MATHEMATISCHE BRIEFTASCHE

mit

INGENIEUR-MESSKNECHT

zur

Erleichterung, Belebung und Befruchtung

von

Unterricht und Praxis.

Entworfen und bearbeitet

von

Max. R. Pressler,

Professor an der königlich sächsischen Forst- und Landwirthschafts-Akademie zu Tharand.

Zweite Auflage.

Billige Schulausgabe.

Mit Instrument und Notizbuch: Preis 1 Thlr. 5 Ngr.

DRESDEN.
Verlag von Woldemar Türk.
1861.

Bei Verwandlung der

Messknechtstafel in das **Visirinstrument**

schiebe man stets die rechte Ecke unter die linke; nie umgekehrt,

~~da~~ sonst die innere Ecke gesprengt oder doch verletzt würde. Also immer die

rechte **u**nten, **l**inke **o**ben.

Beschädigte oder durch den Gebrauch abgenutzte Knechte werden gegen Vergütung von ½ Thlr. umgetauscht; einzelne selbstständig ohne Brieftasche zum Nettopreise von ¾ Thlr. geliefert. Wegen Separatlieferung justirter und Doppelknechte s. Seite 21.

Um Schulen und Vereinen

die Anschaffung der **mit Doppelportefeuille versehenen elegant und dauerhaft in englisch Leinen oder Leder gebundenen Ausgabe** (Ladenpreis einzeln 2 Thlr. resp. 2 Thlr. 5 Ngr.) möglichst zu erleichtern, haben wir in Folge eingeleiteter Massenproduction alle Buchhandlungen in Stand gesetzt, auf je 3 festbestellte Exemplare **gegen baar** 1 Freiexemplar gewähren, übrigens auch das Kalendernotizbuch alle Jahre oder öfterer einzeln zu 4 Ngr., 5 Stück zu 15 Ngr. nachliefern zu können.

Dresden. **Wold. Türk's Verlagshandlung.**

Mathematische Brieftasche

mit

INGENIEUR-MESSKNECHT

zur

Erleichterung, Belebung und Befruchtung

der Wissenschaft, des Unterrichts und der Praxis.

Als Vademecum für die Geschäftswelt

wie auch als

Leitfaden und Turnapparat für die mathematische Erziehung und Gymnastik der Schule

entworfen und bearbeitet

von

R. Max. Pressler,

Professor d. pract. Mathematik u. d. land- u. forstwirthschaftl. Ingenieurw. an der königl. sächs. Akademie zu Tharand.

Zweite unveränderte Auflage.

Preis: Elegant in engl. Leinen 2 Thlr.; dgl. in Leder 2 Thlr. 5 Gr.
Für Schulen in Partien billiger.

DRESDEN,
Verlag von Woldemar Türk.
1860.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort.

Welche Fülle von Messungs- und Rechnungshilfen dies anscheinend magere Werkchen umschliesse; welche Art und Zahl von Fragen und Aufgaben es, wo immer auch das Leben sie stelle — in der Schulstube oder Werkstatt, in der Gesellschaft oder bei der Lectüre, im Felde oder Walde, auf der Reise oder sonst wo — kurzer Hand und stehenden Fusses zu erledigen gestatte; ob und in wie fern es, und namentlich in Verbindung mit seinem Messbestecke, die übrigen mathematischen und technischen Taschenbücher praktisch ergänze, und ob und in wie weit der Verfasser sich nicht blos mit einer sorgsamen Verdichtung des Vorhandenen in Bezug auf Darstellung und Methode begnügte, sondern auch Eigenes in diesem Sinne hinzuzuarbeiten bestrebt war: Alles dies wird der Sachkundige selber am unbefangensten zu beurtheilen vermögen, wenn er das Büchlein einige Tage versuchsweise und praktisch prüfend mit sich führt; selbstverständlich, nachdem er sich mit seinen Einrichtungen und namentlich mit den Tabellen und Ablesungen seines Instrumentes vorher gehörig vertraut gemacht hat.

Ist aber dieser Sachkundige nicht blos mathematischer Techniker, sondern gleichzeitig oder vorzugsweise mathematischer Pädagog, so wird er dabei sicherlich auch bald gewahren, dass und wie diese Brieftasche durch ihre selbständige und ungenirte Verknüpfung der Wissenschaft mit dem Leben in der Hand des Schülers geeignet sein müsse, und zwar sowohl im Lehrsaale wie bei den Excursionen und praktischen Uebungen, den mathematischen Unterricht lebendiger, inhaltreicher und fruchtbarer zu machen.

Weit entfernt (wie Mancher vielleicht auf den ersten Blick wähnen könnte), dem Schüler in der Weise sogenannter Eselsbrücken das eigene Thun zu ersparen und das Denken und Rechnen zu beseitigen, wird vielmehr, sobald wir die Brieftasche in der Eigenschaft eines pädagogischen Gehülfen beim mathematischen Unterrichte in richtiger Weise verwenden, das erfreulichste Gegentheil zu beobachten sein. Denn gerade dadurch, dass sie die Schule von dem hemmenden Ballaste des selbstverständlichern, elementarern und mechanischern Theils der mathematischen Arbeiten befreit, gewährt sie ihr und ihren Leuten Zeit, Frische und Anreiz, ihre Kräfte geistigeren Thätigkeiten, höheren Zielen und umfänglichern Zwecken zu widmen und den Inhalt ihrer Leistungen zu verzehnfachen (Materiale Hebung). — Und gerade dadurch, dass sie an Stelle der niedern Mechanik der Rechnung deren Geist und höhere Technik einstellt, wobei das logische und specifisch-mathematische Denken, Combiniren und Thun, und die Gewandtheit in der Handhabung der Wissenschaft und ihrer Methoden so recht eigentlich gefordert und gefördert wird; und indem sie gleichzeitig nach allen Seiten hin praktisch ins Leben hineinzugreifen und nützliche Aufgaben aller Art mit anziehender Leichtigkeit und Selbständigkeit zu behandeln gestattet: muss sie nothwendig zugleich auch wesentlich mit zur Erhöhung der geistigen Intensität und intellectuel bildenden Wirkung des Unterrichts beitragen (Formale Hebung).

Auch dürfte hierbei die Thatsache in pädagogischer Beziehung nicht gar zu gering anzuschlagen sein, dass die Benutzung eines auf praktische Cultur der Wissenschaft, auf Kunstgriffe und Erleichterungen berechneten Hilfsbuchs die Schüler nothwendig zu der Erkenntniss hindrängen muss, dass sie dessen Dienste und Vortheile um so flotter und vollkommener auszubeuten im Stande seien, je vollkommener sie die Wissenschaft selbst, ihren Geist und ihre Methoden sich anzueignen und zu beherrschen lernen.

In wie fern in solchem Sinne selbst die unbedeutendsten Hilfstabellen, z. B. des Knechtes Wurzeltafeln, zu verwerthen sind, sei uns hier durch ein einfaches Beispiel anzudeuten verstattet. Nehmen wir an, der Lehrer habe eben die bekannten Formeln und Gesetze der Quadratwurzelextraction begründet. Seine Schüler kennen somit den Einfluss, den die Ober- und Unterklassen (des von den Einern auf und ab von zwei zu zwei Ziffern eingetheilten Radicanden) auf die Einsetzung des Komma zwischen die gefundenen Wurzelziffern haben; und sie wissen gleichfalls, dass man statt $\sqrt{a}$ auch $\frac{1}{2}\sqrt{4a}$ und auch $2\sqrt{\frac{a}{4}}$ nehmen kann. Der Lehrer verlange nun von ihnen, dass sie möglichst flott mit Hilfe ihres Knechtes die $\sqrt{\frac{1}{5{,}93}}$ angeben sollen. Sind sie dessen mächtig, so werden sie im Nu mit einem Blicke auf die Zahl 593 der Reciprokentafel die Aufgabe in $\sqrt{0{,}1686}$ verwandelt und mit einem zweiten Blicke auf die Wurzeltafel bei Z. 16_9 die Qw.ziffer 41, also $\sqrt{\frac{1}{5{,}93}} = 0{,}41$ haben. Verlangt aber der Lehrer, die Wurzel genauer zu entnehmen, so werden sie zum Viertel des Radicanden 0,1686 (= 0,04215) und somit zu Z. 421_5 die Qw. 205_3 und durch Doppelung und sachgerechte Einsetzung des Komma beinahe eben so schnell die Wurzel 0,4106 finden, welche nur in der 4. Stelle ein wenig unsicher sein kann. Ein Andrer aber nimmt vielleicht noch etwas raffinirter gleich zu Z. 593 die Qw. 2436 (knapp) und hat nun schnell bei $243\frac{1}{2}$ der Reciprokentafel die verlangte Wurzel = 0,4105.

Wenn man nun erwägt, dass gerade diese Wurzeltafel als die werthloseste der Knechtsskalen zu bezeichnen ist; wenn man ferner die zahllosen Beispiele, Combinationen, Erleichterungen und Modificationen bedenkt, welche selbst die elementare Arithmetik in Verbindung mit der Maskunde, der Reciproken-, Wurzel- und Logarithmentafel; und die elementare Geometrie einschliesslich der so höchst einfachen und leichten Rectangulartrigonometrie in Verbindung mit der verschiedenartigen Messthätigkeit des Visirknechts gestatten: so wird man sich wohl der Ansicht kaum verschliessen können, dass auch für Gymnasien und selbst für niedere mathematische Schulen die Einführung dieser Brieftasche wenigstens für die oberen Klassen eine nicht unwesentliche praktische und wissenschaftliche Hebung ihres mathematischen Lebens zur Folge haben müsste. Dabei glaube ich, dass solche Schulen, deren Lehrkurs nicht bis in die schiefwinklige und sphärische Trigonometrie, Stereometrie, Geodäsie und Mechanik hinaufreicht, keineswegs unrichtig, sondern vielmehr weise handeln würden, wenn sie die vielen interessanten Wahrheiten und Fälle aus jenen Gebieten mit einigen Eläuterungen getrost zu den Arbeiten und Anwendungen ihrer Arithmetik und Geometrie herbeizögen. Denn nicht nur würden sie sich damit eine reichhaltige Quelle lehrreicher und lebensfrischer Messungs- und Rechnungsbeispiele zu allerlei bildenden Uebungen und Aufklärungen hinsichts der Handhabung und des Einflusses der Mathematik aufschliessen *),

*) Mit Uebergehung der tausendfachen Fragen aus der reinen Methematik und der in- und ausländischen Mas-, Gewichts- und Geldkunde führen wir beispielsweise an: Was wiegt die Tonne Kohlen? Wieviel Raum beansprucht 1 Centner Heu im lockeren und im dichtesten Zustande? Welche Wahrschein-

sondern würden sicher auch dadurch in den meisten ihrer Schüler einen noch über die Schule hinaus wirkenden Keim und Trieb erwecken, in jenen so interessanten und so nützlichen Gebieten menschlicher Wissenschaft so weit als nur möglich vorzudringen. Der Einwand, dass durch Herbeiziehung von Beispielen und Uebungsobjecten aus noch nicht entwickelten Theilen der Wissenschaft die Oberflächlichkeit und Halbwisserei gefördert werden könne, dürfte sich doch wohl nur bei ganz ungeschickter dressur-ähnlicher Behandlung als zutreffend erweisen. Sonst wäre ja die Natur und das Leben, die uns in ganz ähnlicher Weise reizen, bereichern, belehren und erziehen — sonst wäre ja diese wirksamste Schule aller Schulen ebenfalls ein pädagogischer Fehler des Lehrers und Meisters aller Lehrer.

Würden in solchem oder ähnlichen Sinne die Herren Collegen des Verfassers Brieftasche nicht blos praktisch, sondern auch pädagogisch auszubeuten versuchen; und würden sie dabei die angedeuteten Ansichten und Erfahrungen in der Hauptsache bestätigt finden, so wäre damit vielleicht ein nicht ganz unwirksamer Fortschritt gewonnen, um den Nutzen und namentlich den Geist der Mathesis — auch über die Schule noch hinaus — allgemeiner, populärer, lebendiger und fruchtbringender zu machen; ein Geist, der, karakteristisch durch die vollendetste Wissenschaftlichkeit in Theorie und Anwendung, bekanntlich zugleich der Geist der tiefsten Gründlichkeit und Speculation, der höchsten Ordnung und Consequenz, und der strengsten Besonnenheit und Objectivität, und folglich auch ein solcher ist, ohne welchen alle wissenschaftliche und wirthschaftliche und selbst auch alle politische Thätigkeit des Staatsbürgers so leicht der Oberflächlichkeit und somit auch dem Irrthume zu verfallen Gefahr läuft; ein Geist also, der konsequenter Weise von jedem Gebildeten, welcher politischen oder religiösen oder wirthschaftlichen Sphäre und Richtung er auch angehöre, im Interesse der Menschheit weit mehr noch als bisher beachtet und kultivirt zu werden verdient.

Ein Körnlein zu diesem Culturbaue beizutragen, war bei Bearbeitung dieses Werkchens ein wesentlicher Zweck des Verfassers. Und wenn derselbe nun Zweck und Mittel dem sachverständigen Publikum zu wohlwollender Prüfung und Unterstützung empfiehlt, so glaubt er um so eher doch auf theilweise Billigung hoffen zu dürfen, je mehr man die Schwierigkeiten kennt und erwägt, denen bei der ungewöhnlichen Verdichtung einer so grossen Masse wissenschaftlichen Materials auf einen so kleinen und führlichen Raum und auch behufs einer möglichst exacten Herstellung des zugehörigen Instrumentes nach verschiedenen Seiten hin Rechnung zu tragen ist.

Tharand, im Frühjahre 1860.

Der Verfasser.

---

lichkeit hast Du, noch 10 Jahre zu leben? Welchen eigentlichen Werth hat eine künftige Kapital- oder Renteneinnahme, ohne oder mit Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit ihres wirklichen Erfolgs? Welche Grösse hat der vor Dir befindliche Terrainwinkel? Welche Fläche hat jenes Feldstück? Welches Steigungsverhältniss die Bergstrasse, auf der Du wanderst? Welche Höhe dieser Baum oder Bestand? Welche Stammgrundfläche? Welchen Masseninhalt? Was sind für Sortimente darin? Welche Höhe hat dieser Berg? Welches Verhältniss hat dessen Horizontal- oder Kartenfläche zu seiner wirklichen Oberfläche? Wie weit ist jener Blitz oder jener tönende Gegenstand von Dir, wenn zwischen Schein und Schall das (justirte) Pendel Deines Knechtes so und so viel Schwingungen zählt? Welche Zeit ist es, wenn Dein Knecht die und die Sonnenhöhe anzeigt? — Alle diese u. tausend andere Aufgaben löst unser mathematischer Brieftaschenmann, theils mit, theils ohne sein kleines geodätisches Besteck, höchstens, dass er etwa zu einigen Arbeiten noch ein Messband braucht.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Das der kaum vollendeten ersten Ausgabe fast auf dem Fusse gefolgte Gesuch des Herrn Verlegers um Besorgung einer neuen Auflage liess selbstverständlich jedwede wesentliche Aenderungen unthunlich erscheinen. Nur das Notizkalenderbuch und einige Nebendinge haben eine kleine Modification erfahren. — Darf ich nun eine so lebendige Nachfrage nach dieser Brieftasche als ein günstiges Zeugniss für die ihr zu Grunde liegende Idee auffassen: so darf ich mich nun auch wohl zuversichtlicher der Hoffnung hingeben, dass meine Bitte an die sachverständigen Kreise, die möglichst praktische Cultur derselben namentlich in Rücksicht ihrer geodätischen Seite, durch Rath und That fördern zu helfen, nicht ohne wohlwollende Berücksichtigung bleiben werde.

Tharand, im Sommer 1860.

Der Verfasser.

I. Kapitel.

Der Ingenieurknecht als Rechentafel.

Um die Vortheile der Messknechtstabellen (kein Umblättern; schneller Ueberblick; wegen unmittelbarer Ocularinterpolation keine Zwischenrechnung) unbefangen würdigen zu können, ist's durchaus nöthig, dass man sein Auge in das ihm ungewohnte Ablesungsgeschäft erst ein wenig einübe. Anfänglich thue man dies unter Führung einer Nadel- oder Bleistiftspitze. Den hierbei in einigen Skalen bemerkbaren Unregelmässigkeiten in der Stellung der kleinsten Theilstriche liegt keineswegs Ungenauigkeit, sondern vielmehr die Absicht zu Grunde, auch für die untersten Theilgrade die Ablesung bis aufs einzelne Zehntel derselben so sicher als möglich zu machen. — Bei den im Folgenden nöthig werdenden Rückbeziehungen ist das Instrument einfach durch **Knt.** (Knecht) u. die Worte „rechts" u. „links" durch **r.** u. **l.** citirt. Der in den Beispielen den Zahlen oben rechts angehängte Stern od. Strich bedeutet „reichlich" resp. „knapp"; z. B. $0{,}5^{-}$ = 5 Zehntel knapp od. 47-48 Hundertel.

Des Instrumentes Rückseite

bietet eine vollständige Logarithmentafel. Sie zeigt die gemeinen Logarithmen für und bis 4 Ziffern ganz scharf, für und bis 5 Ziff. um eine bis zwei Einheiten der letzten Ziff. unsicher. Ihre Genauigkeit ist sonach vollkommen ausreichend nicht blos für alle praktischen und Schulzwecke, sondern auch für die meisten wissenschaftl. Arbeiten mit Ausnahme der höhern Zweige der Geodäsie u. dgl. Die fette od. Mittelspalte zeigt die Zahl oder den Numerus; die magere oder linke und rechte Spalte den Logarithmus (*log*) oder vielmehr nur dessen Decimalen oder Mantisse. Denn die Kennziffer oder Karakteristik richtet sich bekanntlich einfach nach den Ganzestellen oder auch nach den Anfangsnullen der Zahl. Der Log. einer Zahl von α Ganzestellen hat die Kennziffer $\alpha - 1$; der eines Decimalbruchs mit α Anfangsnullen hat vor der Mantisse 0 Ganze und hinter ihr α Minusganze. Diese Wahrheiten sind natürlich rückwirkend zu beachten, wenn es gilt, zu einem gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl aufzusuchen und in die gefundene das Komma einzusetzen. — Ausserdem enthält der rechte Rand einige für genaue Zins- u. Rentenrechnungen nöthige 7stell. Log., u. der linke Rand die Faktoren (u. deren Log.) zur Verwandlung gemeiner Log. in natürl. od. hyperbolische (Grdz. = 2,7182818) u. umgekehrt.

Beispiele. *a*) Für Aufsuchung des Log. zu gegebener Zahl.

1) *lg.* 1065? Zu 100 u. 6,5 zeigt die Spalte Log. die Mantisse 02735; folglich *lg.* 1065 = 3,02735. — **2)** *lg.* 23,73? Die 2. Abth. zeigt bei 200 u. 37,3 die M. 3753; folgl. *lg.* 23,73 = 1,37530. — **3)** *lg.* 0,05664? In d. 4. Abth. steht bei 500 u. 66,4 die Log.-Mantisse 75312; somit *lg.* 0,05664 = 0,75312 — 2.

b) Für Aufsuchung der Zahl zu gegeb. Log.

[Zeichen: *zlg.* od. *nlg.* („*numerus logarithmi.*")] Der oberste Kopf d. Taf. zeigt, welche Mantissen jede Abtheilung umfasst. Ein Blick auf ihn erleichtert das Aufsuchen, wobei vorerst die Kennziffer der *Z* bekanntlich ganz unbeachtet bleibt. — **4)** *nlg.* 1,22142? Da die 1. Abth. die Mant. 221 mit umfasst, sucht und findet man in deren vorletzter Spalte bei 221 u. beim Zehntelstrich „4 reichlich" ganz deutlich die 66,5 zu dem Kopfe 100 gehörig, somit 1665; wegen der Kennziff. 1 ist also $Z = 16{,}65$. — **5)** *nlg.* 3,58245? Laut oberst. Kopf liegt die M. 582 in der 2. Abthlg. und zwar auf deren rechter Seite in der Nähe der Zahl 382. Die mit dem Finger unterstützte Ablesung zeigt zu 582 und $4\frac{1}{2}$ ziemlich bestimmt auf 382 u. $3\frac{1}{2}$ knapp; wegen Kennziff. 3 folgt somit $Z = 3823{,}4$. — **6)** *nlg.* 0,78654 — 2? Da laut ob. Kopf 786 in der vorletzten Abth. und links liegen muss, sucht man daselbst und findet bei 786 und $5\frac{1}{2}$ knapp: die Ablesung 11,7 zu 600, also 6117; wegen der Kennziff. 0 und — 2 also $Z = 0{,}06117$.

Vorderseite. R. Ecke: Recipr. u. Fallhöh. **R. Wand:** Quadr.- u. Cubikw.

c) Grundregeln und Rechnungsbeispiele.

$$lg\,ab = lg\,a + lg\,b;\quad lg\,{}^{a}/_{b} = lg\,a - lg\,b;\quad lg\,a^n = n\,lg\,a;\quad lg\,\sqrt[n]{a} = \frac{lg\,a}{n}.$$

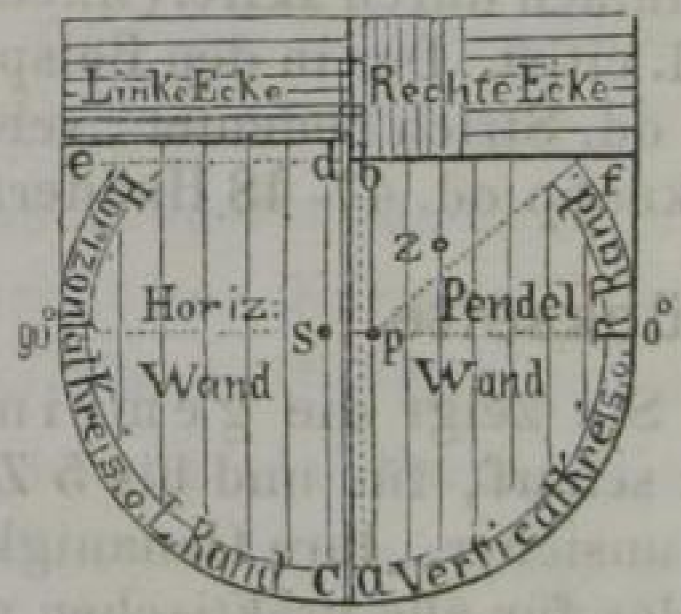
7) $1{,}643 \times 0{,}0874$? . . $\left\{\begin{array}{l} lg\,1{,}643 = 0{,}21564 \\ lg\,0{,}0874 = 0{,}94151 - 2 \\ \hline \text{Summe} = 0{,}15715 - 1 \end{array}\right\}$ Zur Mantisse 157 etc. die Zahl gesucht (s. die 1. Abth. der Tafel), *nlg* 0, . . . — 1 = 0,1436.

8) $\frac{0{,}2046}{35{,}11}$? . . $\left\{\begin{array}{l} \quad +2\ .\ .\ .\ -2 \\ lg\ 0{,}2046 = 0{,}31091 \\ lg\ 35{,}11 = 1{,}54543 \\ \hline \text{Differ.} = 0{,}76548 - 2 \end{array}\right\}$ Zur Mantisse 765 etc. die Zahl gesucht (in der 3. Abth.) giebt *nlg* 0, . . . — 2 = 0,058275.

9) $0{,}958^3$? . . $\left\{\begin{array}{l} lg\ 0{,}958 = 0{,}98137 - 1 \\ \text{3f. Prod.} = \overline{0{,}94411 - 1}(^3 \end{array}\right\}$ Zur M. 944 etc. die Z. ges. (in d. letzt. Abtheil.) giebt *nlg* 0, . . . — 1 = 0,8792*.

10) $\sqrt[3]{\frac{17}{24}}$? . . $\left\{\begin{array}{l} \quad \overbrace{+3} \qquad \overbrace{-3} \\ lg\ 17\,(0) = 1{,}23045 \\ lg\ 24\,(0) = 1{,}38022 \\ \hline \text{Differ.} = 2{,}85023 - 3 \\ \hline :3) = 0{,}95008 - 1 \end{array}\right\}$ Und da die Mant. 950,1⁻ auf die Z. 891,4 zeigt folgt weg. 0 und — 1 *nlg* = 0,8914.

Fig. 1. **Des Instrumentes Vorderseite.**



Links vom Mittelschnitt ein Transversalmasstab zu beliebigen Zeichnungszwecken, namentlich zum Mess. u. Auftrag. von Winkeln mittelst Zirkel u. Chordentafel. Wenn man seinen absoluten Längen circa $1\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$ zusetzt, ist er als ein ziemlich richtiges Milli-, Centi- u. Deci-Metermas zu brauchen; in gleicher Weise der rechts von der Schnittlinie parallel laufende dunkle Masstab als pariser Linienstab. (Siehe am Schluss von Kap. II. über: „Justirte Knechte".)

Rechte Ecke.

1) Tafel d. reciproken (umgekehrt.) Werthe *r* aller Zahlen *z* ($r = {}^1/_z$). Für u. bis 3 Ziffern ganz scharf; für u. bis 4 Ziff. theilweis um 1 bis 2 Einheit. d. letzt. Stelle unsicher. Bei kurzen od. runden Dividenden die Divisionsarbeit ausserordentlich erleichternd. Die Einsetzung des Komma in die abgelesene Reciproke geschieht nach der Regel: Soviel Ganzestellen die *z*, soviel Anfangsnullen die *r*; u. umgekehrt. Z. B.:

1) $\frac{1}{1135}$? Da 113,5 auf 881 zeigt, folgt wegen der vier Ganzestellen $r = 0{,}000881$.

2) $\frac{1}{0{,}0996}$? Da 996 auf 100,4 deutet, folgt wegen der zwei Anfangsnullen $r = 10{,}04$.

3) $\frac{60}{13{,}26}$? Die Rec. v. 13.26 giebt d. Knt. (da 132,6 auf 754 zeigt) als 0,0754; folgl. ist deren 60 fach. = 4,524.

{ Beim Ablesen beachte man, dass die linke Spalte nach unten, die rechte nach oben zu fortschreitet.

2) Die Fallhöhen-Endgeschwindigkeitstafel (in der messenden und rechnenden Mechanik vielfach nöthig).

Beispiele. **1)** Von welcher Höhe muss ein Hammer fallen oder ein Wagen herabrollen, um (ohne Rücks. auf Widerstände) die Endgeschw. $v = 9$ *m* zu erlangen? $v = 9{,}0$ zeigt deutlich auf 4,13 *m*. — **2)** Ein Wassergefälle (oder auch eine Druckhöhe) von 5 *m* entspricht welcher theoret. End- (oder Ausfluss-) Geschwindigkeit? $h = 5{,}0$ zeigt auf $v = 9{,}9$ *m*. — **3)** Zu 50 *m* Fallhöhe gehört welche Endgeschwindigkeit? Da laut Randbemerk. der Taf. das 100 mal kleinere *h* ein 10 mal kleineres *v* giebt, folgt ($h = 0{,}5$; zeigend auf $v = 3{,}13$) $v = 31{,}3$ *m*.

Rechte Wand.

Wurzeltafel, zur Ablesung der Quadrat- u. Cubikwurzeln (*Qw.* u. *Cw.*), wie auch der Quadrate u. Cuben; in d. Regel bis zur 4. geltend. Ziff. genau. — Bei Aufsuchung einer Wurzel denke man sich stets erst beim Komma oder hinter der Einerstelle der zu radicirenden Zahl den Hauptstrich, u. von da ab dieselbe behufs der *Qw.* in zwei-, behufs der *Cw.* in dreizifferige Klassen abgetheilt. Links vom Komma „Oberklassen", rechts „Unterklassen". Jede Klasse ist als Untrennbares zu betrachten; nie darf eine ihrer Ziff. herüber an die andere gezogen, wohl aber kann ihr Werth als Bruchtheil zur nächsthöhern

Klasse geschlagen werden. Regeln zur Einsetzung des Komma in die abgelesene Wurzelziffer: „Soviel Oberklassen die Zahl, soviel Ganzestellen ihre Wurzel“; und: „Soviel Fehlklassen den geltenden vorangehen, soviel Anfangsnullen die Wurzel“. Manchmal ist's nöthig, eine Verfeinerung dadurch zu bewirken, dass man den Radicanden bei der *Qw.* mit 4, bei der *Cw.* mit 8 dividirt und die darnach gefundene Ablesung doppelt.

Beisp. **1)** $\sqrt{1,|92}$? Zu $Z=192$ zeigt d. Spalte $Qw.=138_6$, somit $\sqrt{1,92}=1,386$. **2)** $\sqrt{19,|2}$ od. $\sqrt{19,|20}$? $Z=19$ Ganze u. 2 Zehnt. zeigt auf *Qw.* knapp 44; also $\sqrt{19,2}=4,4^-$; wahrscheinl. 4,38. Extrahirt man dagegen das Viertel $=4,80$, so erhält man für $\sqrt{4,|80}$ (da Z 480 auf $Qw.=219_1$ zeigt) durch Doppelung 4382 und somit sicherer $\sqrt{19,2}=4,382$. — **3)** $\sqrt{0,00192}$? Abgetheilt 0,|00|19|20|. Es ist also in Z wieder entweder $19^1/_5$ od. 19,2 aufzusuchen, was nach oben 0,044 giebt; od. es ist das Viertel 0,|00|04|80| u. somit 480 zu suchen, die gefund. *Qw*ziff. 2191 zu dupliciren u. mit 0,04382 als gesuchte Wurzel aufzustellen. — **4)** $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}=\sqrt[3]{0,|500}$? Die Klasse 500 in der Zspalte zeigt auf *Cw.* 7937; folgl. die gesuchte Cubicwurzel $=0,7937$. — **5)** $\sqrt[3]{0,05025}$? Abgetheilt 0,|050|250|. Zur Zahl 50,250 od. $50\tfrac{1}{4}$ zeigt die *Cw*spalte knapp 370, scharf abgelesen 369; sohin d. gesuchte $Cw.=0,369$. — **6)** $\sqrt[3]{2}$? Da für einziff. Radicanden die Ablesnng zu grob würde, dividire man mit 8, wo dann $\sqrt[3]{0,|250}$, somit zu $Z=250$ die $Cw.=630$, und durch Duplirung 1260, also $\sqrt[3]{2}=1,260$ erfolgt.

Um die „rechte Wand“ des Knechtes für flüchtige Rechnungen auch zur Ablesung von zweiten und dritten Potenzen zu benutzen, betrachtet man die zu potenzirende Grösse ohne alle Rücksicht auf deren Komma als eine *Qw.*, resp. *Cw.*, und liest aus der Mittelskala die entsprechende *Z*. Um dann in letzterer das Komma einzusetzen, denke man sich dasselbe bei der gegebenen Wurzel hinter der ersten geltenden Ziffer. Bei vorhandenen Ganzen schneidet man erst die dem Quadrate (od. Cubus) dieser Ziffer entsprechenden Stellen und setzt hierauf für jede folgende Ganzestelle noch 2 (resp. 3) Ziffern hinzu. Bei 0 Ganzen bedenke man, dass jede Decimale im Quadrate zwei, im Würfel drei Decimalstellen einnehmen muss.

Beisp. **1)** $2,54^2$? Da *Qw.* 254 auf 645,2 zeigt, folgt $2,54^2=6,452$. — **2)** $0,173^2$? *Qw.* 173 deutet auf 2994; da also das Quadrat der Decimale 1 zwei Stellen bilden muss, folgt $0,173^2=0,02994$. — **3)** $5,73^2$? Da 573 nicht da u. 57,3 eine zu grobe Ablesung giebt, suchen wir zur Hälfte, also zu *Qw.* 286,5 die $Z=8207$, deren Vierfaches $=32828$ gehörig abgetheilt das Quadrat 32,83 giebt. — **4)** $0,035^3$? *Cw.* 350 zeigt auf $Z=42,9$. Da nun 42 dem Cubus von 3 entspricht u. 03 sechs Decimalen annehmen muss, folgt $0,035^3=0,0000429$. — **5)** $1,05^3$? Da *Cw.* 105 keine genaue Ablesung zulässt, sucht man nach Division mit 2 zu *Cw.* 525 die Z 1447, deren Achtfaches 11576 als 1,158 abgetheilt d. gewünschten Cubus giebt.

Die Balkentafel längs des dunkl. Linien-Masstabes zeigt mit einem einzigen Blicke die Grössenbeziehungen zwischen dem Durchmesser des Kreises (Stammes) und der Seite des eingeschriebenen gleichseit. Vierecks (vollkant. quadratischen od. grössten Balkens), wie auch der Höhe (u. Breite) des tragkräftigsten Rechtecks (vollkantig. stärksten Balkens).

Aus einem Stamme von 17″ wird der quadrat. Balken (laut oberer Ables.) knapp 12″ hoch u. breit, und der stärkste d. h. tragkräftigste (vollkant.) Balken (laut unterer Ables.) knapp 13″ hoch u. $13 \times 0,7=9,1''$ breit.

Linke Ecke.

