleit.): so wird zu der Aehnlichkeit der Triangel weiter nichts erfordert als die Gleichheit der Winckel. **Wenn also zwey Winckel in einem Triangel so groß sind, wie zwey Winckel in dem andern: so sind die Triangel einander ähnlich; und folglich die Seiten des einen den Seiten des andern proportional** (§. 147. Geom.). Die alten Geometer haben einige Eigenschafften der ähnlichen Triangel ohne Beweiß angenommen: weil sie keine Erklärung der Aehnlichkeit hatten; Es hat aber der Herr Cantzler von Wolff dergleichen gegeben und die Gründe der Aehnlichkeit in die Geometrie zuerst eingeführt.

§. 79.

Nun haben wir die Gründe aus welchen sich der Pythagorische Lehrsatz auf eine Art demonstriren läst, welche wohl die allernatürlichste genennt zu werden verdienet. Ich setze zum voraus, daß man ihn nicht aus dem allgemeinen Lehrsatze der Triangel auf die vorige Art als einen Zusatz herleiten wolle. Wir haben bey dem gegenwärtigen Beweise weder nöthig viele Linien als Hülfsmittel zu ziehen, noch auch die Construction zu demonstriren. Nein, eine eintzi-

ge

ge Perpendicularlinie ak ist vollkommen hinreichend. Last uns sehen, wie dieses anzufangen sey.

Lehrsatz.

Tab. II. Fig. 4.

$$\square\,1 + \square\,2 = \square\,3.$$

Beweiß.

$m = o$ (§. 18. 37. Geom.)
$n = n$ §. 20. Arith.)

$\triangle\, abi \backsim \triangle\, cab$ (§. 148. Geom.)

$bi : ab = ab : bc$ (§. 147. Geom.)

$ab \times ab = bi \times bc$ (§. 81. Arith.)
$bc = bl$ (§. 20. Geom.)

$ab \times ab = bi \times bl$ (§. 15. Einleit.)
$ab \times ab = \square\,1.$ (§. 114. Geom.)

$\square\,1 = bi \times bl$ (§. 22. Arith.)
$bi \times bl = blki$ (§. 117. Geom.)

n. 1. $\square\,1 = blki$ (§. 22. Arith.).

$q = o$ (§. 18. 37. Geom)
$p = p$ (§. 20. Arith.)

$\triangle\, aci \backsim \triangle\, cab$ (§. 148. Geom.)

ci:

$ci : ac = ac : bc$ (§. 147. Geom.)

$ac \times ac = ci \times bc$ (§. 81. Arith.)

$bc = ch$ (§. 20. Geom.)

$ac \times ac = ci \times ch$ (§. 15. Einleit.)

$ac \times ac = \square\, 2.$ (§. 114. Geom.)

$\square\, 2 = ci \times ch$ (§. 22. Arith.)

$ci \times ch = chki$ (§. 117. Geom.)

$\square\, 2 = chki$ (§. 22. Arith.)

$\square\, 1 = blki$ (n. 1.)

$\square\, 1 + \square\, 2 = blki + chki$ (§. 24. Arith.)

$blki + chki = \square\, 3$ (§. 30. Arith.)

$\square\, 1 + \square\, 2 = \square\, 3.$ (§. 22. Arith.)

W. Z. E.

Unter die Beschuldigungen, welche man wieder die mathematische Lehrart zu machen pflegt, gehört auch diese, daß sie viel zu weitläufftig sey. Daher pflegte der grosse Rechtsgelehrte und ehemaliger Cantzler der Friedrichs-Universität Herr von **Ludewig** immer zu sagen: daß sich die mathematische Methode nur für Kinder, nicht aber für Leute von reifen Verstande schickte. Dieses ist gewissermassen wahr, aber es ist auch wahr, daß man eben so viel Recht habe, die mathematische Lehrart die allerschwerste und kürtze-

kürtzeste zu nennen. Denn sie ist weitläufftig und leicht, wenn man alle Sätze entweder hinschreibt oder citiret, welche zum Beweise erfodert werden; sie ist kurtz und schwer, wenn man viele Sätze aussen läst, oder keine Gründe des Beweises citiret. Freylich ist es aber nicht gleich viel, was man für Sätze aussen gelassen hat. Denn man muß zum wenigsten diejenigen hinsetzen, worinnen die rechte Kraft des Beweises steckt, und bey denen einem die ausgelassenen gantz natürlich einfallen müssen. Eine Probe von weitläufftigen und deutlichen Beweisen findet sich durchgehends in diesen Blättern, und bey dem kurtz vorher angeführten Beweise des Pytagorischen Lehrsatzes. Nun wollen wir ihn ins kurtze und doch dergestalt zusammen ziehen, daß er für einen Mathematickverständigen vollkommen hinreichend ist, und er alle ausgelassene Sätze von selbsten errathen kann. Dieses ist der gantze Beweiß.

$$ib : ab = ab : bc$$

n. 1. $ib \times bl = ab \times ab$

$$ci : ac = ac : cb$$

n. 2. $ci \times ch = ac \times ac$

Zu dem 149. §.

§. 80.

Wenn in einem Triangel eine Linie mit der

der Grundlinie parallel gezogen wird: so bekömmt man viele Proportionen.

Beweiß.

Weil DE mit BC parallel ist (per hypoth.) so ist der äussere Winckel o dem innern Winckel x und der äussere Winckel u dem innern y gleich (§. 72. Geom.) Da nun solchergestalt zwey Winckel in dem Triangel ADE zweyen Winckeln in dem Triangel ABC gleich sind: so ist der kleine Triangel dem grossen ähnlich (§. 148. Geom.). Und also verhalten sich die Seiten des kleinen Triangels eben so wie die Seiten des grossen gegen einander (§. 147. Geom.). Derowegen ist

$$
\begin{aligned}
AD : AE &= AB : AC \\
AD : DE &= AB : BC \\
AD : AB &= AE : AC \quad (\text{§. 83. Ar.}) \\
AD : AB &= DE : BC \quad (\text{§. 83. Ar.}) \\
AE : AC &= DE : BC \quad (\text{§. 57. Ar}) \\
AE : DE &= AC : BC \quad (\text{§. 83. Ar.})
\end{aligned}
$$

Tab. I. Fig. 4

Der Triangel ADE und BDE stossen in eine Spitze E zusammen. Sie haben also einerley Höhe, und verhalten sich folglich wie ihre Grundlinien (§. 139. Geom.) Eben dieses gilt auch von den beyden Triangeln ADE und CDE. Derowegen ist:

BDE

BDE = CDE (§. 119 Geom.)
BDE : ADE = BD : AD (§. 139. Geom.)

CDE : ADE = BD : AD (§. 15. Einl.)
CDE : ADE = EC : AE (§. 139. Geom.)

BD : AD = EC : AE (§. 57. Ar.)

AD : BD = AE : EC (§. 112. Anm. d. Rechenk.)

AD : AE = BD : EC (§ 83. Ar.)

Zu dem 150. und 151. §.

§. 81.

Diese und die folgende Aufgabe gründet sich auf die letzte Proportion in dem vorhergehenden Lehrsatze, und kann daraus gar leicht erwiesen werden. Man kann diese und noch viele mehrere Aufgaben auch vermittelst des Proportional-Circuls auflösen, welches in der Ausübung und Application der Geometrie sehr nützliches Instrument der berühmte Mathematicker Galiläus erfunden hat. Es bestehet aus 2. Linealen, welche in einem Punct so aneinander gesetzt sind, daß man sie von einander thun und Winckel von verschiedener Grösse damit machen kann. Auf diesen beyden Linealen sind viele Linien gezogen, welche auf mancherley Art eingetheilt sind, daß man dadurch in den Stand gesetzt wird, eine sehr grosse Menge Aufgaben aufzulösen, welche so wohl in die Mathesin puram als applicatam gehören. Doch sind alle diese Auflösungen blos mechanisch und können auch ohne dieses Instrument aufgelöset werden.

Zu dem 152. §.

§. 82.

Wenn sich zwey Seiten in einem Triangel eben so wie zwey Seiten in einem andern Triangel verhalten, und der Winckel, welchen diese zwey Seiten in dem einen Triangel einschliessen, dem Winckel, welchen sie in dem andern Triangel einschliessen, gleich ist: so sind diese Triangel einander ähnlich, und folglich nicht nur ihre Seiten einander proportional, sondern auch die gleichnahmigen Winckel einander gleich. (§. 147. Geom.)

Beweiß.

Wenn zwey Seiten in einem Triangel zweyen Seiten in einem andern Triangel gleich sind, und sich folglich auch in dem einem Triangel wie in dem andern verhalten, wenn ferner der darzwischen liegende Winckel in dem einem so groß ist, wie in dem andern: so sind die gantzen Triangel und die gleichnahmigen Stücke derselben einander gleich (§. 49. Geom.) das ist, die Triangel sind gleich und ähnlich. (§. 27. Einleit.) Derowegen muß in der Grösse zweyer Seiten in der Verhältniß derselben und der Grösse des darzwischen liegenden Winckels der Grund von der Gleichheit und Aehnlichkeit beyder Triangel anzutreffen seyn. Nun hat es die Aehnlichkeit nicht mit der Grösse zu thun (§. 27. Einleit.). Von der Grösse der Seiten eines Triangels aber dependirt, wenn das andere alles einerley bleibet, die Grösse des Triangels selbst. Derowegen muß die Aehnlichkeit der Triangel blos dadurch bestimmet werden, daß zwey Seiten in dem einen eben die Verhältniß wie zwey Seiten in dem andern Triangel haben, und das der darzwischen liegende Winckel in dem einen so groß ist, wie in dem andern. Ist aber dieses hinreichend, auf die Aehnlichkeit der Triangel einen Schluß zu machen: so kann man auch ferner daraus die Gleichheit der Winckel und Proportionalität der Seiten schliessen. (§. 147. Geom.)

