veränderte Lage des Punktes P oder durch Längenveränderung von EF, oder endlich durch gleichzeitige Anwendung dieser Veränderungen den Bedingungen genau angepaßt werden.

Das vorstehend beschriebene Konstruktionsverfahren eignet sich für alle Kurven, deren Radius für das konzentrisch gelegene Ende nicht über zwei Drittel des äußeren Spiralfederradius beträgt.

Für den besonderen Fall, daß der Radius des konzentrischen Kurvenendes genau zwei Drittel des äußeren Spiralfederradius beträgt, ergibt sich noch eine Konstruktion, die besonders leicht der Rechnung zugänglich ist.

In Fig. 2 ist $AN = OE = PC = {}^2/_3$ des äußeren Spiralfederradius, und die Lage des Punktes P ist so gewählt, daß derselbe auf einem Kreisbogen liegt, dessen Radius $NO = {}^1/_3$ des äußeren Spiralfederradius ist.

Aus der Zeichnung folgt ohne weiteres, daß dann die Winkel w_2 und w_3 ganz unabhängig von der Lage des Punktes P stets gleich 60 Grad sind und daß $w_1 = 60$ Grad $- w_4$ ist.

Für Kurven, deren Endradius größer als zwei Drittel des äußeren Spiralradius ist, ergibt sich noch eine Vereinfachung der Konstruktion, weil dann nur vier Kreisbogen, statt fünf, wie bei der vorigen Figur, notwendig sind.

In Fig. 3 ist eine solche Kurve, deren Endradius drei Viertel des Spiralradius beträgt, dargestellt. Dieselbe besteht aus zwei Bogen, deren Radius ${}^1/_2$, einem Bogen, dessen Radius ${}^3/_4$ und einem Bogen, dessen Radius gleich dem äußeren Spiralradius ist. Aus O ist ein Bogen, dessen Radius OP gleich ${}^1/_4$ des Spiralradius ist, gezogen, auf dem der Punkt P beliebig angenommen wurde. Aus P und N sind die Bogen AB und CD und aus L der Bogen BC gezogen. Der Punkt L ergibt sich als Schnittpunkt von zwei Bogen aus N und P, deren Radius gleich ${}^1/_2$ des Spiralradius ist.

Bei dieser Konstruktion läßt sich durch Verlegung des Punktes P auf dem zugehörigen Kreisbogen und durch Veränderung des Endstückes DE die Kurve den Bedingungen für isochrone Endkurven anpassen.

Vorstehend angeführte Konstruktionen zeigen, daß man für jeden beliebigen Endradius eine Kurve finden kann, die, weil sie auf gesetzmäßige Weise entstanden ist, der Berechnung unterworfen und auf jeden gewünschten Grad von Genauigkeit gebracht werden kann.

Hieran anschließend soll nun gezeigt werden, wie die Prüfung der Kurven durch Rechnung erfolgt.

Nach den von Phillips angestellten Untersuchungen hat eine Endkurve folgenden drei Bedingungen zu entsprechen:

1. Die Kurve muß sich tangential, also ohne Knickung, an die Spirale anschließen.

2. Der Schwerpunkt der Kurve muß auf einer Linie liegen, die im Spiralmittelpunkt senkrecht auf der Linie steht, die vom Mittelpunkt der Spirale an den Anschlußpunkt der Kurve gezogen ist.

3. Das Produkt aus der Entfernung des Schwerpunktes der Kurve vom Mittelpunkt mit der Länge der Kurve muß dem Quadrate des äußeren Radius der Spirale gleich sein.

Für archimedische Spiralen ergeben sich nach den Untersuchungen des Herrn Jul. Großmann in Locle für die beiden letzten Bedingungen einige kleine Veränderungen, auf die ich bei den folgenden Berechnungen zurückkommen werde.

Die erste dieser drei Bedingungen ist durch die angegebenen Konstruktionen ohne weiteres erfüllt.