Tafel der Chorden und Bogenhöhen (in 100facher Grösse oder für $r=100$) für gute Augen meist bis halbe Zehntelgrade oder 3 Min. u. andererseits bis 4 Ziffern genau.

1) Chorde von $6,1^0$? $\angle$ 6,1 zeigt in der *Ch*spalte auf die 100f. *Ch.* 10,65; sonach die einfache oder natürliche $=0,1065$. — **2)** Eines Winkels oder Bogens Chorde (für $r=1$) sei 0,507 gegeben; daher dessen Gradmas? Zur 100fachen $Ch=50,7$ zeigt unsre Tafel den $\angle=29,4^0$ knapp, genauer also $29,38^0$ od. $29^0\,23'$. — **3)** Eine Bahncurve von 800′ Rad. u. $27,1^0$ Winkelgrösse od. Abweichung hat zur Bogenhöhe od. Sagitta? Da $\angle\,27,1^0$ auf die 100fache *Bh.* 2,77* zeigt, folgt durch Multiplication mit 8 die gesuchte $=22,2'$.

L. Ecke: Chord. u. Bogh. **L. Wand:** Dec.″ u. Duod.″; Kreisrechnungen.

Ausserdem wird noch eine reichhaltige Menge von technisch. Aufgaben, die auf den Wechselbeziehungen zwischen Radius, Gradmas, Sehne und Höhe (Pfeil) der Bogen beruhen, mittels dieses Täfelchens in vereinfachter Weise lösbar gemacht; während es in Verbindung mit dem Transversalmasstabe der linken Wand zugleich ein sehr bequemes Mittel bietet, nach Gradmas gemessene od. gegebene Winkel jeder Grösse mittels Zirkels aufzutragen.

Linke Wand.

Die Kreistafel derselben zeigt die Grössenbeziehungen zwischen Umfang und Durchmesser u. zwischen diesen beiden u. der zugehörigen Kreisfläche, sowohl fürs Duodecimal- als Decimal- u. überhpt. f. jedwedes Massystem. Mit ihrer Hülfe lassen sich folgende Arbeiten ausführen:

a) Decimal- in Duodecimal-Zoll zu verwandeln und umgekehrt: Mittels der beiden *D*spalten. Z. B.:

1) 14,5 Dec.″ zeigen gegenüber auf 17,4 Duod.″ — 2) $8\frac{1}{4}$ Duod.″ (d. Duod. *D*spalte) verwandelt ihr Gegenüber in 6,9 Dec.″

b) Zu jedwedem Umfange den Durchmesser abzulesen und umgekehrt: Mittels der rechten *D*- nnd *U*spalte (deren Zollbezeichnung hierbei gar nicht in Betracht kommt). Z. B.:

1) Welcher Durchmesser zu $11\frac{3}{5}$′ Umfang? $U = 11\frac{3}{5}$ zeigt auf $D = 3{,}69$′. — 2) Welcher Umf. bei $2{,}51^m$ Durchm.? $D = 2{,}5$* zeigt auf $U = 7\frac{4}{5}$*, also $7{,}9^m$. Genauer *D* 25,1 auf *U* $78\frac{4}{5}$*, also auf $7{,}89^m$.

c) Zu jedwedem in Duodec.-Zollen gegebenen Durchm. od. Umfang den Kreisinhalt nach Quadratfussen anzugeben, und umgekehrt: Mittels der rechten *D*- und *U*spalte. Z. B.:

1) Kreisfläche zu $15\frac{1}{4}$″ Durchm.? Unter Duod. *D* 15 beim Viertelspunkte liest man aus der Kreisspalte 1,27 □′; schärfer 1,268. — 2) Zu 76 Duod.″ *D* die Kreisfläche? Da 76 die Tafel überschreitet, nimmt man den zum Zehntel *D* 7,6 gehör. Kreis 0,315 hundertf.: = 31,5 □′; oder den zum halben $D = 38$ zugehör. Kr. = 7,87* □′ vierf. = 31,50 □′. — 3) 100″ Umf. umschliessen einen Kreis von wieviel □Fuss? *U* 100 zeigt auf 5,53 □′. — 4) Zu 10 □′ Kreisfl. der Durchmesser und Umfang in Duod.″? *Kr*. 10,00 zeigt rechts auf $D = 42\frac{3}{4}$″, schärfer 42,82″; sowie gleichzeitig auf $U = 134\frac{3}{5}$″; schärfer 134,7″.

d) Zu jedwedem in Dec.-Zoll angegebenen Durchm. oder Umf. die Kreisfläche nach Quadratfussen anzugeben, u. umgekehrt: Mittels der linken *D*spalte. Z. B.:

1) Zu 31,3 Dec.″ *D* gehört die Fläche? Dec. *D* 31,3 zeigt auf *Kr*. 7,70⁻ od. 7,69 □′. — 2) Zu 100 Dec.″ Umf. die Kreisfl.? *U* 100 verwandelt sich nebenan in *D* 31,8*, u. Dec. *D* 31,8* zeigt auf 7,95 □′. — 3) Zu 1,12 □′ Kreisfl. gehört welcher *D* od. *U* in Dec.″? *Kr*. 1,12 zeigt auf Dec. *D* 11,94″, welchen *D* die rechte *D*spalte bei 11,9 in $37\frac{2}{5}$ *U*, od. genauer bei 11,9* in 37,5″ verwandelt.

e) Zu jedwedem Durch. od. Umf. in jedwedem Mase den Kreisinhalt in demselben (□)Mase anzugeben, u. umgekehrt: Mittels der Dec.-*D*spalte und nach der Regel: „Rücke in der Kreisskala das Komma um zwei Stellen rechts, oder lies ihre Zahlen in 100facher Grösse ab.“ (Wenn die gegebenen Eingangsgrössen rücksichtlich der Tafelconstruction zu klein oder zu gross sich erweisen, so handle man nach dem Gesetz: Der halbe *D* oder *U* entspricht dem Viertel *K*; das Zehntel *D* od. *U* dem Hundertel *K*; der doppelte *D* od. *U* dem 4fach. *K*; der 10fach. *D* od. *U* dem 100fach. *K*, u. umgekehrt.

Beisp. 1) Zu $7\frac{1}{4}$′ *D* zeigt der Dec. *D* $7\frac{1}{4}$ auf die (100fach abzulesende) Kreisfläche $41\frac{1}{4}$ □′. — 2) Um einen Kreis v. d. Grösse eines preuss. Morg. = 180 □R. zu bilden, bedarf es eines *D* von? *K* 1,80 zeigt links $D = 15{,}14$ R. — 3) Welchen Querschnitt hat ein Draht v. $\frac{1}{6}^{mm}$ Dicke? $\frac{1}{6} = 0{,}1667^{mm}$, u. zu *D* $16{,}67^{mm}$ giebt unsre Taf. $K = 218{,}1$ $□^{mm}$; da aber *D* 100 mal kleiner, muss *K* 100 × 100 mal verkleinert, also = 0,02181 $□^{mm}$ gesetzt werden.

Wenn statt des *D* der *U* gegeben oder gesucht, ist zunächst, resp. zuletzt, die bekannte Verwandlung mittels *U*- und *D*spalte vorzunehmen.

f) Die bei zwölftheiligem Massysteme häufig vorkommende Division mit 12^2 oder 144 wird ebenfalls durch diese

L. Wand: Division mit 144 u. 1728. Cubirung v. Kreiskörpern aller Art.

Tafel, u. zwar nach der im untern Zwickel der linken Wand angedeuteten Regel bewirkt. Z. B.:

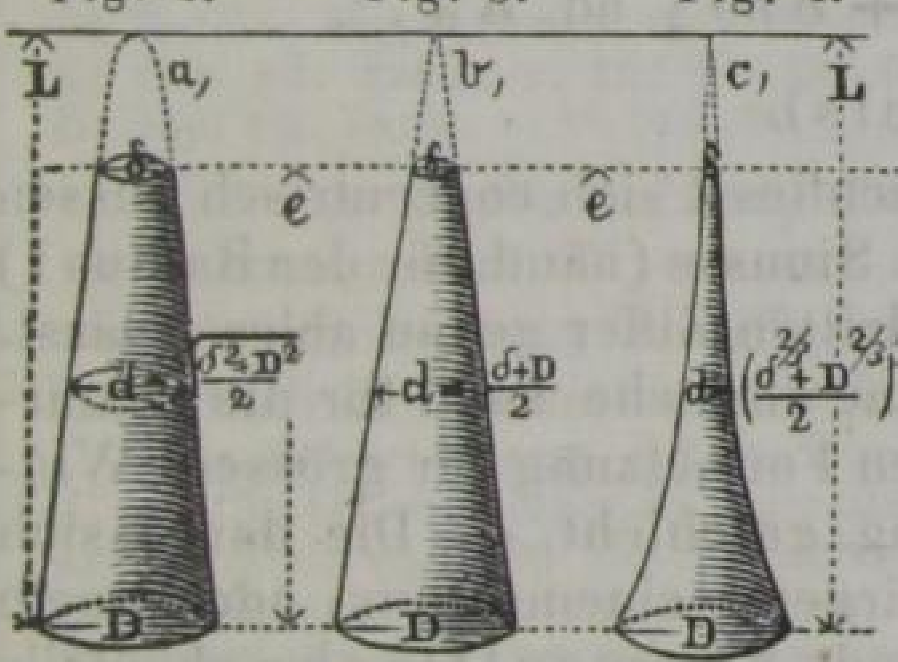
1) Ein Balken von 13 Duod.'' Höhe u. 10'' Breite (Prisma v. 130 Duod. □'') hat an Grundfläche nach □'? Mit $K=130$ als Eingang findet sich der Dec.-D 12,9⁻ u. somit durch d. Duod.-D 12,9⁻ das Gesuchte $=0,90$ □'. — 2) 12340 C' in Schachtruth. (à 144 C') zu verwandeln. K 1234 giebt den Dec.-D 39,65, u. Duod.-D 39,65 die Kziff. 8,57; unzweifelhaft also hier das Verlangte $=$ 85,7 Schachtruth.

g) Aehnlich giebt sie auch die (bei Verwandlung von Duod.-Cubiczollen in Cubicfusse u. dergl.) gewünschte Quotientenziffer bei Divisionen mit 12^3 oder 1728, indem man erst mit 12 dividirt u. dann ganz wie vorher nach *f*) verfährt. Z. B.:

27875 Duod.-C'' sind in C'? Ihr Zwölftel 2323 als K $2{,}32_3$ aufgesucht zeigt auf Dec. D 17,2⁻ u. Duod.-D 17,2⁻ auf 1,61, woraus klar 16,1 C' folgt.

h) Dass des Knt's Kreistafel auch bei Cubirung aller Arten von Kreiskörpern gute Dienste leisten müsse, ist zwar selbstverständlich, möge sich aber noch besonders in folgend. Regeln aussprechen.

Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.



Die Stärkenfläch. nehmen ab *a*) wie die Oberhöhen, *b*) wie deren Quadrate, *c*) wie deren Würfel.

Fig. 5.

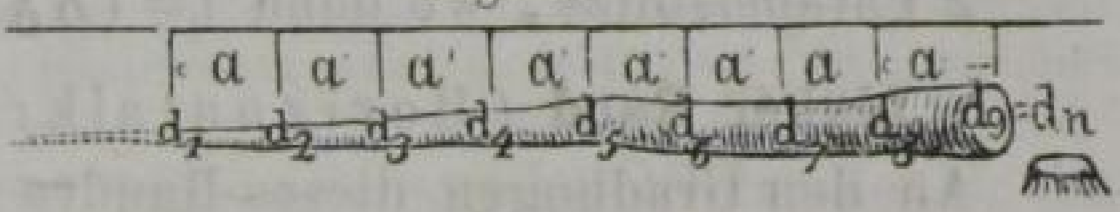
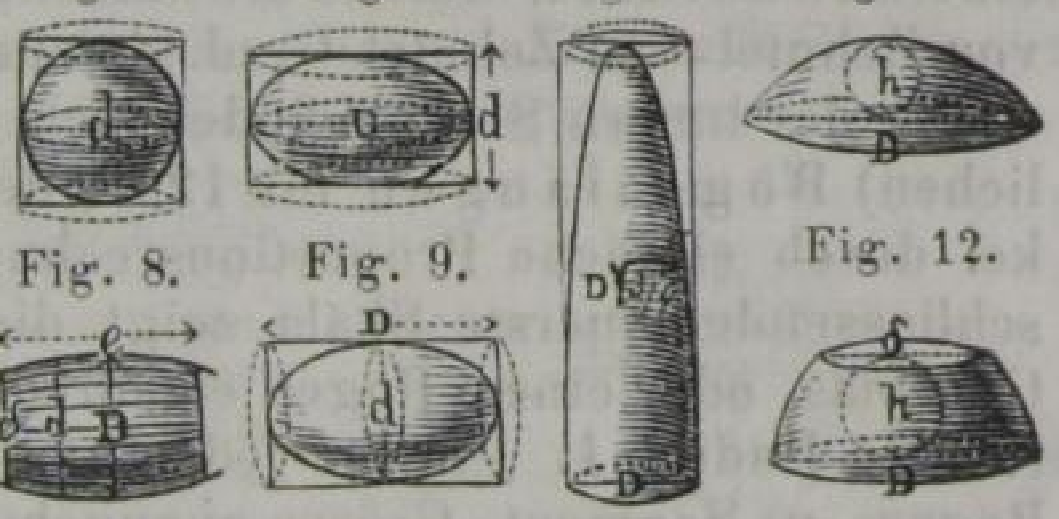


Fig. 6. Fig. 7. Fig. 10. Fig. 11. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 12.



Bedeutet bei Walzen u. vollen Kegeln u. dgl. D die Grundstärke, L die Achsenlänge, J den Inhalt; bei abgekürzten Kegeln etc. δ die obere Stärke, l die Achsenlänge, i den Inhalt; bei jenen wie bei diesen d die Mittenstärke, und K_D, K_δ etc. der zum Durchmesser D oder δ etc. gehörigen Kreisinhalt; so ist:

1. Cylinder oder Walze. $J = K_D \,.\, L.$
2. (Gemeiner oder) Geradseit. Kegel. (Fig. 3.) $J = \frac{1}{3} K_D \,.\, L$ od. $= \frac{4}{3} K_d \,.\, L$ od. $= \frac{1}{3} K_{2d} \,.\, L.$ Und $i = \left[K_{\left(\frac{D+\delta}{2}\right)} + \frac{1}{12} K_{(D-\delta)}\right] l$ od. $= \left[K_d + \frac{1}{12} K_{(D-\delta)}\right] l$ od. $= \left[K_\delta + K_D + K_{(D+\delta)}\right] \frac{l}{6}.$
3. (Parabolisch) Ausgebauchter Kegel. (Fig. 2.) $J = \frac{1}{2} K_D \,.\, L$ oder $K_d \,.\, L.$ Und $i = (K_\delta + K_D) \frac{l}{2}$ od. $K_d \,.\, l.$
4. (Neiloidisch) Eingebauchter Kegel. (Fig. 4.) $J = \frac{1}{4} K_D \,.\, L$ od. $2 K_d \,.\, L.$ Und $i = \left[K_\delta + K_D + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{K_\delta} + \sqrt[3]{K_D}\right)^3\right] \frac{l}{5}.$
5. Alle drei Kegelarten (gem. Kegel, Paraboloid u. Neiloid) u. deren Stumpfe: nach Simpsons (erweitert. Körper-) Regel gemeinschaftlich durch $i = (K_\delta + 4 K_d + K_D) \frac{l}{6}$ od. $(K_\delta + K_{2d} + K_D) \frac{l}{6}.$
6. Dieselb. drei Kegel unentwipfelt: nach des Verfassers Richtpunktsregel $J = K_D \,.\, \frac{2}{3} h$, wo h die Richthöhe, d. h. die Höhe des Punktes der halb. Grundstärke („Richtpunkts") bedeutet. Sie giebt Kegel 2 u. 3 ganz genau, Kegel 4 um 1,2 % zu klein.
7. Alle Kreiskörper von unregelmässiger oder beliebig ein- und ausgebauchter Form (wie Fig. 5): Auf Grund der Simpsonschen Regel. $i = [(K_{d_1} + K_{d_n}) + 2(K_{d_3} + K_{d_5} + K_{d_7} \ldots) + 4(K_{d_2} + K_{d_4} + K_{d_6} + K_{d_8} \ldots)]\, a/_3.$ In Worten: „Erste u. letzte Stärkenfläche einfach; alle übrigen ungeradstelligen doppelt; alle geradstelligen vierfach; Alles summirt und mit dem Drittel der

Sectionslänge multiplicirt.“ Die Anzahl der Längensectionen muss aber stets eine gerade, die der Stärken also (oder der letzte Stellenzeiger n) eine ungerade Zahl sein. Bei ungerader Anzahl von Stücken (Sect.) kubirt man das erste od. letzte separat nach Regel 5.

8. Kugel und Ellipsoid. (Fig. 6, 7, 9.) $J = \frac{2}{3}$ d. umschrieb. Walze. Ellipsenkegel (Fig. 10) $= K_D \,.\, \frac{2}{3} L$.

9 Kugelabschnitt u. Kugelscheibe. (Fig. 11 u. 12.) Höhe $= h$. J = Entsprechend. Paraboloid + Kugel um h. Also Abschnitt $= (\frac{1}{4} K_D + \frac{1}{3} K_h)\, 2h$. Scheibe $= (\frac{1}{4} K_\delta + \frac{1}{4} K_D + \frac{1}{3} K_h)\, 2h$.

10. Stämme und alle Rundholzstücke (Fig. 5). J = Walze der Mittenstärke; um so genauer, je kürzer die Stücke; am genauesten nach Regel 7. Unentwipfelte vortheilhaft auch nach Regel 6.

11. Fassraum (Fig. 8), dessen Achsenlänge l, Durchmesser in d. Mitte (Spundtiefe) D, am Boden (Bodenweite) δ und in der Mitte zwischen beiden (bei $\frac{1}{4} l) = d$; am sichersten nach Regel 7. Sehr annähernd als 2 Parabelstutze, wo dann $i = (K_\delta + K_D)\, \frac{l}{2}$ od. $K_d \,.\, l$.

Linker Rand (Horizontalkreis).

An den Gradbogen dieses Randes schliesst sich concentrisch aussen eine Sinustafel, welche die natürlich. Sinusse (näml. für den Radius 1) von Zehntel- zu Zehntel-Grad bis zur dritten Ziffer genau ablesen lässt. — An der innern Seite befindet sich eine ähnliche Tafel für die (natürlichen) Bogenlängen bis 120°, deren Fortsetzung für grössere Winkel durch einfache Proportionsrechnung geschieht. — Die daran sich schliessende innerste Skala zeigt die irgend einem Sinus, oder einem Gradmas, oder einem Bogen entsprechende Segmentfläche ebenfalls für den Radius 1. Um für jeden andern Radius r die (gemeine) Sinus-, Bogen- u. Segment-Grösse anzugeben, hat man den natürlichen Sinus u. Bogen mit r, das Segment aber mit r^2 zu multipliciren.

Die in diesem Rande vorfindliche graphische Combination der vier Skalen, durch die linke Ecke zu einer sechsfachen vervollständigt, gestattet eine ausserordentlich schnelle u. bequeme Erledigung aller derjenigen Fragen, die sich auf die Wechselbeziehungen zwischen Gradmas, Sinus, Bogenlänge, Bogenhöhe (*Bh*), Bogenspannung (*Ch*) und Bogenfläche (*Sgm.*) und somit auf alle Grössen und Theile von Kreis-Abschnitten erstrecken.

1) Zum $\angle 46^0$ gehört? Ein Sinus 0,719, ein Bogen 0,803, eine Segmentfläche 0,042⁻, schärfer 0,0418. Bei 10 Ruthen Radius also ist *Sin* $46^0 = 7{,}19$ R.; ***Bog*** $46^0 = 8{,}03$ R.; *Sgm* $46^0 = 4{,}18$ □R., sowie (laut l. Ecke) *Ch* $46^0 = 7{,}815$ R.; ***Bh*** v. $46^0 = 0{,}795$ R. — 2) Welche Winkelgrösse u. Bogenlänge gehört zu einem Sinus, der für den Radius von 30 R. die Länge von 12,5 R. zeigte? Natürl. *Sin* $= 12{,}5 : 30 = 0{,}417$ zeigt (zwischen ,41 u. ,42 der Sinusskala) auf $24{,}7^0$ und 0,131 natürl. Bogenlänge u. somit auf $0{,}431 \times 30 = 12{,}93$ R. wirklich. Bogl.

Rechter Rand (Verticalkreis).

Durch die Combination des Gradbogens mit der aussen und innen nebenher laufenden Tangenten-, Cosinus- u. Secanten-Skala gelangen des Knechtes trigonometr. u. Kreis-Hülfen zu ihrer Vollständigkeit. Nicht nur, dass hier wiederum die einzelnen Grössen (d. h. für den Radius 1 od. im natürl. Werthe) bis auf die dritte Decimale u. somit meist bis zur vierten Ziffer genau abgelesen, sondern auch die bei trigonometr. Messung. u. Berechnungen so häufig in Frage kommenden Wechselbeziehungen zwischen Tangente, Cosinus u. Secante mit einem Blicke übersehen werden können. — So z. B. zeigt dieser Rand zu einer Elevation (od. Depression) von $22\frac{1}{2}^0$ 1) die Tangente $= 0{,}414$; 2) den Cosinus $= 0{,}924$; 3) die Secante $= 1{,}082$* od. Aussen-Sec. (*sec. esterna*) $= 0{,}082$. Daraus folgt weiter: Eine geneigte Distanz oder Fläche von $22\frac{1}{2}^0$ Fallwinkel hat 1) eine Steigung von 41,4% od. von $41\frac{1}{2}$⁻ auf je 100 horizontal; hat 2) zur horizontal. Grösse nur 92,4% ihrer wirklichen;

R. Rand: Cos., Tang., Sec. **Zwickel des l. Randes:** Cyclom. Werthe.

während 3) die wirkl. Grösse um die Aussen-Sec., d. h. 8,2 % grösser ist als die Horizontalprojection. U. s. w. Ferner zeigen die Sec.- u. Cos.-Skala in ihrer Eigenschaft als Reciprokentafel beispielsweise, dass wenn man mit 115 in 1 dividirt, man dann die Ziffern nahe 87, genauer 869 erhält, wonach man (laut Reg. im obern Zwickel d. recht. Wand) z. B. $\frac{1}{11,5}$ gleich ablesen könnte als 0,0869.

Für den Fall, dass einmal irgend ein cyclometrischer Werth ausführlicher anzugeben wäre, als es mittels des Linienwerkes des Knechtes geschehen kann, so sind im

Obern Zwickel des linken Randes

die zu derlei genauern Arbeiten nöthigsten Werthe u. Formeln zur Hand gelegt. Danach hat man z. B.:

1) Kreisumfang zu 8 *mm* Durchm.? $= \pi d = 3{,}1415927 \cdot 8 = 25{,}1327416$. —

2) Kreisfl. zu 20'' Umf.? $= \frac{u^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{400}{4} \cdot 0{,}318310 = 100 \cdot 0{,}318310 = 31{,}8310 \square''$.

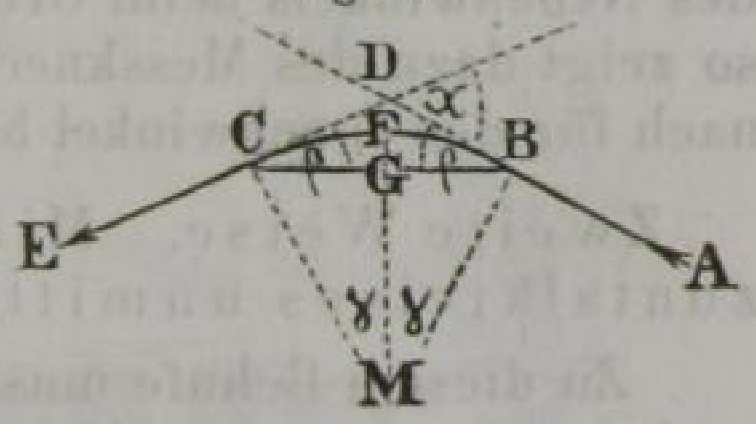
3) Natürl. Bogenlänge zu 1 Minute od. $\frac{1}{60}^0$? Bogenl. $= 0{,}01745 \cdot \frac{1}{60} = 0{,}000291$.

4) Sin. od. Tang. v. 10' bis zur 6. Decimale genau? $= 0{,}0002909 \cdot 10 = 0{,}002909$.

5) Sin. od. Tang. v. 1^0 (od. 60') bis zur 5. Dec. genau? $= 0{,}0002909 \cdot 60 = 0{,}017454$.

Um nur an einem Beispiele zu zeigen, in welcher Weise des Knechtes Dienstbarkeit seinem mit ihm nur ein wenig vertrauten Herrn, und zwar zunächst blos betreffs seiner Vorderseite, sich zu offenbaren vermag, soll er uns einmal die folgenden Fragen beantworten:

Fig. 13.



Die Bahnrichtung *AB* soll in die um den $\angle \alpha = 31{,}4^0$ abweichende Richtung *CE* mittels einer Curve von 200 Meter Radius ($BM = CM$) übergeführt und demgemäs von unserm Ingenieurmessknecht angegeben werden: 1) Die Entfernung der Curvenendpunkte *B* und *C* vom Durchschnittspunkte *D* der beiden Bahnrichtungen; 2) die Entfernung *DM* des letztern vom Curvenmittelp.; 3) die Curvenlänge *CFB*; 4) deren Spannung *CGB*; 5) deren Höhe *FG*; u. 6) ihre Abschnittsfläche *CFBC*. — Auflösung. Da das Viereck *MCDB* bei *C* und *B* rechtwinklig, folglich *M* wie α das Supplement des Winkels *CDB*, woraus weiter die Congruenz der links und rechts von *MD* liegenden Dreiecke u. Winkel und $\gamma = \beta = \frac{1}{2}\alpha$ folgt, so hat man zunächt für die Fragen 3 bis 6:

4) $BC = 200$ fach. *Ch* $31{,}4^0$ (n. l. Ecke) $= 2 \cdot 54{,}12 = 108{,}24$ ^{m};
5) $GF = 200$ fach. *Bh* $31{,}4^0$ (n. l. Ecke) $= 2 \cdot 3{,}73 = 7{,}46$ ^{m};
3) $CFB = 200$ fach. *Bog* $31{,}4^0$ (n. l. Rand) $= 200 \cdot 0{,}548 = 109{,}6$ ^{m};
6) *Sgm.-Fläche* $= 200^2$ *Sgm* $31{,}4^0$ (n. l. Rand) $= 40000 \cdot 0{,}0134 = 536 \square$ ^{m};

sodann für die Frage 1) $CD = CM$ fach. *Tang* $\gamma = 200$ *tang* $15{,}7^0$ (n. r. Rand) $= 200 \cdot 0{,}281 = 56{,}2$ ^{m}. [Oder auch als *CG* fach. *Sec* $\beta = 54{,}12$ *sec* $15{,}7^0 = 54{,}12 \cdot 1{,}038 = 56{,}18$ ^{m}.]

Und nun noch für Frage 2) $DM = MC$ fache Secante von $\gamma = 200$ *sec* $15{,}7^0 = 200 \cdot 1{,}038 = 207{,}6$ ^{m}.

Und alles dies, ohne ein einziges Mal umzublättern und ohne irgend eine Interpolationsrechnung.

II. Kapitel.

Der Ingenieurknecht als Messinstrument.

(Ueber das Metermas u. Secundenpendel siehe „Justirte Knechte" im letzten Abschnitte dieses Kapitels.)

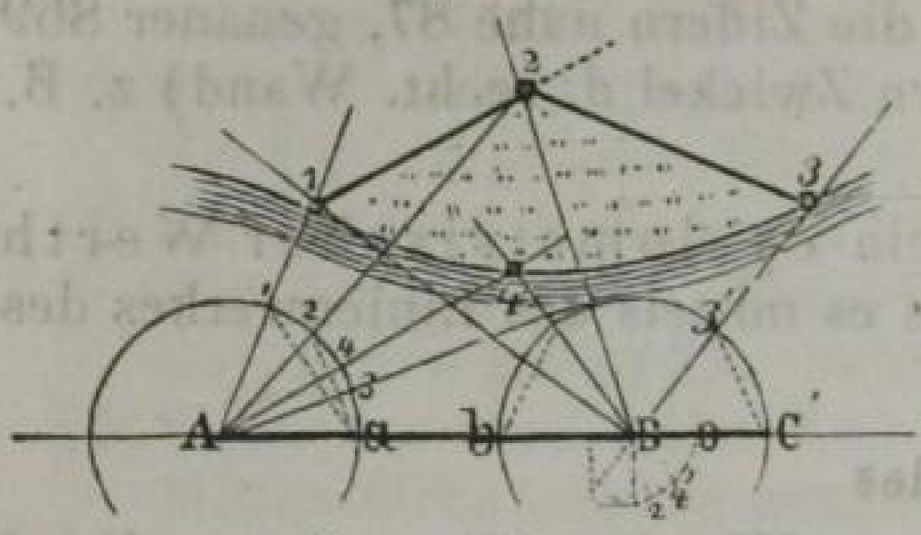
Der Transporteur.

Als Instrument zum Auftragen und Messen von Winkeln auf dem Papiere lässt sich die Tafel auf zweierlei Weise benutzen.

Erste Weise. Mittels Transversalmasstabes (der linken Wand) und Chordentafel (der linken Ecke).

Gesetzt, man hätte in den Endpunkten *A* und *B* einer Standlinie behufs der Aufnahme eines Flurstücks nach der Methode des Vorwärtseinschneidens (etwa mittels des Knechtes) die Winkel der Visirlinien **1, 2, 3** etc. gegen die Standlinie AB beobachtet, und zwar bei A die $\angle 1 = 59{,}1^0$, $\angle 2 = 34{,}3^0$ etc.; u. bei B $\angle 3 = 119{,}4^0$, $\angle 4 = 51{,}5^0$ etc., so nimmt man behufs deren Auftragung mit dem Zirkel vom Masstabe die Länge 100 und beschreibt damit als Radius um A und B Kreise; hierauf oder vorher werden aus der *Ch*-Spalte die Chorden aller aufzutrag. Winkel ausgeschrieben; wobei man alle Winkel über 90^0, wie $\angle 3$ bei B, durch ihr Supplement (in dies. Falle $60{,}6^0$) ersetzt. So erhält man z. B. für die Station A u. für $\angle 1$ die $Ch = 98{,}6^0$, für $\angle 2 \ldots 58{,}9^*$ etc.; u. für Stat. B u. den Nebenwink. $3 \ldots Ch = 102{,}4^0$, für $\angle 4 \ldots Ch = 86{,}9^-$. Diese notirten (100 fachen) Chorden werden auf demselben Masstabe in Zirkel gefasst, und damit vom entsprech. Anfangspunkte (a, b und c) ihres Bogens der betreffende Kreis durchschnitten. — Beim Messen bereits gezeichneter Winkel wird man erst mit dem Radius 100 einen Bogen zwischen ihre Schenkel legen, dessen Chorde in Zirkel fassen, auf dem Masstabe messen und zu dem Gefundenen mittels Aufsuchens in der *Ch*-Spalte das in der Winkelgradskala zugehörige Gradmas ablesen. Gesetzt, die 100fache Chorde des Nebenwinkels beim Grenzsteine 2 der Fig. 14 erweise sich als 96,3, so zeigt dazu des Messknechts linke Ecke ein Gradmas von $57{,}57^0$, sonach für den Innenwinkel bei $2 \ldots 180 - 57{,}57 = 122{,}43^0$.

Fig. 14.



Zweite Weise. Mittels des linken Randes oder Horizontalkreises unmittelbar.

Zu diesem Behufe muss das Centrum s dieses Kreises (Fig. 16, 17) vorher mit einer mittelfeinen Nadel vorsichtig durchbohrt sein. Ferner sei SP (Fig. 15) der erste Schenkel, oder PSR die Basis mehrerer im gemeinschaftl. Stationspunkte einzutragender Winkel aller Grössen, und QST das Loth auf PR, welches also den um S gedachten Kreis in 4 Quadranten theilt. Man wolle nun alle Winkel stets vom linken Anfange ihres Quadrant. an zählen und auftragen; dann hat man es also immer nur mit Winkeln von 0^0 bis 90^0 oder spitzen Winkeln zu thun. Ein Winkel zwischen 90^0 und 180^0, wie $PSB = 115^0$, ist im 2. Quadranten ein Winkel von 25^0 und kurz zu bezeichnen als $\angle^2 25^0$; ein Winkel zwischen 180^0 u. 270^0, z. B. $\angle PSC = 199^0$, kurzweg $= \angle^3 19^0$. — Ist nun auf dem Risse der Scheitel S und erste Radius SP (verlängert als Basis PR) der zu zeichnenden Winkel gegeben, so spiesst man mittels einer Copirnadel oder Copirzwecke das Centrum s der Knechtstafel auf den Scheitel S und „orientirt" hierauf den Knecht und zwar entweder mittels des „ersten Radius" (0^0) od. mittels des „zweiten" (90^0), d. h. man stellt den Kreis so, dass sein 0^0- od. 90^0-Punkt mit dem ersten oder letzten Radius desjenigen Quadranten, dessen Winkel man eben auftragen will, zusammenfällt. Man braucht hierbei nur zwei Stellungen zu unterscheiden und anzu-

Fig. 15.

