Winkel, den Leitstrahl und Tangente bilden, zu 84° angenommen, was dann einem Mittelpunktswinkel von 6° entspricht oder $\frac{360^\circ}{6^\circ} = 60$ gleiche Mittelpunktswinkel ergibt. Nun ist die Lösung dieser Aufgabe mit nur elementaren Mitteln etwas umständlich, weshalb wir zu der einfacheren trigonometrischen Berechnung greifen. Setzen wir den winkelrechten Abstand $h = 3$, so sind uns von dem Dreiecke $h\,l\,v$ (Figur 8) bekannt: die Seite h und der Mittelpunktswinkel α. Nun ist nach den Lehren der Trigonometrie in diesem rechtwinkligen Dreiecke $h = l \cdot \cos\alpha$ oder umgekehrt: $l = \frac{h}{\cos\alpha}$. Setzt man jetzt l statt h, so ergibt untenstehende Rechnung eine Reihe l, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, ..., welche die aufeinanderfolgenden Leitstrahlen darstellen.

Ist also l beispielsweise $= 3{,}000000$, so ist:

$$l_1 = \frac{l}{\cos\alpha} = \frac{l}{\cos 6^\circ} = \frac{3{,}000000}{0{,}994522} = 3{,}016524,$$

$$l_2 = \frac{l_1}{\cos 6^\circ} = \frac{3{,}016524}{0{,}994522} = 3{,}033139,$$

$$l_3 = \frac{l_2}{\cos 6^\circ} = \frac{3{,}033139}{0{,}994522} = 3{,}049846,$$

$$l_4 = \frac{l_3}{\cos 6^\circ} = \frac{3{,}049846}{0{,}994522} = 3{,}066645,$$

$$l_5 = \frac{l_4}{\cos 6^\circ} = \frac{3{,}066645}{0{,}994522} = 3{,}083536,$$

$$l_6 = \frac{l_5}{\cos 6^\circ} = \frac{3{,}083536}{0{,}994522} = 3{,}100521 \text{ usf.}$$

Bildet man jetzt je aus zwei aufeinanderfolgenden Leitstrahlen ein Verhältnis, so muß deren Quotient eine konstante Zahl sein:

$$\frac{l_1}{l} = \frac{3{,}016524}{3{,}000000} = 1{,}005508,$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{3{,}033139}{3{,}016524} = 1{,}005508,$$

$$\frac{l_3}{l_2} = \frac{3{.}049846}{3{,}033139} = 1{,}005508,$$

$$\frac{l_4}{l_3} = \frac{3{,}066645}{3{,}049846} = 1{,}005508,$$

$$\frac{l_5}{l_4} = \frac{3{.}083536}{3{,}066645} = 1{,}005508,$$

$$\frac{l_6}{l_5} = \frac{3{,}100521}{3{,}083536} = 1{,}005508.$$

Da das Verhältnis der Leitstrahlen also konstant ist, können wir diese Eigenschaft auch auf die Umgänge ausdehnen und sagen, daß das Verhältnis der Umgänge konstant oder alle weiteren Umgänge dieselbe Charakteristik der Stammform oder des ersten Umganges besitzen. Wie bei der zylindrischen Spirale gezeigt, macht es also keinen Unterschied für die isochronischen Beziehungen, wie viele Umgänge oder welche Länge die Spirale besitzt, wenn nur das Verhältnis der Krümmung zur Länge für alle Umgänge ein einheitliches, harmonisches ist und bleibt. Die geforderte Eigenschaft ist also erfüllt, die Beziehungen der Leitstrahlen zueinander sind einheitliche, wie wir dies beim Kreise gefunden haben, wo $\frac{r_1}{r} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} \ldots = 1$ ist.

Durch Umkehrung der obigen Verhältnisse ergibt sich wieder der zugrunde gelegte konstante Winkelwert und aus der Verbindung zweier benachbarten Verhältnisse die Proportion: $l : l_1 = l_1 : l_2$, wonach also ein Leitstrahl immer das geometrische Mittel, die mittlere geometrische Proportionale des vorhergehenden und folgenden Strahles, ist, welches behufs Interpolation oder Einschaltung von Zwischenstrahlen oder Punkten ein leichtes Mittel bietet.