W. Z. E.

Zu dem 154. §.

§. 83.

DE = CE
BE = AE (per Operat.)

DE : CE = BE : AE (§. 101. Anmerck. d. Rechenk.)
E = E (§. 20. Arith.)

n. 1. △ CED ∽ AEB (§. 152. Geom.)

$$AE : AB = CE : CD \quad (\text{§. 147. Geom.})$$
$$CE = CD \quad (\text{per Operat.})$$

$$\text{n. 2.} \quad AE = AB \quad (\text{§. 101. Anmerck. d. R.})$$

Also ist AB diejenige Linie, welche getheilt werden sollte. Welches das erste war.

$$\triangle AEB \backsim CED \quad (\text{per dem, n. 1.})$$

$$A = C \quad (\text{§. 147. Geom.})$$
$$\text{der Winckel } AEF = CEG \quad (\text{§. 20. Arith.})$$

$$\triangle AEF \backsim CEG \quad (\text{§. 148. Geom.})$$

$$AE : AF = CE : CG \quad (\text{§. 147. Geom.})$$
$$AE = AB \quad (\text{per dem. n. 2.})$$
$$CE = CD \quad (\text{per Operat.})$$

$$AB : AF = CD : CG \quad (\text{§. 15. Einleit.})$$

Welches das andere war.

Zu dem 155. §.

§. 84.

Wenn man eine grössere Linie so eintheilen will, wie eine kleinere eingetheilt worden: so macht man den gleichseitigen Triangel AEB, verlängert seine Seiten und trägt die einzutheilende Linie aus E in C und aus E in D. Hernach zieht man durch die Theilungspuncte F und H gerade Linien.

Zu

Zu dem 157. §.

§. 85.

Alle diese Parallelogramma und Triangel haben gleiche Grundlinie und Höhe. Daher sind sie einander gleich. (§. 118. 119. Geom.)

Zu dem 158. §.

Tab. III Fig. 1.

$o + x = 90^\circ$ (§. 86. Geom.)
$r = 90^\circ$ (§. 18. Geom.)

$o + x = r$ ((§. 37. Geom.).
$s = s$ (§. 20. Arith.)

$u = o$ (§. 78. Geom.)
$t = r$ (§. 37. Geom.)

$\triangle EBD \backsim DBA$ (§. 148. Geom.)

$EB : BD = BD : BA$ (§. 147. Geom.)

W. Z. E.

Wenn man z. E. EB in 3 und BA in 12. gleiche Theile eintheilet: so bekömmt BD 6 solcher Theile. Denn $3 : 6 = 6 : 12$. Es hat diese Aufgabe in der Construction der algebraischen Gleichungen einen grossen Nutzen. Denn wenn

$ab = \sqrt{x}$

so ist $a : x = x : b$

Das ist, x ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen a und b. Man soll z. E. ein

Rectangulum in ein Quadrat verwandeln, oder ein Quadrat machen, daß dem Rectangulo gleich ist.

Nennet die Grundlinie des Rectanguli $= a$ seine Höhe $= b$, die Seite des unbekanten Quadrates $= x$: so ist der Inhalt des Rectanguli $= ab$ (§. 117. Geom.) der Inhalt des Quadrates $= x^2$ (§. 114. Geom.). Folglich

$$\frac{ab = x^2}{a : x = x : b} \quad (\text{§. 81. Ar.})$$

Derowegen ist die Seite des Quadrates, welches dem Rectangulo gleich ist, die mittlere Proportionallinie zwischen der Grundlinie und der Höhe des Rectanguli. Ja weil der Inhalt eines jeden Parallelogrammi gefunden wird, wenn man seine Grundlinie mit der Höhe multiplicirt (§. 114. 117. 121. Geom.): so kann man ein jedes Parallelogrammum in ein Quadrat verwandeln, wenn man zwischen seiner Höhe und Grundlinie eine mittlere Proportionallinie sucht. Die gegenwärtige Aufgabe zeigt, wie solches anzufangen sey.

Zu dem 159. §.

§. 86.

Wenn $EB = 1$. $BA = 36$: so ist $BD = 6$. und folglich die Quadratwurtzel von 36.

Zu dem 170. §.

§. 87.

Tab. III. Fig. 2.

Es kann auch auf folgende Art eine Höhe gemessen werden.

1) Man steckt einen Stab BC in die Erde.
2) Man legt sich hinter dem Stabe dergestalt auf die Erde nieder, daß der Punct C die Spitze E der Höhe, welche man messen will, deckt.
3) Messe man die Entfernung des Auges A von dem Punct B, die Linie BC und AD.
4) Wenn man nun schließt: wie AB zu BC: so AD zu DE: so findet man die Höhe DE durch die Regel Detri.

Beweiß.

$r = s = 90°$ (per Hypoth.)
$x = x$ (§. 20. Arith.)

$\triangle$ ABC $\backsim$ ADE (§. 148. Geom.)

AB : BC = AD : DE (§. 147. Geom.)

W. Z. E.

Anders.

Tab. III. Fig. 3.

1) Man lege einen Spiegel C an die Erde.
2) Man gehe so lange zurück, bis man die

Spitze E der Höhe in dem Spiegel erblickt.

3) Wenn man nun schließt: wie die Höhe des Auges über der Erde BA zu der Entfernung der Füsse von dem Spiegel AC: so die Entfernung des Spiegels von dem Thurme CD zu der Höhe des Thurmes DE: so findet man diese durch die Regel Detri

Weil der Einfallswinckel bey einem Spiegel dem Reflexionswinckel jederzeit gleich ist: so ist

$$o = x$$
$$r = s \quad (\S. 37. \text{ Geom.})$$

$$\triangle BAC \backsim CDE \quad (\S. 148. \text{ Geom.})$$

$$BA : AC = CD : DE \quad (\S. 147. \text{ Geom.})$$

W. Z. E.

Zu dem 177. §.

§. 88.

Wir haben die Länge, wir haben die Länge und Breite betrachtet. Nun müssen wir von der Länge Breite und Dicke, das ist, von den Körpern handeln. Dieser dritte und letzte Theil der Geometrie, welcher uns lehret, wie wir die Körper ausmessen sollen, wird die Stereometrie genennet. Wir betrachten aber hier von dem Körper weiter nichts, als die blosse

Aus-

Ausdehnung desselben, und bilden uns daher ein, daß seine Theile in einen fortgehen, das ist, wir stellen uns ihn als ein continuum vor, oder eigentlich zu sagen, wir betrachten nicht so wohl den Körper, als vielmehr den Raum, in welchen er sich befindet. So wenig nun eine Linie aus Puncten und eine Fläche aus Linien zusammengesetzt werden kann; eben so unmöglich ist es, daß ein Körper entstehen kann, wenn viele Flächen an einander gesetzt werden. Denn wenn diese Flächen einander berühren, so fallen sie zusammen und machen nur eine Fläche aus; berühren sie einander aber nicht: so würden Zwischenräume zwischen ihnen bleiben, und folglich der Geometrische Körper kein in einen fortgehendes Ding seyn. Daher behaupten die Mathematicker, daß die Körper durch Bewegung einer Fläche, gleichwie die Flächen durch Bewegung einer Linie, und die Linien durch Bewegung eines Puncts erzeugt werden. Freylich bringt die Natur die Körper niemals durch Bewegung einer Fläche hervor, aber dieses ist auch die Sache nicht, um welche sich ein Geometer bekümmert. Denn er verlangt weiter nichts, als sich von der Figur und Grösse eines Körpers einen deutlichen Begriff zu machen. Wenn sich ein halber Cirkul um seinen Diameter herumdrehet: so beschreibt die Cirkelfläche einen Körper, welchen man eine Kugel nennt, durch die Peripherie dieses Cirkels aber wird die

Kugelfläche beschrieben. Da nun in der Peripherie eines Cirkels alle Puncte von dem Mittelpuncte gleichweit abstehen, so müssen auch alle Puncte auf der Oberfläche einer Kugel von dem Mittelpuncte gleichweit entfernet seyn.

Zu dem 179. §.

§. 89.

Weil es unendlich viele geradlinichte Figuren giebt: so giebt es auch unendlich viele Prismata.

Zu dem 190. §.

§. 90.

Wenn ein körperlicher Winckel (angulus solidus) entstehen soll: so müssen zum wenigsten drey flache Winckel (anguli plani) in einem Punct zusammen stossen, doch können auch mehrere flache Winckel, wenn sie in einer Spitze zusammen lauffen, einen körperlichen Winckel machen. Diese flache Winckel zusammen genommen, müssen aber allemahl weniger als 360° halten. Denn wenn sie 360° halten: so fallen sie in eine geradlinichte Fläche, und können niemals einen körperlichen Winckel hervorbringen. Nun können wir finden, wie viel reguläre Körper möglich sind. Wir wollen zu dem Ende erstlich zusehen, wie viel reguläre Körper herauskommen, die in lauter reguläre Triangel eingeschlossen sind. Ein regulärer

Tri-

Triangel ist der gleichseitige Triangel (§. 21. 19. Geom.). Der Winckel in diesen Triangel hält 60° (§. 80. Geom.). Man kann also einen regulären Körper machen, da allemahl drey gleichseitige Triangel in eine Spitze zusammenstossen und dieser Körper wird ein *Tetraaedrum* genennt. Wenn vier gleichseitige Triangel in einem Punct zusammenstossen: so machen die Winckel, welche den körperlichen Winckel formiren, viermal sechzig, das ist, 240 Grad aus, und ein solcher regulärer Körper ist das *Octaaedrum*. Fünff Winckel von gleichseitigen Triangel halten fünfmahl 60 oder 300°. Es ist also möglich, daß sie einen körperlichen Winckel machen können, und dieses geschiehet in den *Icosaaedro*. Wenn man sechs solche Winckel in einem Punct an einander setzen wollte: so würden sie sechsmahl 60. das ist 360° ausmachen. Es kann also ferner daraus kein körperlicher Winckel entstehen. Unter den Vierecken ist das Quadrat die reguläre Figur. (§. 20, 21. Geom.). Der Winckel darinnen hat 90° (§. 37. Geom.). Wenn man also drey solche Winckel zusammen setzt: so kommen dreymahl 90. oder 270° heraus, und dergleichen körperlicher Winckel befindet sich an dem **Würffel**. Vier rechte Winckel können aber, weil sie 360° ausmachen, keinen körperlichen Winckel hervorbringen. Im regulären Fünfeck ist der Polygonwinckel 108°. (§. 104. Geom.).