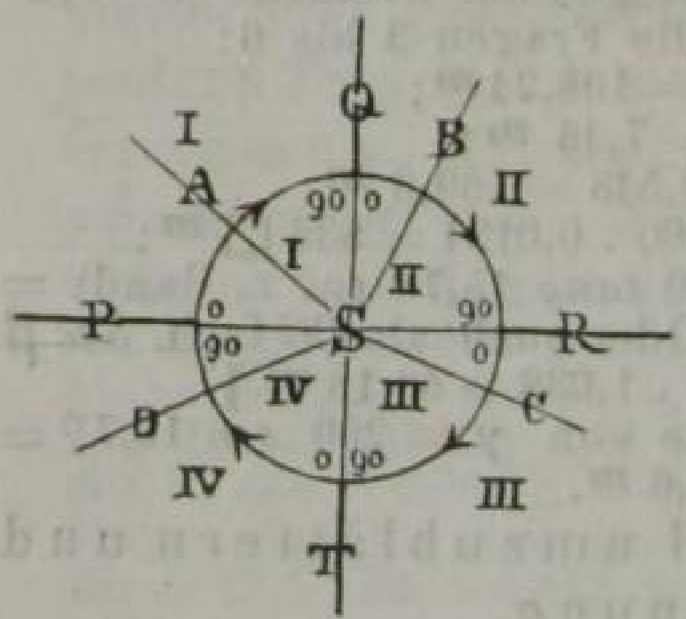


Fig. 16.

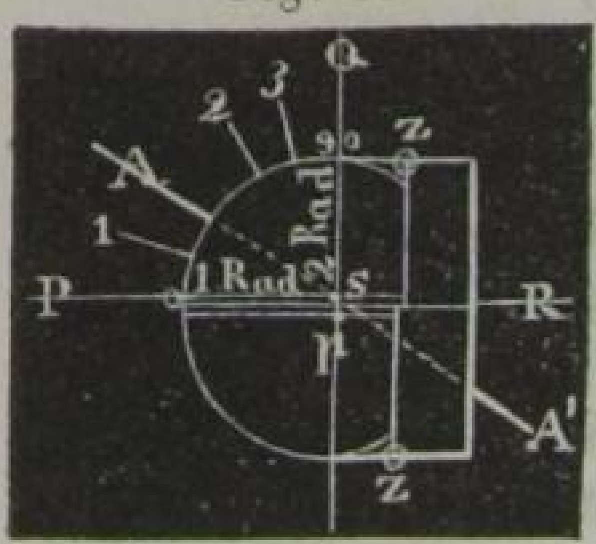
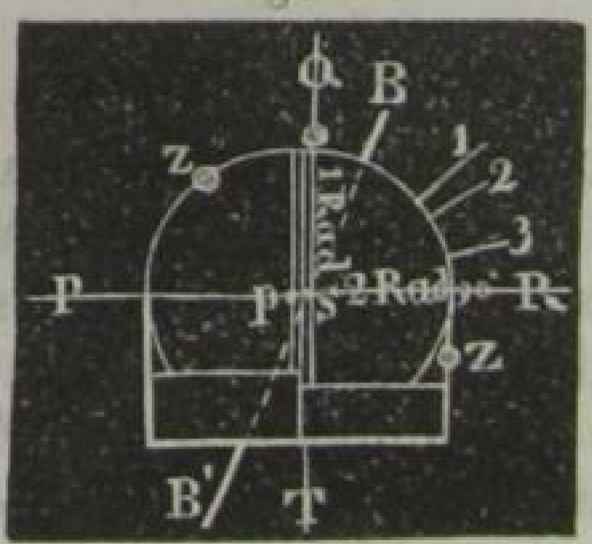


Fig. 17.



wenden: „die erste“ (Fig. 16) für alle Winkel des 1. u. 3. Quadranten ($\llcorner PSA = \llcorner RSA'$), u. „die zweite“ (Fig. 17) für die des 2. u. 4. Quadr. ($\llcorner QSB = \llcorner TSB'$). Da man in der zweiten Aufstellung den Kreis auch mittels des 2. Radius (90°) gegen die Basis *PR* der aufzutragenden Winkel orientiren kann, so ersieht man, dass die Quadrantentheilung oder das Loth *QJ* blos gedacht, nicht nothwendig ausgeführt zu werden braucht. Um beim Auftragen vieler Winkel in derselben Station die orientirte Lage unsers Transporteurs zn sichern, zwecke man ihn an beliebigen Punkten des Randes mittels zweier Copirzwecken *z*, *z* fest. Das Anstechen der Winkel geschieht nun entweder mittels einer Nadel aus freier Hand und vermöge der am äussersten Rande angedeuteten Wiederholung des Gradbogens, oder weit besser und genauer mittels des zum Aufnehmen sehr nützlichen in Fig. 34, S. 16 abgebildeten Visirlineals. Hat man nämlich den Knecht mittels des Diopterstiftes *s* fest auf das Papier gespiesst, dann orientirt und festgestellt, und das Lineal in *s* mit dem Mittelpunktsloche *M* in *s* aufgesetzt, so kann man mittels Einstellung des Indexes *J* und mittels Druck auf den Federstift *x* in den beiden Aufstellungen (Fig. 16 und 17) die Winkel aller Quadranten oder Grössen leicht und schnell auftragen. (Näheres über dies Diopter und seine anderweiten Anwendungen siehe weiter unten.)

Der Visirknecht.

Fig. 18.

Fig. 19.

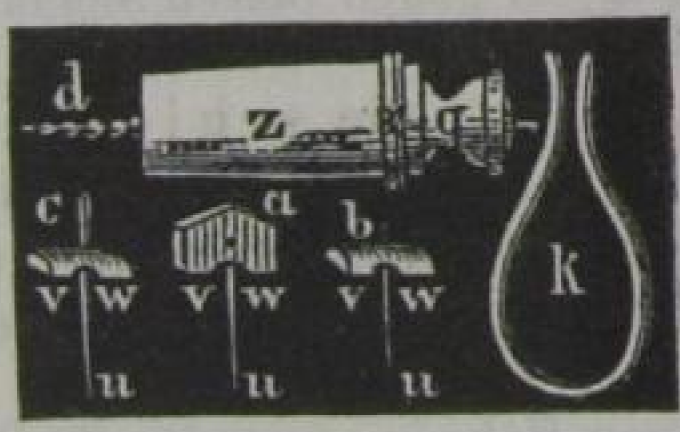
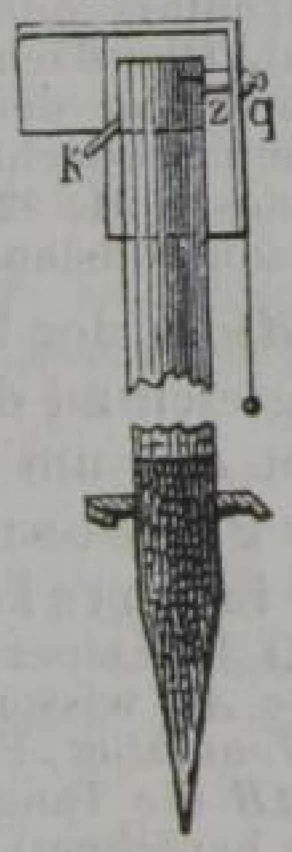


Fig. 20.

Fig. 21.



Indem man die rechte Ecke unter die linke schiebt, ja nicht umgekehrt (vgl. die Bemerkung auf der Tasche des Knechtes) verwandelt sich die Tafel (Fig. 1) in die Würfelecke (Fig. 18 u. 21), welche man entweoer mittels der Finger (Fig. 18) oder einer flüchtig von Holz geschnitzten Klammer (Fig. 20) oder einer aus Metall gebogenen (*k*, Fig. 19) in ihrer Form erhalten kann. Der so gestaltete Kuecht lässt sich nun sofort **aus freier Hand**, d. h. **ohne Stativ und sonstige Zuthat** als Vertikalwinkel- und Höhen- und Tiefen-Messer, als Horizontalreductor, Winkelkreuz etc. in folgender Weise benutzen: Wenn man das Instrument mit möglichst gestrecktem linken Arme so hält, dass das Pendel hinlänglich ruhig und nah an seine Wand anspielt und den Vorder- und Hinterpunkt der Schnittkante *ab* (wie Visir und Korn eines Gewehrs) auf den betreffenden Höhen- oder Tiefenpunkt visirt, und wenn man nun während des Abkommens und also unter fortwährendem Einhalten der Visirrichtung die Hand langsam nach links umdreht, bis das Pendel zum festen Anliegen kommt, so kann man dann, ohne um den dem Augenstande *A* entsprechenden Horizontalpunkt *H* zu wissen und sich zu kümmern, für jede Tiefen- oder Höhenvisur Folgendes vom Pendelfaden ablesen:

Aus freier Hand. Mess. v. Höhen u. Schiefdist.; Horizontalreduct.

Fig. 22.

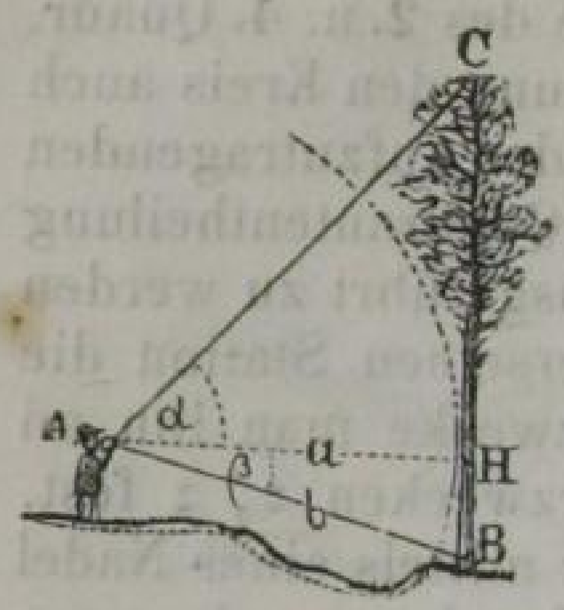
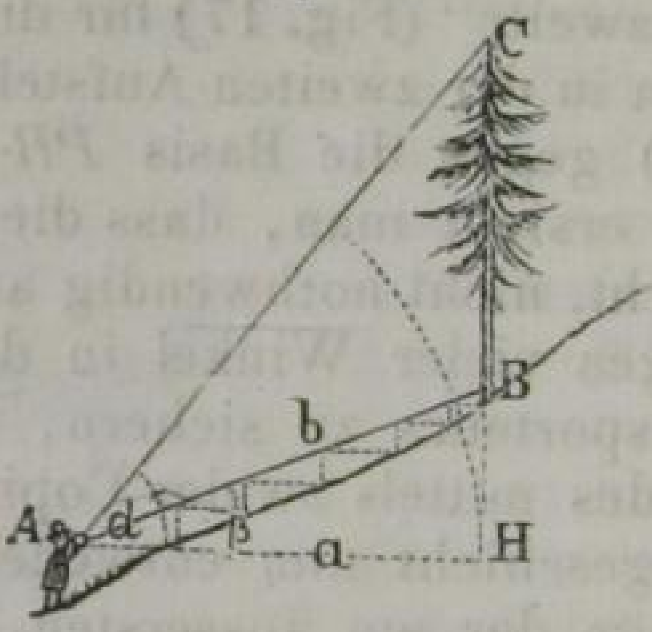


Fig. 23.



a) In der Winkelskala: die Depressionen und Elevationen (das Gradmas des Winkels, den die Tiefen- und Höhenvisuren mit dem Horizont *AH* des Auges machen).

b) In der Tangentenskala: die Unter- u. die Oberhöhen *HB* und *HC* Fig. 22 für die horizontale Standferne $a = 1$; und die Oberhöhen *HC* und *HB* Fig. 23.

Ist also z. B. $a = 90'$ und es zeigte das Pendel bei der Scheitelvisur *AC* die Tangente $= 0{,}82$, und bei der Fussvisur $AB = 0{,}24$, so erhält man die Höhe *BC* im 1. Falle $= (0{,}82 + 0{,}24)\,90$, od. wenn man gleich beim Ablesen das Komma rückte, $= (8{,}2 + 2{,}4)\,9 = 10{,}6 \,.\, 9 = 95{,}4'$; im 2. Falle $= (8{,}2 - 2{,}4)\,9 = 5{,}8 \,.\, 9 = 52{,}2'$.

c) In der Cosinusskala: den Reductionsfactor für die Horizontalgrösse geneigter Distanzen und Flächen.

1) Hätte man bei obig. Höhenmess., Fig. 23, statt der horizontalen *a* die schiefe Standweite $b = 100'$ genommen, und es zeigte bei der Visur *AB* das Pendel den Winkel $13{,}5^0$, also gleichzeitig die Tang. 0,24 und den Cos. 0,9725 oder 0,97*, so gab es damit die Horizontaldistanz $a = 0{,}9725 \,.\, 100 = 97{,}25$. Die Höhe *BC* wäre dann $= (0{,}82 - 0{,}24)\,97{,}2^* = 56{,}4$. — Bequemer aber so: Da d. Cos. 0,97* sich knapp 3% kleiner als die Einheit zeigt, so mindere die für die volle schiefe Länge 100 abgelesene Höhe $82 - 24 = 58$ um ca. 3% oder $1\frac{1}{2}'$; bleibt $56\frac{1}{2}'$. — **2**) Wenn der in die durchschnittliche Fallrichtung eines Hanges gestellte Knecht die Depression oder Elevation 30^0 u. somit auch den Cos. 0,866 zeigt, so folgt: die Horizontal- oder Kartengrösse des fraglichen Terrains beträgt knapp 87% der wirkl. Oberfläche. — **3**) Bei einer Vermessung in bergigtem Terrain wurde zur Vermeidung der umständl. Staffelmethode der Cosinus jedes Kettenzuges von 5 Ruthen beobachtet. Wenn nun 6 dergl. Züge die (im Procentsatze abgelesenen) Cosinusse 91, 92, 90, 97, 99, 95 gaben (deren Summe $= 5{,}64$), so folgt daraus die Horizontaldistanz $= 5{,}64 \,.\, 5 = 28{,}20$ R.

d) In der Secantenspalte: die schiefe Länge oder Fläche im Vergleich zu deren als Einheit gedachten Horizontalgrösse. Gleichzeitig giebt die um ein Ganzes verminderte Ablesung durch ihre Decimalen das Procent, um welches die Schiefe grösser ist, als die Horizontale.

1) Bei einer der obigen Höhenmessungen (für $a = 90'$) wollte man auch die Weite *AC* wissen. Ihre Visur zeigte die Sec. $= 1{,}15$, folgl. $AC = 11{,}5 \,.\, 9 = 103{,}5$. **2**) Wenn aber, Fig. 23, die Bandl. $b = 100'$, u. bei der Visur *AC* die Tang. $= 0{,}82$, bei *AB* die Tang. $= 0{,}24$ u. die Sec. $= 1{,}03$, also für d. Horizontalweite 100 (wie *sub c* berechnet) die Baumhöhe 58,0 sich ergiebt, so ist sie für d. Schiefweite 100 um die knappe Aussen-Secante $= 0{,}03$ oder knapp 3% (od. $1\frac{1}{2}'$) zu verringern, somit $= 58 - 1\frac{1}{2} = 56\frac{1}{2}'$ wie in 1) *sub c*.

e) Für die in Fig. 22 u. 23 angedeutete hipsometrische Praxis gilt somit allgemein: Wenn *a* die horizontale u. *b* die vom Fusspunkte *B* an gerechnete schiefe Standweite (Bandlänge), und α^0 den Winkel oder Pendelstand bei der Visur nach dem obern und β^0 bei der nach dem untern Punkte bedeutet, dann ist die Höhendifferenz beider Punkte

1) $(tg\,\alpha \pm tg\,\beta)\,a$ oder 2) $(tg\,\alpha \pm tg\,\beta)\,b \times cos\,\beta$,

wobei man statt $\times cos\,\beta$ in der Praxis kürzer kommt, wenn man $(tg\,\alpha \pm tg\,\beta)\,b$ mit der um 1 Ganzes vermind. Sec. von β multiplicirt und um dies Produkt jenen Werth mindert, wie in *d*) Beisp. 2.

Nach einiger Uebung bringt man es leicht dahin, dass bei ruhigem Wetter die einzelnen Beobachtungen höchstens um $\frac{1}{2}^0$ differiren, so dass durch das Mittel einiger guten Repetitionen die Beobachtungen der Vertikalwinkel bis zum Viertelgrad (beim justirten und armirten Knecht bis zum Zehntelgrad) erreicht werden können. Hauptsache dabei ist 1) den Arm recht fest zu strecken, um des Pendels ruhigen und der Wand nahen Stand gut zu erkennen, und 2) unter richtigem Innehalten der Visur, also während des „Abkommens", langsam ruhig zu wenden; indem ein schnelles ruckweises Wenden in der Regel ein unrichtiges Anlegen des Pendelfadens zur Folge hat. — Depressionen von mehr als 25^0 werden mittels des rechten Armes bei umgekehrt gehaltenem Knechte beobachtet.

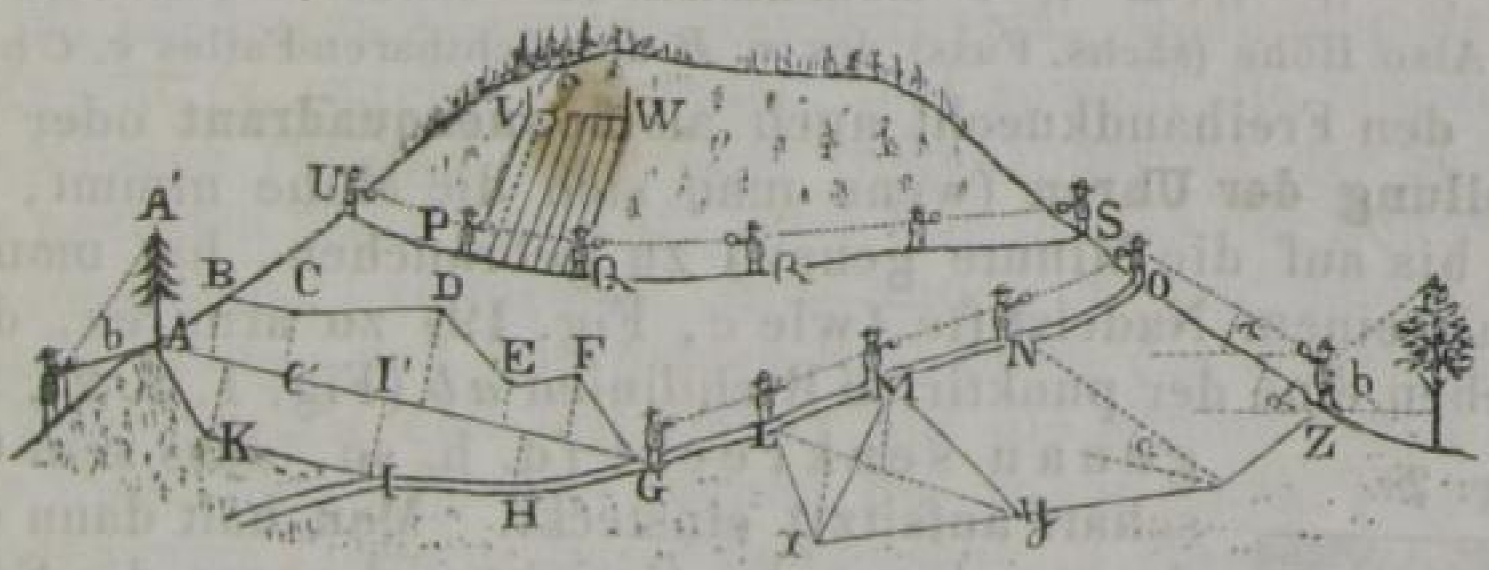
Aus freier Hand. Winkelkreuz u. Niveau. Absteckungen u. Aufnahmen.

In Begleitung eines Gehülfen kann man den Knecht ebenfalls ohne weitere Armirung und ohne Stativ auch als Winkelkreuz benutzen. Während der den Knecht haltende Beobachter die eine Würfelkante, z. B. *cd* (Fig 1, S. 2) in die gegebene Linie richtet, hat sein ihm zur Seite stehender Gehülfe durch die Visur der andern Schnittkante *de* das gesuchte Perpendikel. Dass als Winkelkreuz der Knecht auf der Horizontalebene wie am Hange auf- und abwärts mit gleicher Bequemlichkeit arbeiten kann, wird Jedem sowohl aus der Lage der Fig. 24, wie auch aus Fig. 31, S. 16 von selbst einleuchten. Oberflächliche Niveau- oder Horizontalvisuren sind auf ganz ähnliche Weise zu bewirken. Der Knechtshalter visirt in d. Richtung *ab*, Fig. 18, während d. rechts stehende Gehülfe commandirt, bis dass das Instrument so gerichtet ist, dass das Pendel auf 0 spielt und somit die Visurkante *ab* den gesuchten gegenüberliegenden Horizontalpunkt angiebt. Zur Noth ist das auch ohne Gehülfen zu machen, indem man letztern Punkt schätzend mit dem Auge sucht, den Knecht auf ihn einvisirt, wendet, und je nach der vorfindlichen Abweichung des Pendels vom Nullpunkte die nächste Visur modificirt. — In dieser Art lässt sich auch mit und ohne Gehülfen jede Neigung, z. B. ein Weg von bestimmtem Steigungsgrade oder auch Steigungsverhältnisse angeben u. abstecken. Um z. B. an einem Hange eine Steigung von 8% (d. h. von 8 Ruthen vertikal auf je 100 Ruth. horizontal) abzustecken, braucht man nur die Schnittkante *ab* so zu richten, dass das Pendel auf die Zahl 0,08 der Tangenten- oder 4,6 der Winkelskala einspielt. — Natürlich gewinnen alle derlei Arbeiten, wenn man sich dabei nicht mit den rohen Visirkanten des Knechts begnügt, sondern denselben mit den Visirnadeln *a, b, c* des Zeughäuschens Fig. 19 armirt, so wie es Fig. 31 für den Stativknecht und weiter unten bei Besprechung desselben angegeben ist.

Fig. 24.

Auf diese und ähnliche Weise kann man also selbst mit dem Freihandknechte und zwar (je nachdem man bequemer oder sicherer gehen will oder nicht) mit und ohne Gehülfen auch eine Menge solcher Messungs- u. Schätzungsaufgaben erledigen, für welche sich eigentlich ausserdem ein Stativ nöthig machen würde, und von denen die bei-

Fig. 25.

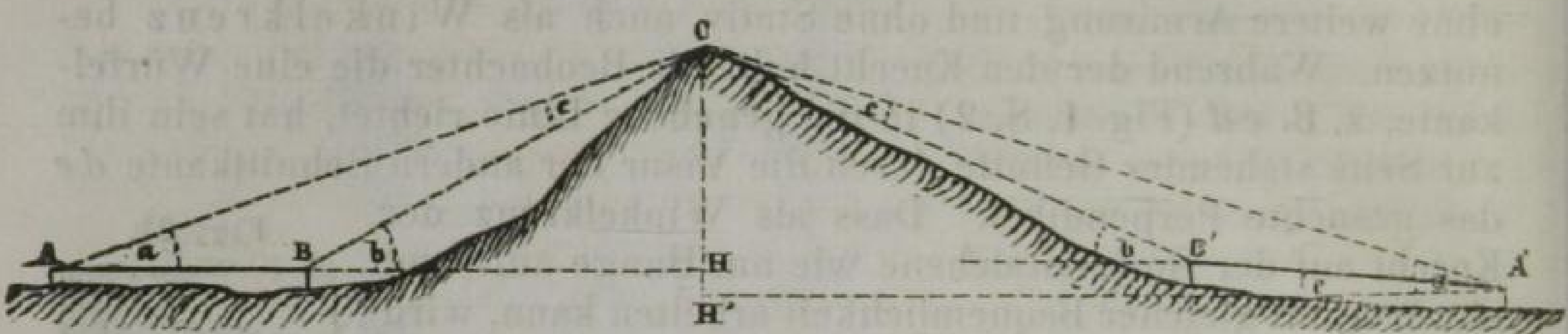


stehende Figur andeutungsweise einige rekapitulirt; als: Absteckungen rechtwinkliger Figuren (s. bei *P* und *Q*), horizontaler wie geneigter Wege, Gräben u. s. w. (s. bei *URS* und *HMO*); Aufnahmen nach der Coordinatenmethode in der Ebene wie an Hängen (s. bei *AG* und *EY*); Höhenmessung der Bäume und dgl.; auch sogar (durch Herbeiziehung der Sinus-Skala des linken Randes) annähernde Höhenmessung von Bergen, und zwar wie folgt:

a) Unmittelbar. Wenn ein Weg *HO* (Fig. 25) od. *BC* (Fig. 26), gleichviel ob in gerader oder gewundener Richtung, 1000′ lang in einem mittl. Winkel von $8\frac{1}{2}{}^0$ aufwärts steigt, so erreicht er eine Höhe, die $=$ dem 1000fachen Sinus von $8\frac{1}{2}{}^0 = 1000 \times 0{,}147 = 147'$.

Aus freier Hand. Berghöhen. Sonnenquadrant. Zeitmessung.

Fig. 26.

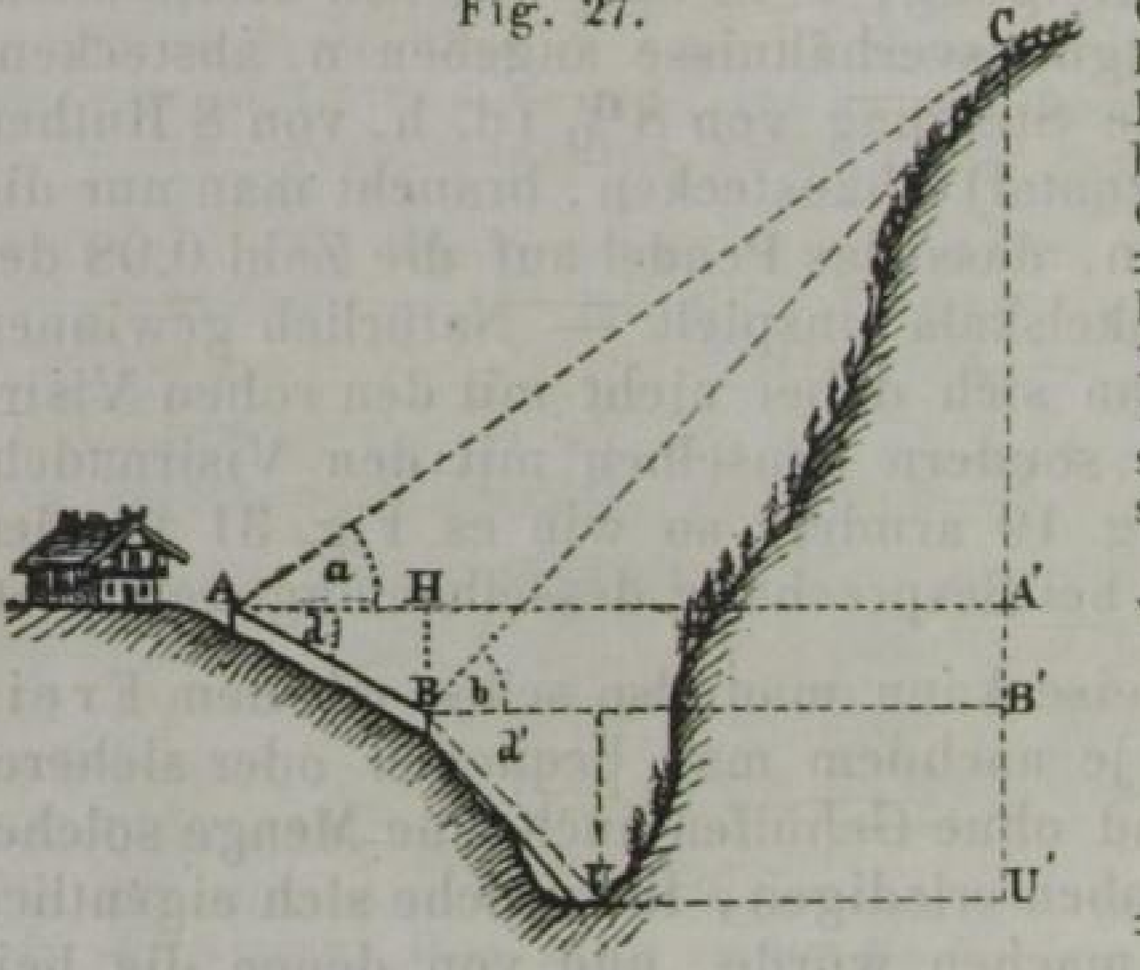


b) Mittels horizontaler Standlinie $AB = s$ und der beobachteten Höhenwinkel *a* u. *b*. Höhe v. *C* über $AB = \frac{\sin a \sin b}{\sin (b-a)} \times s$.

c) Bei aufsteigender Standlinie $A'B' = s$ mit der durch den Knecht beobachteten Elevation *e* erhält man die Höhe über $A' = CH' = \frac{\sin a \sin (b-e)}{\sin (b-a)} \times s$; über B' = dem Vorigen minus $s \,.\, \sin c$.

d) Bei absteigender Standlinie, wenn z. B. *AB* eine Depression v. *d* Grad hätte, ist *C* über $A = \frac{\sin a \sin (b+d)}{\sin (b-a)} \times s$; über *B* = dem Vorigen $+ s \,.\, \sin d$.

Fig. 27.



Messung der sichtbaren Höhe des berühmten Giessbachfalles im Berner Oberlande. (August 1855.) *AB* Wiese hinter dem Gasthause am genannten Falle. *C* höchster von da aus sichtbarer, *U* unterer Punkt desselben; die abgeschrittene Standlinie $AB = 90$ sächs. Fuss; die aus freier Hand beobachtete Depression von $AB = 17^0 = d$; Elevation von $AC = 26\frac{1}{4}^0 = a$; von $BC = 25{,}5^0 = b$. (Depression von $BU = 33^0$; Länge *BU* geschätzt $= 120'$.)

Sonach ist die senkrechte Höhe von *C* bis *A'*

$$= \frac{\sin 26{,}2^0 \sin (27{,}5 + 17)^0}{\sin (27{,}5 - 26{,}2)^0} \,.\, 90$$

$$= \frac{\sin 26{,}2^0 \sin 44\tfrac{1}{2}^0}{\sin 1{,}3^0} \,.\, 90$$

$$= \frac{0{,}441 \,.\, 0{,}700 \,.\, 90}{0{,}023} \,.\, \frac{441 \,.\, 63}{23} = 1208'$$

und die von *A* bis $B = 90 \sin 17^0 = 90 \,.\, 0{,}293$ . . . . $= 26'$
,, ,, ,, *B* ,, *U* muthmaslich $120 \,.\, \sin 33^0 = 120 \,.\, 0{,}54$. $= 65'$
Also Höhe (sächs. Fuss) des v. *B* aus sichtbaren Falles v. *C* bis *U* ca. 1300'

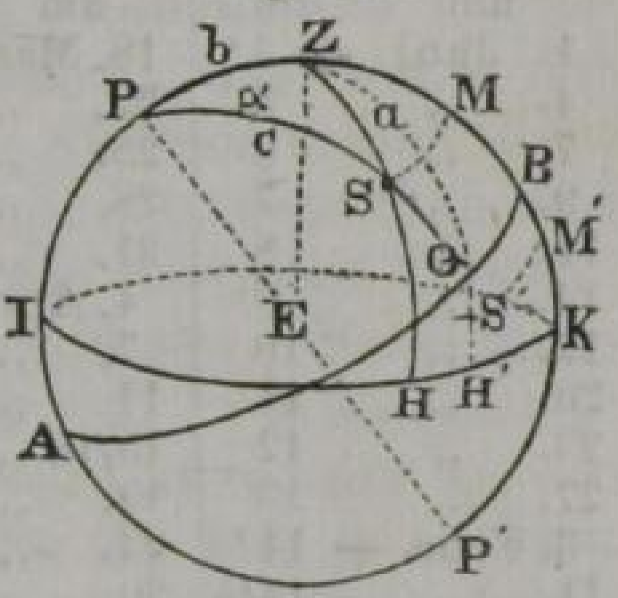
Um den Freihandknecht auch als **Sonnenquadrant** oder **Zeitmesser zur Stellung der Uhren** (wenn man sich die Mühe nimmt, bei justirt. Knecht bis auf die Minute genau) zu gebrauchen, hat man denselben noch mit einem Nadelstifte (wie *c*, Fig. 19) zu armiren, den man in oder neben eine der punktirten Richtlinien *ab* (Fig. 1, S. 2), etwa bei *b*, genau senkrecht (d. h. so, dass sein Querbalken scharf aufsitzt) einsteckt. Man hält dann den Knecht dergestalt vor das Gesicht und gegen die Sonne, dass des Stiftes Schatten genau parallel mit *ba* über die Pendelwand streicht, während gleichzeitig das Pendel sanft an dieselbe anspielt. Die gleichzeitige Ablesung desselben in der Winkelgradskala ist die Sonnenhöhe. Am schnellsten findet man zu ihr die Zeit des Beobachtungsmomentes durch einfache Ablesung aus den Tafeln, welche des Verfassers (bei Vieweg & Sohn in Braunschweig erschienener) Zeitmessknecht enthält, dessen erster Theil „für Süddeutschland“ die geographischen Breiten 45°-50°, der zweite „für Norddeutschland“ 50°-55° umfasst. (Vgl. die dortigen Erläuterungen.)