Ist zu diesem Zwecke beispielsweise $l = 3$, $l_2 = 5$, l_1 aber gesucht, so ist, weil in obiger Proportion $l \cdot l_2 = l_1^2$, l_1^2 also gleich dem Produkte $3 \cdot 5 = 15$, l_1 gleich der Wurzel oder $\sqrt{15} = 3{,}8730$. Würde man die obige Konstruktion oder Formel $\frac{l}{\cos\alpha}$ statt nach außen also zunehmend oder positiv, abnehmend nach innen, negativ ausgeführt haben, so wäre die Formel $l \cdot \cos\alpha$ anzuwenden. Mit der Erfüllung obiger Bedingungen ist aber auch dem für jede Zentralbewegung so wichtigen Flächengesetze, wonach für eine konstante Geschwindigkeit die von dem Leitstrahle beschriebene oder durchstrichene Fläche in gleichen Zeiten um gleich viel zunimmt, oder daß die Geschwindigkeitsmomente in bezug auf den Mittelpunkt gleich bleiben, Genüge geleistet, woraus sich jetzt ergibt, daß die der Zeit proportionalen, durchlaufenen Wege kleiner bei großen und größer bei kleineren Kreisen oder Umgängen sind. — Ist zur Erklärung dieses Gesetzes O in Figur 24 der Mittelpunkt einer Spirale und LE ein von dem beweglichen Punkte durchlaufenes Bahnstück. Durchstreicht jetzt der Leitstrahl $AO = l$ in etwa $^1/_{60}$ einer Sekunde die Fläche AOB, so ist der von dem Ende desselben durchlaufene Weg $= AB$; für einen dem Mittelpunkte O näher gelegenen Teil der Bahn sei $A_1 B_1$ der in derselben Zeit durchlaufene Weg, dann muß die von dem Leitstrahle $OA_1 = l_1$ durchstrichene Fläche gleich der ersten sein, oder indem man die tangentialen Abstände h und h_1 der beiden Geschwindigkeiten V und V_1 bestimmt, muß $V \cdot h = V_1 \cdot h_1$ sein, wodurch die Gleichheit der Geschwindigkeitsmomente erwiesen ist.

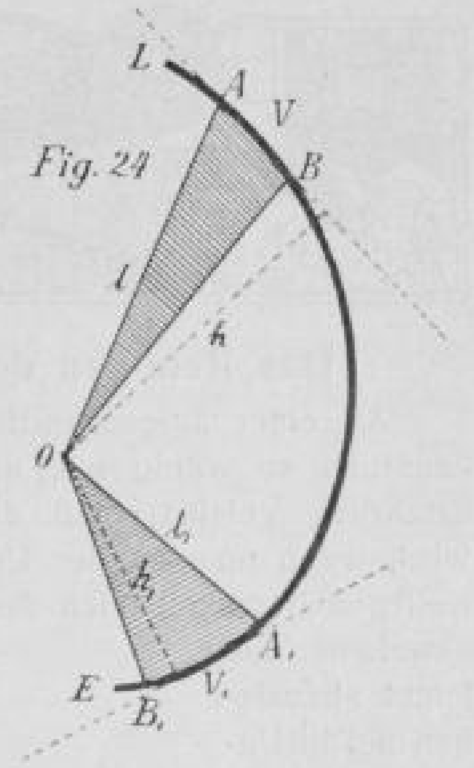

Fig. 24

Nachdem wir die Eigenschaften der Leitstrahlen und der Tangentenabstände genügend besprochen haben, gelangen wir jetzt zu der dritten Art: den Krümmungshalbmessern.