Setzet 3. solche Winckel in eine Spitze zusammen: so kommen 324° heraus, und es entsteht ein körperlicher Winckel, dergleichen sich in dem *Dodecaaedro* befindet. Vier solche Winckel können, weil sie 432° machen, keinen körperlichen Winckel hervorbringen. Der Winckel im regulären Sechsecke hat 120° (§. 104. Geom.). Da nun 3mahl 120 = 360: so kann kein körperlicher Winckel entstehen. Vielweniger wird dieses mit dem Sieben- oder Achtecke angehen, da die Polygonwinckel noch grösser sind. **Derowegen sind nur fünf reguläre Körper möglich; nemlich dreye, deren Fläche aus gleichseitigen Triangeln, einer dessen Fläche aus Quadraten und einer dessen Fläche aus regulären Fünfecken zusammengesetzt ist.**

Zu dem 191. §.

§. 91.

Wenn man einen Körper ausmessen will: so muß man nothwendig einen Körper zum Maaßstabe annehmen. Denn der Maaßstab und die zu messende Sache müssen iederzeit von einerley Art seyn. Dadurch ist aber noch nicht ausgemacht, was man vor einen Körper zum Maaßstabe anderer zu erwählen habe; sondern es ist dieses eben so willkührlich, als das Längen- und Flächen-Maaß. Man hätte also Cylinder, man hätte Kugeln, oder einen ieden andern Cörper zum Maaßstabe der Körper erwählen

wählen können. Es hat aber den Geometern beliebt, sich des Würfels hierzu zu bedienen. Man nennt also eine Cubicmeile einen Würffel, welcher eine Meile lang, breit und hoch ist. Eine Cubicruthe einen Würffel, dessen Seite eine Ruthe, einen Cubicschuh einen Würffel, dessen Seite ein Schuh ist. u. s. w. Wenn man nun einen Körper ausmessen will: so muß man bestimmen, wie viel dergleichen Würffel erfodert werden, um den Raum, welchen er einnimmt, damit zu erfüllen.

Zu dem 192. §.

§. 92.

Wenn das Längenmaaß in zehen Theile eingetheilt wird: so bekömmt das Flächenmaaß 100. (§. 115. Geom.) und das Maaß des körperlichen Inhalts 1000. Theile. Da nun die Zahl in der vierten Stelle allemahl tausendmahl mehr gilt: so geht bey derselben jederzeit eine neue Classe an. Derowegen muß man allemahl drey Zahlen in eine Classe rechnen, wenn man körperliches Maaß aussprechen will. z. E.

$367854608432'''$ cubisches Maaß ist $367^{\circ}\,854'\,608''\,432'''$ das ist 367 Cubicruthen 854 Cubicschuh 608 Cubiczoll 432 Cubiclinien.

Zu

Zu dem 196. §.

§. 93.

Wenn man die Grundfläche eines Prismatis ausrechnet: so weiß man wie viel kleine Würffel auf derselben neben einander stehen können. Mißt man nun auch die Höhe: so findet man, wie viel solche Schichten über einander zu stehen kommen. Man findet also den körperlichen Inhalt eben so wie bey dem Parallelepipedo, wenn man die Höhe mit der Grundfläche multiplicirt. Denn die Prismata haben dieses mit den Parallelepipedis gemein, daß sie überall gleiche Breite und Dicke behalten, welches aber nicht von den Kegeln und Pyramiden gesagt werden kann, welche immer schmäler werden, je näher sie der Spitze kommen. Ja was ist es Wunder, daß das Parallelepidedum und das Prisma auf gleiche Art ausgerechnet werden, da das *Parallelepipedum* nichts anders ist, als ein Prisma, welches durch ein *Rectangulum* erzeugt worden.

Zu dem 198. §.

§. 94.

Tab. III. Fig. 4.

Der Beweiß dieses Satzes, daß Pyramiden und Kegel die gleiche Grundflächen und Höhen haben, einander gleich sind, welchen der Herr Cantzler von Wolff in den Anfangs-Gründen gegeben, ist folgender:

Lehr.

Lehrsatz.

Wenn eine Pyramide ABCD dergestalt durchschnitten wird, daß der Durchschnitt abc der Grundfläche ABC parallel ist; so ist auch die Figur abc der andern ABC ähnlich.

Beweiß.

Weil ab mit AB parallel; so ist Da: DA = ab: AB. Eben deswegen ist Da: DA = ac: AC, folgends ab: AB = ac: AC, und daher ab: ac = AB: AC. Da man nun auf gleiche Art erweiset, daß ac: bc = AC: BC; so sind die △△ abc und ABC ähnlich, folgends in andern Fällen die Figuren, die aus ihnen zusammen gesetzt werden. W. Z. E.

Lehrsatz.

Tab. IV. Fig. 1.

Pyramiden und Kegel die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.

Es sey ABC eine Seitenfläche von einer Pyramide, und DEF von der andern, BC und EF in einer Linie BF, BC = EF, die Spitzen A und D mit BF in einer Fläche und AM auf BC, DO auf EF perpendicular; so ist AM = DO. Nun ziehe man GK mit BF und AD parallel: so ist auch AL = DN und AG: AB = GH: BC = AL: AM. Eben so wird erwiesen, daß DN: DO = IK: EF.

Da

Da nun GH: BC = IK: FF, das ist, GH: IK = BC: EF und BC = EF; so ist GH = IK. Weil eben dergleichen in allen übrigen Flächen, welche die Pyramide einschliessen, erwiesen werden kann, und wegen der Aehnlichkeit der Durchschnitte mit ihren Grundflächen (§. antec.) die gleichnahmigen Winckel einander gleich sind: so müssen die Durchschnitte in beyden Pyramiden von gleicher Grösse seyn, wenn sie in gleicher Höhe geschehen. Da aber die gantzen Höhen der Pyramiden von gleicher Grösse sind, kann man in einer nicht mehr Durchschnitte haben als in der andern. Und demnach sind die Pyramiden einander gleich. **Welches das erste war.**

Wenn man die Triangel ABCund DEF für die Durchschnitte zweyer Kegel annimmt, dadurch sie von der Spitze bis durch die Grundfläche in zwey gleiche Theile getheilt werden: so sind GH und IK die Diametri der Circul, welche aus den mit den Grundflächen parallel geschehenen Durchschnitten entstehen, und also ist abermahl klar, daß diese Circul und folgends die gantzen Kegel einander gleich seyn müssen. **Welches das andere war.**

Zu dem 199. §.

§. 95.

Dieses ist in den Anfangsgründen folgender Gestalt erwiesen.

Lehr-

Lehrsatz.

Tab. IV. Fig. 2.

Ein iedes dreyeckichtes Prisma kann in drey gleiche Pyramiden getheilt werden.

Beweiß.

Die Pyramiden ADEF und ACBE haben einerley Höhe BE und gleiche Grundflächen DEF und ABC: Derowegen sind sie einander gleich. Wiederum die Pyramiden ACBE und CEFA haben gleiche Grundflächen BCE und CDF und einerley Höhe, indem sie beyde in A zusammen stossen. Derowegen sind sie auch einander gleich. Folgends sind sie alle drey einander gleich. W. Z. E.

Anmerckung.

Wenn man das Prisma aus Holtz verfertigen und auf gehörige Weise schneiden läst, so ist den Anfängern der Beweiß leichter zu begreiffen, weil sie die Pyramide CEFA besser sehen können.

Der 1. Zusatz.

Eine dreyeckigte Pyramide ist der dritte Theil von einem Prismate, so mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Der 2. Zusatz.

Weil ein iedes vieleckigtes Prisma in viele dreyeckigte sich zertheilen läst, so muß eine iede Pyramide der dritte Theil von einem Prismate te seyn, so mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Zu dem 201. §.

§. 96.

Nennet die Grundfläche des Kegels oder der Pyramide a die Höhe b: so ist der Inhalt $\frac{ab}{3}$. Weil aber $\frac{ab}{3} = \frac{a}{3} ab = \frac{1}{3} ba$: so ist es gleich viel, ob man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt, und das Product mit 3 dividirt, oder ob man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt, oder ob man endlich die Höhe durch den dritten Theil der Grundfläche multiplicirt.

Zu dem 203. §.

§. 97.

Diesen Lehrsatz, daß die Kugel $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder sey, damit sie gleiche Höhe und Grundfläche hat, hat der vortrefliche Mathematicker Archimedes erfunden. Der Beweiß ist folgender:

Tab. IV. Fig. 3.