Fig. 28.

Zeitmessung ohne Tafeln, durch Berechnung. Declinationstafel.

Soll gegenwärtige Brieftasche aber einen selbstständigen und für alle Orte der Erde brauchbaren Zeitmesser mit einer für die Mehrzahl der im täglichen Leben vorkommenden Falle wohl ausreichenden Genauigkeit abgeben, so beachte man Folgendes: Ist AB die Himmelskugel, E ein Beobachtungsort auf der nördlichen Erde, Z sein Zenith, IK sein Horizont, IP seine Polhöhe (= geogr. Breite), $IPZK$ sein Meridian, AB der Aequator, S die Sonne (am Nachmitt. eines Sommertags), also PSQ einer ihrer Stundenkreise, SQ ihre (v. d. Jahreszeit bedingte) Declination u. SH ihre mit dem Sextanten oder Knechte beobachtete Höhe; dann ist $\angle SPM$ oder α ihr Stundenwinkel, der bekanntlich für je 1 Grad einen Werth von 4 Minuten wahre Zeit hat. In dem sphärischen Dreiecke SPZ ist $b = 90^0 -$ Breite, $a = 90^0 -$ Höhe, und c im (nördl.) Sommer $= 90^0 -$ nördl. Declinat., im (nördl.) Winter $= 90^0 +$ südl. Declinat. (weil in diesem Falle die Sonne bei S', also im Bedingungsdreieck PZS' die Seite $c = PS' = PQ + QS' = 90^0 +$ Declination zu der beobachteten Sonnenhöhe $H'S'$). Aus diesen 3 Seiten u. ihrer Summe s findet sich α entweder durch

Fig. 29.



$$1)\ \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b)\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin b \sin c}} \quad \text{oder } 2)\ \cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Das gefundene Gradmas zunächst in Zeitminuten (durch $\times 4$) und dann in Stunden und Minuten verwandelt, gibt die gesuchte wahre Zeit des Beobachtungsmomentes. Erhält man z. B. $52{,}3^0$, so bedeutet dies einen Zeitabstand vom wahren Mittage $= 52{,}3 \times 4' = 209{,}2$ Zeitmin. = 3 Stunden 29 Min. Also, wenn die Beobachtung Nachmittags geschah, die Zeit = 3 Uhr 29' w. Z., wenn sie Vormittags stattfand, 12 St. — 3 St. 29' = 8 St. 31' = 8 Uhr 31'. Gesetzt aber, man suchte, wie fast immer, die mittlere oder bürgerliche Zeit, und es betrüge am betreffenden Tage die sogenannte Zeitgleichung — 3', so wäre das Schlussresultat: 3 U. 26' resp. 8 U. 28' m. Z. Hatte man nun gleich nach der Beobachtung den Stand seiner Uhr notirt und beispielsweise 8 U. 20' V. bemerkt, so folgt nun, dass dieselbe um 8' zurück ist und also um soviel vorzustellen wäre. — Man wird bei derlei Zeitmessungen durchschnittlich um nicht mehr als 1—2' unsicher und vor Fehlern von mehr als höchstens 5' immer gesichert sein, wenn man dazu einen justirten Knecht (s. unten) verwendet, und sowohl die Stunden in der Nähe des Mittags (wegen allzuträger Höhenänderung der Sonne), als die in der nächsten Nähe des Auf- oder Untergangs der Sonne (wegen der Strahlenbrechung) vermeidet. Eine gute Vor- und eine gute Nachmittagsbeobachtung, und aus beiden Resultaten das Mittel genommen, hat dem Verfasser die Zeit fast immer auf die Minute genau geliefert. Um daher diese nützliche Anwendung der sphärischen Trigonometrie den Freunden und Trägern dieser Brieftasche in einer für gewöhnliche Lebensbedürfnisse meist zureichenden Genauigkeit praktisch zugänglich zu machen, und zwar für alle Zeiten und Orte der Erde, folgen nun hier zwei kurze Hülfstafeln.

A. Mittlere Declination der Sonne (von 10 zu 10 Tagen).

Die Sonne steht ab vom Aequat. (s = südl., n = nörd.)

am	um	am	um	am	um	am	um	am	um
1. Jan.	s 23,1⁰	22. März	n 0,4⁰	10. Juni	n 23,0⁰	19. Aug.	n 13,0⁰	7. Nov.	s 16,1⁰
11. ,,	s 21,9	1. Apr.	n 4,3	20. ,,	n 23,4	29. ,,	n 9,6	17. ,,	s 18,9
21. ,,	s 20,0	11. ,,	n 8,1	22. ,,	n 23,5⁻	8. Spt.	n 5,9	27. ,,	s 21,0
31. ,,	s 17,5	21. ,,	n 11,7	30. ,,	n 23,2	18. ,,	n 2,1	7. Dec.	s 22,6
10. Febr.	s 14,5	1. Mai	n 14,9	10. Juli	n 22,3	28. ,,	s 1,8	17. ,,	s 23,4
20. ,,	s 11,1	11. ,,	n 17,7	20. ,,	n 20,8	8. Oct.	s 5,7	22. ,,	s 23,5⁻
2. März	s 7,4	21. ,,	n 20,1	30. ,,	n 18,7	18. ,,	s 9,4	27. ,,	s 23,3
12. ,,	s 3,5	31. ,,	n 21,8	9. Aug.	n 16,0	28. ,,	s 12,9	(1. Jan.	s 23,1)

Zeitgleichung. Zeitmessung ohne Tafeln und ohne Berechnung.

Also am 4. Januar? Da die Aenderung für 1 Tag = (23.1 — 21,9) : 10 = 2,31 – 2,19 = 0,12, also für 3 Tage = 0,4⁻, so folgt für d. 4. J. 23,1 — 0,4⁻ = 22,7*. — Im Jan. u. Febr. eines Schaltjahres nehme man die Declin. v. vorig. Tage.

B. Zeitgleichung (nach Minuten).

Die wahre Zeit ist zu korrigiren:

am	um	am	um	am	um	am	um	am	um
1. Jan.	+ 4′	18. März	+ 8′	19. Juni	+ 1′	12. Sept.	— 4′	20. Nov.	— 14′
4. ,,	5	22. ,,	7	23. ,,	2	15. ,,	5	24. ,,	13
7. ,,	6	25. ,,	6	28. ,,	3	18. ,,	6	27. ,,	12
9. ,,	7	28. ,,	5	3. Juli	+ 4′	21. ,,	7	30. ,,	11
11. ,,	8	31. ,,	4	10. ,,	5	24. ,,	8	2. Dec.	— 10′
14. ,,	9	4. April	+ 3′	19. ,,	6	27. ,,	9	5. ,,	9
17. ,,	10	7. ,,	2	26. ,,	6¼	30. ,,	10	7. ,,	8
20. ,,	11	11. ,,	1	1. Aug.	+ 6′	3. Oct.	— 11′	10. ,,	7
23. ,,	12	15/16 ,,	0	10. ,,	5	6. ,,	12	12. ,,	6
27. ,,	13	19. ,,	— 1′	16. ,,	4	10. ,,	13	14. ,,	5
3. Febr.	+ 14′	24. ,,	2	20. ,,	3	14. ,,	14	16. ,,	4
11. ,,	14½	30. ,,	3	24. ,,	2	19. ,,	15	18. ,,	3
20. ,,	14	14. Mai	— 4′	28. ,,	1	27. ,,	16	20. ,,	2
27. ,,	13	23. ,,	3½	31. ,,	0	28. ,,	16	22. ,,	1
3. März	+ 12′	28. ,,	3	1. Sept.	0	29. ,,	16	24. ,,	0
8. ,,	11	4. Juni	— 2′	3. ,,	— 1′	2. Nov.	— 16¼	27. ,,	+ 1
11. ,,	10	9. ,,	1	6. ,,	2	9. ,,	16	29. ,,	2
15. ,,	9	14. ,,	0	9. ,,	3	16. ,,	15	31. ,,	3

Beisp. In einer nahe unter 53⁰ g. Breite gelegenen Gegend zeigt am 10. Juni Nachmittags der Knecht netto 30⁰ Sonnenhöhe, während die Uhr 4 U. 30 Min. zeigt. In wie weit ist letztere in der Ordnung od. zu reguliren? — Complement der Sonnenhöhe $= a = 90 - 30 = 60^0$. Compl. d. Polhöhe $= b = 90 - 53 = 37^0$. Declination laut ob. Tab. $= 23^0$, also deren Compl. $= c = 67^0$. Nach Formel 2) gerechnet erhält man demgemäs $\cos\alpha = \frac{\cos 60 - \cos 37 \cos 67}{\sin 37 \sin 67}$, (nach den Knechtstafeln) $= \frac{0{,}5 - 0{,}799 \cdot 0{,}390}{0{,}601 \cdot 0{,}921} = \frac{0{,}18839}{0{,}553521} = \frac{1884}{5535} = 0{,}3404$. Zu dem Cos. $= 0{,}340_4$ zeigt des Knt. r. Rand unzweifelhaft $70{,}1^0$ od. $70{,}1 \cdot 4$ Zeitminut. = 4 U. 40½′ wahre oder (laut Zeitgleichung) 4 U. 39½′ mittle Zeit. Die Uhr ist also um 9½′ vorzurücken. — Nach Formel 1) berechnet, wäre $s = a + b + c = 164^0$; $\frac{s}{2} = 82^0$; $\frac{s}{2} - b = 45^0$; $\frac{s}{2} - c = 15^0$; also $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin 45^0 \cdot \sin 15^0}{\sin 37^0 \cdot \sin 67^0}}$ (laut link. Rand) $= \sqrt{\frac{0{,}707 \cdot 0{,}259}{0{,}601 \cdot 0{,}921}} = \sqrt{\frac{707 \cdot 259}{601 \cdot 921}}$ (mitt. Logarithm. am schnellsten) $= 0{,}574$. Zum Sinus $= 0{,}57_4$ zeigt aber der Knecht 35^0 (scharf genommen 35,0*), also $\alpha = 70^0 = 70 \cdot 4$ Zeitmin. = 4 U. 40′ w. Z. = 4 U. 39′ m. Z.

Auch ohne die Seite 12 erwähnten Tafeln und ohne besondere Rechnung lässt sich der Freihandknecht zur Uhrenstellung an allen Orten der Erde benutzen, sobald man an demselben Tage zwei correspondirende Sonnenhöhen daselbst beobachtet und die Zwischenzeit durch 2 dividirt. Gesetzt, man beobachtete Vormittags die Sonnenhöhe $32\frac{1}{4}^0$, als die zu regulirende Uhr 9 U. 8′ (= 2 St. 52′ vor Mittag) zeigte. Um die gleiche Zeit nach Mittag, aus Vorsicht nur etwas früher, befragt man den Sonnenstand wieder mit dem Knechte u. lauert den Moment ab, wo das Pendel wieder $32\frac{1}{4}^0$ zeigt, sobald der Stiftschatten wieder wie am Vormittag einfällt. Zeigt dieselbe Uhr dann 3 U. 12′, so folgt als wahre Zeit (2 St. 52′ + 3 St. 12′) : 2 = 3 St. 2′. Somit wäre die Uhr um 10′ zurück zu stellen, wenn sie wahre Zeit zeigen soll; soll sie aber mittle zeigen und geschah die Messung am 1. Jan., so folgt nach der Zeitgleichung (= + 4′) 3 U. 2′ w. Z. = 3 U. 6′ m. Z., so dass die Uhr nur um 6′ zurück zu stellen wäre.

Bei dieser Messungsweise braucht der Schatten nicht nothwendig längs der punktirten Richtlinien, er muss nur Vor- und Nachmittags auf denselben beliebigen Punkt oder in die gleiche Richtung fallen. Man kann sonach bei dieser Art von Zeitmessung, ohne deren Sicherheit zu beeinträchtigen, auch unjustirte und sogar wesentlich unrichtige Instrumente anwenden. Nur recht übereinstimmend beobachten soll man. Zwei bis drei Vormittags- und eben so viel correspondirende Nachmittagsbeobachtungen u. aus deren Resultaten das Mittel genommen, wird nicht leicht einen Fehler von mehr als einer Minute aufkommen lassen.

Selbstverständlich wird zu diesen und manchen andern Messungsarbeiten unser dienstbeflissener Knecht sich als wesentlich geschickter

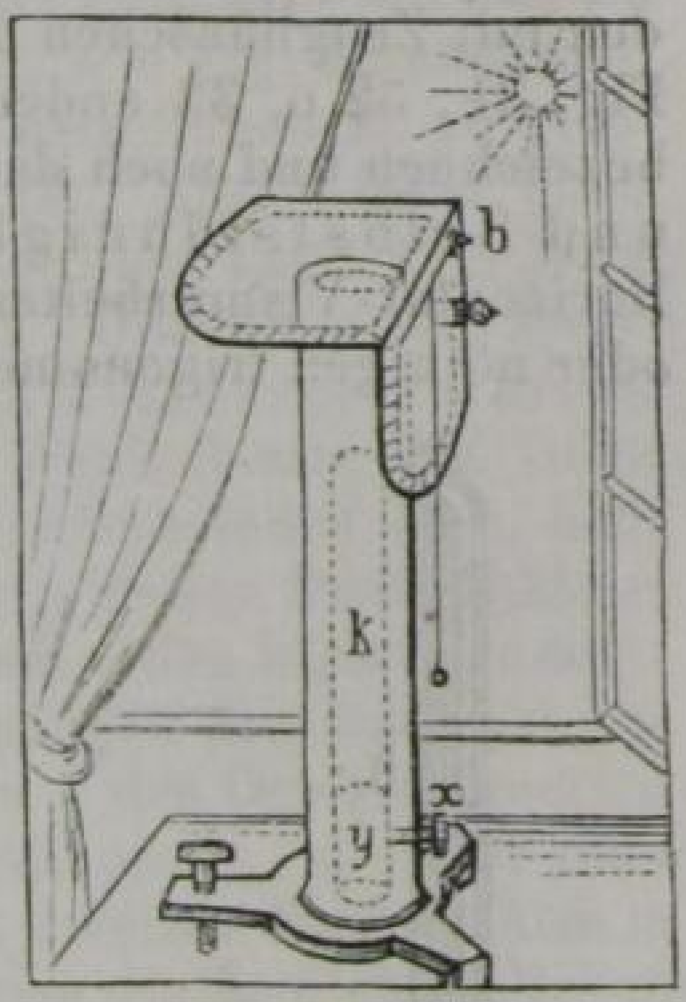
Stativknecht; für das Feld und die Stube. Ohne und mit Armirung.

vollkommener u. zuverlässiger erweisen, sobald wir denselben in Verbindung mit einem Stativstocke, so zu sagen als

Stativknecht

verwenden, zu welchem Zwecke man zunächst seine Pendelwand mittels einer (mit Siegellackkuppe versehenen) kräftigen Nähnadel zu durchbohren hat, und zwar bei dem schwarzen Ringelchen, das sich in der Wurzeltafel zwischen *Z* 240 und *Z* 430 vorfindet. Als Stativstock dient am besten ein gewöhnlicher Kettenstab, unten mit eisernem Steg und Schuh versehen, so lang, dass er gerade bis an das Kinn des Vermessers reicht; je dicker, desto besser, weil desto standfester. Nahe unter dessen Kopfe wird ein Querzapfen, wie *z* in Fig. 19 u. 21 *) möglichst rechtwinklig zur Stockachse eingeschraubt, und hierauf der Knecht so angespiesst (Fig. 30–33), dass er zwischen den aus Filz od. rauher Pappe zu schneid. Reibungsscheibchen *r* Fig. 19 durch das Mutterchen *q* gerade stark genug gepresst wird, um eben nicht mehr von selbst durch seinen Schwerpunkt (der etwa 1" seitwärts vom Centrum *s* Fig. 1, zwischen *s* und 90° liegt), sondern nur noch kraft eines Fingerdrucks sich zu drehen. Mittels Klammer *k* wird dann die Würfelecke fest formirt. Statt der Stativbake Fig. 21 kann man auch ein ausgebohrtes, einen Verlängerungsstab enthaltendes Spazierrohr wählen, das wie Fig. 18 zeigt, bei *x* in Metall gefasst und mit Pressschräubchen versehen ist, während der Ausziehstock einen hakenförmigen Griff trägt, dessen vordere ausgehöhlte Hälfte *y* abzuschrauben geht. Die hintere Hälfte des Griffes trägt einen Schraubenstift mit Mutterchen, ganz wie *q* im Querzapfen *z* Fig. 19. Die Höhlung von *y* muss gross genug sein, um auch noch die Klammer *k* und einige Visirstifte aufzunehmen, denen man durch beigestopfte Baumwolle eine feste und geschützte Lage sichert.

Fig. 30.



Für die Zeitmessung von der Stube aus kann die Stelle eines Stativs gar wohl ein mit dem bereits erwähnten Querzapfen *z* versehenes und auf eine Flasche oder einen Leuchter gestecktes Holzstück von der Dicke u. Länge eines Lichtes versehen. Wesentlich besser hierzu ist freilich der beistehend abgebildete hölzerne Dreifuss, dessen Fussschraube die Vertikalstellung d. Pendelwand regulirt, während der um seinen Zapfen drehbare, etwa 1½' hohe ausgehohlte Stativkopf abgenommen und dann vortheilhaft gleich mit zur Vervollkommnung des oben angegebenen Kettenstabstativs benutzt werden kann, sobald man letzteres verkürzt und zum Aufsetzen dieses Stativkopfes *k* zurichtet, wie Fig. 48 S. 23 andeutet.

Mit den Visirstiften seines Zeughäuschens*) armirt gestattet der Knecht eine weitere Versicherung und Verfeinerung seiner Praxis. Fig. 19 zeigt diesen kleinen Apparat in halber Naturgrösse. Ausser Querzapfen *z*, Klammer *k*, Diopter *a* und Feinstift *b* enthält es noch 5 Visirnadeln wie *c*. Drei der letztern, indem man sie in den Ringelpunkten *e*, *d* u. *c* der Horizontalwand (Fig. 1, S. 2) einsteckt, dienen zur Cultur des Winkelkreuzes, wie es Fig. 31 zeigt; die beiden andern, bei *a* und *b* (Fig. 1, S. 2) in eine Richtlinie der Vertikalwand eingesteckt, dienen zur Cultur des Freihandknechts in seiner Eigenschaft als Vertikalkreis, Höhen- und Tiefenmesser etc. Die Verfeinerung des

*) Ueber dies Zeughäuschen sehe man weiter unten.

Stativknechts in letzterer Beziehung, zumal behufs des Nivellirens, geschieht statt durch die Nadeln *c*, zweckmässiger durch Diopter und Feinstift (*a* u. *b*, Fig. 19), so wie Fig. 31—33 zeigen. Die auf der Tafel markirten Punkte oder Linien, in denen diese Stifte beim Gebrauche eingesteckt werden sollen, hat man vorher mittels einer feinen Nadel recht correct und senkrecht vorzustechen. Die Stifte müssen mit ihren Querbalken *v*, *w* natürlich fest aufsitzen. Bei etwaigem Lockerwerden spiesst man auf der untern Seite ein ganz kleines Korkstückchen an, das, fest an die Tafel gepresst, wie ein Schraubenmutterchen wirkt. Wer den Querzapfen *z* (mit Papier umwickelt) in sein Portemonnaie oder in die untere Bleistifthülse gegenwärtigen Büchleins und das Uebrige in dessen verdeckte Brieftasche steckt, der kann das ganze Zeughäuschen ohne Unbequemlichkeit stets bei sich führen.

Fig. 31.

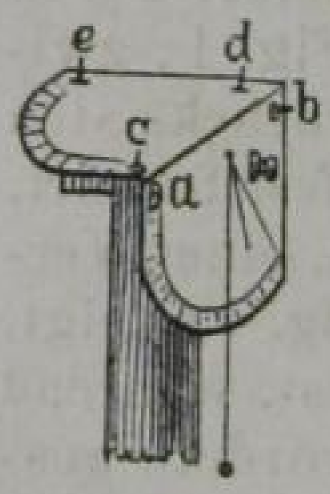


Fig. 32.

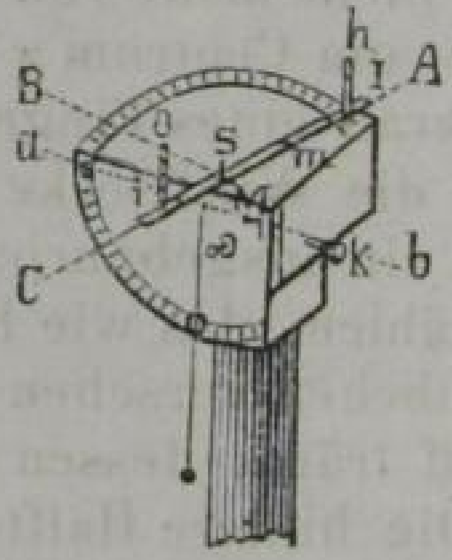
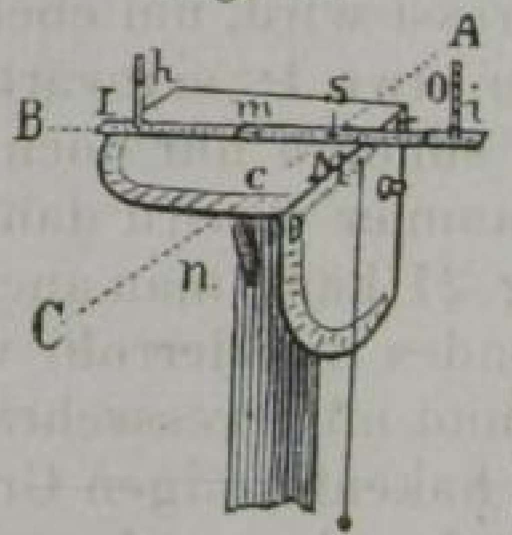
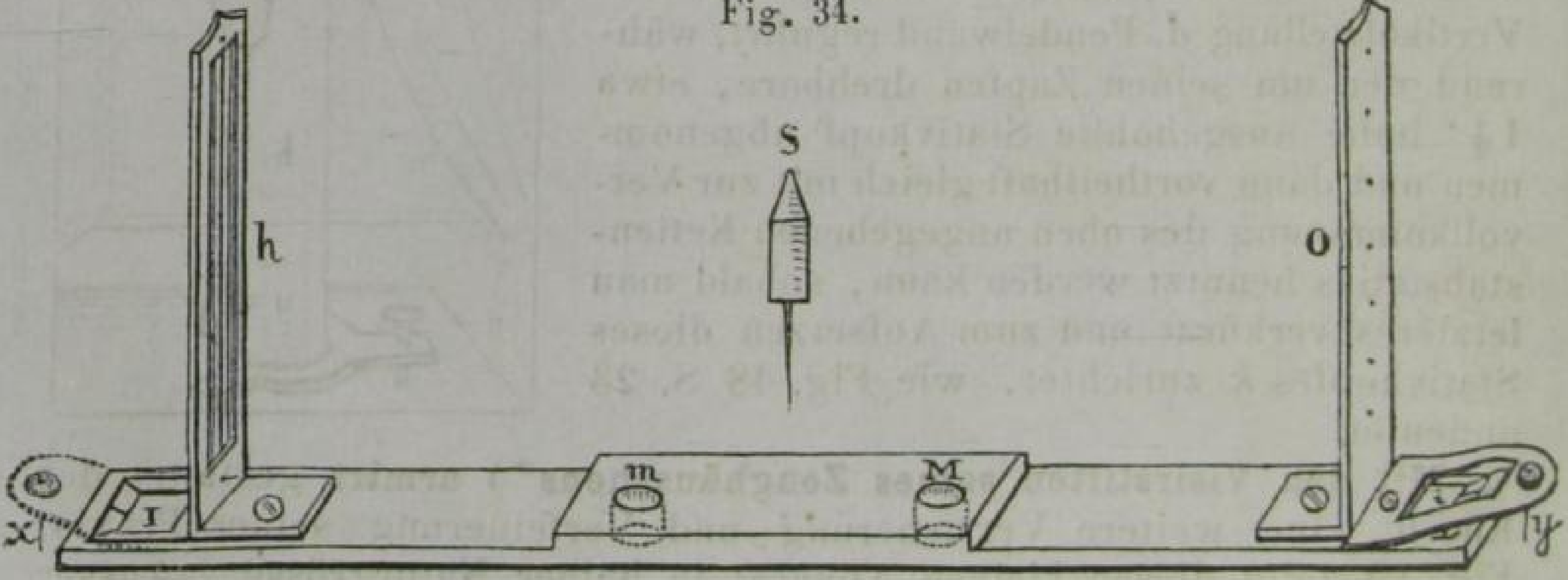


Fig. 33.



Durch Hinzufügung des bereits Seite 9 zum Zwecke der Winkelauftragungen empfohlnen, freilich aber im Vergleich zum Uebrigen nicht ganz so billigen, hierunter in halber Naturgrösse ersichtlichen Visirlineals können wir unser Brieftaschenbesteck nun auch zu einem **Menselapparate** vervollständigen. Wenigstens lassen sich dann allerlei Terrainaufnahmen in der Manier des Messtisches wie auch der Bussole damit ausführen. Wenn es gestattet wäre, im Begriffe des Theodoliten von dem Umfange seiner Praxis den Feinheitsgrad zu sondern, so dürften wir den mit Zeughäuschen u. Visirlineal armirten Knecht, wie ihn z. B. die Fig. 31, 32 u. 33 andeuten, ungescheut als einen **Brieftaschentheodolit** bezeichnen und noch dazu als einen von ganz besonderer Voll- und Selbstständigkeit, indem er ja für alle seine Vertikal- wie Horizontal-Visurarbeiten gleichzeitig die gesammten dazu gehörigen oder nöthigen trigonometrischen Werthe mit zeigt.

Fig. 34.

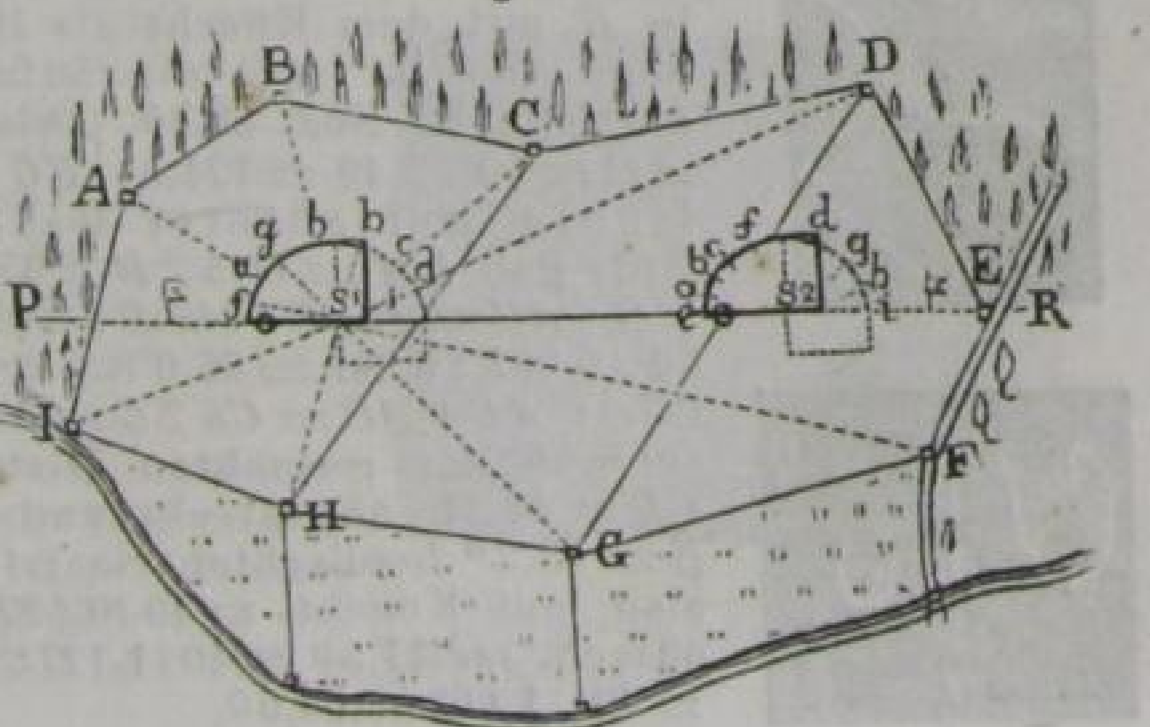


Für diese Seite seiner Ingenieurthätigkeit, für die Zwecke also von allerlei kleinen Flur- und Waldvermessungen behandle man den Knecht wie folgt. Nachdem man mittels einer kräftigen Nähnadel das Centrum *s* des Horizontalkreises vorsichtig und exact durchstochen, dann den Centrumstift *s* (Fig. 34) daselbst eingesteckt (und wenn nöthig jenseits in seinen Dorn, als hinreichenden Ersatz für ein Schräubchen, ein Korkstückchen fest angespiesst) hat, wird die Tafel wie bekannt an ihren Stativstock geschraubt und mittels Klammer *k* zum Visirwürfel formirt. Das Uebrige versinnlichen die

Fig. 32, 33 u. 48. — Etwas Wesentliches kommt allerdings hierbei darauf an, dass man seinen Knecht gut conservirt, womöglich vorher unter Pressung gehalten, jedenfalls nicht in, etwa durch Liegen in der Sonne, windschief gewordener Beschaffenheit verwendet. Weiter kommt es darauf an, beim aufgestellten Instrumente die Horizontalwand entsprechend genau horizontal zu stellen und während der Arbeit horizontal und eben zu erhalten. Ist die Würfelecke correct formirt, so muss die l. Wand horizontal sein, sobald das Pendel scharf an der r. Wand und zugleich auf Null einspielt. Bei ruhigem Wetter und mässigen Ansprüchen kann man also die Horizontalstellung durch das Pendel allein bewirken. Man hat dabei erst den Stativstock so zu stellen, dass das Pendel fast anliegt, u. dann den Knecht um *z* Fig. 21 zu drehen, bis d. Nullpunkt mit dem Pendelfaden zusammenfällt. Besser und correcter geschieht die Horizontalstellung mittels einer jener kleinen Wasserwaagen, wie sie jetzt häufig im Handel und bei jedem gut assortirten Mechanikus bis zur niedlichsten Grösse zu erlangen sind. Wenn, wie bei den Doppelknechten (s. S. 21), die Pressung des Querzapfens nicht immer ausreicht, die Horizontalst. gehörig zu sichern, so ist ein Bohrer *n* Fig. 33 nahe unter dem Stativkopfe so eingesteckt, dass er bei schiefstehendem Griffe die Horizontalwand stützt und mittels etwaiger Drehung also auch regulirt, hierzu das Einfachste; und auch ausreichend. Besser und bequemer ist allerdings ein Bohrer, der statt des Griffes einen mit Schräubchen *m* versehenen Spannring hat (Fig. 48, S. 23), in welchem ein Holzstäbchen auf- und abwärts gestellt und festgepresst wird. — Hat zu gleicher Zeit die Stativbake den S. 15 erwähnten Drehkopf, Fig. 30, (dessen Hohlung als Futteral für Bohrer etc. dienen kann), so hat man, glaub ich, das Bessere mit dem geringsten Aufwande erlangt. Uebrigens eignen sich die S. 21 angezeigten, auf 3^{mm} starke Kernpappe gezogenen und justirten D o p p e l k n e c h t e am besten für die Messtischpraxis.