Bezeichnet man die Linie, die durch den Spiralmittelpunkt und den Anschlußpunkt der Kurve geht, als die x-Achse, die im Mittelpunkt der Spirale darauf errichtete Senkrechte als die y-Achse, so lassen sich die Bedingungen 2 und 3 auch wie folgt ausdrücken:

Das Moment der Kurve in bezug auf die y-Achse muß gleich Null und in bezug auf die x-Achse gleich r^2 sein, wenn r den Radius der Spirale bezeichnet. Statt des Momentes der ganzen Kurve läßt sich auch die algebraische Summe der Momente der Kurvenbestandteile einsetzen.

Es soll nun zunächst ein allgemeiner Ausdruck für die Schwerpunktskoordinaten eines Kurvenstückes entwickelt werden.

In Fig. 4 sei $ABCD$ ein Kurvenstück, das aus den drei Bogen AB, BC und CD zusammengesetzt ist, deren Mittelpunkte N, L und P sind. S sei der Schwerpunkt des Bogens CD und daher $OK = x$ und $KS = y$ dessen Koordinaten. Die aufeinander folgenden Radien NA, LB, PC seien r_1, r_2, r_3, und z_3 sei die Entfernung des Schwerpunktes S vom zugehörigen Bogenmittelpunkt P, endlich sei r der Radius OA der Spirale.

Es ist nun

$$OK = x = ON + NG + LH + PJ$$
$$KS = y = GL + HP + JS,$$

oder wenn w_1, w_2, w_3 die Winkel der aufeinander folgenden Bogen bezeichnen, ist:

$$\text{I.}\quad x = (r - r_1) + (r_1 - r_2)\cos w_1 + (r_2 - r_3)\cos(w_1 + w_2) + z_3 \cos\left(w_1 + w_2 + \frac{w_3}{2}\right),$$

$$\text{II.}\quad y = (r_1 - r_2)\sin w_1 + (r_2 - r_3)\sin(w_1 + w_2) + z_3 \sin\left(w_1 + w_2 + \frac{w_3}{2}\right).$$

Diese Formeln haben bei gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen in den verschiedenen Quadranten ganz allgemeine Gültigkeit.

Die Winkel w_1, w_2, w_3 .... w_5 lassen sich auf Grundlage der Konstruktion ebenfalls durch Rechnung bestimmen. In Fig. 1 seien a, b die Koordinaten des beliebig gewählten Punktes P.

Man hat dann für $NP = c$

$$c = \sqrt{(a + r - r_1)^2 + b^2}$$

und für $OP = d$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Da ferner allgemein $LN = r - r_1$ und $OM = r_4 - r_3$ ist, so folgt:

$$\sin\frac{w_2}{2} = \frac{c}{2(r - r_1)},$$

$$\sin\frac{w_4}{2} = \frac{d}{2(r_4 - r_3)}.$$

Ferner hat man für $\sphericalangle POQ = \alpha$ und $\sphericalangle PNQ = \beta$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a + r - r_1}.$$

Nunmehr ergibt sich ohne weiteres:

$$w_1 = 90^0 - \frac{w_2}{2} - \beta;$$

$$w_3 = 90^0 - \frac{w_2}{2} + 90^0 - \frac{w_4}{2} - (\alpha - \beta);$$

oder

$$w_3 = 180^0 - \left(\frac{w_2}{2} + \frac{w_4}{2} + \alpha - \beta\right).$$

Der Winkel w_5 wird zunächst beliebig gewählt.

Für die in Fig. 3 dargestellte Konstruktion ergeben sich folgende Werte für die gesuchten Winkel: $\sphericalangle DOH = \alpha$, dessen Schenkel OD den beliebigen Punkt P bestimmt, kann als gegeben angenommen werden.

Da ferner $OP = r_4 - r_3$ und $ON = r - r_1$ ist, so folgt für $\sphericalangle PNH = \beta$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(r_4 - r_3)\sin\alpha}{(r - r_1) + (r_4 - r_3)\cos\alpha}.$$

Für $NP = c$ hat man dann

$$c = \frac{(r_4 - r_3)\sin\alpha}{\sin\beta}.$$