Wenn das Quadrat ABCD sich um seine Seite DC herumdrehet, so beschreibt es einen Cylinder, der Quadrant DCB eine halbe Kugel und der Triangel ADC einen Kegel. Weil die Höhe in allen dreyen Körpern einerley ist, so können in einem nicht mehr Durchschnitte gemacht

gemacht werden, als in dem andern Es stelle die Linie HE den halben Diameter eines Durchschnittes vor, so verhält sich der Durchschnitt des Cylinders, wie das Quadrat HE oder GC, der Durchschnitt der Kugel wie das Quadrat GE und der Durchschnitt des Kegels wie das Quadrat FE oder EC. Denn weil BC = HE und GC = BC: so ist auch HE = GC. Jngleichen weil CD = AD: so ist auch EC = EF. Wenn man nun das Quadrat EC, das ist, den Durchschnitt des Kegels von dem Quadrat GC, das ist, dem Durchschnitte des Cylinders wegnimmt; so bleibet das Quadrat GE, das ist, der Durchschnitt der Kugel übrig. Da nun dieses von allen Durchschnitten gilt, so folget, daß wenn man den Jnhalt des Kegels von dem Jnhalt des Cylinders wegnimmt, der Jnhalt der halben Kugel übrig bleibe. Derowegen weil der Kegel $\frac{1}{3}$ des Cylinders ist, so muß die halbe Kugel $\frac{2}{3}$ von demselben seyn, folgends auch die gantze Kugel $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, der noch einmahl so groß ist als der vorige, das ist, mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat. W. Z. E.

Zu dem 206. §.

§. 98.

Lehrsatz.

Der *Cubus Diametri* verhält sich zu der Kugel beynahe wie 300. zu 157.

Beweiß.

Wenn der Diameter der Kugel 100 ist, so hält der Cubus desselben 1000000, und der Cylinder, der mit der Kugel eine Grundfläche und Höhe hat, 785000. Und demnach ist der Inhalt der Kugel der dritte Theil von 1570000. Solchergestalt verhält sich der Cubus zur Kugel, wie 1000000. zu dem dritten Theil von 1570000, das ist, wenn man mit 3 multiplicirt 3000000 zu 1570000, oder wenn man ferner durch 10000 dividiret, wie 300 zu 157. W.Z.E.

Anmerckung.

Ich sage der Cubus Diametri verhalte sich zur Kugel bey nahe wie 300 zu 157, weil man voraussetzet, der Diameter im Circul verhalte sich zu seiner Peripherie, wie 100 zu 314, welches nur bey nahe zutrifft.

Lehrsatz.

Die Kugel ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche der gantzen Kugelfläche, die Höhe aber der Hälfte ihres Diametri gleichet.

Beweiß.

Man stelle sich vor, als wenn die Fläche der Kugel in so kleine Vierecke zertheilet sey, daß iedes von ihnen von einer ebenen Fläche nicht mehr mercklich unterschieden. Man setze hinzu, daß aus dem Mittelpuncte der Kugel an ihre Ecken gerade Linien gezogen seyn. Alsdenn ist klar, daß die Kugel aus unzählig viel viereckigten Pyramiden bestehe, die im Mittelpuncte der Kugel zusammenstossen, und deren Grundflächen zusammen der Kugelfläche gleich sind, die Höhen aber von dem halben Diameter der Kugel nicht mercklich unterschieden. Derowegen wird die gantze Kugel mit Recht vor eine Pyramide gehalten, deren Grundfläche der Kugelfläche, die Höhe aber der Hälfte ihres Diametri gleichet.

W. Z. E.

Lehrsatz.

Die Kugelfläche verhält sich zu dem grösten Circul der Kugel wie 4. zu 1.

Beweiß.

Weil der Inhalt der Kugel dem Inhalte einer Pyramide gleich ist, deren Grundfläche der Kugelfläche, die Höhe aber ihrem halben Diameter gleichet; so kommet die Kugelfläche heraus, wenn man den körperlichen Inhalt der Kugel durch den dritten Theil des halben Diametri, oder den sechsten des gantzen dividiret. Nun wenn der Diameter 100 ist, so ist der Inhalt des grösten Circuls 7850, der Inhalt aber der Kugel 1570000. Derowegen wenn ihr diesen durch den sechsten Theil des Diametri $\frac{100}{6}$ dividiret, so kommet für die Kugelfläche 31400. Demnach verhält sich die Kugelfläche zu dem grösten Circul der Kugel, wie 31400 zu 7850, das ist, wenn man beyderseits mit 7850 dividiret, wie 4. zu 1.

W. Z. E.

Zu dem 207. §.

§. 99.

Wenn man die Peripherie der Kugel durch den vierten Theil des Diameters multiplicirt: so kömmt die Fläche des grösten Circuls heraus (§. 128. Geom.). Wenn man also die Peripherie durch den gantzen Diameter multiplicirt: so muß eine Fläche herauskommen, welche 4 mahl grösser ist als der gröste Circul der Kugel. Diese ist demnach die Kugelfläche (§. 206.).

Zu dem 210. §.

§. 100.

Prismata, Parallelepipeda, Cylinder, Pyramiden und Kegel sind in einer zusammengesetzten Verhältniß ihrer Höhen und Grundflächen.

Zu dem 212. §.

§. 101.

Weil sich die Kugeln wie die Cubi ihrer Diametrometrorum verhalten: so ist eine Kugel 8mahl grösser als eine andere, wenn sie noch einmahl so dicke ist, und 27 mahl grösser, wenn sie 3 mahl dicker ist. Man misset aber die Dicke der Kugeln, oder ihren Diameter, entweder wenn man sie zwischen 2 geradlinichte Flächen setzt, oder vermittelst eines Circuls, welcher krumme Füsse hat, und ein **Taster** genennet wird. Gleichwie sich ferner alle ähnliche Flächen, wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten: so verhalten sich auch alle ähnliche Körper, wie die Cubi ihrer Diametrorum, oder ihrer gleichnahmigen Seiten. Daher pflegt man zu sagen: ähnliche Körper sind in ratione triplicata laterum homologorum. Man hätte z. E. ein Vergrösserungsglas, welches eine Linie 10 mahl grösser vorstellte: so würde ein Sandkorn durch dasselbe nicht 10 sondern 1000 mahl grösser erscheinen.

Zu dem 217. §.

§. 102.

Aufgabe.

Die 5. regulären Körper auszurechnen.

Auflösung.

Wie der Würffel auszurechnen sey, haben wir gesehen. Das Tetraaedrum wird ausgerechnet wie eine dreyeckigte Pyramide. Das Octaaedrum kann man sich vorstellen, als wenn es aus 8 dreyeckigten Pyramiden zuſammen geſetzt wäre, welche alle in einem Punct zuſammenſtoſſen, und einander gleich ſind. Wenn man alſo eine ſolche Pyramide ausrechnet, und das Product durch 8 multiplicirt: ſo hat man den Inhalt des Octaaedri. Das Icoſaaedrum beſteht aus 20. ſolchen dreyeckigten Pyramiden. Wenn man alſo eine ausrechnet, und ihren Inhalt durch 20. multiplicirt: ſo hat man den körperlichen Inhalt des Icoſaaedri gefunden. Und eben ſo kann man das Dodecaaedrum anſehen, als wenn es aus 12. fünfeckigten Pyramiden zuſammengeſetzt wäre, und folglich auch ſeinen Inhalt finden.

E N D E.

Anmerckungen
über die
Trigonometrie
Des
Herrn Cantzlers und Baron
von Wolff.

Einleitung.

Die Trigonometrie stellt sich Anfängern unter einer sehr fürchterlichen Gestalt vor. Sie glauben nichts als eine Menge ungewöhnlicher und seltsamer Wörter, kopfbrechende Rechnungen und verdrießliche Beweise darinnen anzutreffen. Da sie nun nicht absehen können, was sie hiervon für Nutzen haben, so entsteht natürlicher Weise ein Abschen gegen die Trigonometrie bey ihnen. Wäre die Trigonometrie würcklich was sie zu seyn scheinet: so wäre dieses niemanden sonderlich zu verdencken. Aber da sie den Schlüssel zu den verborgensten Geheimnissen der Natur verwahret: so ist sie allemahl im Stande, ihren Liebhabern die wenige Mühe reichlich zu belohnen, welche sie ihrentwegen über sich nehmen müssen. Sollte es uns also wohl jemahls gereuen, wenn wir uns mit ihr bekant gemacht haben?

Zu dem 1. §.

§. 1.

Die Trigonometrie ist eine Wissenschaft, welche aus der Arithmetick und Geometrie so zu sagen zusammen geschmeltzt ist. Denn sie betrachtet den Triangel arithmetisch, indem sie lehret, wie man aus drey Stücken eines Triangels die übrigen durch Rechnung finden könne. Daher läst sie sich nicht eher erlernen, bis man die Arithmetick und Geometrie vorher inne hat. So schlecht sie auch scheinet, so hat man es ihr doch zuzuschreiben, daß man die Grösse und Entfernung der Weltkörper die Figur der Erde und hundert andere Sachen entdeckt hat, von denen man kaum hätte glauben sollen, daß sie durch menschlichen Witz erfunden werden könnten.

Zu dem 2. §.

§. 2.

Der Sinus eines Bogens ist die halbe Sehne des doppelten Bogens. Ihr wollt z. E. den Sinus eines Bogens, welcher 30. Grad hat, zeichnen: so nehmet diesen Bogen doppelt, das ist, den Bogen von 60. Graden, dieser hat seine Sehne und solche ist im gegenwärtigen Falle so groß, als der Radius, (§. 108. Geom.) nehmet die Hälfte dieser Sehne, so bekommt ihr den halben Radium, und dieses ist der Sinus von einem Bogen, welcher 30. Grad hat, und

zugleich

zugleich auch von einem Winckel, dessen Maaß dieser Bogen ist. Oder mit einem Worte die Sinus sind nichts anders als die Semiordinaten des Circuls. Denn damit die Mathematicker die Eigenschaften der krummen Linien entdecken möchten: so ziehen sie die Axe oder den Diameter in einer kummen Linie und nennen die Theile derselben Abscissen, auf diesen Abscissen richten sie Perpendicularlinien auf, biß sie an die krumme Linie anstossen, und diese führen den Nahmen der Semiordinaten; weil sie die Hälfte von derjenigen geraden Linie sind, welche von einem Puncte einer krummen Linie nach den entgegengesetzten dergestalt gezogen ist, daß sie die Axe unter rechten Winckeln durchschneidet. Daher sind die Sehnen des Circuls nichts anders als seine Ordinaten.