Setzt man nun behufs dieser Praxis das Diopter (Fig. 34) mit seinem ersten Mittelpunkte M auf den Stift s und visirt, wie Fig. 32 andeutet, erst nach dem rechten Objecte A und dann nach dem linken B, so giebt die Differenz beider Ablesungen den Winkel ASB. Alle Winkel unter 120° können auf diese Weise direct, alle Winkel über 120° aber indirect durch ihre Nebenwinkel gemessen werden. Und zwar wie folgt: Der Winkel ASB, Fig. 33, sei für unsern Horizontalkreis zu gross. Deshalb stellt man letztern gleich so, dass er im Winkelblatte BSC liegt, visirt dann wie gewöhnlich nach B, liest beim vordern Index J ab, hebt dann das Diopter behutsam auf, um es mit dem zweiten Drehpunkte m wieder einzusetzen, visirt nach A u. liest nun bei c den hintern Index i ab. Wiederum gibt die Subtraction beider Ablesungen den zunächst gesuchten $\angle BSC$. — Da das Ablesen beim Index i des Oculardiopters o etwas bequemer ist, als das beim J des Haardiopters, so wird man gut thun, alle gewöhnlichen Winkel mittels des zweiten Drehpunktes m zu beobachten. Nur muss man dann dem Kreise die dem eigentlichen Winkel entgegengesetzte Stellung geben, wie das bei B (Fig. 14) behufs Messung der Winkel $AB1$, $AB2$ etc. angedeutet ist. Auch ist es klar, dass, wenn auf einer Station mehrere Winkel zu beobachten sind (wie eben hier, oder wie in S, Fig. 35), man gut thut, den Knt. gegen die Basis S^1S^2 oder PR vorher zu orientiren, ähnlich wie es Seite 8 behufs

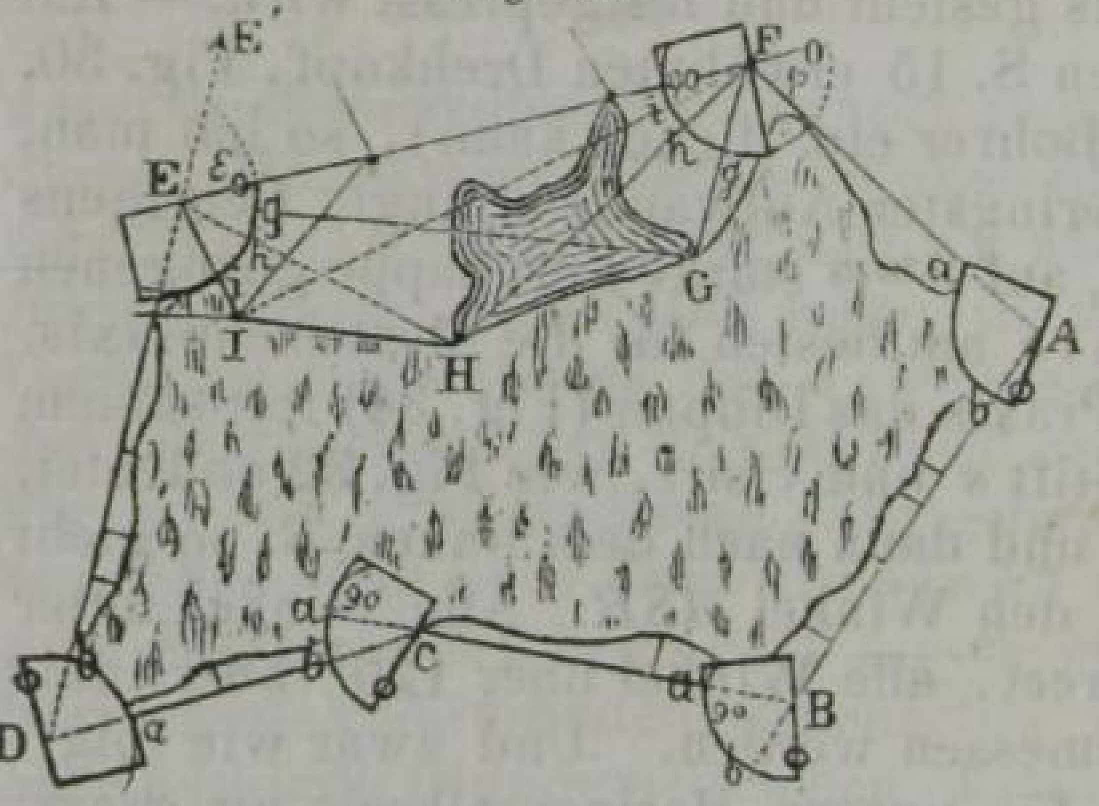
Fig. 35.



des Winkelauftragens gelehrt wird. Für alle Visuren des 1. u. 3 Quadranten (wie *a*, *b*, *f* u. *g* in Station S^1) geschieht die Orientirung mittels des ersten Radius oder Nullpunktes, wie bei S^1 der ausgezeichnete Horizontalkreis zeigt. Für die Richtungen des 2. u. 4. Quadranten (*c*, *d*, *h*, *i*) wird der Knt. mit dem 2. Radius (oder 90°) in die Standlinie orientirt, wie die punktirte Stellung bei S^1 verdeutlicht. Alle Winkel des 1. u. 2. Quadranten werden dann mit der ersten Dioptrstellung, d. i. mit Drehung um *M*, beobachtet (so z. B. *a*, *b*, *c*, *d* in Stat. S^1 u. S^2); alle Winkel des 3. u. 4. Quadranten mit der zweiten Diopterstellung, also mit Drehung um *m* und Ablesung am hintern Index *i* (so *f*, *g*, *h*, *i* auf beiden Stationen). Werden dann die notirten Visuren in derselben Weise und wie es S. 9 gelehrt, in der Stube aufgetragen, so erhält man den gewünschten Plan ganz nach Art der Menselaufnahmen. Doch kann man auch nach Art der Theodolitaufnahmen Form u. Inhalt der betreffenden Figuren correcter durch Coordinatenrechnung bestimmen; und zwar auch ganz selbständig durch den Knecht allein, mittels seiner logarithm. u. trigonometr. Tafeln.

Was eben für die Aufnahmemethode des Vorwärtseinschneidens (Fig. 14 u. 35) bemerkt wurde, gilt auch für die Stationirmethode (Fig. 36). Wenn der Vermesser, von *A* nach *B*, *C*, *D* stationirend, den Knecht immer wie hier ins spitze Winkelblatt stellt, so erhält man dessen Gradmas immer durch die Differenz $a - b$. Den eigentlichen meist stumpfen od. überstumpf. Polygonwinkel braucht man in der Regel nicht. Jedenfalls ist durch negatives oder positives Hinzufügen zu 180° derselbe dann leicht gefunden. Im Falle eine der Stationslinien die Basis mehrerer Winkel bilden soll, wie *EF*, wird man auch hier erst den Kreis orientiren, und zwar entwed. nach seinem Nullpunkte (wie bei *E*) oder nach seinem 90°-Punkte (wie bei *F*). — Ob nach vollendeter Messung die Kartirung und Inhaltsberechnung „geometrisch" (graphisch) oder „trigonometrisch" (durch Coordinatenrechnung) bewirkt werden solle: nach der einen wie nach der andern Manier kann der Knt. die Lösung selbstständig vermitteln. Den Zeichnungsweg haben wir S. 8 ff. erläutert; gestatten wir uns nun noch, an einigen geodät. Beispielen den Rechnungsweg zu zeigen.

Fig. 36.



A. Distanzmessungen mit Standlinie. 1) Mit rechtwinkliger Basis, Fig. 37. Um von der Gegend *A* aus die Entfernung des Punktes *C* zu beobachten, ward in *A* mit dem Knecht als Winkelkreuz auf *AC* die Standlinie $AB = 50$ Ruth. abgesteckt und in *B* mit dem Knecht als Horizontalkreis $\angle B = 68{,}1^0$ gefunden. So ist *AC* die 50fache Tangente von $68{,}1^0$ und *BC* die 50fache Sec. $68{,}1^0$. Also nach den Ablesungen des Knt. $AC = 50 \,.\, 2{,}49 = 124{,}5$; $BC = 50 \,.\, 2{,}65 = 132{,}5$. — 2) Mit beliebig gerichteter Basis, Fig. 37. $AB = 50$ Ruth.; der Knt. gab $\angle A = 71{,}5$, $B = 65{,}1^0$ (also $C = 43{,}4^0$). Da bekanntl. $AB : AC = \sin C : \sin B$, folgt $AC = 50 \sin 65{,}1^0 : \sin 43{,}4^0 = 50 \,.\, 0{,}907 : 0{,}687 = 66{,}0$ R. (Schärfer noch mittels der Chordentafel: $AB : AC = Ch\, 2C : Ch\, 2B$.) — 3) Fig. 38. Mit dem Knt. sei auf der gesuchten Distanz *AB* die rechtwinklige Basis $CD = 40$ R. abgesteckt und in *D* die Winkel $\alpha = 27{,}5$ und $\beta = 53{,}2^0$ beobachtet. So ist $AC + BC = 40\,(tg\, 27{,}5 + tg\, 53{,}2)$; also laut Knecht $= 40\,(0{,}522 + 1{,}34^-) = 74{,}5$. Ferner $DA =$ 40fach. $\sec 27{,}5^0 = 40 \,.\, 1{,}127 = 45{,}1$, und $DB =$ 40fach. $\sec 53{,}2^0 = 40 \,.\, 1{,}665 = 66{,}6^0$.

Fig. 37.

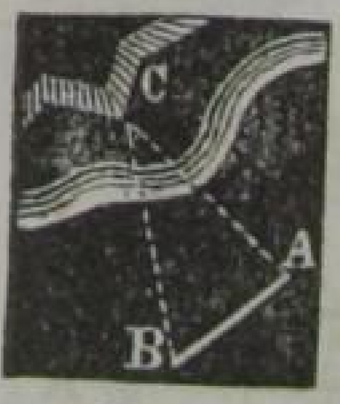
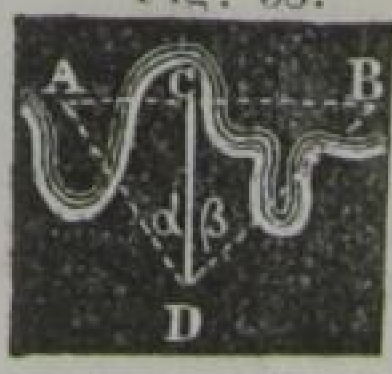


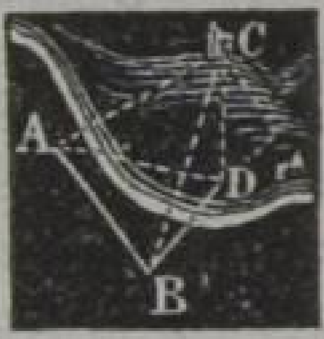
Fig. 38.



Kleine geodätische Arbeiten.

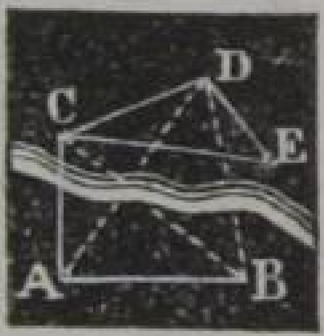
B. Höhenmessung bei seitlich liegender horizontaler Basis. (Zur Vervollständigung der auf S. 10 u. S. 12 abgehandelten Fälle.) *C* Heinrichseck (in Tharand), *AB* (im Badethale) = 327 sächs. Fuss. In Station *A* zeigte der Knt. den Horizontalwinkel $DAB = 98{,}2^*$ und die Elevation $CAD = 23{,}7$; in *B* den Horizontalwinkel $ABD = 65{,}8^0$, die Elevation $CBD = 22{,}1^0$ (also auch $\angle ADB = 16{,}0^-$). Daraus folgt (weil $AB : AD = \sin D : \sin B$) ... $AD = 327 \sin 65{,}8 : \sin 16{,}0^-$ (laut Knt.) $= 327 \,.\, 0{,}913 : 0{,}275 = 1085$, und daraus $DC = AD \operatorname{tg} 23{,}7^0 = 1085 \,.\, 0{,}440 = 486$ Fuss; hierzu Stativhöhe gibt 490 sächs. Fuss. (Eine genaue Theodolitenmessung gab 479.7′.) — Berechnung aus der Elevation in *B* zur Controle. $AB : CD = \sin D : \sin A$; also $BD = 327 \sin 98{,}2 : \sin 16{,}0^- = 327 \sin 81{,}8 : \sin 16{,}0^- = 327 \,.\, 0{,}99 : 0{,}275 = 1175$; also $CD = BD \operatorname{tg} 22{,}1^0 = 1175 \,.\, 0{,}408 = 479'$; dazu 4′ Stativhöhe macht 483, und als Mittel beider Resultate 486′.

Fig. 39.



C. Trigonom. Vorwärtseinschneiden. Von der Standlinie *AB* aus die Entfernungen und Grössen umliegender Punkte und Figuren zu bestimmen. Z. B. hinsichts der Punkte *C* und *D*. Wenn $AB = 120$ Ruth. u. mit dem Horizontalkreis des Knt. beobachtet ist $\angle CAD = 35{,}7$; $\angle CAB = 57{,}2^-$; $\angle DBC = 24{,}3$; $\angle DBA = 78{,}2$ (also $\angle DAB = 21{,}5$; $\angle CBA = 53{,}9$; $\angle ACB = 68{,}9$; $\angle ADB = 80{,}3$), so folgt nach dem bekannten Satze: „die Seiten der Dreiecke verhalten sich wie die Sinusse ihrer Gegenwinkel", $AC = 103{,}8$; $AD = 119{,}1$ etc.; sowie aus *AC*, *AD* und ihrem Zwischenwinkel nach dem Cotes'schen Satze $CD = 69{,}85$. U. s. w.

Fig. 40.



D. Trigonom. Rückwärtseinschneiden. Durch Beobachtung der nach ihren Entfernungen (also auch ihren Winkeln) gegebenen drei Terrainpunkte *A*, *B* und *C* die Lage *D* einer beliebigen Station zu finden. Sind *A*, *B* und *C* die Winkel des gegebenen Dreiecks, *a*, *b* und *c* ihre Gegenseiten; werden bei *D* die Winkel α und β gemessen und $360 - (\alpha + \beta + B) = \gamma$ und $\angle BAD = \delta$ gesetzt; [so hat man daraus $\angle BCD = 360 - \alpha - \beta - B - \delta = \gamma - \delta$; und aus den beiden Dreiecken *ABD* und *BCD* nach dem Sinussatze

$$BD = \frac{c \sin \delta}{\sin \alpha}, \text{ auch } BD = \frac{a \sin(\gamma - \delta)}{\sin \beta} = \frac{a \sin \gamma \cos \delta - a \sin \delta \cos \gamma}{\sin \beta}$$

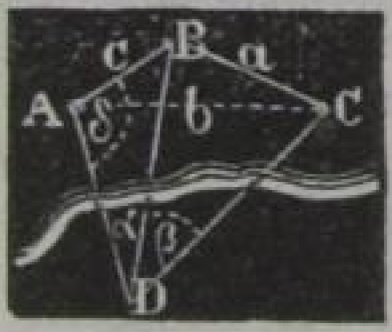
und durch Gleichstellung beider Werthe $c \sin \delta \sin \beta = (a \sin \gamma \cos \delta - a \sin \delta \cos \gamma) \sin \alpha$; durch Transp.: $\sin \delta (c \sin \beta + a \sin \alpha \cos \gamma) = a \sin \alpha \sin \gamma \cos \delta$; und endlich durch Division mit $\cos \delta$]

$$1) \quad \operatorname{tg} \delta = (a \sin \alpha \sin \gamma) : (c \sin \beta + a \sin \alpha \cos \gamma).$$

Und weil nun durch δ alle andern Winkel bekannt werden, findet sich leicht

2) $AD = c \sin(\alpha + \delta) : \sin \alpha$; $BD = c \sin \delta : \sin \alpha$; $CD = a \sin(\beta + \gamma - \delta) : \sin \beta$.

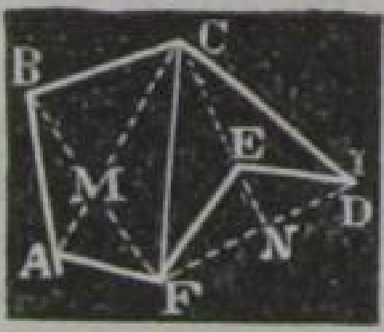
Fig. 41.



E. Trigonom. Flächenmessungen. 1) Dreieck *ABC* aus dem bei *B* beobachteten Winkel und dessen Nebenseiten: Inhalt $= \frac{1}{2} BA \,.\, BC \,.\, \sin B$. Z. B. Wenn $BA = 40$ und $BC = 50$ Ruth. u. Winkel $B = 84{,}5^0$ (dessen Sin. aus dem Knt. mit 0,9954 zu ersehen ist), so folgt, dass die Ecke $ABC = 40{,}50 \,.\, 0{,}9954 : 2 = 100 \,.\, 0{,}9954 = 99{,}54$ □R.

2) Unregulär. Viereck *ABCF* oder *CDEF* aus seinen Diagonalen u. deren (bei *M* od. *N* beobachteten) Durchschnittswinkel: Inhalt von $ABCF = \frac{1}{2} AC \,.\, BF \sin M$ und ebenso Inhalt von $CDEF = \frac{1}{2} CE \,.\, FD \sin N$. Z. B.: Wenn der bei *N* aufgestellte Knecht den einen der dasigen Winkel mit $63{,}4^0$ (dessen Sin. laut Knt. = 0,894), u. ausserdem $FD = 60$ u. $CE = 30$ Ruthen sich ergab, so folgt für das Stück *FCDE* Inh. $= 30 \,.\, 30 \,.\, 0{,}894 = 80{,}5$ □R.

Fig. 42.



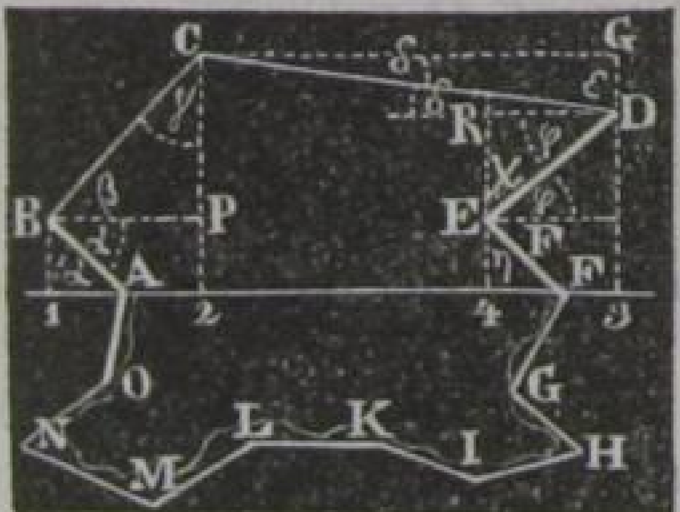
F. Trigonom. Kartirung und Quadrirung eines mit dem Knecht umzogenen Vielecks (eines Waldes oder dgl.). — Man habe, theils mittel-theils unmittelbar nach S. 18, beobachtet die wirklichen oder innern

Polygonwinkel:	Da die Sum. bei jeder aus *n* Seit. od. *n* Eck. besteh. Fig. $=(n-2)\,180^0$, also für dies Sechseck $= 720^0$ sein muss, wird eine kl. Berichtigung nöthig, und man hat dann	die verbess. Winkel:	Sind nun die Seiten
A. 110,3⁰		*A*. 110,3⁰	$AB = a = 35{,}3$ R.
B. 105,9		*B*. 105,8	$BC = b = 72{,}8$ „
C. 131,6		*C*. 131,6	$CD = c = 98{,}4$ „
D. 39,8		*D*. 39,7	$DE = d = 59{,}6$ „
E. 295,4		*E*. 295,4	$EF = e = 46{,}4$ „
F. 37,3		*F*. 37,2;	$FA = f = 125{,}4$ „;
Sa. 720,3			

so entwickelt sich diese Aufgabe wie folgt:

Erste Auflösung. (Natürliche oder elementare Methode.) Nachdem mittels des Horizontalkreises oder auch der Chordentafel des Knechtes das umzogene Netz *ABCDEF* flüchtig auf- und durch alle seine Ecken Parallelen und Perpendikel zur erwählten Basis *AF* ein-gezeichnet sind, ergeben sich leicht und natürlich

Fig. 43.



Polygonometrische Aufnahmen.

die Hülfswinkel:

$\alpha = 180 - A \quad = 69{,}7^0$
$\beta = B - \alpha \quad = 36{.}1$
$\gamma = 90 - \beta \quad = 53{,}9$
$\delta = \gamma + 90 - C = 12{,}3$
$\varepsilon = 90 - \delta \quad = 77{,}4$
$\varphi = D - \delta \quad = 27{,}4$
$\chi = 90 - \varphi \quad = 62{,}6$
$\eta = E - \chi - 180 = 52{,}8$
(auch
$\eta = 90 - F = 52{,}8$)

mit den zugehörigen Seiten:

$AB = a = 35{,}3$
$BC = b = 72{,}8$
$CD = c = 98{,}4$
$DE = d = 59{,}6$
$EF = e = 46{,}4$
$FA = f = 125{,}4$

Daraus zunächst für die Ordinaten laut Sinustafel des Knechts

berechnete Glieder:	vbess.	Ganze
$+B1 = a\,.\,sn\,\alpha = 35{,}3\,sn\,69{,}7 = 35{,}3\,.\,0{,}938 = +33{,}1$	$+33{.}2$	$B1 = 33{,}2$
$+CR = b\,.\,sn\,\beta = 72{,}8\,sn\,36{,}1 = 72{,}8\,.\,0{,}589 = +42{,}9$	$+43{.}0$	$C2 = 76{,}2$
$-QD = c\,.\,sn\,\delta = 98{,}4\,sn\,12{,}3 = 98{,}4\,.\,0{,}214 = -21{,}1$	$-20{,}9$	$D3 = 55{,}3$
$-RE = d\,.\,sn\,\varphi = 59{,}6\,sn\,24{,}7 = 59{,}6\,.\,0\;460 = -27{,}4$	$-27{,}9$	$E4 = 28{,}0$
$-E4 = e\,.\,sn\,F = 46{,}4\,sn\,37{,}2 = 46{,}4\;\;0{,}605 = -28{,}1$	$-28{,}0$	$F = 0{,}0$
*) Sa. $-0{,}6$	$= 0{,}0$	

*) Da die $(n-1)$te oder letzte Ordinate $= 0$ sein muss, so wird wegen $-0{,}6$ eine Verbesserung jedes Gliedes um $+0{,}6 : 5 = +0{,}12$ nöthig. Das successive Addiren der verbesserten Glieder giebt dann die Ordinaten (Ganze).

Und ähnlicher Weise für die Abscissen laut Cosinustaf. d. Knts.

berechnete Glieder:	vbess.	Ganze
$-A1 = a\,.\,cs\,\alpha = 35{,}3\,cs\,69{,}7 = 35{,}3\,.\,0{,}347 = -12{,}3$	$-12{,}5$	$A1 = 12{,}5$
$+BP = b\,.\,cs\,\beta = 72{,}8\,cs\,36{,}1 = 72{,}8\,.\,0{,}808 = +58{,}8$	$+58{,}5$	$A2 = 46{,}0$
$+CQ = c\,.\,cs\,\delta = 98{,}4\,cs\,12{,}3 = 98{,}4\,.\,0{,}977 = +96{,}1$	$+95{,}9$	$A3 = 141{,}9$
$-DQ = d\,.\,cs\,\varphi = 59{,}6\,cs\,27{,}4 = 59{,}6\,.\,0{,}888 = -52{,}9$	$-53{,}2$	$A4 = 88{,}7$
$+4F = e\,.\,cs\,F = 46{,}4\,cs\,37{,}2 = 46{,}4\,.\,0{,}796 = +36{,}9$	$+36{,}7$	$A5 = 125{,}4$
*) Sa. $126{,}6$	$125{,}4$	

*) Da diese $(n-1)$te oder letzte Abscisse = der Basis (125,4) sein muss, so wird wegen $126{,}6 - 125{,}4 = 1{,}2$ eine Correction jedes Gliedes um $-1{,}2 : 5 = -0{,}24$ nöthig. Die successive Addit. der verbess. Glieder gibt alsdann die Abscissen. Die Berechnung kann auch wie vorhin durch die Sinustafel mittels der Complementwinkel γ, ε etc. bewirkt werden.

Die Kartirung erfolgt nunmehr mittels Auftragung der Coordinaten und die Flächenberechnung auch ohne vorherige Zeichnung nach bekannter Trapezialmethode aus den rechnungsmässigen Coordinaten. — Die bei Berechnung der Coordinaten nöthigen Multiplicationen können durch die Logarithmentafel sehr erleichtert werden.

Zweite Auflösung. Nach eigentlich polygonometrischer Methode; streng tabellarisch nach den Formeln:

1) Ordinate $= a\,.\,sin\,A - b\,.\,sin\,(A + B) + c\,.\,sin\,(A + B + C) - \ldots$
2) Abscisse $= a\,.\,cos\,A - b\,.\,cos\,(A + B) + c\,.\,cos\,(A + B + C) - \ldots$

von denen m Glieder stets die $m$te Ordinate und Abscisse geben, während beim nEck $n-1$ Glieder von d. Forml. (1) Null u. d. Forml. (2) die Basis geben müssen.

1	2	3	4		5	6		7		8		9	
Seiten.	Corrig. Winkel.	Winkel-summ.	Vorz. Sn	Cs	Grd.-Wkl.	(Aus d. Knt.) Sinus.	Cos	Ber. Glieder der Ordin.	Abscis.	Corrig. Glied. d. Ordin.	Abscis.	Wirkl. o. Ganz. Ord.	Absc.
$+35{,}3$	$110{,}3^0$	110,3	+	—	69,7	0,938	0,347	$+33{,}1$	$-12{,}3$	$+33{,}2$	$-12{,}5$	33,2	$-12{,}5$
$-72{,}8$	105,8	216.1	—	—	36,1	0,589	0,808	$+42{,}9$	$+58{,}8$	$+43{,}0$	$+58{,}5$	76.2	$+46{,}0$
$+98{,}4$	131,6	347,7	—	+	12,3	0,214	0,977	$-21{,}1$	$+96{,}1$	$-20{,}9$	$+95{,}9$	55,3	$+141{,}9$
$-59{,}6$	39,7	27,4	+	+	27,4	0,460	0,888	$-27{,}4$	$-52{,}9$	$-27{,}3$	$-53{,}2$	28,0	88,7
$+46{,}4$	295,4	322,9	—	+	37,2	0,605	0,796	$-28{,}1$	$+36{,}9$	$-28{,}0$	$+36{,}7$	0,0	125,4
$(-125{,}4)$	37,2	00,0						$-0{,}6$	126,6	0,0	125,4		
	720,0												

Die obigen Bemerkungen gelten auch hier. Ausserdem zu 1: Die wechselnden Vorzeichen der Seiten sind der Formeln (1) und (2) wegen gesetzt. Zu 3: Beim allmäligen Addiren wird der Vollkreis 360, sobald er erscheint, weggelassen. Zu 4: In den rechten Quadranten sind die Cosinusse, in den untern die Sinusse negativ. Zu 5: Bezeichnen α_2, α_3, α_4 Winkel in dem 2., 3., 4. Quadranten, so findet man deren (auf den 1. Quadranten reducirte) Grundwinkel nach der Regel: $180 - \alpha_2$; $\alpha_3 - 180$; $360 - \alpha_4$. Die Spalte 6 ist aus dem Knecht gelesen; die Spalte 7 durch Multiplication der Spalten 1 . 5 . 6 erzeugt. Das Uebrige gestaltet sich ganz ähnlich wie bei der ersten Auflösung. — Wäre das zu berechnende Vieleck $ACF\ldots$ nur eine Section des umzog. Netzes $ACFKNA$ und die gewählte Coordinatenbasis AF eine Diagonale desselben, deren Länge u. Anwinkel unbekannt: so hat man der obigen Berechnung erst die des Winkels A ($= \angle BAF = 110{,}3^0$) vorauszuschicken, indem man ganz so tabellarisch wie vorstehend die Formel $tg\,A = \dfrac{b\,.\,sin\,B - c\,.\,sin\,(B + C) + d\,.\,sin\,(B + C + D) - \ldots}{a - b\,.\,cos\,B + c\,.\,cos\,(B + C) - d\,.\,cos\,(B + C + D) + \ldots}$ ausführt, deren Zähler bei einem n-Ecke nach $n-2$ Gliedern v. selbst abbricht.

Prüfung, Justirung, Modification und Bezugsquellen.

Abgesehen von seinen absoluten Dimensionen kann der Messknecht in seiner mit Sorgfalt erstrebten ursprünglichen Correctheit wohl nur dadurch etwas benachtheiligt werden, dass in Folge des Druckens u. Aufziehens die Richtlinien und Mittelpunkte beider Kreise nicht mehr ganz genau zu deren Gradtheilung stimmen. Nach den bisherigen Erfahrungen sind diese Störungen aber so gering, dass sie für die gewöhnlichen Zwecke der Feld- und Höhenmessung füglich unbeachtet bleiben können und nur für die empfindlichere Praxis, z. B. die Zeitmessung etc., zu untersuchen und zu berichtigen sind. — Wenn man die Chorde von 0 bis 60° genau in Zirkel fasst und von ihren beiden Endpunkten damit Kreuzbogen beschreibt, ingleichen wenn man auf die ersten Radien *sc* und *po* vom 90°-Punkte nach den Regeln der Geometrie genaue Lothe zieht, kann man die Richtigkeit der beiden Centrums *s* und *p* im wesentlichsten erkennen und, dafern nöthig, wiederherstellen. Dasselbe gilt von der punktirten Richtlinie *de* und *ab*, welche genau lothrecht auf dem verlängerten ersten Radius *cs* und *op* stehen müssen. Sollte (den bisherigen Erfahrungen entgegen) das bereits durchstochene *p* einer erheblichen Justirung bedürfen, so fülle man das Löchelchen erst mit dickem Leim aus und steche es nach dem Trocknen von neuem durch. — Zweckmässig ist es, wenn man gleichzeitig auf dem Transversalmasstabe die genaue Länge von 1 Decimeter (= 10 cm = 100 mm) durch einen Stich anzeigt. In Ermangelung eines Normaldecimeters kann man nach den Zahlenangaben der Maskunde einen andern exacten Zoll- oder Masstab dazu benutzen. — Regulirt man gleichzeitig den Pendelfaden in der Weise, dass wenn derselbe bei *a* (Fig. 44 u. 45) in die Visirkerbe gelegt wird, das herunterhängende Stück von *a* bis zur Mitte des Pendelgewichts 248½ Millimeter lang ist, so verrichtet dasselbe, von *a* abhängend und schwingend, als **Halbsecundenpendel** zugleich mit die Dienste einer **Secundenuhr**; sowie auch eines Distanzmessers bei Licht- und Schallbeobachtungen.

Fig. 44.

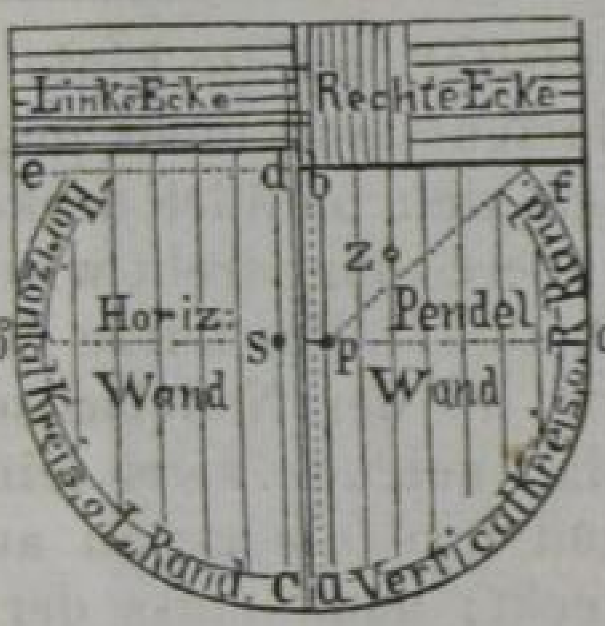


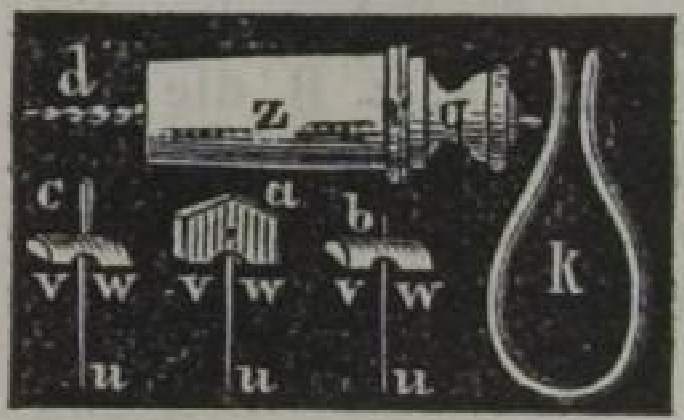
Fig. 45.

Denn in jeder Schwingung oder Halbsecunde legt der Schall bei ruhiger u. 0° kalter Luft 166 Meter oder 0,0222 (= 2/90) geogr. Meile, bei ± *t*° Cent. Temp. dagegen (166 ± *t*/3) Meter zurück; bei mittl. Temp. also circa 170 Meter oder 0,0277 geogr. Meile. — Bei mit in Betracht zu ziehendem Winde bedenke man, dass jede Halbsecunde zurücklegt: Mässiger Wind 2 Meter; bester Mühlwind 3-4 Meter; Sturm 10 Meter; Orkan 20 Met. Z. B. Wenn bei einem mit gerade nach uns zu gerichtetem Sturme heranziehenden Gewitter zwischen Blitz und Donner 12 Schwingungen unsres Pendels gezählt wurden, so war die Entfernung der blitzenden Wolke (170 + 10) 12 = 2160 Meter oder ca. 0,023 . 12 = 0,28 Meil.