Aus der Winkelgleichheit aller Teile der Spirale ergibt sich leicht die Proportionalität derselben mit den ihnen zugehörigen Leitstrahlen oder die Identität der Krümmungshalbmesser mit den Normalen n der Figur 25. Sind nun P_7, P_6, P_5, ... auf den gemeinsamen Leitstrahl l zurückgeführte Kurvenpunkte der Spirale (welche selbstverständlich mit der Konstruktion übereinstimmen müssen), so entsprechen diesen Punkten die Normalen oder Krümmungshalbmesser n_7, n_6, n_5, ..., deren Mittelpunkte in den Durchschnittspunkten M_7, M_6, M_5, ... mit der in O auf den Leitstrahl errichteten Winkelrechten gegeben und deren Abstände a_7, a_6, a_5, ... von O wiederum proportional den bezüglichen Leitstrahlen l_7, l_6, l_5, ... der Figur sind. Beschreiben wir jetzt mit den Krümmungshalbmessern n_7, n_6, n_5, ... von M_7, M_6, M_5, ... aus in P_7, P_6, P_5, ... einen ganz kleinen Kurventeil, ziehen winkelrecht auf n_7, n_6, n_5, ... die diesen Kurvenpunkten entsprechenden Tangenten v_7, v_6, v_5, ..., auf ihre Verlängerungen aber von O die Winkelrechten h_7, h_6, h_5, so erhalten wir ein recht übersichtliches Bild der mechanischen Eigenschaften der Spirale.

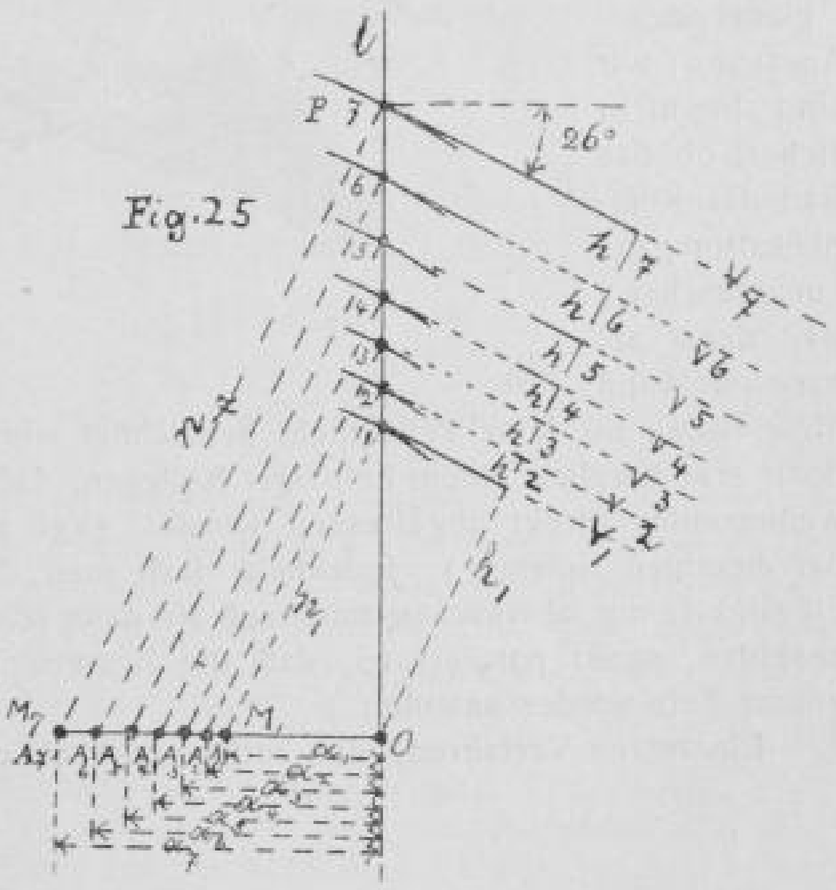

Fig. 25

Wir ersehen aus dieser Figur, wie in P_7, P_6, P_5, ... die tangentialen Richtungen v_7, v_6, v_5, ... oder die Kurventeile oder