Zu dem 5. §.

§. 3.

So ist z. E. der halbe Radius der Sinus des Bogens von 30. Graden (§. 2.) und auch der Sinus des Bogens von 150. Graden. Denn es ist in beyden Fällen die halbe Sehne des doppelten Bogens.

Zu dem 7. §.

§. 4.

Der Sinus versus ist der Theil des Radii, welcher zwischen der Peripherie und dem Sinu

recto

recto befindlich ist. Sinus complementi aber ist der Sinus eines Bogen, welcher Bogen mit dem gegebenen Bogen zusammen genommen 90. Grad ausmacht; und hieraus kann man zugleich abnehmen, was Tangens und Secans complementi sey.

Zu dem 8. §.

§. 5.

Weil der Radius der gröste Sinus in dem gantzen Circul ist: so hat er die Ehre, daß er Sinus totus genennt wird. Denn da der Diameter die gröste Sehne ist: so muß nothwendig der halbe Diameter der gröste Sinus seyn.

Zu dem 11. §.

§. 6.

Man hat verschiedene Mittel die Sinus und Tangentes auszurechnen. Uns begnüget hier nur einige anzuführen, um die Möglichkeit zu zeigen.

Man kann also den Sinum complementi **finden**, wenn man

1) das Quadrat des gegebenen Sinus von dem Quadrate des Sinus totius subtrahirt, und
2) Aus dem was übrig bleibt, die Quadratwurtzel auszieht.

Man findet den Sinum **des halben Bogens**, wenn man

1) Den

1) Den Sinum complementi vom Sinu toto abziehet, daß man den Sinum versum bekömmt.

2) Das Quadrat dieses Sinus und des gegeben Sinus addiret man zusammen: so bekömmt man das Quadrat der Sehne.

3) Hieraus zieht man die Quadratwurtzel, und halbiret es: so hat man den Sinum des halben Bogens u. s. w.

Verlangt man den Tangentem eines Bogens: so findet man ihn durch die Regel Detri, wenn man schließt: Wie der Sinus complementi zum Sinu recto, so der Sinus totus zum Tangenten. Müssen wir also den unermüdeten Gelehrten nicht verbunden seyn, welche sich die Mühe genommen haben, solche beschwerliche Rechnungen zu verrichten, und die Grösse aller Sinuum und Tangentium durch den gantzen Quadranten auf jeden Grad und Minute ja so gar von 10. zu 10. Secunden zu bestimmen? Haben wir aber ihre Geduld bewundert: so werden wir die Geduld derjenigen vortreflichen Männer noch weit mehr bewundern müssen, welche die Logarithmos ausgerechnet haben. Gewiß, diese sind wahre Nachfolger des Hiobs und Hercules. Denn jenen haben sie an Geduld und diesen an Arbeitsamkeit zu übertreffen gesucht. So selten aber diese beyden Tugenden in der Welt sind, so gewiß ist es, daß Johannes Nepper und Heinrich Brigge wenig Nachfolger gehabt haben. Ja

wenn

wenn es auch enige giebt, deren Schultern breit genug sind, solche Lasten zu tragen: so danckt man ihnen kaum für ihre Mühe. Das macht, sie ist nicht nach dem Geschmacke der Welt, und den meisten eckelt für dieser losen Speise. Daher geschieht es, daß manche nützliche Arbeiten liegen bleiben müssen, wovon wir an der vollständigen Anatomia numerorum des geschickten und unermüdeten Mathematickers Herrn Jägers eine Probe haben.

Zu dem 15. §.

§. 7.

Die Bequemlichkeit, daß durch die Logarithmos das Multipliciren in Addiren, und das Subtrahiren in Dividiren verwandelt wird, hat man sich nur alsdenn zu versprechen, wenn die geometrische Progreßion von 1. und die arithmetische von 0 ihren Anfang nimmt. Denn weil sich verhält 1. zu dem einen Factore, wie der andere Factor zu dem Producte (§. 137 Anm. d. Rechenk.): so ist der Logarithmus des Products die vierte arithmetische Proportionalzahl zu dem Logarithmo von 1. und den Logarithmis der beyden Factorum. Nun ist in einer arithmetischen Proportion die Summe der äusserſten Glieder so groß, wie die Summe der beyden mitleren. (§. 173. Anmerck. der Rechenk.) Derowegen ist die Summe von den Logarithmis der Factorum so groß, wie die Summe aus

dem

dem Logarithmo des Products und dem Logarithmo von 1. Da aber der Logarithmus von 1. so viel als 0 oder nichts ist: so ist die Summe aus den Logarithmis factorum dem Logarithmo des Products gleich. Weil in einem Quadrate die beyden Zahlen, so in einander multiplicirt werden, gleich sind; so ist der Logarithmus des Quadrats dem Logarithmo der Wurtzel, zweymahl genommen, gleich. Derowegen ist die Hälfte eines Logarithmi der Logarithmus der Wurtzel aus der ihm gehörigen Zahl. Weil die drey Zahlen, durch deren Multiplication in einander eine Cubiczahl entstehet, einander gleich sind: so ist der Logarithmus einer Cubiczahl noch einmahl so groß, wie der Logarithmus der Wurtzel. Derowegen ist der Logarithmus der Cubicwurtzel der dritte Theil des Logarithmi der Cubiczahl. Weil sich eines zu dem Quotienten verhält, wie der Divisor zum Dividendo: so ist der Logarithmus des Quotienten die vierdte arithmetische Proportionalzahl zu den Logarithmis des Divisoris, des Dividendi und Eines. Derowegen da der Logarithmus von Eins 0 ist, muß der Logarithmus des Quotienten der Unterscheid von den Logarithmis des Divisoris und Dividendi seyn. Ein Bruch ist nichts anders, als ein Quotiente, welcher entsteht, wenn eine kleine Zahl durch eine grössere dividirt wird. (§. 119. Anmerck. d. Rechenk.). Es ist also bey einem wahren Bruche

che iederzeit der Divisor grösser als der Dividendus. Da nun der Logarithmus des Quotienten herauskömmt, wenn man den Logarithmum des Divisoris von dem Logarithmo des Dividendi subtrahiret: so erfindet man den Logarithmum eines Bruchs, indem man eine grössere Zahl von einer kleinern subtrahiret. Wenn man eine grössere Zahl von einer kleinern subtrahirt: so bekömmt man weniger als nichts, oder nach der mathematischen Sprache —. Derowegen ist der Logarithmus eines wahren Bruches iederzeit —. Brüche die einander gleich sind, haben allemahl einerley Logarithmum. So ist z. E. der Logarithmus von $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{10}$ = — 1.

Zu dem 18. §.

§. 8.

Weil die Ausrechnung der Logarithmorum den Anfängern zu schwer fällt, und auch in der Ausübung nicht nöthig ist, weil wir sie schon in den gewöhnlichen Tabellen antreffen: so hat man nur nöthig, ihnen die Möglichkeit dieser Rechnungen zu zeugen, und sie zu dem Gebrauche der Logarithmischen Tabellen anzuführen. Man trifft demnach in diesen Tabellen erstlich die Logarithmos numerorum naturali serie crescentium an, und unter diesen hat man iederzeit die Logarithmos der Seiten eines Triangels zu suchen. Man findet ferner die Logarithgarithmos ſinuum und tangentium darinnen auf alle Grade und Minuten, ja in den gröſſern Tafeln auch von 10. zu 10. Secunden durch den gantzen Quadranten. Dieſe Logarithmi ſind ordentlicher weiſe ſo gedruckt, daß man auf der einen Seite die Logarithmos ſinuum und tangentium der Winckel, welche unter 45° ſind, antrifft, auf der entgegengeſetzten Seite befinden ſich die Logarithmi ſinuum und tangentium welche mehr als 45° haben. Daher muß ein ſolches Buch von dem erſten bis zum fünf und viertzigſten Grade wie gewöhnlich von 45° aber bis zum 90ſten rückwarts geleſen werden. Dieſe Einrichtung hat man nicht aus der Urſache gemacht, daß man nicht verſtanden ſeyn wolte. Nein, ſo neidiſch iſt man in der Mathematick nicht. Man hat es vielmehr um der Bequemlichkeit willen gethan, damit man ſo gleich bey einem ieden Logarithmo ſinus oder tangentis den Logarithmum ſinus und tangentis complementi antreffen möchte.

Zu dem 27. §.

§. 9.

Nennet die kleine Zahl a: ſo iſt die groſſe
die Differentz = d Zahl $a + d$

Folglich die Summe = $2a + d$

Die halbe Summe = $a + \frac{1}{2}d$

Wenn ihr also addirt $\frac{1}{2}$ d

so bekommt ihr a + d welches die grosse Zahl ist. Wenn ihr aber von der halben Summe = a + $\frac{1}{2}$ d die halbe Differentz = $\frac{1}{2}$ d subtrahirt: so bleibet a, das ist, die kleinere Zahl übrig.

Zu dem 28. §.

§. 10.