Um einzelnen Freunden feinerer Messknechtspraxis eine bequeme u. sichere Gelegenheit zu bieten, dem alltäglichen Knechte ihrer Brieftasche einen durch besondere Auswahl und Justirung bevorzugten, dem Bedürfniss der relativ höchsten Genauigkeit entsprechenden, hinzuzufügen, hat der Verfasser Veranstaltung getroffen, dass die Verlagshandlung entsprechend **ausgewählte, justirte und präparirte Knechte** auf Verlangen liefern kann, u. zwar incl. Futteral zu dem Baar- u. Nettopreise v. 1 Thlr. für die (ca. 1 mm dicken) einfachen u. 1¼ Thlr. für die (ca. 3 mm starken) **Doppelknechte**. Diese aus den besten Abdrücken auserwählten Knechte werden vom Mechanikus mittels eines zu diesem Behufe eigens construirten Instrumentes so hergerichtet, dass die beiden Kreismittelpunkte (*s* u. *p*), die drei Richtpunkte zum Winkelkreuze (*c*, *d* u. *e*), u. die Richtpunkte der Pendelwand (*a*, *b*) correct zu den Kreisskalen wie zu einander an- u. durchgestochen; und ausserdem auch noch die justirten Richtlinien roth ausgezogen sind; während zugleich die genaue Grösse des Decimeters durch einen Stich über der Zahl 100 des Transversalmasstabes markirt ist. — Dass die dünnen Knechte geführlicher für die Stube und Tasche, die doppelten dagegen, weil steifer und ebner sich haltend, besser für das Feld, namentlich für Nivellements- und Messtischarbeiten sind, ward bereits im Früheren hervorgehoben.

Das kleine Zeughäuschen, welches die auf Seite 22 folgende Fig. 46 in halber Naturgrösse zeigt, ist auf folgende Eigenschaften zu prüfen. Erstens: Die Mutter *q* des Querzapfens muss scharf greifen. Man probire zunächst, ob sie sich nicht etwa gar schlechtweg abziehen lässt, u. dann, ob sie den angespiessten Stativknecht scharf genug zu pressen

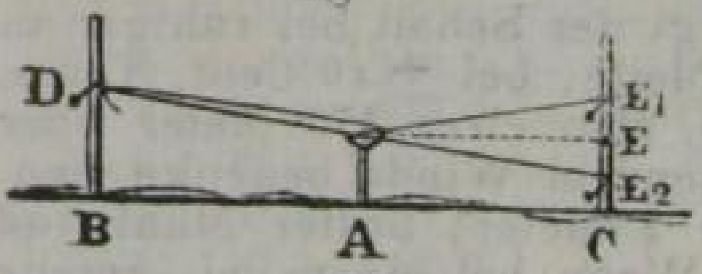
Fig. 46.



vermag. Zweitens: Der Querbalken *vw* der Visirnadeln darf nicht über 8^{mm} lang und muss fest und rechtwinklig sein. Ersteres prüft man einfach am Transversalmasstabe; letzteres, indem man auf ein Stück starke u. ebene Pappe oder auf ein ganz dünnes Bretchen eine Linie zieht und die Nadeln so in die Linie einsteckt, dass die Basis *vw* fest aufsitzt und die Linie nahezu rechtwinklig durchschneidet. Die Nadeln dürfen dann nicht gegen einander schnäbeln oder divergiren; sie müssen sich parallel decken, auch dann noch, wenn die eine gegen die andere umgedreht wird (nämlich so, dass *w* nach *v* u. *v* nach *w* kommt). Drittens: Der kurze Feinstift *b* und das Diopterlöchelchen *a* müssen genau in der Nadelachse und die Basis *vw* senkrecht auf letztere sein. Man zeichne zwei feine einander rechtwinklig durchkreuzende Linien und lege *vw* genau auf die eine, so dass die Nadelspitze *u* die andere deckt; dann muss der Stift *b* und ein Stich durch *a* in derselben Linie liegen. — H. Mechanikus P. C. Möller in Leipzig hat den Verfasser ermächtigt, zu erklären, dass er dies Apparatchen künftighin genau nach Vorschrift ausgeführt, stets vorräthig halten und in Partien für den Preis von ½ Thlr., einzeln zu ⅔ Thlr. liefern werde; und enthält dasselbe dann ausser dem Anschraubezapfen *z* in einem kleinen Portefeuillefutterale 1 Klammer *k*, 5 mittlere Stifte *c*, einen Feinstift *b*, 1 Diopter *a* und 2 Reibungsscheibchen *r* von Filz. Einzeln kostet *z* 6 Sgr.; jedes andere Stück 3 Sgr.

Zur Nivellirpraxis wie zur genauesten Höhenmessung des Knechtes ist aber dann immer noch folgende Prüfung nöthig, indem auch beim Einstechen der justirten Diopter *a* und *b* in die justirte Richtlinie wieder ein kleiner Fehler begangen werden könnte. Um dies zu erkennen, stellt man bei ganz ruhigem Wetter, in etwa 20 Schritt gegenseitiger Entfernung, 2 Stäbe *B* und *C*, und

Fig. 47.



dann den mit seinem Nivellirdiopter armirten Stativknecht *A* zwischen ihre Richtung (wenn auch nicht nothwendig in die Mitte) u. so auf, dass seine Visur *ab* (Fig. 31) den Stab *B* trifft; drückt alsdann den Stab *A* soweit seitwärts, bis das Pendel fast anliegt, und dreht dann den Knecht um seinen Drehpunkt *z*, bis das Pendel exact auf 0 einspielt. Der von der Visur nun getroffene Punkt *D* des Stabes *B* wird vom Gehülfen durch einen eingedrückten Nagel markirt; hierauf der Stab *A* um den halben Kreis gedreht, und Stab und Knecht wieder so gerichtet, dass die Visur *ab* den Stab *C* trifft, während das Pendel scharf an- und auf 0 genau einspielt. Der getroffene Punkt E_1 wird ebenfalls durch einen Nagel markirt. Das Instrument in *A* belassend, stellt man sich nun hinter *B* und visirt von *D* über des Knechts Diopter *a* nach *E*. Liegen alle drei Punkte in derselben Richtung, so ist Alles correct. Zeigt die Visur aber die Abweichung E_1, E_2, so ist deren Mitte *E* der genaue Horizontalpunkt. Auf diesen richtet man schliesslich die Visur und notirt durch einen Stich am Rande der Gradskala den Punkt, auf den der Pendelfaden bei genauer Horizontalvisur einspielen muss. Dass man dann bei der Nivellirpraxis das Pendel nicht auf den Null-, sondern auf diesen Stichpunkt oder Collimationsfehler einspielen lässt, und dass man letzteren bei Höhenvisuren mit diesem Nivellirdiopter entsprechend in Ab- und Zurechnung zu bringen hat, bedarf keiner weitern Erläuterung.

Den drehbaren Stativkopf (Fig. 30 und 49), gleichzeitig für das Feld wie für das Zimmer brauchbar, mit Bohrstütze *n*; sowie den

Drehkopf, Spazierstock und Visirlineal: Prüfung und Bezugsquelle.

Fig. 48.

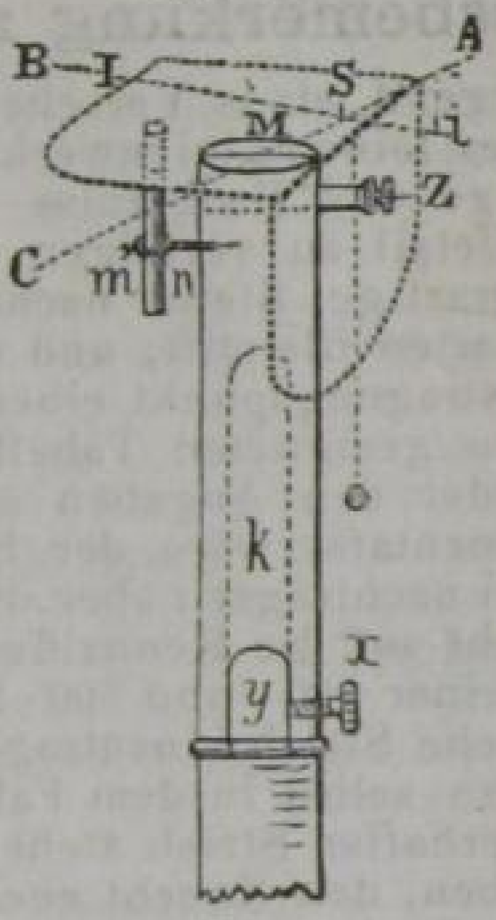
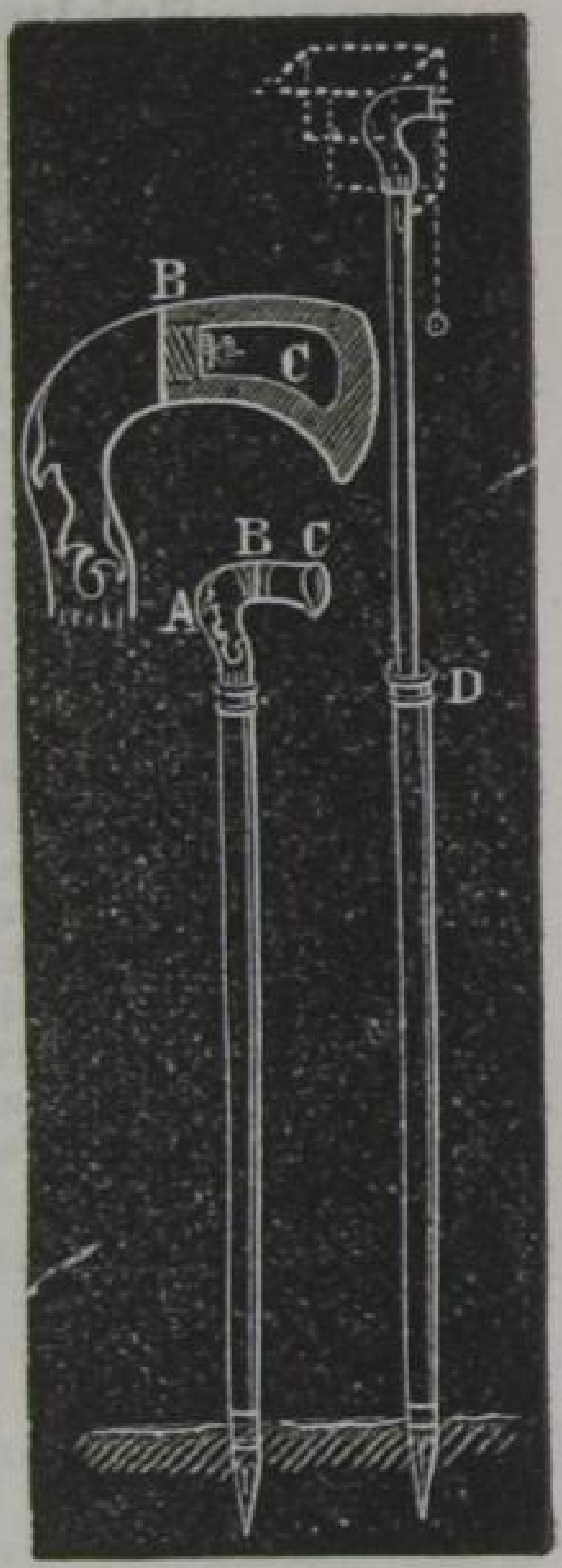


Fig. 49.



S.15 erwähnten Spazierstock kann seiner Einfachheit wegen jedweder Drechsler wohl genügend herstellen. Hinsichts des letztern hat man beim Empfange sich zu überzeugen, ob sowohl das im Haken *C* steckende Mutterchen als auch das äussere Stellschräubchen bei *D* ihre Schuldigkeit gehörig thun. Je stärker und länger der Innenstock ist, desto weniger wird er, ausgezogen, schwanken.

Das Messknechts-Visirlineal (Fig. 34) muss, um vollkommen zu sein, folgende Proben aushalten: 1) Die beiden Drehpunkte *M* u. *m* müssen zu ihrem Stifte *s* so passen, dass sich das Lineal gehörig auf des Stiftes Basis, leicht und doch auch ohne Schlottern, dreht. 2) Die Federstifte *x* u. *y*, die beiden Indexe *I* u. *i* u. Drehpunkte *m* u. *M* müssen sämmtlich in derselben Achse liegen: Man ziehe demgemäs auf dem Papiere eine gerade Linie, stecke auf ihr den Stift *s* exact und fest ein und setze das Lineal mit dem ersten Drehpunkt *M* so auf, dass sein Indexstrich *I* in der Linie liegt; dann müssen *i* u. die Stiche der Federstifte *x* und *y* ebenfalls correct auf der Linie sein. Das Nämliche muss sich zeigen, wenn wir das Lineal nun auch mit dem zweiten Drehpunkt auf den Stift setzen. 3) Der Radius $MI = mi$ muss ein ganz klein wenig kleiner sein, als der äussere Radius der Winkelskala: so dass, wenn man den Stift *s* in das Centrum der Horizontalwand und darauf das Lineal erst mit *M* und dann mit *m* eingesetzt hat, jedes der beiden Fenster (bei *I* und *i*) die Aussenlinie der Winkelskala zwar bedecke, aber nur soweit, dass die Halbgradstriche noch sichtbar bleiben, damit der Indexstand bis aufs Zehntelgrad sicher abzulesen geht. 4) Das Aug- und Haardiopter müssen mit einander eine auf der Linealbasis lothrecht stehende Visirebene bilden: Richtet man auf horizontal gestelltem ebenem Knechte oder Tische das Haardiopter *h* mittels eines bestimmten mittlern Visirloches *o* auf eine normale Hauskante und deckt dabei das Haar in seiner ganzen Länge die Kante, so ist das Haardiopter correct. Sieht man hierauf durch das oberste und unterste Visirloch, und es rückt dabei das vertikale Haar weder links noch rechts von der Kante ab, so ist das Augdiopter ebenfalls in Ordnung. In Ermangelung einer passenden Hauskante dient ein langes Loth, das man, zur Vermeidung des Schwingens, unten in ein Gefäss mit Wasser tauchen lässt. — Dimensionen nach Millimetern (Fig. 34, S. 16): Lineal: Länge $Ii = 155\frac{1}{2}$; $mM = 36$; $xy = 172$; Breite 12; Dicke in der Mitte 2, ausserdem $\frac{3}{4}$. Diopter: Höhe 60, Breite 8. — H. Mechanicus P. C. Möller in Leipzig hat versprochen, auch dieses Instrumentchen vorschriftmässig, im Einzelnen mit Etui für $1\frac{2}{3}$ Thlr., in Partien von mindestens 3 Stück für $1\frac{1}{3}$ Thlr., (mit Diopter zum Niederlegen $\frac{1}{2}$ Thlr. mehr) und auch kleine Dosenlibellen das Stück zu $\frac{2}{3}$ Thlr., vorräthig zu halten und zu liefern.

Schlussbemerkung zu Kap. I. und II.

Wenn in Folge irgend eines Versehens oder auch in Folge vielfachen Gebrauches eine Stelle des feinen Linienwerkes mangelhaft geworden wäre, so wird Derjenige, dessen Auge und Bedürfniss danach beschaffen ist, um den Knecht bis in sein feinstes Detail zu verfolgen und auszunutzen, auch unschwer im Stande sein, eine derartige Stelle nachzubessern. Man benutze dazu einen äusserst spitzen und harten Bleistift; und darauf, wenn nöthig, eine feine Zeichnenstahlfeder. Den Eintragungspunkt eines dergleichen fraglichen Striches kann man aus einem andern geeigneten Tabellenbuche, in der Regel aber auch aus dem Knechte selbst oder den Angaben seiner Brieftasche ableiten. — Gesetzt z. B. in der Logarithmentafel wäre der Strich für die Zahl 906,1 nicht ausgedruckt; man wollte ihn nachtragen; aber wohin? Da $906{,}1 = (901{,}1:8)8 = 113{,}26 \cdot 8$, so folgt (ohne Rücksicht auf die Kennziffer) $log\,906{,}1 = log\,113{,}26 + log\,800$, was der Knecht selbst in seiner 100- und 800-Spalte als $05409 + 90309 = 95718$ zeigt, wonach also der fragliche Strich einzutragen wäre bei $log = 957_{1,8}$. — Auf solche Weise könnte man also selbst in dem Falle, dass trotz des Verfassers grosser Sorgfalt noch ein fehlerhafter Strich stehen geblieben wäre, nach vorgängiger zarter Radirung desselben, den Knecht auch nach dieser Richtung hin justiren. — Wer ausserdem eine Beeinträchtigung der Tafel durch das eingesteckte Pendelgewicht befürchtet, der ersetze dasselbe durch ein feines Drahthäkchen, etwa ein sogenanntes Schlingelchen (das ihm jede seiner Freundinnen aus ihrem Nadelkästchen gern verehrt) und berge es dann in seinem Portemonnaie, um es jederzeit einhängen zu können. — Endlich sei auch noch darauf aufmerksam gemacht, dass die Tafel ein vorsichtiges Abwaschen, selbst mit Seifenwasser, recht gut verträgt.

III. Kapitel.

Maskunde.

1. Längenmase.

1a. **1a. Metersystem.** Das Meter (m) = $^1/_{40}$-Milliontel des Erdmerid.; mit 10theil. Auf- u. Abstufung, wobei den Obermasen die entspr. griech., den Untermasen die latein. Zahlwörter vorgesetzt werden; als: Miriameter (10000 m); Kilometer (1 km = 1000 m); Hektometer (100 m); Dekameter (10 m); Meter (1 m); Decimeter (0,1 m); Centimeter (1 cm od. 0,01 m); Millimeter (1 mm od. 0,001 m).

1b. **1b. Anderweite Abkürzungen.** a. alt; Ak. Acker; C. Cubic; D. Dessatine; E. Elle; F. Fuss, auch ′, ″, ‴, Fuss, Zoll, Linie; Fa. Faden; Fd. Feld; K. Klafter; L. Lachter; M. Meile; n. neu; pa. pariser; pr. preussisch; Q. od. □ Quadrat; R. Ruthe; Str. Strich; T. Toise; V. Vermessung; Wd. Wald; wi. wiener; Wk. Werk; Y. engl. Yard; 0 Grad.

1c. **1c. Name, Grösse, Eintheilung.** (Wo die E fehlt, ist E. = 2′ zu setzen; auf deutsch. Mess. 11 berl. E. = 8 Y.; 8 leipz. E. = 5 Y.; 5 frankf. E. = 4 frankf. brabant. E. = 3 Y.) — **1 Geogr. M.** = $^1/_{15}$ Aequat.^{0} = 7420,16 m = **deutsch-östr.** Postvereins-M.; **1 See-M.** (engl., franz. etc.) = ¼ geogr. M; 60 = 1 Aeq.^{0}.

Anhalt wie Preuss. — **Baden**: 0,3 m = 1′ à 10″; K. 6′; R. 10′ o. 3 m; M. = 29630′ o. 8889 m. — **Baiern**: 291,86 mm = 1′ à 12″ u. 10″; E. = $24^1/_{48}$′; K. = 6′; R. = 10′ = 2.919 m. — **Belgien** wie Frankreich; Brabanter E. = 695 mm. — **Braunschweig**: 285,36 mm = 1′ à 12″; R. = 16′; L. = 80,7′; M. = 26000′. — **Bremen**: 289,35 mm = 1′ à 12″; K. = 6′; R. = 16, 18 u. 20′. — **Dänemk.**: pr. F. à 12″; Fa. 6′; R. 10′; M. 24000′. — **England**: 914,38 mm = 1 Y. = 3′ à 12″; Fa. 2 Y.; R. (Pole) 5,5 Y. = 5,029 m; M. 5280′ = 1609 m. — **Frankfurt** a/M.: 284,60 mm = 1′ à 12″; E. 23,061″; K. 6′; R. 12,5′. — **Frankreich.** N. Syst.: s. oben 1a; dazu T. 2 m; Poste 8000 m; Lieue: Myriamet. od. 10000 m. A. Syst.: Paris F. a 12″ à 12‴; 1 pa.′ = 0,3248394 m; 1 pa.″ = 2,706995 cm; 1 pa.‴ = 2,255829 mm. (1 m = 3,078444′ = 36,94133″ = 443,296‴ a. pa. Mas.) 1 a. T. = 6′ = 1,94904 m. — **Gera** u. **Hamburg**: 286,42 mm = 1′ à 12″; K. 6′; R. 14 u. 16′; M. = pr. M.; Hamb.-brabant. E. = 691,4 mm. — **Griechenl.**: n. Piki (E.) = 1 m = 10 Palmi = 100″ = 1000‴ (= 1,543 a. klein. Piki = 1,495 a. gros. Piki); 1 M. = 10 Stadien (km) = 10000 Piki. — **Hannover**: 292,09 mm = 1′ à 12″; K. = 6′; R. = 16′ = 4,674 m; M. = 25400′ = 7419 m: Clausth.-L. 851¼ pa. ‴. — **Hess. Cass.**: 287,7 mm = 1 n. F. à 12″ = 11″ pr.; E. = 252,9 pa. ‴; a. F. = 0,2849 m; R. = 14 a. F. — **Hess. D.**: ¼ m = 1′ = 10″; E. = 2,4′; K. = 10′ = 2,5 m; M. = 7500 m. — **Hohenzollern** u. **Holstein** wie Hamburg. — **Holland** wie Frankreich mit holl. Namen: 1 m = 1 El = 10 Palm = 100 Duim = 1000 Streep; 10 m = 1 Roede; 1000 m od. 1 km = 1 Myl. — **Lippe Detmold**: 289,51 m = 1 Wk.-F. à 12″; R. = 16′. — **Lippe Schaumb.**: 290,1 mm = 1′ à 12″; L. = 7′; R. = 16′. — **Lübeck**: 291 mm = 1′ à 12″; E. = 255¼ pa. ‴; R. = 16′. —

Mecklenburg: Lübecker, hamburger u. pr. F.; hamb. E.; pr. M.; R. = 12 u. 16'. — **Nassau**: ½ *m* = Fd.-F. à 10''; 1/3 *m* = Wk.-F. à 12''; R. = 10 Fd.-F. — **Neapel**: 264,55 *mm* = 1' (Palmo) = 10 Decime od. 12''; 1 Canna = 10'; 1 Passo = 7'; 1 M. = 1000 Passi (= 1 engl.-franz. See-M.). — **N.-Amerika** w. Engl., aber 5 Y. = 1 Pole. — **Norwegen** wie Dänemark. — **Oestreich**: 316,11 *mm* = wi. F. à 12''; E. = 2,465'; K. = 6' = 1,897 *m*; R. = 10'; M. = 24000' = 7587 *m*. (Böhmen: 296,40 *mm* = 1'; E. = 2'; 16 bö. F. = 15 wi. F.) — **Oldenburg**: 295'88 *mm* = 1' à 12''; E. = 257 ½ pa.'''; R. = 18 u. 20'. — **Polen**; 288 *mm* = 1' à 12''; K. = 6'; R. = 15'; M. = 29633'. — **Portugal**: 329,13 *mm* = 1' à 12'' (u. Metersystem). — **Preussen**: 313,85 *mm* = 1 rhein. F. à 12''; (berl.) E. = 25,5''; Fa. = 6'; L. = 80''; R. = 12' = 3,766 *m*; M. = 24000' = 7532 *m*. — **Rom**: 297,59 *mm* = 1' (Piede à 4 Palmi); E. = 8 Palmi à 3 Parti = 1,993 *m*; Passus = 5'; M. = 5000' = 1488 *m*. — **Russland**: 304,79 *mm* = 1 (engl.) F. à 12''; Arschine = 16 Werschock = 2 1/3' = 711,19 *mm*; Sashen = 3 Ar. = 48 Wersch. = 7' = 2,134 *m*; Werst = 1500 Arsch. = 1067 *m*. — **Sachsen** (Dresd.): 283,19 *mm* = 1' à 12''; L. = 2 *m*; K. = 6'; V.-R. = 15 1/6'; Wk.-R. = 16'; M. 7500 *m*; Leipz. brab. E. = 685,6 *mm*. — **S. Altenburg**: 283,79 *mm* = 1' à 12''; V.-F. = E. = 2'; R. = 10 V.-F. = 20 Wk.-F. — **S. Coburg**: 303,97 *mm* = 1' à 12''; E. = 586,3 *mm*; R. = 14'; V.-F. u. V.-R. = pr. R. — **S. Gotha** (und **Greiz, Schleiz, Sondersh.** Oberherrschaft, **Saalfeld**): 287.62 *mm* = 1' à 12''; Fd.-R. = 14'; Wd.-R. = 16'; Wd.-F. = 282,6 *mm*. — **S. Hildburgh.**: F. wie Gotha, V.-F. wie Coburg, davon 14 = R. — **S. Meiningen**: 283,15 *mm* = 1' à 12''; E. = 635,9 *mm*; V.-F. u. R. wie in Hildburgh. — **S. Weimar-Eisen.** (u. **Rudolstadt**): 281,98 *mm* = 1' à 12''; K. = 6'; R. = 16'; M. = 26096'. — **Sardin.** wie Frankr. — **Schleswig** wie Hamburg. — **Schweden**: 296.9 *mm* = 1' à 12'' u. 10''; Fa. = 6'; R. = 16', M. = 36000'. — **Schweiz** wie Baden; dazu 1 Stab = 2 E. = 4'; 1 Stunde = 16000' = 4800 *m*. — **Spanien**: 282,66 *mm* = Castil. F. à 12''; E. = 3'; Passo = 5'; Estado = 1,2 Passo (u. Metersystem). — **Türkei**: 685,8 *mm* od. ¾ Y. = 1 Pik od. Arschin (nahe = Leipz. brab. E.); 1 Endasch = 652,8 *mm*; M. (Agatsch) = 5001 *m*. — **Würtemberg**: 286,49 *mm* = 1' à 10''; E. = 2,144'; R. = 10' = 2,865 *m*.

1d. **Vergleichungs- u. Verwandlungstafel für Fusse** u. alle jene Ober- u. Untermase, die gleiches Verhältn. zum Fuss haben. (Duod.''; gleichfuss. Ruth. etc.) 1d.

Frankreich.	Alt Paris.	England.	Oestreich.	Preussen.	Baiern.	Sachsen.	Hannover.	Würtemb.	Hessen Cassel.	Baden.	Hess. Dst.
1 *m* =	3,0784	3,281	3,163	3,186	3,426	3,531	3,424	3,491	3,476	3 1/3	4
0,32480	1'	1,066	1,028	1,035	1,113	1,147	1,112	1,134	1,129	1,083	1,299
0,30479	0,9383	1'	0,964	0,971	1,044	1,076	1,043	1,064	1,059	1,016	1,219
0,31611	0,9731	1,037	1'	1,007	1,083	1,116	1,082	1,103	1,099	1,054	1,264
0,31395	0,9662	1,030	0,993	1'	1,075	1,108	1,074	1,095	1,091	1,046	1,255
0,29186	0,8985	0,958	0,923	0,930	1'	1,031	0,999	1,018	1,014	0,973	1,167
0,28319	0,8718	0,929	0,896	0,902	0,970	1'	0,970	0,988	0,984	0,944	1,133
0,29219	0,8992	0,958	0,924	0,931	1,001	1,031	1'	1,020	1,015	0,974	1,168
0,28649	0,8819	0,940	0,906	0,913	0,982	1,012	0,981	1'	0,996	0,955	1,146
0,28770	0,8857	0,944	0,910	0,917	0,986	1,016	0,985	1,004	1'	0,959	1,151
0,3	0,9235	0,984	0,949	0,956	1,028	1,059	1,027	1 047	1,043	1'	1,2
¼	0,7696	0,822	0,791	0,797	0,857	0,883	0,856	0,873	0,869	5/6	= 1'
0,28536	0,8785	0,936	0,903	0,909	0,978	1,008	0,977	0,996	0,992	0,951	= 1'
Belg. Holl.	Sard.	Russl.	Anh.	Dänmk.	Norw.	(Altb.	Mein.)	Hamb.	(Pol.)	Schw.	Brschw

1e. **Decimal- in Duod.-Zolle u. umgekehrt** mittels Knt. (s. S. 4. *a*). 1e.

1f. **Preuss. Längenmas in englisches** u. umgekehrt. 1f.

Prss.	Engl.			Engl.'	Engl.''	Engl.	Preuss.			Preuss.'	Preuss.''
1 F. =	1'	0''	4,28'''	= 1,02972' =	12,3567''	1 F. =	0'	11''	7,84'''	= 0,97114' =	11,6536''
2 ,,	2		8,56	2,05944	24,7133	2 ,,	1	11	3,69	1,94227	23,3073
3 ,,	3	1	0,84	3,08917	37,0700	3 ,,	2	10	11,53	2,91341	34,9609
4 ,,	4	1	5.12	4,11889	49,4266	4 ,,	3	10	7.38	3,88454	46,6144
5 ,,	5	1	9,40	5,14861	61,7833	5 ,,	4	10	3,22	4,85568	58,2682
6 ,,	6	2	1.68	6,17834	74,1400	6 ,,	5	9	11,06	5,82682	69,9218
7 ,,	7	2	5.96	7,20806	86,4966	7 ,,	6	9	6,91	6,79795	81,5754
8 ,,	8	2	10,24	8,23778	98,8533	8 ,,	7	9	2,75	7,76909	93,2290
9 ,,	9	3	2,52	9.26750	111.2099	9 ,,	8	8	10.60	8,74022	104,8826
10 ,,	10	3	6,80	10,29723	123,5666	10 ,,	9	8	6,44	9,71136	116,5363
1 Z. =	0'	1''	0.36'''	= 0,08581' =	1,0297''	1 Z =	0'	0''	11,65'''	= 0,08093' =	0,9711''
2 ,,	0	2	0,71	0.17162	2,0594	2 ,,	0	1	11,31	0,16186	1,9423
3 ,,	0	3	1,07	0,25743	3.0892	3 ,,	0	2	10,96	0,24278	2,9134
4 ,,	0	4	1.43	0.34324	4,1189	4 ,,	0	3	10,61	0,32371	3,8846
5 ,,	0	5	1.78	0,42905	5,1486	5 ,,	0	4	10.27	0,40464	4,8557
6 ,,	0	6	2.14	0,51486	6.1783	6 ,,	0	5	9,92	0,48557	5,8268
7 ,,	0	7	2,50	0,60067	7,2081	7 ,,	0	6	9,58	0,56650	6,7980
8 ,,	0	8	2,85	0,68648	8,2378	8 ,,	0	7	9,23	0,64742	7,7691
9 ,,	0	9	3,21	0;77229	9.2675	9 ,,	0	8	8,88	0,72835	8,7403
10 ,,	0	10	3,57	0,85810	10,2972	10 ,,	0	9	8,54	0,80928	9,7114
11 ,,	0	11	3,92	0,94391	11,3269	11 ,,	0	10	8,19	0,89021	10,6825

1g. **1g. Preuss. Längenmas in metrisches** u. umgekehrt.

Fuss.	Meter.	Zoll.	Meter.	Linie.	Meter.	Met.	F.	Z.	Lin.	Fuss.	Zoll.	Lin.
1	=0,31385;	1	=0,02615;	1	=0,00218	1=	3	2	2,81	=3,18620	=38,234	=458,51
2	0,62771;	2	0,05231;	2	0,00436	2	6	4	5,63	6,37240	76,469	917,63
3	0,94156;	3	0,07846;	3	0,00654	3	9	6	8,44	9,55860	114,703	1376,44
4	1,25541;	4	0,10462;	4	0,00872	4	12	8	11,25	12,74480	152,938	1835,26
5	1,58927;	5	0,13077;	5	0,01090	5	15	11	2,06	15,93100	191,172	2294,07
6	1,88312;	6	0,15692;	6	0,01308	6	19	1	4,88	19,11719	229,406	2752,88
7	2,19697;	7	0,18308;	7	0,01526	7	22	3	7,69	22,30339	267,641	3211,70
8	2,51083;	8	0,20924;	8	0 01744	8	25	5	10,50	25,48950	305,875	3670,51
9	2,82466;	9	0,23539;	9	0,01962	9	28	8	1,31	28,67579	344,109	4129,31
10	3,13853;	10	0,26154;	10	0,02180	10	31	10	4,13	31,86199	382,344	4588,12
11	3,45239;	11	0,28770;	11	0,02397	11	35	0	6,94	35,04818	420,578	5046,33
12	3,76624;	12	0,31385;	12	0,02615	12	38	2	9,75	38,23438	458,812	5505,74

1h. **1h. Oestr.-metr. L.** { Oestr.′ = 0,316111 *m*; 1″ = 2,63426 *cm*; 1‴ = 2,21952 *mm*.
Meter = 3,16345′ = 37,96140″ = 3′ 1″ 11,54‴ östr.

