oder weil $\log.\,\text{nat.}\left(\frac{1+x}{x}\right) = \log.\,\text{nat.}\,(1+x) - \log.\,\text{nat.}\,x$ ist,

$$\text{I. } \log.\,\text{nat.}\,(1+x) = \log.\,\text{nat.}\,x + 2\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2x+1)^3}\cdots\right]$$

Durch diese Reihe findet man den Logarithmus einer Zahl, wenn der der nächst vorhergehenden bekannt ist, und zwar um so schneller, je grösser die gegebene Zahl $1 + x$ ist. Setzt man z. B. für x nach und nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3 etc., so findet man

$$\log.\ \text{nat.}\ 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.\ 3^3} + \frac{1}{5.\ 3^5} + \frac{1}{7}\,\frac{1}{3^7}\cdots\right) = 0{,}69314718\ \cdots$$

$$\log.\,\text{nat.}\ 3 = \log.\,\text{nat.}\ 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.\ 5^3} + \frac{1}{5.\ 5^5}\cdots\right) = 1{,}09861229\ \cdots$$

$$\log.\ \text{nat.}\ 4 = 2\ \log.\ \text{nat.}\ 2 = 1{,}38629436\ \cdots$$

$$\log.\ \text{nat.}\ 5 = \log.\ 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.\ 9^3} + \frac{1}{5.\ 9^5}\cdots\right) = 1{,}60943791\ \cdots$$

$$\log.\,\text{nat.}\ 10 = \log.\,\text{nat.}\ 2 + \log.\,\text{nat.}\ 5 = 2{,}30258509 \text{ etc.}$$

Uebersteigt die Zahl, deren Logarithme zu bestimmen ist, 100, so giebt schon das erste Glied der Reihe I. eine Genauigkeit bis auf 6 Dezimalstellen, so dass man für solche Zahlen die endliche Aproximationsformel hat:

$$\log.\ \text{nat.}\ (1 + x) = \log.\ \text{nat.}\ x + \frac{2}{2x + 1}$$

§. 6.

Wird nicht die Zahl $e = 2{,}71828\ldots$ sondern irgend eine andere Zahl k zur Basis eines Logarithmensystems