Tab. IV. Fig. 4.

$$DA = DC + CA$$
$$DC = CB$$
$$\overline{}$$
$$DA = CB + CA$$

n. 1. **Derowegen ist DA die Summe der beyden Seiten CB und CA.**

$$EA = CA - CE$$
$$CE = CB$$
$$\overline{}$$
$$EA = CA - CB$$

Dasjenige was übrig bleibt, wenn man eine Grösse von der andern abzieht, ist die Differentz der Grössen.

n. 2. **Derowegen ist EA die Differentz der beyden Linien CB und CA.**

$$DC = CB = CE \quad \text{(per Hyp.)}$$
$$\overline{}$$
$$nr = 90^\circ \quad \text{(§. 86. Geom.)}$$

GA ist parallel mit BE (per Hyp)

$$\overline{}$$

t = n

$$t = nr = 90° \quad (\S.\ 37.\ 72.\ \text{Geom.})$$
$$x = x \quad (\S.\ 20.\ \text{Arith.})$$

n. 3. $y = mu$ (§. 78. Geom.)

$$o = u + rs$$
$$o = y + r \quad (\S\ 74.\ \text{Geom.})$$

n. 4. $u + rs = y + r$ (§. 22. Arith.)

$$CE = CB \quad (\text{per Hyp.})$$
$$y = r \quad (\S.\ 79\ \text{Geom.})$$

$$y = \tfrac{1}{2}(u + rs) \quad (\text{per. n. 4.})$$
$$y = mu \quad (\text{per. n. 3.})$$

$$mu = \tfrac{1}{2}(u + rs) \quad (\S.\ 22.\ \text{Arith.})$$

$\frac{1}{2}(u + rs)$ ist die halbe Summe der beyden gesuchten Winckel. Derowegen ist mu die halbe Summe der beyden gesuchten Winckel. Weil ferner DG der Tangens des Winckels mu ist (§. 6. Trigon.): so ist DG der Tangens **von der halben Summe der beyden ge-**
n. 5. **suchten Winckel** A und B.

Wenn man von der halben Summe zweyer Winckel den kleinern subtrahirt: so bleibt ihre halbe Differentz übrig (§ 27. Trigon.). Wenn man aber den Winckel u von mu subtrahirt: so bleibt der Winckel m übrig. Derowegen ist der Winckel m die halbe Differentz der beyden gesuchten Winckel. Die Linie BG ist der Tan-

gens des Winckels m (§. 6. Trigon.). Also ist BG der Tangens von der halben
n. 6. Differentz der beyden gesuchten Winckel A und B.

Weil nun BE parallel mit GA (per Hyp.): so ist

DA : EA = DG : BG (§. 149 Geom.)

Das ist: wie die Summe der beyden Seiten AC und CB zu ihrer Differentz: so der Tangens der halben Summe der beyden gesuchten Winckel A und B zu dem Tangenten ihrer halben Differentz (n. 1. 2. 5. 6.)

W. Z. E.

E N D E.

ANDREÆ TACQUET HISTORICA NARRATIO

DE ORTU, ET PROGRESSU MATHESEOS.

Mathematum elementa tradituro, visum est de illorum origine, ac præstantia præfari quædam, ut intelligant matheseos candidati, cujusmodi ea scientia sit, cui se consecraturi sunt; & planum fiat adversus eos, qui, quæ ignorant, con-

contemnunt, quantæ dignitatis ſint hæ diſciplinæ, quas omnium ætatum ſapientiſſimi viri incredibili ſtudio ſibi putaverint comparandas. Uſui porro mihi fuit, in hac relatione concinnanda Petri Rami diligentia, qui Scholarum toto primo libro bene magno mathematicam hiſtoriam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliisque accurate copioſeque conſcripſit.

Prima hominum ſcientia matheſis fuit, ſi Joſepho credimus. Is libr. 1. cap. 3. ſcribit, Sethi nepotes cœlorum ordinem, ac ſiderum curſus obſervaſſe. Ne autem hæc inventa ex hominum notitia dilaberentur, cum Adamus univerſalem mundi interitum fore prædixiſſet, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & utrique ſua inventa inſcripſerunt, ut ſi lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea ſuperſtes hominibus diſcendi copiam faceret, & quæ inſcripta continebat, ſpectanda exhiberet. Ajunt enim lapideam illam ab ipſis dedicatam: quæ & noſtris temporibus exſtat in Syria. Hæc ille, penes quem fides eſto.

Post diluvium primos mortalium Assyrios, & Chaldæos mathemata coluisse tradunt idem Josephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Assyria ad Ægyptios translatæ sunt auctore Abrahamo. Is enim, cum Deo jubente ex patrio solo in Palæstinam ac deinde in Ægyptum profectus esset, cerneretq; Ægyptios artium bonarum capi studio, atque indole ad discendum egregia esse, ut apud eundem Josephum est lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Astronomiamque, quam præcedere Geometriam necesse fuit, communicavit. Quibus deinde studiis, adeo Ægyptii floruere, ut Aristoteles Metaph. cap. 1. affirmet, Mathematicas artes primum in Ægypto a sacerdotibus publica vacatione fretis inventas esse.

Exinde Mathesis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philosophos pervenit; Thales enim Milesius, qui ante Christum floruit annis 584. primus Græcorum cum in Ægyptum venisset, Geometriam inde in Græciam transtulit. Is sane, præter alia, primi libri propositiones, 5. 15. 26. invenit. Eidem debentur 2. 3. 4. 5. l. 4. cujus inventi lætitia elatus bovem immolasse dicitur.

Idem

Idem æquinoctia & solstitia observare cœpit, Laertio teste, & solis eclipsin, ut scribunt Hippias & Aristoteles, primus prædixit; & Tzetzes auctor etiam eclipsin lunæ Regi Cyro prænunciasse. Quapropter hic primus in Græcia mathematicæ scientiæ parens atque auctor fuit.

Post hunc Pythagoras Samius ille philosophorum antiquissimus mathematicas disciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis prope illi ratio philosophandi ex numeris duceretur. Geometriam vero, ut refert Laertius a materia abstraxit primus; in qua mentis elatione invenit 32. 44. 47. 48. lib. 1. Sed in primis ob inventas 32 & 47. lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitia tanta affectus est, ut teste Apollodoro apud Laertium, hecatombem immolarit. Idem incommensurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Astrologiam & Musicam impense & docuit & exercuit. Neque solum acute & subtiliter multa invenit, sed etiam ludum primus aperuit, in quo juventus tam honestas, tamque nobiles artes addisceret.

Pythagoram Anaxagoras, Clazomenius, & Oenopides Chius ſecuti ſunt, quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adoleſcentes de Anaxagora, & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quandam ſcriptam indicat Ariſtoteles, & ex Laertio accepimus oſtenſum ab eo ſolem Peloponneſo majorem (nota Aſtronomiæ incunabula) eundemque de habitationibus in luna nonnulla diſputaſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12. & 23. libr. 1. Hos excepere Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentata circuli quadratura, ab Ariſtotele reprehenſi pariter, & celebrati. Sed hos inter longe clariſſimus Hippocrates fuit, ille e mercatore philoſophus & geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam ut ſingularem & unicam omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quod, Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philoſophia ſolum, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit, ejus tum phyſica, tum forte etiam Mathematica

ca

ca monumenta perierunt invidia (ut quidam ferunt) Ariſtotelis, ſua unius ſcripta cupientis legi. Democriti philoſophiam Petrus Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtauravit. Theodorus Cyrenæus, licet ejus inventa mathematica non exſtent, vel eo nomine magnus eſt, quod Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius ſplendorem majorem attulit mathematicis diſciplinis. Ille Geometriam maximis acceſſionibus amplificavit, ſtudio incredibili in eam collocato. Et in primis reperta eſt ab eo analyſis, certiſſima inveniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros mathematicis rationibus diſtinxit, ac quidquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum philoſophia eſſet, excitavit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur: οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; nullus Geometriæ expers accedito; illuſtri ſane argumento, quam non aliena ſed propria, quamque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis, ſanæ certæque philoſophiæ ſit. Quantus certe Plato Matheſeos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monumenta perlegerit.

Ex Platonis Academia prope innumeri deinceps Mathematici prodierunt, Tredecim Platonis familiares a Proclo commemorantur, quorum ſtudiis Mathematica ſit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archytas Tarentinus, Theætetus Athenienſis; a quibus mathemata egregie ſunt amplificata. Leodamas analyſim a Platone acceptam exercuit, ejusque ope inveniſſe multa a Laertio dicitur. Theætetum tum inventa ſua, inter quæ elementa ab eo ſcripta, & regularium corporum inſcriptio celebrantur, illuſtrem faciunt; tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit. Architas elementa ſcripſit etiam ipſe, ejusque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa ſingularis fuit laus, quod Mathematicam ad humanos uſus traduxerit fere primus, unde & lignea columba ab eo facta volaſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti Dædalus, aliique artifices fabulis poetarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitus Imperator, qui nimirum in patriis bellis copiis civium ſuorum quinquies præfuit, & quinquies vicit. Neoclidis tantum nomen celebratur, Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior, quam inven-

inventis suis. Leon sane Mathematicæ universæ elementa conscripsit, auxit, & ad usum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores suo merito censeri debet.

Audaxus Gnidius superiorum æqualis in Arithmeticis magnus & (si Scholiastæ Græco credimus) totum ei quintum librum debemus: Elementa item conscripsit, & generaliora effecit, & sectiones a Platone inchoatas auxit; insuper astronomicarum hypotheseum primus fabricator exstitit, & Geometriæ fontes, ut supra Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas Heracliotes & Menechmus, ejusque frater Dinostratus, Helicon, Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Mendeus, omnes Platonici, Geometriam multo perfectiorem reddiderunt. Et Menechmus quidem sectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cujus inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius, & Hermotimus elementa fecerunt universaliora, & auctiora. Atque hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philosophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Aristote-

lis

lis magiſter, ipſeque Ariſtoteles cognitione Mathematum clari fuere. Illius cum auditor quidam eſſe vellet Geometriæ imperitus, abi, inquit, anſas enim philoſophiæ non habes.

De *Ariſtotele* vero quid dicam? libri illius omnes locis Mathematicis ſunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Ariſtotelis ſchola duo præcipue celebrantur Eudemus, & Theophraſtus. Hic ſcripſit de numeris libros duos, de Geometria quatuor, de lineis individuis unum: ille hiſtoriam Mathematicam condidit, ex quo Proclus, aliique ſua mutuati ſunt. Aryſteo, Iſidoro, Hypſicli Geometris ſubtiliſſimis ſolidorum libros maxime debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonſtravitque accuratius, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juventus inſtituitur. Obiit anno ante Chriſtum 284. Euclidem ſecuti ſunt centum fere poſt annis Eratoſthenes, & Archimedes. Eratoſthenis clarum in primis nomen fuit, ſed ejus ſcripta periere. Archimedis habemus multa, multa amiſimus.