1i. **1i. Engl.-metr. L.** { Engl.′ = 0,3047945 *m*; 1″ = 2.539954 *cm*; 1‴ = 2,116629 *mm*.
Meter = 3,280899′ = 39,37079″ = 472,4495‴ englisch.

2. Quadrat- und Cubicmase.

2a. Quadrat- und **2b. Cubic-Fusse** (und deren Ober- und Untermase).

2a.

Frank-reich.	Alt. Paris.	Eng-land.	Oest-reich.	Preus-sen.	Baiern.	Sach-sen.	Hanno-ver.	Wür-temb.	Hessen Cassel.	Ba-den.	Hess. Dst.
$1Q^m =$	9,4770	10,76	10,01	10,15	11,74	12,47	11,72	12,18	12,08	11 1/9	16
0,1055	1 Q′	1,136	1,056	1,071	1,239	1,316	1,237	1,286	1,275	1,172	1,688
0.0929	0,8804	1 Q′	0,930	0,943	1,091	1,158	1,089	1,132	1,122	1,032	1,486
0,0999	0,9470	1,076	1 Q′	1,014	1,173	1,246	1,171	1,217	1,207	1,110	1,598
0,0985	0,9335	1,060	0,986	1 Q′	1,156	1,228	1,155	1,200	1,190	1,094	1,576
0,0852	0,8073	0,917	0.852	0,865	1 Q′	1,062	0,998	1,038	1,029	0,946	1,363
0,0802	0,7660	0,863	0.803	0.814	0,941	1 Q′	0.940	0,977	0.969	0,891	1,283
0,0853	0.8086	0 918	0,854	0,866	1,002	1,064	1 Q′	1,040	1,031	0,948	1,345
0,0821	0,7778	0.883	0,821	0,833	0,963	1,023	0,962	1 Q′	0,992	0,912	1,314
0,0828	0,7844	0,891	0,828	0,840	0,972	1,032	0,970	1,008	1 Q′	0,920	1,325
0,09	0,8529	0,969	0,901	0,914	1,057	1,122	1,055	1,097	1,087	1 Q′	1,440
0,0625	0,5923	0,673	0,625	0,634	0,734	0,779	0,732	0,761	0.775	0,694	=Q′

2b.

$1C^m =$	29,17	35,32	31,66	32,35	40,22	44,03	40,13	42,53	41,99	37,04	64
0,0343	1 C′	1,211	1,085	1,109	1.379	1,509	1,375	1,458	1,439	1,270	2,194
0,0283	0,826	1 C′	0,896	0,916	1,139	1,247	1,136	1,204	1.189	1,049	1,812
0,0316	0,921	1,116	1 C′	1,022	1,270	1,391	1,267	1,343	1,326	1,170	2,022
0,0309	0,902	1,092	0,979	1 C′	1,244	1,361	1,241	1,315	1,298	1,145	1,979
0,0249	0,725	0,878	0,787	0,804	1 C′	1,095	0,998	1,057	1,044	0,921	1,591
0,0277	0,663	0,802	0,719	0,735	0,913	1 C′	0,911	0,966	0,954	0,841	1,454
0,0249	0,727	0,880	0,789	0,806	1,002	1,097	1 C′	1,060	1,047	0,923	1,595
0,0235	0,686	0,830	0,744	0,761	0,946	1,035	0,943	1 C′	0,987	0,871	1,505
0,0238	0,695	0,841	0,754	0,770	0,958	1,049	0,955	1,013	1 C′	0,882	1,524
0,027	0,788	0,953	0,855	0,873	1,086	1,189	1,083	1,148	1,134	1 C′	1,728
0,0156	0,456	0,552	0,495	0,505	0,628	0,688	0,627	0,664	0,656	0,579	1 C′
	Belg. Holl. Sard.	Russl	Anh.	Dänmk.	Norw.	(Altb	Mein.)	(Hamburg.)	(Pol.)	Schweiz.	

2c. **2c. □Decimal- in □Duod.-Zolle** u. umgekehrt mittels Knt. (s. S. 4. *f.*)

2d. **2d. Preuss. Quadrat- u. Cubicmas in metrisches** u. umgekehrt.

Q′	Qm	Q″	Qcm.	Qm.	Q′	Q″	C′	Cm.	C″	Ccm.	Cm.	C′	C″
1	=0,09850;	1=	6,841	1	=10,1519=	1461,87	1	=0,03092;	1=	17,891	1	=32,3459=	55893,7
2	0,19701;	2	13,681	2	20,3037	2923,74	2	0,06183;	2	35,782	2	64.6917	111787,4
3	0,29551;	3	20,522	3	30,4556	4385,61	3	0,09275;	3	53,673	3	97,0376	167681,1
4	0,39402;	4	27,362	4	40,6075	5847,48	4	0,12366;	4	71,564	4	129,3835	223574,8
5	0,49252;	5	34.203	5	50,7593	7309,35	5	0,15458;	5	89;456	5	161,7293	279468,4
6	0,59102;	6	41,043	6	60.9112	8771,22	6	0,18550;	6	107,347	6	194,0752	335362,1
7	0,68953;	7	47,884	7	71,0632	10233,09	7	0,21641;	7	125,238	7	226,4211	391255,8
8	0,78803;	8	54,724	8	81,2150	11694,95	8	0,24735;	8	143,129	8	258,7670	447149,5
9	0,88654;	9	61,565	9	91,3668	13156,82	9	0,27824;	9	161,020	9	291,1129	503043,2

2e. **2e. Oestreichisch-metrisch**

Q. ö. □′ = 0,0999303 □*m*; □″ = 6,9396 □*cm*. | 1 □*m* = 10,00697 □′ = 1441,004 □″ ö.
C. ö. C′ = 0,0315897 C*m*; C″ = 18,281 C*cm*. | 1 C*m* = 31,6559 C′ = 54701,40 C″ ö.

2f. **2f. Englisch-metrisch**

Q. { Engl. □′ = 0,09289969 □*m*; □″ = 6,451367 □*cm*; □‴ = 4,480116 □*mm*.
□ Meter = 10.76430 □′ = 1550,059 □″ = 223208,5 □‴ englisch.

C. { Engl. C′ = 0,02831531 C*m*; C″ = 16,38618 C*cm*, C‴ = 9.48274 C*mm*.
C-Meter = 35,31658 C′ = 61027,04 C″ engl.; 1 C*cm* = 105,4547‴ engl.

3. Feld- und Wald-Flächenmase.

Auch Er- und Beträge bei einerlei Geld oder Gewichts- oder Hohlmase.
(Der Are = 10 *m* ins Q. = 100 Q *m* od. Centiar.; d. Hectar (*ha*) = 100 *a* = 100 *m* ins Q.)

3a.

Frankrch. Hectar 10000 Q‴.	England. Ack. 160 Q R. 43560 Q′	Russland. Dessätine 11760 Q′	Oestreich Joch 1600 QKl. 57600 Q′	Preussen. Morg 180 Q R. 25920 Q′	Baiern. Tagw. 400 QR. 40000 Q′	Sachsen. Acker 300 QR. 69008 1/3 Q′	Hannover. Fd.Mg 120 QR. 30720 Q′	Würtemb. Morg. 384 QR. 38400 Q′	Baden. Morg. 400 QR. 40000 Q′	Hessen D. Morg. 400 QR 40000 Q′	Schweden. Tonne Land 56000 Q′
1 *ha* =	2,471	0,915	1,737	3,917	2,935	1,807	3,815	3,173	2 7/9	4	2,026
0,4047	1 A.	0,370	0,703	1,585	1,188	0,731	1,544	1.284	1,124	1,619	2,820
1.0930	2,700	1 D.	1,898	4.279	3.206	1,974	4.168	3,466	3.035	4.370	2,213
0,5756	1,422	0,527	1 J.	2,254	1,689	1,040	2 196	1,826	1.599	2.302	1,166
0,2553	0,631	0.234	0,444	1 M.	0,749	0.461	0,974	0,810	0,709	1,021	0,517
0,3407	0,842	0,312	0,592	1.334	1 Tw.	0.616	1,300	1,081	0,947	1,363	0,690
0,5534	1,368	0,507	0,962	2,168	1,624	1 A.	2.111	1,756	1,537	2,214	1,121
0,2621	0,648	0,240	0.455	1,027	0,769	0.474	1 FM	1,832	0,728	1,048	0,531
0,3152	0.779	0,289	0,548	1,234	0,925	0,569	1,202	1 M.	0,876	1,261	0,639
0.36	0,890	0,330	0,626	1.410	0,057	0,650	1,374	1,142	1 M.	1,44	0,729
1/4	0,618	0,229	0.434	0,979	0.734	0,452	0,954	0,798	0,694	1 M	0,506
0.4936	1,220	0.452	3,858	1,933	1.449	0,892	1,883	1,566	1.371	1,974	1 T.
Belgien, Holland, Sardinien.		1 Jo. = 3 Metz. = 2 bö. Strich.		Anhalt u. Cobg. Wald-Morgen.		Ack = 2 Schfl	1 1/3 F.M. = 1 Wd.M.	Hohenzollern.	Schweiz Juchart.		Nassau.

3b. Eine geographische □ Meile enthält davon od. ist gleich: 3b.

5505,88	13605	5037,6	9565,9	21564,4	16195	9948,7	21007	17469	15294	22023,5	11559

3c.

3c.	Altenburg. Ack. 200 QR. 80000 Q′	H. Cassel. Ack. 150 QR. 29400 Q′	Coburg. Fd.M. 160 QR. 31360 Q′	Dänemark. Tonne 560 QR. 56000 Q′	Frnkf. a/M. Fd.M 160 QR. 25000 Q′	Gotha. W.A. 160 QR. 40960 Q′	Mecklenb. Morg. 100 QR. 25600 Q′	Norwegen. Tonne 40000 Q′	Oldenburg. Neu-Juck 160 QR., 51840 Q′	Rudolstadt. Ack. 160 QR. 40960 Q′	Weimar. Ack. 140 QR. 35840 Q′
1 Hectar, 1 östr. Joch, 1 preuss. Morgen enthält von Obigem od. ist gleich:											
1 Hec. =	1,552	4,191	3,450	1,813	4,940	2,952	4,612	2,900	2,204	3,066	3,509
1 Joch	0,894	2,412	1,986	1,043	2,842	1,699	2,656	1,461	1,268	1,765	2.020
1 Mg.	0,396	1,070	0,881	0,463	1,261	0,754	1,178	0,648	0,563	0,782	0.896
1 Obiges hat Hectaren, östr. Joch, preuss. Morgen:											
Hectar :	0,644	0,239	0.290	0,552	0,203	0,339	0,217	0,345	0,454	0,326	0,285
Joch :	1,119	0,415	0,503	0,959	0,352	0,589	0,377	0,685	0,789	0,567	0,495
Morg. :	2,524	0,935	1,135	2,160	0,793	1,327	0,849	1,543	1,777	1,278	1,116

3d. **Brschwg.** u. **Hann.** (Calenberg): Wd.Mg. = 1 1/3 Fd.Mg. = 160 □R. = 40960 □′. — **Frankf.** a/M.: Wd.Mg. = 0,192 *ha* = 1/3 Jo. = 0,572 pr. Mg. — **Gotha**: Fd.Ack = 140 □R. = 27440 □′ = 0,227 *ha*. — **Gera**: Schffl. = 120 □R. = 30720 □′ = 0 252 *ha*. — **Greiz**: Ack. = 160 □R. = 40960 □′ = 0.327 *ha*. — **Hamburg, Holst.** u. **Schleswig**: 1 Mg. = 600 Marsch □R. = 117600 □′ = 0,966 *ha*; 1 Schffl. Aussaat = 200 Geest □R. = 51200 □′ = 0,42 *ha*. — **Neapel**: 1 Moggio = 10 □Canne = 0,07 *ha*. — **Polen**: Mg. = 300 □R. = 0,56 *ha*. — **Schleiz**: Mg. = 160 □R. = 23040 □′ = 0,3785 *ha*. — **Spanien**: Castil. Fanega = 82944 □′ = 0,643 *ha* = 1,117 Joch = 2,517 pr. Mg. 3d.

4. Körper- (Hohl- und Schicht-) Mase.

4a. **Abkürzungen.** a. alt; A. Anker; Bi. Bier, Be. Becher; C. Cubic; E. Eimer; Fd. Faden; Fu. Fuder; Fs. Fass; Ga. Gallon; Getr. Getreide; H. Handels; Hf. Hafer; Hi. Himten; Hz. Holz; K. Klafter; Ko. Korn; Ka. Kanne; *l*. Liter; Msl. Mäslein; Msk. Maskanne; Mt. Malter; Mz. Metze; O. Ohm; Ox. Oxhoft; P. Pott; Pf. Pfund; Q. Quart; Qr. Quartier; R. Ruthe; Sb. Stübchen; Sf. Scheffel; Sd. Seidel; Sp. Schoppen; St. Stecken; T. Tonne; V. Viertel; Wn. Wein; Wp. Wispel; Z. Zuber. 4a.

4b. **Metersystem.** Liter (1 *l*) = 1 Cubic-Decimeter. 1 Hectoliter (*hl*) = 100 *l* (statt Sf. u. E.). 1 C*m* od. Ster (*s*; für Hz., Stein, Kohle) sonach = 1000 *l* oder = 1 Kiloliter. Also 1 C*m* = 1*s* = 1 *kl* = 10 *hl* = 1000 *l*. 4b.

4c. **Name, Grösse, Eintheilung. Anhalt** wie Preuss. — **Baden:** 1 M. od. Msl. = 1,5 *l*; 1 Fu. = 10 O. à 10 Stütz. à 10 M. à 4 Sp.; 1. Z. (= 1 Fu.) = 10 Mt. à 10 Sester à 10 Msl. à 10 Be.; 1 K. Hz. = 6 6.4 C′. — **Baiern:** 1 Msk. u. M. = 43 Dec.-C″ = 1,069 *l*; 60 M. = 1 Wn.- u. H.-E.; 64 M. = 1 Visir- u. Bi.-E., davon 25 = 1 Fs. 1 Sf. (à 6 Mz.) = 208 Msk. = 222,357 *l*. 1 K. Hz. = 6 6.3½ C′. — **Belg.** metrisch. — **Braunschweig:** 1 Qr. = 2 Pf. r. Wass. bei 15° R. = 69 2/3 C″ = 0,937 *l*. 1 O. = 4 A. à 40 Qr. 1 Fu. = 4 Ox. à 1½ O. 1 Hi. (à 4 4c.

Körper- (Hohl- u. Schicht-) Mase. Name, Grösse, Eintheilung.

Vierfs. à 4 Mz.) = 2316 C'' = 31,145 *l*. 1 Wp. = 40 Hi. 1 Mt. Hz. = 80 C'. 1 Karre Hzkohl. = 100 C'. 1 Schachtr. = 256 C'. — **Bremen:** 1 Wn. Sb. = 3,221 *l*; 1 Bi.-Sb. = 3,772 *l*. 1 O. = 4 A. = 45 Sb. à 4 Qr. 1 Fu. = 4 Ox. à 1½ O. 1 Sf. = 74,104 *l*. 1 Last = 4 Qr. à 10 Sf. à 4 V. 1 Fd. Hz. = 6.6.2 (auch 3) C'. — **Dänemark:** 1 P. = 1/32 C' = 0,966 *l*. 1 Ka. = 2 P. à 4 Pegel. 1 Fs. od. Fu. = 2 Pip. à 2 Ox. à 1½ O. à 4 A. à 39 P. 1 Ko.-T. = 4½ C' = 139,121 *l*. 1 Last = 22 T. à 8 Sf. 1 Fd. Hz. = 6.6.2 C'. — **England:** 1 Ga. = 277,27 C'' = 4,543 *l*. 1 Last = 2 T. à 5 Qr. à 8 Bush. à 8 Ga. — **Frankfurt** a/M.: Die a. od. Aich-M. = 134⅜ C'' = 1,793 *l*. 1 Fu. = 6 O. à 80 M. Die junge od. Schenk-M. (à 4 Sp.) = 1,608 *l*. 1 Mt. (= 8600 C'' od. 114,745 *l*) = 4 Simmer à 4 Secht. à 4 Gscheid. 1 St. Hz. = 3½.3½.3 C'; 1 K. Hz. = 6 7.3 C'. — **Frankreich:** metrisch; s. oben. 1 Bordeaux Ox. = 228 *l*. — **Griechenl.:** Liter à 10 Kotyli à 10 Mystra à 10 Cubus; n. Kilo = 3,016 a. K. = 100 *l* (= französ. Hectoliter). — **Hamburg:** 1 Sb. = 226 C'' = 3,623 *l*. 1 O. = 4 A. = 5 E. = 20 V. à 2 Sb. à 4 Qr. od. P. 1 Ox. = 1½ O. = 6 A. = 217,4 *l*. 1 Bi.-T. = 48 Sb. à 4 Qr. 1 Fs. Ko. = 3872 C'' = 52,734 *l*, 1 Last = 60 Fs. à 2 Hi. à 4 Spint à 4 gr. M. 1 Wp. = 10 Sf. à 2 u. 3 Fs. 1 K. Hz. = 6 2/3 . 6 2/3 . 2 C'. — **Hannover:** 1 Sb. = 270 C'' = 3,894 *l*. 1 O. = 4 A. à 10 Sb. à 2 Ka. od. 4 Qr. 1 Hi. = 1¼ C' = 31,152 *l*. 1 Last = 16 Mt. à 6 Hi. à 4 Mz. od. Spint. 1 K. Hz. 144 C'; 1 Mt. Hz. 80 C'. — **Hess. Cassel:** 1 M. Wn. 1,9495 *l*; 1 M. Bi. 2,184 *l*. 1 O. = 20 V. à 4 M. à 4 Sp. 1 V. Ko. = 6¾ C' = 160,74 *l*. 1 Mt. = 4 V. à 2 Sf. à 2 Hi. à 4 Mz. 1 K. Hz. 6.6.4 u. 5.5.6 C'. — **Hessen Darm.:** 1 Sp. = 1 Msl. = 32 C'' = ½ *l*. 1 O. = 20 V. à 4 M. à 4 Sp. 1 Mt. = 4 Simr. à 4 Kumpf à 4 Gscheid à 4 Msl. 1 St. Hz. = 5.5.4 C'; 1 Welle Reishz. 1' D., 5' Länge. — **Holland:** metrisch m. holl Nam.: Kop statt Lit.; Schepel st. Dekal.; Mud u. Zack st. Hektol.; Wisse od. Fd. st. C*m*; 2 Mud = 1 To.; 30 Mud = 1 La. — **Holstein:** Flüss. wie Hambg. excl. Bi.-To. = ½ hamb.; Getr. etc. w. Dänemrk. **Lippe-Detm.:** 1 Ka. = 98 C'' = 1,376 *l*; 27 Ka. = 1 A. 1 Ko.-Sf. = 3154 C'' = 44,292 *l*. 7 Ko.-Sf. = 6 Hf.-Sf. — **Lippe-Schaumb.:** 1 M. = 1/20 C' = 1,221 *l*. 1 Ox. = 6 A. à 28 M. 1 Hi. = 2333½ C'' = 32,969 *l*. 1 Fu. = 12 Mt. à 6 Hi. à 4 Mz. 1 K. Hz. = 216 C' Raum. — **Lübeck:** 1 Sb. (à 4 Qr.) = 3,6375 *l*. 1 Ox. = 1½ O. = 6 A. à 5 V. à 2 Sb. à 4 Qr. 1 Sf. = 34,694 *l*; 96 Sf. = 1 Last. 1 Forst-Fd. = 14.4.3 C'. — **Mecklenb.-Schwerin:** Flüss. w. Hambg. Rostock. Sf. = 38,889 *l*. 1 Last = 24 To. à 4 Sf. à 4 Fs. 1 Fd. Hz. 7.7.3 C'. — **Meckl.-Strelitz.** Flüss. wie Hamburg. 1 Parchim. Sf. = 54,728 *l*. 1 Last = 4 Wi. = 25 Sf. 1 Fd. Hz. = 6.6.4 C'. — **Nassau:** Verschieden. 1 O. = 80 M. à 4 Sp. 1 K. Hz. = 144 C'. — **Neapel:** 1 Barile (Fs.) = 60 Caraffe = 43,625 *l*. 1 Tomolo = 4 Q. = 55,545 *l*. 1 Canna Hz. 8.8.4 Cub.-Palmi. — **Norweg.** wie Dänemark. — **Oestreich** (Wien): 1 M. od. Ka. (à 4 Seidl) = 0,0448 C' = 1,415 *l*; 1 E. Wn. = 41 M.; 1 E. Bi. = 42½ M. 1 Mz. = 1,947 C' = 61,5045 *l*; 30 Mz. = 1 Muth. 1 K. Hz. = 6.6.3 C'. — B ö h m e n: 1 Strich (à 4 V. à 4 Msl. à 12 Sd.) = 93,61 *l*; 1000 Str. = 1522 wi. Mz.; 1000 a. bö. Pint = 1350 w. M.; 100 bö. E. = 108 wi. E. — **Oldenburg** (Stadt): 1 Wn.-Ka. = 1,369 *l*; 1 Ox. = 1½ O. = 6 A. = 156 Ka. = 240 Qr.: 1 Bi.-Ka. = 1,425 *l*; 1 To. = 112 Ka.; Getr.-Ka. = Bi.-Ka. 1 Last = 12 Molt = 18 T. à 8 Sf. à 16 Ka. — **Polen:** 1 Q. = 1 *l*; 1 Fs. od. T. = 5 Ka. à 5 Garnitz à 4 Q. 1 Sf. = 128 *l*; 30 Sf. = 1 Last. — **Portugal:** 1 Canada = 1,395 *l*. 1 Almud. = 2 P. = 12 Can. 1 T. = 2 Pip = 52 Alm. 1 Alqueire = 13,841 *l*. 1 Moio = 15 Fanega = 60 Alqueire. — **Preussen:** 1 Q. = 64 C'' = 1/27 C'. 1 Fu. = 4 Ox. à 1½ O. à 2 E. à 2 A. 1 E. = 60 Q. = 20/9 C' = 68,702 *l*. 1 Gebrd. Bi. = 9 Kuf. à 2 Fs. à 2 T. à 100 Q. 1 Sf. = 16 Mz. = 3072 C'' (nahe 16/9 C') = 54,9615 *l*; 1 Mz. = 3 Q.; 1 Last = 2½ Wi. à 2 Mt. à 12 Sf.; 1 T. (Kalk, Kohlen) = 4 Sf. 1 K. (Hz., Steine, Torf) = 6.6.3 C'. 1 Schacht-R. = 144 C'. — **Rom:** 1 Boccale Wn. = 1,823 *l*; 32 Boc. = 1 Barile; 1 Boc. Oel = 2,053 *l*; 28 Boc. = 1 Bar. 1 Rubbio (à 4 Q.) = 294,5 *l*. — **Russland:** 1 Wedro = 10 Kruschka = 8 Stoof = 750,57 C'' = 12,299 *l* = 30 Pf. r. Wass.; 40 Wedro = 1 Botschka (T.). 1 Tschetwert = 8 Tschertwerik à 1601,2 C'' od. 26,238 *l* od. 64 Pf. Wass. bei 15^0 R. — **Sachsen** (Dresd.): 1 Ka. = 71,186 C'' = 1,868 n. Pf. dest. Wass. bei 15^0 R. (= 2 a. Pf.) = 0,9356 *l*. Nahe 24 3/11 Ka. = 1 C'; 72 Ka. = 1 E.; 1 Fs. Bi. = 4 T. à 105 Ka. 1 Sf. = 7900 C'' (nahe 32/7 C') od. 103,729 *l*. 1 Wp. = 2 Mt. à 12 Sf. à 4 V. à 4 Mz. à 4 Msl. 1 K. Hz. = 6.6.3 C'. 1 T. Kohl. = 2 Sf. 1 R. Steine = 16.16.3 C'. — **S. Altenburg:** 1 E. = 1 Dresd. E. = 60 Ka. (à 1 1/6 Dresd. Ka.). 1 Mt. = 2 Sf. à 146,972 *l*. — **S. Coburg:** 1 E. = 80 M. = 77,345 *l*. 1 Ko. Simr. = 88,946 *l*. — **S. Gotha:** 1 E. = 40 Ka. = 5285 C'' = 72,77 *l*. 1 Sf. = 2 V. à 3171 C'' od. 43.66 *l*. — **S. Weimar:** 1 E. = 80 M. od. Ka. = 71,708 *l*. 1 Sf. = (84 M.) = 75,294 *l*. 1 K. Hz. = 6.6.3½ C' 1 R. Steine = 16.16.2 C'. — **Sardinien** wie Frankr. — **Schleswig** wie Holstein. — **Schweden:** 1 O. od. Fs. = 4 A. = 60 Kannor (à 2 Stop à 4 Q.) = 6 C'; 1 T. Ko. = 2 Span (à 4 V. à 4 Kappar) = 5,6 C' (im Handel 6,3 C'); 1 Fd. Hz. = 144 C'. — **Schweiz** wie Baden. — **Spanien:** 1 Kastil. Moyo = 16 Cantara (à 4 Cuartilla à 2 Azumbre à 4 Cuartillo à 0,5043 *l*) = 258,2 *l*; 1 Kastil. Fanega Ko. = 4 Cuartilla = 54,8 *l*. — **Württemberg:** 1 Helleich M. = 78⅛ C''; 1 E. = 293,93 *l* = 16 Imi à 10 M. à 4 Sp. od. Q.; 1 Fu. = 6 E.; 1 Schenk-M. = 10/11 Hell.-M. 1 Sf. = 7537 C'' = 177,23 *l* = 8 Simr. à 4 Vierling à 4 Msl. à 2 Eckl. 1 Sf. Kalk = ¼ E.; 1 K. od. Mess Hz. = 6.6.4 C'.

5. Flüssigkeitshohlmase.

5 a.

Frankr. Liter 0,001 C'm.	Englnd. Gallon 277,271 C''	Russlnd. Kruschka 75,06 C''	Oestrch. wien. Mas 0,0448 C'	Preuss. Quart 1/27 C'	Baiern. Maskanne 0,043 C'	Sachsen. Kanne 71,186 C''	Hannov. Quartier 67,5 C''	Württb. Hell Mas 78 1/8 C''	Hess. C. Mas 98,28 par. C''	Baden. Mas 1/18 C'	Hess. D. Mas 0,002 C m.
1 l =	2,220	0,813	0,707	0,873	0,935	1,069	1,027	0,544	0,513	2/3	½
4,543	1 G.	3,694	3,211	3,968	4,250	4,856	4,667	2,473	2,330	3,029	2,272
1,230	0,271	1 K.	0,869	1,074	1,150	1,314	1,263	0,669	6,631	0,820	0,615
1,415	0,311	1,151	1 M.	1,236	1,324	1,488	1,454	0,770	0,726	0,943	0,708
1,145	0,252	0,931	0,809	1 Q.	1,071	1,224	1,176	0,623	0,587	0,763	0,572
1,069	0,235	0,869	0,756	0,934	1 M.	1,143	1,098	0,582	0,548	0,713	0,534
0,936	0,206	0,761	0,661	0,817	0,875	1 K.	0,961	0,509	0,480	0,624	0,468
0,973	0,214	0,792	0,688	0,850	0,911	1,040	1 Q	0,530	0,499	0,649	0,481
1,837	0,404	1,494	1,298	1,604	1,718	1,963	1,887	1 hM.	0,942	1,225	0,918
1,949	0,429	1,585	1,378	1,703	1,824	2,084	2,003	1,061	1 M	1,300	0,975
1,5	0,330	1,220	1,060	1,310	1,403	1,603	1,541	0,816	0,769	1 M.	¾
2	0,440	1,626	1,413	1,747	1,871	2,138	2,054	1,089	1,026	1 1/3	1 M.
1 C m	Davon enthält 1 landübl. C' theils genau (theils nahe):										
1000	6,23	(23)	(22,3)	27	(23¼)	24 3/11	25,6	(22,1)	12	18	13½

5 b.

5 c.

p. = pariser; pr. = preussisch	Brnschw. Quartier 52 4/11 pr C''	Bremen. Stübchen 162,1 p. C''	Coburg. Mas 48,71 p. C''	Frf. a/M. Aichmas 90,384 p. C''	Gotha. Kanne 132 1/8 C''	Hambg. Stübchen 266 C''	Lübeck. Stübchen 138,38 p. C''	Oldenbg. St. Oldenb. Wein-Ka.	Weimar. Schenk-M. od. Kanne.	Dänemk. Pott 32 = 1 C'	Schwed. Kanne 0,1 C'
1 Liter, 1 wien. Mas, 1 preuss. Quart enthält von Obigem:											
1 Lit.	=1,067	=0,310	=1,034	=0,558	=0,550	=0,276	=0,275	=0,730	=1,116	=1,035	=0,382
1 w.M	1,510	0,439	1,464	0,769	0,777	0,391	0,389	1,034	1,579	1,464	0,541
1 pr.Q.	1,222	0,356	1,185	0,639	0,630	0,316	0,315	0,836	1,277	1,185	0,437
1 Obiges hat Liter, wien. Mas, preuss. Quart:											
Liter :	0,937 :	3,221 :	0,967 :	1,793 :	1,819 :	3,620 :	3,637 :	1,369 :	0,896 :	0,966 :	2,617
w. M. :	0,662 :	2,277 :	0,683 :	1,267 :	1,285 :	2,559 :	2,571 :	0,967 :	0,633 :	0,683 :	1,849
pr.Q. :	0,818 :	2,813 :	0,844 :	1,566 :	1,588 :	3,162 :	3,177 :	1,195 :	0,783 :	0,844 :	2,286

Schweiz w. Bad.; Mecklb., Schlsw.-Holst. w. Hamb.; Norwg. w. Dän. Pol. Q = l.

6. Trockenhohlmase.

6 a.

Frankr. Hectoliter 0,1 C m.	England. Bushel = 8 Gallon.	Russlnd. Tschtwrk. 25/27 C'	Oestrch. wi. Metzn 1,917 C'	Preussen. Scheffel 3072 C''	Baiern. Scheffel 8,914 C'	Sachsen. Scheffel 7900 C''	Hannov. Himten 1 ¼ C'	Württmb. Scheffel 7,537 C''	Hess. C. Viertel 6 ¾ C'	Baden u. Schweiz. Mltr. 50/9 C'	Hess. D. Malter 8,192 C'
1 hl =	2,751	3,814	1,626	1,819	0,450	0,963	3,210	0,564	0,622	2/3	25/32
0,363	1 B.	1,386	0,591	0,661	0,163	0,350	1,167	0,205	0,226	0,242	0,284
0,262	0,721	1 Tk	0,426	0,477	0,118	0,252	0,842	0,148	0,163	0,175	0,205
0,615	1,692	2,346	1 M.	1,119	0,277	0,592	1,974	0,347	0,383	0,410	0,480
0,550	1,512	2,096	0,894	1 S.	0,247	0,529	1,764	0,310	0,342	0,366	0,429
2,224	6,117	8,481	3,615	4,046	1 S.	2,142	7,138	1,255	1,383	1,482	1,737
1,038	2,856	3,960	1,688	1,889	0,467	1 S.	3,333	0,586	0,646	0,692	0,811
0,311	0,857	1,188	0,506	0,567	0,140	0,300	1 H.	0,176	0,194	0,208	0,243
1,772	4,876	6,760	2,881	3,225	0,797	1,707	5,689	1 S.	1,103	1,181	1,385
1,607	4,422	6,130	2,614	2,925	0,723	1,548	5,160	0,907	1 V.	1,072	1,256
1,5	4,127	5,721	2,439	2,729	0,675	1,445	4,815	0,846	0,933	1 M.	1,172
1,28	3,522	4,882	2,081	2,329	0,576	1,233	4,109	0,722	0,798	0,853	1 M.
1 C m	Davon enthält 1 landübl. C' theils genau (theils nahe):										
= 10	(0,78)	1,08	20/39	9/16	(1/9)	(7/32)	0,8	(2/15)	4/27	(0,18)	(0,123)

6 b.

6 c.

p. = pariser; pr. = preussisch.	Brnschw. Himten. 2316 C''	Bremen. Scheffel 3736 p. C''	Frkf. a/M. Malter 8600 C''	Gotha. Viertel 3171 C''	Hamburg. Fass 3872 C''	Lübeck. Korn-Schfl. 1749 p. C''	M. Schw. Rostocker Scheffel.	Oldenbg. Gemeiner Scheffel.	Weimar. W. Markt-Scheffel.	Dänemk. Korn-To. 4,5 C'	Schwed. Korn-To. 6,3 C'
1 Hectoliter, 1 wien. Metzen, 1 preuss. Scheffel enthält von Obigem:											
1 H.	=3,211	=1,350	=0,871	=2,290	=1,897	=2,883	=2,572	=4,386	=1,328	=0,719	=6,606
1 w.M.	1,975	0,830	0,536	1,408	1,166	1,772	1,581	2,697	0,810	0,442	0,373
1 pr.S.	1,765	0,742	0,179	1,258	1,043	1,584	1,413	2,411	0,724	0,395	1/3
1 Obiges enthält Hectoliter, wien. Metzen, pr. Scheffel:											
Hectl. :	0,311 :	0,741 :	1,147 :	0,437 :	0,527 :	0,347 :	0,389 :	0,228 :	0,753 :	1,391 :	1,649
w. M. :	0,506 :	1,205 :	1,866 :	0,710 :	0,858 :	0,564 :	0,632 :	0,371 :	1,234 :	2,263 :	2,681
pr. S. :	0,567 :	1,348 :	2,088 :	0,795 :	0,959 :	0,631 :	0,708 :	0,415 :	1,381 :	2,531 :	3

Handl.-, Medic.- u. Münz-Gew. Name, Grösse, Eintheilg. Vergleichgstaf.