Sed

Sed Archimedem cum nomino, apicem quendam humanæ ſubtilitatis, totiusque Mathematicæ diſciplinæ abſolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidere Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Aſtronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno ſequitur Apollonius Pergeus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius exſtant quatuor Conicorum ſubtiliſſimi libri. Eidem adſcribuntur Euclidis libri 14. & 15. ab Hypſicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo hic 6. ille 12. libros primi conſcripſere, pro quo invento tam utili, & neceſſario non parva utrique laus & gratia debetur. Exſtant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ utiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum excipias, ante Chriſtum vixere omnes.

Anno poſt Chriſtum 70. venit in lucem Claudius Ptolemæus, aſtronomorum princeps, vir plane mirabilis, ſupraque (inquit Plinius) naturam mortalium. Is vero ro non Aſtronomiæ tantum, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur, tum alia multa ab eo ſcripta, tum in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6. Hipparchi vero 12. ab illo ad 5. theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi exſtant Mathematica problemata. Jam Eutocii Aſcalonitæ erudita in Archimedem commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tamquam excellentium in Mathematicis magiſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur. Et Heronis quidem tam in mechanicis, quam in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certe duplicatio ab eo tradita, a Pappo lib. 3. p. 7 laudatur præ omnibus. Cteſibii Alexandrini, cui antlias debemus noſtras, admiranda opera a Vitruvio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi Proclus in quibusdam præpoſuit.

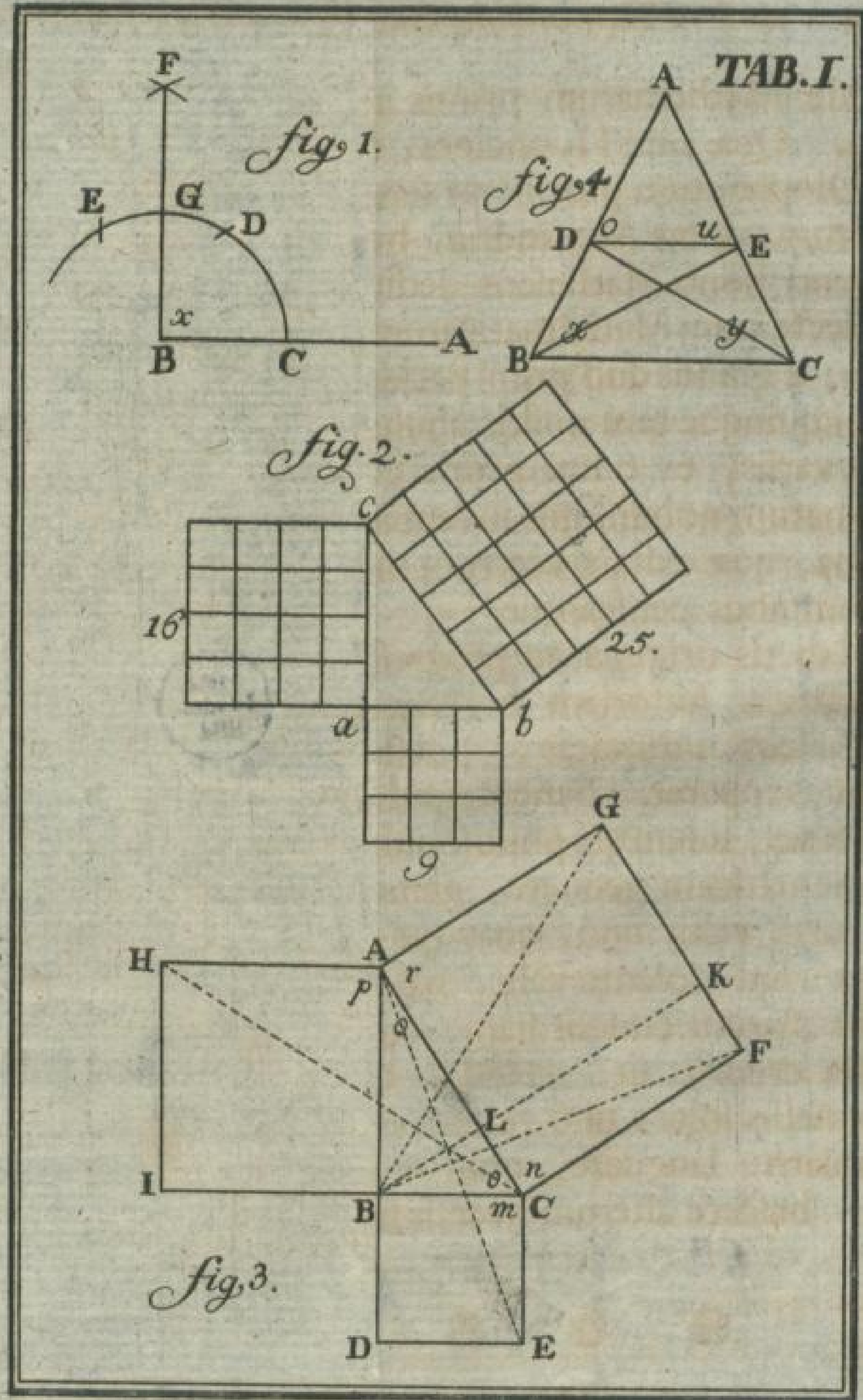
Diophantus, & ipſe Alexandrinus, in Arithmetica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Apollonius, Euclides; vere totius numericæ ſubtilitatis ma-

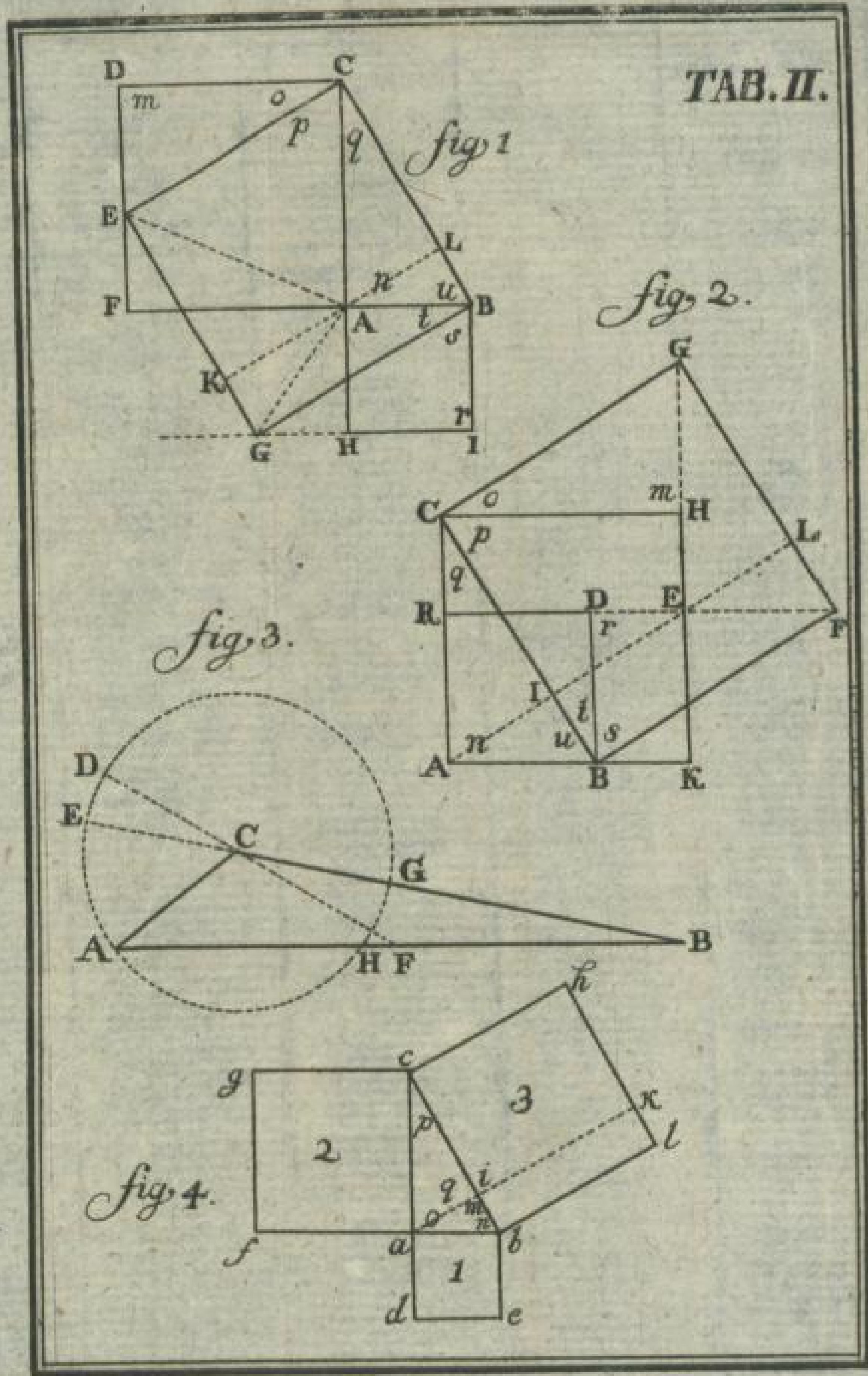
magiſter; a quo reperta ſit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hiſce temporibus a Franciſco Vieta, & Renato Carteſio (*Newtono*, *Leibnitio*, *Wolfio*, *Bernoullio*) multo perfectior & univerſalior effecta eſt. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Muſicis clarus monimentis, Serenus binis de cylindri ſectione libris Geometris notiſſimus, Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus ex doctiſſimis ejus in Euclidem commentariis, aliisque ſcriptis manifeſtum eſt. Atque hic opinor ille eſt, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, ſub annum Chriſti 514, Vitaliani claſſem Conſtantinopolim obſidentis, optico ſpeculorum artificio combuſſit. Theonis laudes vere magnas mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, ut etiam libros, quos Euclidi hactenus adſcripſere omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus, neque ullo ſolido nixus fundamento, hic audiendus non erit. Ut finis aliquando ſit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres poſtremus, ut qui vixerit annum 400. ſed nominis claritudine, omnique

laude

laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypsiclem, Ctesibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheseos dedit. Scripsit collectionum Mathematicarum libros septem, e quibus duo primi perierunt. Reliqui quinque tam multis abundant, tamque variis, ex omni prope genere Mathematum nobilissimis inventis, ut inter prima, quæ exstant veterum monimenta, ab omnibus censeantur.

Habetis originis ac progressionis mathematicæ historiam brevem, ex qua Matheseos antiquitas, præstantia, ac dignitas apparet. Sane Reipub. litterariæ principes, iidem qui philosophiam, etiam Mathematicam genuere, gemellas sorores partu velut uno, quas qui distrahere ab invicem violente velit, næ ille in nativam illarum concordiam, cum insigni injuria crudelis sit; quando, quod fieri in gemellis solet, uno vel loco vel morte sublato, languere, quin & contabescere alterum necesse sit.


TAB. I.
fig. 1.
F
E
G
D
x
B
C
A
fig. 4
A
D
o
u
E
x
y
B
C
fig. 2.
c
16
25.
a
b
9
G
H
A
r
p
K
F
L
I
B
m
C
n
fig. 3.
D
E


TAB. II.
fig 1
fig 2.
fig 3.
fig 4.

TAB. III.

fig. 1.

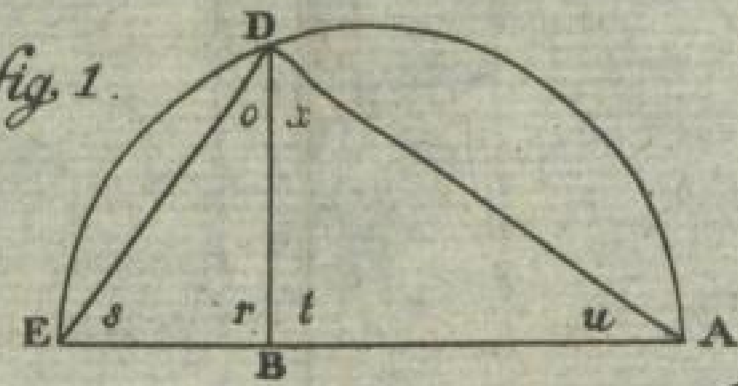


fig. 2.

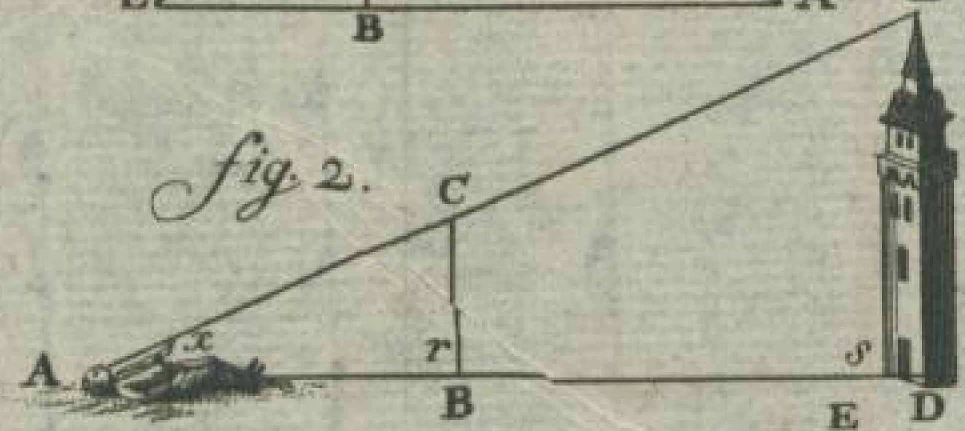


fig. 3.

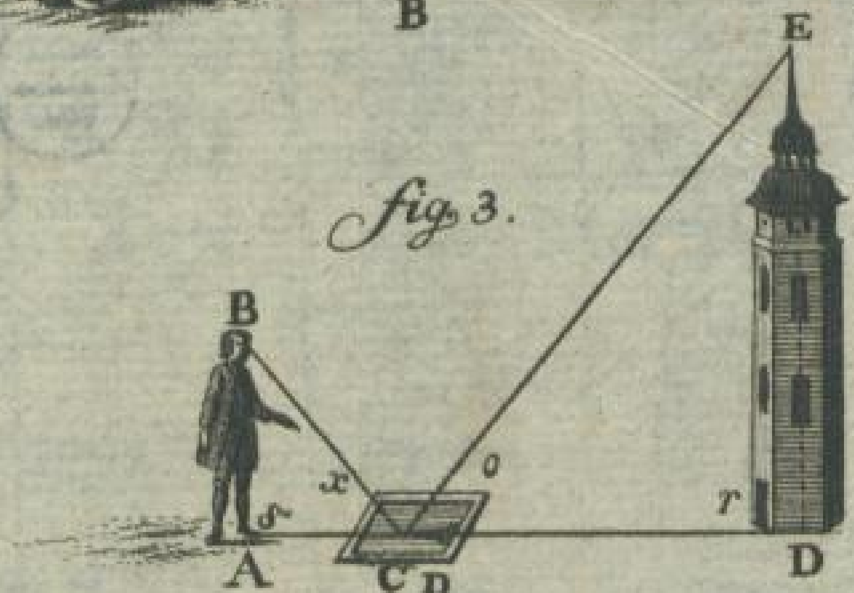
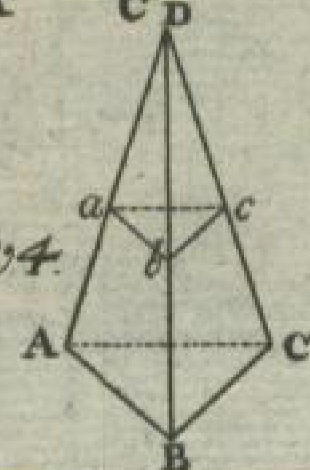


fig. 4.



TAB. IV.

fig. 1.

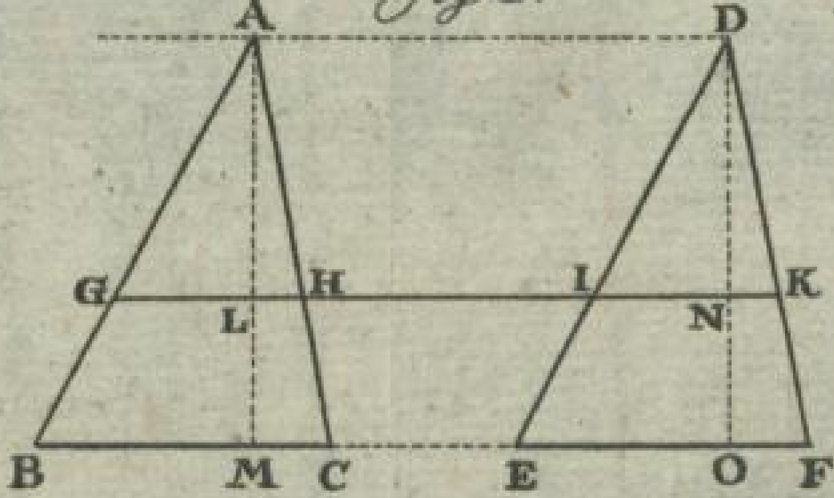


fig. 2

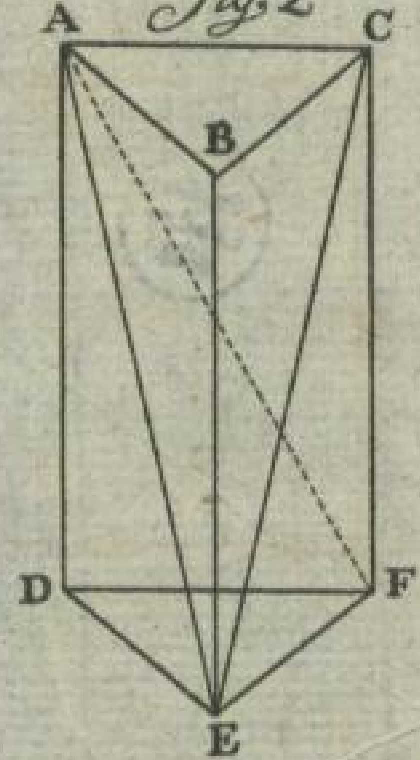


fig. 3.

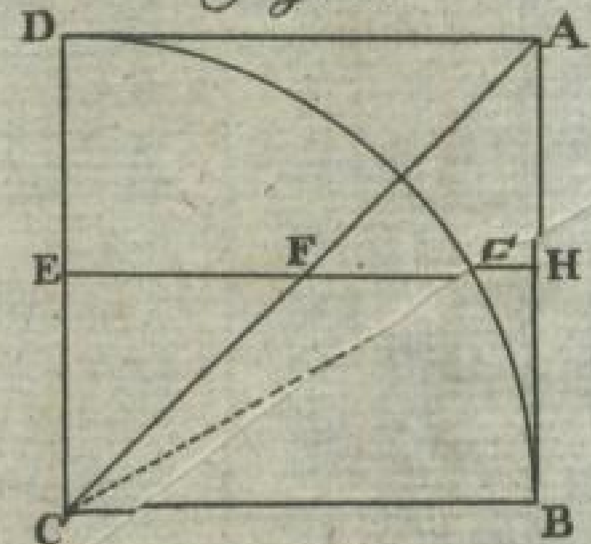


fig. 4