7. Gewichte.

7a. 7a. **Abkürzungen.** A. u. a. alt; Ct. Centner; D. u. d. Deutsch; *g* Gramme; G. Gewicht; H. Handels; *kg* Kilogramm; *l* Liter; Lt. Loth; *m* metrisch; Mk. Mark; n. neu; ö. östreichisch; Pf. Pfund; pr. preussisch; Q. Quent; sd. süddeutsch; Sf. Schiff; Sl. Schal; St. Stein; To. Tonne; V. Verein; W. destill. Wasser; Z. Zollverein.

7b. 7b. **Metrisches G.** 1 *g* = G. v. 1 Cub.-Centim. W. bei 4° Cent.; 1 *kg* = 1000 *g* = G. v. 1 *l* od. v. 0,001 C^m W. Metrisches Pf. (*m*Pf.) = ½ *kg* = 500 *g*; *m*Ct. = 100 Pf. = 50 *kg*. — : in Frankr. (Quintal = 100 *kg*; Millier = 1000 *kg* = 1 Cubicm. W. G. = *m*Tonne in Engl. etc.), Belg., Sard., Dänem. (1 Sf.-Pf. = 20 Lis-Pf. à 8 *kg*); Holl (1 Pond = 1 *kg* = 10 Oncen à 10 Lood); Spanien.

7c. 7c. **Deutsch. G.** 1 Pf. (d.-ö. Z.- u. Postv.-Pf. à 30 Lt.) = *m*Pf.; 100 = 1 C. Zugleich n. G. in Preuss. (1 Sf.-Last = 40 Ct. à 100 Pf. à 30 Lt. à 10 Q. à 10 Cent à 30 Korn), Sachs., Würtb., Hannov., Braunschw., Weim., Oldenb., Hamburg, Bremen etc.; früher schon in Schweiz u. Rheinstaaten (1 Ct. = 10 St. à 10 Pf. à 32 Lt. od. 100 Centass od. 10000 Ass).

7d. 7d. **Uebrige Länder.** Engl.: 1 Pf. „*Avoirdupoids*" = 453,6 *g*.; 1 Pf. Troy G. = 5760 Grän = 373,25 *g*; 1 To. = 20 Ct. à 112 Pf. — Griechenl.: n. Drachme = 1 *g*; n. Mine = 1½ *kg* = 3 d. Pf. 1 Ton. = 10 Talente = 100 Min. = 150 *kg*. — Oestr.: Wien. Pf. = 560,012 *g*; 1 Ct. = 5 St. à 20 Pf. à 32 Lt. à 4 Qt. — Russl.: Pf. = 409,52 *g*; 1 Sf.-Pf. = 10 Pud à 40 Pf. à 32 Lt. à 3 Solotnik. — Baiern: (fast = Oestr.); Pf. = 560 *g*; Ct. = 5 St. = 100 Pf. à 32 Lt. — Portugal: Ct. = 128 H.-Pf. à 459 *g*. — Span.: Metrisch (a. Cast. Pf. = 2 Mk. = 460,1 *g*; 1 Quint. = 100 u. 150 Pf. — Schwed.: 1 Ct. = 6 Lis-Pf. à 20 Schal-Pf. à 425,3 *g*.

7e. 7e. **Bisherige u. ält. G.** A. Pariser Pf. = 489,506 *g*; a. Köln. G.: 1 Pf. = 2 Mk. = 16 Unz. = 467,6 *g*; Preuss.: Pf. = 2 Mk. = 576 Grän = 467,711 *g*; 1 Sf.-Last = 4000 Pf.; 1 Ct. = 5 St. à 22 Pf. à 32 Lt. à 4 Qt.; ebenso Hess. C., Mecklb. Str., Weim., Hannov. mit Braunschw. (100 Pf. = 1 Ct.): Sachsen (1 leipz. Pf. = 467,214 *g*); Würtb. (104 Pf. = 1 Ct., genau 1 Pf. = 467,728 *g*). — Mecklb. Schw., Holst. u Lübeck: 1 Ct. = 112 H.-Pf. à 484,7 *g*. — Oldenb.: 1 Ct. = 100 H.-Pf. à 480,4 *g*. — Bremen: 1 Ct. = 116 H.-Pf. à 489,5 *g*; 4000 Pf. = 1 Last. — Hamb.: 1 Ct. = 112 Pf. à 484,2 *g*; 1 Sf.-Pf. = 20 Lis Pf. à 14 Pf.; 1 Last = 4000 Pf.

7f. 7f. **Medicinal-G.** ℥ = Unze, ʒ = Drachme, ℈ = Skrupel, gr. = Grän; β = ½, i = 1, ij = 2, ijj = 3; 1 ℥ = 8 ʒ = 24 ℈ = 280 gr. — Frankr.: Medic.-Pf. = *m*Pf. = ½ *kg* = 16 ℥ à 8 ʒ à 72 gr. — Engl.: Med.-Pf. = 12 ℥ = Troy Pf. — Oestr., Preussen etc.: Med.-Pf. = ¾ a. H.-Pf. = 12 ℥. — Baiern: Med.-Pf. = $^9/_{14}$ H.-Pf. = 360 *g* = 12 ℥.

7g. 7g. **Gold-, Silber-, Münz- u. Juwel-G.** Frank. u. deutsch. Münzv.: das *m*Pf. in 1000 theile à 10 Ass. — Engl.: das Troy-Pf.; 1 Juw. Karat = 0,2055 *g*. — Preuss.: Juw.-G. = n. H.-G.

A. pr. Münz G.: 1 Mk. = ½ H.-Pf. = 233,85 *g*
A. ö. Münz-G.: 1 wien. Mk. = 280,64 *g*
5 wien. Mk. = 6 pr. Mk.

} 1 Mk. = 16 Lt. (à 4 Qt. à 4 Pfennig-G.) = 24 Karat = 288 Grän. — Silb.-Mk = 16 Lt. à 18 gr.; Go.-Mk. = 24 Kar. à 12 gr.

7h. 7h. **Vergleichungstafel f. Kilogramm u. Pfund.**

Frankreich.	Alt. Paris.	England.	Deut. *m* Pf.	Oestreich.	Alt. Preuss.	Alt. Köln.	Schweden.	Russland.
1 *kg* =	2,0429	2,2046	2	1,7857	2,1381	2,1385	2,3511	2,4419
0,4895	1 Pf.	1,0792	0,9790	0,8741	1,0466	1,0468	1,1509	1,1953
0,4536	0,9266	1 *Av.*	0,9072	0,8100	0,9698	0,9700	1,0664	1,1076
½	1,0214	1,1023	1 Pf.	0,8929	1,0690	1,0692	1,1755	1,2209
0,5600	1,1440	1,2346	1,1200	1 Pf.	1,1973	1,1976	1,3166	1,3675
0,4677	0,9555	1,0311	0,9354	0,8352	1 Pf.	1,0002	1,0996	1,1421
0,4676	0,9553	1,0309	0,9352	0,8350	0,9998	1 Pf.	1,0994	1,1419
0,4253	0,8689	0,9377	0,8507	0,7595	0,9094	0,9096	1 Sl. P	1,0386
0,4095	0,8366	0,9028	0,8190	0,7313	0,8756	0,8757	0,9628	1 H. Pf.
Bel. etc. s. 7 b.	Siehe 7 c.			(Bai.)	Würt.; Hes. C. etc. s. 7 e.			

Preuss. A. u. N. Gew.

Neues in altes:

1 n. Ct. = 0,971851 a. Ct.
1 n. Pf. = 1,069036 a. Pf. = 1 Pf. 2 Lt. 0,84 Q. a. G.
1 n. Lt. = 1,140305 a. Lt.
1 n. Q. = 0,456122 a. Q.

Altes in neues:

1 a. Ct. = 1,028964 n. Ct.
1 a. Pf. = 0,935422 n. Pf. = 28 Lt. 0 Q. 6 C. 2⅔ Ko.
1 a. Lt. = 0,876958 n. Lt.
1 a. Q. = 2,192395 n. Q.

8. Geld.

8a. 8a. **Abkürzungen**: Wie in 7a; dazu: B. Banco; *c* Centimes; Cr. Currant; f. fein; fl. Gulden; gr. (Silber- oder Neu-) Groschen, 30 = 1 thlr.; gt. (brem.) Grote, 72 = 1 thlr. Gold; kr. Kreuzer; ko. Kopeke; Mk. Mark; pfg. Pfennig; s. Schilling; st. Stüber; thlr. u. t. (n. deutsch) Thaler.

8b. 8b. **Silberwährung.** Deutscher Münz-V.: 30 V.-thlr. = 45 ö. fl. = 52½ sd. fl. = 1 Z.-Pf. f. Silb., geprägt 0,9 f.; G. v. 27 thlr. od. 13½ Doppelthlr. = 500 *g* = 1 Pf.; Durchm. des V.-thlr. = 33 *mm*, des V.-Doppelthlr. = 41 *mm*. — Scheidemünze: 1 Pf. f. S. zu 34½ thlr. od. 15¾ ö. fl. od. 60⅜ sd. fl. — Der a. thlr. ist um $^1/_{450}$ besser als der n., im H. als = genommen. — Preuss. theilt den gr. in 12, die andern Thalerstaaten in 10 pfg.; Oestr. den fl. in 100, die übrigen Guldenstaaten in 60 kr. — 4 thlr. (à 30 gr. à 12 u. 10 pfg.) = 6 fl. ö. (à 100 kr.) = 7 fl. sd. (à 60 kr.) — In Oest. ist verord.: 100 a. (Conv.-) fl. = 105 n. fl.; 1 a. fl. = 105 nkr.; 1 a. 20 kr. (*lire austriace*) = 35 nkr.; 3 a. kr. = 5 n. (= 1 gr.) —

Geldsorten: Name, Grösse, Vergleichungstaf. Desgl. für Landflächen-C'.

Frankr., Sard., Schweiz: nach Francs (lire n.) à 100 *c* (Centesimi, Rappen); 0,9 f. geprägt; 1 Frc. = 4½ *g* Silb. + ½ *g* Kupf. = 5 *g* rauh G.; 100 Frc. wiegen 500 *g*. — Dänem.: ReichsBdaler = 6 Mk. à 16 s. — Griechenl.: n. Drachme (à 100 Lepta) = 0,2412 t. = 7,236 gr. — Hambg.: Mk.B. u. Mk.Cr. (= Lüb.) à 16 s. à 12 pfg. (vgl. 8d). — Neapel: 1 Ducato (à 100 Grani à 10 Cavalli) = 1 t. 4,5 gr. — Brit. Ostind.: 1 n. Compagn. Rupie (= $^{15}/_{16}$ a. R.) = 19.2 gr.; 1 Lac = 100000 R. = 64000 thlr. ca. — Portug.: 1 Reis = 0,049 gr.; 1 Milreis = 1 thlr. 18,7 gr. — Rom: 1 Scudo (à 100 Bajochi) = 1 t. 13,4 gr. — Schwed.: n. Rixdaler = ¼ Rixd. Spec. = 48 s. (à 4 st.) = 11,45 gr. — Span.: 1 Reale de Vellon = 1¼ gr.; 1 Reale de Plata = 4$^{1}/_{12}$ gr. — Türkei: 15-17 Piaster = 1 t.; 1 Beutel Si. = 500 Piaster = 31 thlr. ca.

8c. Gold. Deutscher Münz-V.: 1 *m*Pf. f. Gold = 50 Kronen = 100 halbe Kr.; zu 0,1 f. geprägt u. 24*mm* resp. 20*mm* Durchm.; 45 ganze od. 90 halbe Kr. = 1 Pf. = 500 *g* rauh G. — Engl.: 1 Guinee = 1,05 Sovereign = eigentl. u. ursprüngl. Pound Sterling (à 20 s. à 12 pence). — Frankr.: Napoleond'or à 20 fr. (Silberw.) so geprägt, dass 1 Pf. Gold = 15½ Pf. Si. — Preuss.: 38$^{10}/_{13}$ Friedrichsd'or (à 5 thlr. Go. od. (officiell) 5$^{2}/_{3}$ thlr. Si.) = 1 Mk. f., so dass 1 Pf. Go. = 15$^{9}/_{13}$ Pf. Si. = 470,8 thlr. Si., od. 1 thlr. Go. = 1,133 thlr. Si. — Anderer Länder Goldmünzen: nach Cours gewöhnl. mit 8-11% Agio; z. B. 1 Louisd'or = 1 Pistole = 5 thlr. Go. = 5,4-5,6 thlr. Si. — Bremen: 1 thlr. Go. = 72 Groten G., davon 66$^{6}/_{13}$ = 1 pr. thlr. — Oestr.: Ducaten = 4½ ö. fl. + 4-5% Aufgeld. — Ostind.: 1 Goldrupie = 16 Silberrup. — Türkei: 1 Beutel Gold = 60 Beutel Silber. 8c.

8d. Vergleichungen. 8d.

	Franc à 100 *c*	Pf.Sterl. à 20 s.	Oe.fl. 100nkr	Südd.fl. à 60 kr.	Hambg. Mark Currant 16 s.	Hambg. Mark Banco 16 s.	Holl. n. fl.	Dänmk. RBthlr.	P.Rubel 100Kop.	Dollar 100 *c*
1 deutsch. Thaler à 30 (Silber- od. Neu-) gr. ist im Obstehenden = 1 t.	=3¾	= ($^{3}/_{20}$)	= 1½	= 1¾	= 2½	= 1,978	=1,764	= 1,318	= 0,929	= 0,7
1 Obstehendes hat in deutsch. Grosch. (30 = 1 t.) einen Werth v.	8 :	200 :	20 :	17$^{1}/_{7}$:	12 :	15$^{1}/_{6}$:	17 :	22¾ :	32¼ :	42$^{6}/_{7}$

1$^{3}/_{7}$ t. o.

1 deutshh. Grosch = 12,5 franz. *c* = 1,12 engl. pe. = 5 ö. kr. = 3$^{1}/_{2}$ sd. kr. = 1$^{1}/_{3}$ hamb. s. Cr. = 2,16 brem. gt. = 5,89 holl. *c* = 4,29 dän. s. = 4,19 schwed. s. = 3,09 russ. ko.

9. Feld- und Waldflächen-Cubicfusse.

(Holzmassenerträge in Cubicfussen, Klaftern etc.)

Es bedeutet p. per od. pro. V. Vermessung. Wd. Wald. Vergl. auch 3. S. 27.

9a.

Oestrch. C' p. Jo.	Preuss. C' p. Mg.	Baiern. C' p. Tgw.	Sachsen. C' p. Ak.	Hannov. C' pro Wd. Mg.	Würtbg. C' p. Mg.	Hess. C. C' p. Ak.	Baden. C' p. Mg.	Hess. D. C' p. Mg.	Brnschw. C' pro Wd. Mg.	Meckl.S. C' pro Wd. Mg.	Weimar. C' p. Ak.
1 =	0,453	0,752	1,337	0,577	0,736	0,549	0,732	0,878	0,788	0,506	0,698
2,206	1	1,660	2,951	1,273	1.623	1,212	1,614	1,937	1,738	1,117	1,539
1,330	0,603	1	1,778	0,767	0,978	0,730	0,973	1,167	1,047	0,673	0,927
0,748	0,339	0,562	1	0,432	0,550	0,411	0,547	0,657	0,589	0,379	0,522
1,733	0,785	1,303	2,317	1	1,275	0,951	1,268	1,521	1,365	0,877	1,209
1,359	0,616	1,023	1,818	0,785	1	0,747	0,995	1,194	1,071	0,688	0,948
1,821	0,825	1,370	2,435	1,051	1,340	1	1,133	1,599	1,435	0,922	1,250
1,367	0,619	1,028	1,828	0,789	1,005	0,750	1	1,2	1,077	0,692	0,953
1,139	0,516	0,857	1,523	0,657	0,838	0,625	$^{5}/_{6}$	1	0,897	0,577	0,794
1,269	0,575	0,955	1,698	0,733	0,934	0,697	0,929	1,115	1	0,643	0,866
1,975	0,895	1,485	2,641	1,140	1,453	1,084	1,445	1,734	1,556	1	1,378
1,434	0,650	1,078	1,917	0,827	1,055	0,787	1,049	1,259	1,129	0,726	= 1
Anh.; Cobg. VC' p. Wd. Mg.				. .	. .	Schweiz p. Juchart.			. .	. .	. .

9b. Annähernd bis auf mindestens 1 Procent genau*): 9b.

Altenb. p. Ack. = Weim. × $^{20}/_{9}$. Dänemk. p. To. = Oestr. × $^{11}/_{12}$. Engl. p. Ack. = Braunschw. minus 0,0004. Frankr., Belg. und Holl. Cub.-Met. p. Hect. = Preuss. × 0,12 (auch 0,1 Hess. C.). Gotha p. W. Ack. = Bai. × 1,1. Nassau p. Morg. = Preuss. × 1,12. Norw p. To. = Oestr. × 0,7. Oldenbg. p. Jück = Preuss. × 2⅛. Russl. p. Dessät. = Oestr. × 2⅛. Schwed. p. To. = Preuss. × 1,8.

*) Um z. B. Taf. 9a. für russisch. u. französ. Umrechnungen zu benutzen od. zu vervollständ., folgt aus 9b. für die landübl. C' pro landübliche Flächeneinheit

in Russland		Oestr.		Preuss.		Baiern.		für C^m p. Hectar.
1 × 2⅛	=	1	=	0,453	=	0,572	=	0,453 × 0,12; etc.
2,206 × 2⅛	=	2,206	=	1	=	1,660	=	1 × 0,12; etc.
1,330 × 2⅛	=	1,330	=	0,603	=	1	=	0,603 × 0,12; etc.

Feldflächen-Hohlmas u.-Gew.; Lauf.-Quadrat-, Cub.-Mas- u. Wasser-Gew.

10. Feldflächen-Hohlmas u. 11. Feldflächen-Gewicht.

Frankreich. pro Hectar.	England. pro Acker.	Russland. pro Dessät.	Oestreich. pro Joch.	Baiern. pro Tagwk.	Sachsen. pro Acker.	Hannover. pro Fd. Mo.	Würtemb. pro Morgen	Hess. Cassel p. Cass. Acker.	Bad. u. Schwz Mg u. Juchart	Hess. Dmst. pro Morgen	Braunschw. pro Fd. Mg.

10. *) **10 a.** Wenn auf 1 preuss. Morgen 1 preuss. Scheffel kommt, so kommen auf Obiges an landübl. Hohlmas:

2,1526 =	2,3966 =	1,1204 =	2,0145 =	0,3299 =	1,1484 =	1,8112 =	0,3828 =	0,6392 =	0,5166 =	0,4204 =	1,7290
Hectol.	Bushel.	Tschwt.	Metzen.	Scheff.	Scheff.	Himten.	Scheff.	Scheff.	Malter.	Malter.	Himten.

10 b. Wenn auf obige Flächeneinheit 1 landübl. Mas (Hectol., Bushel, Tschwt etc.) kommt, so kommen auf 1 pr. Mg pr. Scheffel:

0,4645 :	0,4173 :	0,8925 :	0,4964 :	3,0316 :	0,8708 :	0 5521 :	2,6122 :	1,5644 :	1,9356 :	2,3785 :	0,5784

11. *) **11 a.** Wenn auf 1 preuss. Morgen 1 a. preuss. Pfund kommt, so kommen auf Obiges an landübl. Gewichte:

1,8318 =	1,6343 =	4,8872 =	1,8826 =	1,1146 =	2,1704 =	1 0265 =	1,2344 =	0,9531 =	1,3819 =	0,9159 =	0.9798
Kilogr.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	a. Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund	Pfund.	Pfund.	Pfund.

11 b. Wenn auf obige Flächeneinheit 1 landübl. Pfund (oder Kilogr.) kommt, so kommen auf 1 prs. Mg. alte prs. Pfunde:

0,5459 :	0,6120 :	0,2046 :	0,5312 :	0,5972 :	0,4607 :	0,9741 :	0,8101 :	1,0192 :	0,7582 :	1,0918 :	1,0206

12. Hohlmas-Gewicht u. 13. Cubicfuss-Gewicht.

Frnkr. Hectoliter.	Engl. Bushel.	Russl. Tschetwert.	Oestr. Wiener Metzen.	Baiern. Scheff.	Sachsen. Scheff.	Hannover. Himten.	Würtemb Scheff	Hess. Cass Viertel.	Bad. u. Schwz Malter.	Hess. Dmst. Malter.	Braunschw. Malter.

12. *) **12 a.** Wenn auf 1 prs. Scheffel 1 alt. prs. Pfund kommt, so kommt an landübl. Gewicht auf ein Obiges:

0,8510 =	0,6819 =	4.3620 =	0,9345 =	3.3790 =	1,8900 =	0,5668 =	3.2244 =	2,9250 =	2,5529 =	2 1785 =	0,5667
Kilogr.	Pfund.	Pfund.	Pfund	Pfund.	a. Pfd.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.

12 b. Wenn 1 Obiges 1 landübl. Pfund (oder Kilogr.) wiegt, so wiegt ein preuss. Scheffel nach preuss. Pfunden:

1,1751 :	1,4665 :	0,2292 :	1,0701 :	0,2959 :	0,5291 :	1,7643 :	0,3101 :	0,3419 ;	0,3917 :	0,4590 :	1,7647

13. *) **13 a.** Wenn auf 1 preuss. Cubicfuss 1 a. preuss. Pfund kommt, so kommen landübl. Pfunde (oder Kilogr.) auf einen

Cub.*m*.	Engl C′	Russ. C′	Oest. C′	Bair. C′	Sächs C′	Han. C′	Wrtb. C′	Cass C′	Bad C′	Dmst. C′	Br. C′
15,129 =	0,9444 =	1,0461 =	0,8533 =	0,6716 =	0,7356 =	0,8061 =	0,7606 =	0,7702 =	0,8169 =	0,4728 =	0,7516

13 b. Wenn 1 Obiges 1 landübl. Pfund (oder Kilogr.) wiegt, so wiegt 1 preuss. Cubicfuss nach alt. preuss. Pfunden:

0,0660 :	1,0589 :	0,9559 :	1,1720 :	1,4889 :	1,3595 :	1,2405 :	1,3148 :	1,2983 :	1,2241 :	2.1152 :	1,3304

14. Laufendfuss-Gewicht.

kg pro *m* u. (a.) Pfunde pro Fuss.

	Frankr.	Engl.	Oestr.	Prss. (a)	Baden.
14.	1 =	0,672	0,564	0.671	0,6
	1,488	= 1 =	0,84	0,999	0,893
	1,772	1,19	= 1 =	1,189	1,063
	1,49	1,001	0.841	= 1 =	0,894
	1 2/3	1,12	0,941	1,118	= 1

15. Quadratzoll-Gewicht.

kg pro □*cm* u. (a.) Pfunde pro □Zoll.

	Frankr.	Engl.	Oestr.	Prss (a)	Baden.
15.	1 =	14,22	12,39	14.62	18
	0,0703	= 1 =	0,871	1,028	1,265
	0,0807	1,147	= 1 =	1,180	1,453
	0,0684	0,972	0,847	= 1 =	1,231
	0,0556	0,791	0,688	0 812	= 1

Z. B.: Wovon 1 *m* 5 *kg* wiegt, davon wiegt 1 engl. Fuss 5 × 0,672 engl. Pfde.

16. Meterkilogramm (*mkg.*; 75 = 1 secundl. Pferdeleist.) in Fusspfunden.

16.	Engl.	Oestr.	Preus.	Baier.	Sachs.	Hann.	Wtb.	Hes. C.	Baden	Hes. D.	Brsch.
1 *mkg.* =	7,23	5,66 a.	6,81 a.	6,12 a.	7,55 a.	7,32 a.	7,47 a.	7,43 a.	6 2/3	8	7,49 a.
	Fsspf.	6,33 n.	6,37 n.	6,85 n.	7,06 n.	6,85 n.	6,98 n	6,95 n.			6,1 n.

Anhang über Körpergewichte.

17. Cubicfuss-Wassergewicht in landübl. Pf. b. mittl. Temp. (19° C).

(Auch zur Vergleichung von Cubicfuss-Gewichten überhaupt; wie Nr. 13.)

17. C*m*.	Engl.	Oestr.	Preuss.	Baier.	Sachs	Hann.	Wtb.	Hes. C.	Baden	Hes. D.	a. Par.
b. 4° C.	62,33	56,32	66 a.	44,33	48,89 a	53,20 a	50,20	60,83	53,6	31,20	69,92
1000			61,738 n		45,35 n	49,76 n			b. 4° C.	b. 4° C.	
	Bei 4° C. 1,008 mal so viel od. fast 1% mehr.								54	31,25	

1 preuss. C′ = 61,73785 Zollpfund; 1 prs. C″ = 1,07184 Zollloth; } b. mittl.
1 n. o. Zollpfund = 27,9893 C″ W.; 1 Zollloth = 0,93298 C″ W. } Temper.

---

*) Unter „landüblich“ (od. a.) ist das bisher gebräuchliche ältere gemeint, ausser wo ein n. (neu) beigefügt ist.

18. Specifisches Gewicht. (Wasser = 1; excl. 18 d.)

Abkürz. d. dürr, chemisch trocken; f. fett, frisch, feucht; geb. gebrannt; geg. gegossen; geh. gehämmert; gem. gemein; gew. gewalzt; gez. gezogen; gr. grün; h. hart; m. im Mittel; n. nass, mit Wass. gesätt.; t. (luft-) trocken; w. weich.

18 a. Feste Körper als Derbmasse. **A**labaster 2,70. Alaun 1,75. Alaun- 18 a.
schiefer 2,34 - 2,59. Anthracit 1,4 - 1,5. Antimon 6,70. Arsenik 5,63 - 5,96. Asbest 2,10 - 2,80. Asfalt 1,07 - 1,16. — **B**asalt 2,72 - 2,86. Bausteine m. 2,5. Bernst. 1,07. Bimstein 0,91 - 1,65. Blei deutsch 11,33 - 11,45; engl. 11,6. Bleiglätte 9,3 - 9,4. Bleiglanz 7,4 - 7,6. Bolus 1,97. Borax 1,72. Braunkohle 1,2 - 1,4. Braunstein 3,72. Butter 0 94. — **C**autschuk 0,93. — **E**is 0,92. Eisen geg. 7,0 - 7,5; geh. 7,6 - 7,8; gez. 7,6 - 7,75. Elfenbein 1 80 - 1,92. Erde mag. u. tr. bis schwer u. fr. 1,36 - 2,4 **F**eldspath 2,28. Feldstein m. 2,5. Fett 0,92 - 0,94. Feuerstein 2,6. — **G**almei 3,38. Gelberde 2,24. Glas: FenstG. 2,64; KrystG. 2,89; FlintG. 3,2 - 3,8. Glocknmtall 8,81. Gneis 2,4 - 2,7. Gold ged. 14 - 19; geg. 19,25; geh. 19,5; Ducaten 19,35; v. engl. Guineen 17,6; franz. 22 karat. 17,5. Granat gem. 3,7; edl. 4,0. Granit 2,5 - 3,1. Graphit 1,8 - 2,3. Gummi arab. 1,45. Gyps ungeb. 1,9 - 2,2; geb. 1,81; geg. 0,97. **Hölzer.** Nadelh. n. 0,90; f. 0,83; t. 0,60; d. 0,48. Pappel d. 0,40. Harth. n. bis 1,10; f. 0,95 - 1,0; t. 0,75 - 0,82; d. 0,66 - 0,74. (=Eich.) Fremde Hölzer t. (d.?): Buchsbaum 0,91 - 1,03. Campesche 0,91. Ebenholz 1,21. Guajak 1,33. Kork 0,24. Mahagoni 0,56 - 1,06. | Harz v. Fich. 1,07. Holzkohle w. 0,28 bis 0,40; h. 0,47; eich. 0,57. **K**alk ungeb. 2,46 - 2,84; geb. 1,2 - 1,5; K.-Mörtel t. 1,64, fr. 1,86. Kieselstein 2,3 b. 2,7. Knochen v. Ochs. 1,66. Koak 0,4. Kochsalz 2,10 - 2,17. Kreide 1,8 - 2,66. Kupfer geg. 8,6 - 8,9; geh. od. gez. 8,8 - 9,0. Kupferkies 4,16; -glanz 5,69; -erz (rothes) 5,85. — **L**ava 2,76. Lehm mag. u. t. bis f. u. fr. 1,52 - 2,85. — **M**armor 2,52 b. 2,85. Mauerwerk v. Bruchst. t. 2,40, f. 2,46; v. Sandst. t. 2,05, f. 2,12; v. Ziegel t. 1,47, f. 1,70. Mergel erd. u. t. bis h. u. f. 2,40 - 2,60. Messing geg. 8,4 - 8,7; gew. 8,5 - 8,6; gez. 8,4 - 8,7. Mühlstein-Quarz 1,3 - 2,6. — **P**ech 1,15; weiss. 1,07. Platin 20,9 - 22,1. Porphyr 2,4 - 2,8. Porzellan 2,4 - 2,5; -erde 1,15. — **Q**uarz 2,3 b. 2,7. Quecksilber 13,6 - 14,0. — **R**othgüldenerz 5,62 — **S**alpeter 1,93. Sand grob bis fein; t. 1,37 - 1,64; f. 1,90 - 1,95. Sandstein 1,9 - 2,7. Schiefer 2,64 - 2,67. Schwarzgüldenerz 6,08. Schwefel ged. 2,08; geschmolz. 1,99. Schwefelkies 4,75. Schwerspath 4,54. Serpentin 2,55. Silber geg. 10,10 - 10,47; geh. 10,51 - 10,62. Stahl: Cementst. 7,3 - 7,8; Frischst. 7,5 - 7,8; Gussst. 7,8 - 7,9. Steinkohle 1,2 - 1,5; (Pechk. 1,32; Cannelk. 1,24). Steinsalz 2,28. — **T**alkerde 2,35. Thon 1,80 - 2,63. Thonschiefer 2,8 - 2,9. Torf t.: locker, hell 0,15; mittl. 0,3 - 0,6; alt, erd. 0,5 - 0,9; alt. Pechtorf 0,7 - 1,1. — **W**achs 0,97. Weissgüldenerz 5,32. Wismuth geg. 9,83. Wolfram 7,60. — **Z**iegel 1,4 - 2,2; als Klinker 1,5 - 2,3. Zink geg. 6,86 - 7,22; gew. 7,19 - 7,86. Zinn 7,29 - 7,47. Zinnober 8,09. Zucker 1,6.

18 b. Feste Körper geschichtet incl. Zwischenräume. **C**oaks blasig, 18 b.
klar od. grob 0,55. **E**rbsen u. Linsen 0,70 - 0,81. **G**ras u. Grünfutter 0,44 - 0,50. Gerste 0,40 - 0,70. **H**afer 0.36 - 0,49. **H**eu vom lockerst. bis dichtest. 0,07 - 0,12. **K**artoffeln 0,65 - 0,70. Kleie v. Rogg. 0,32. **M**ehl 1,50 - 1,56. Mist lock. bis fett 0,70 - 0,90. **R**aps 0,55 - 0,60. Roggen, Sommer- 0,61 - 0,75; Winter- 0,66 - 0,80. Rüben 0,50 - 0,53. **S**and s. oben. Steinkohle in klein Stück. 0,85 - 0,95; in grob. St. 0,90 - 1,05. Stroh locker bis ganz dicht 0,05 - 0,12. **W**eizen, Sommer- 0,66 bis 0,78; Winter- 0,70 - 0,81. Wicken 0,67 - 0,77.

18 c. Flüssigkeiten (wo nichts bemerkt, bei mittl. Temp. od. 18 - 20 ° C.) 18 c.
Aether b. 20 ° C. 0,716. Alkohol absol. b. 20 ° C. 0,792. **B**ier 1,023 - 1,034. **K**ochsalzlauge bei 18 ° C. gesätt. 1,208. **M**ilch 1,02 - 1,04. **O**ele b. mittl. T.: Oliv. 0,92, Rüb. 0,913, Lein. 0,84. **Q**uecksilber bei 0 ° 13,55 - 13,58. **S**äuren: Salpeter 1,52; Salz 1,19; engl. Schwefel 1,84; nordhäus. Schwefel 1,90. Seewasser 1,02 - 1,04. **W**eine geistige 0,99 - 1,00; süsse 1,02 - 1,04.

18 d. Gase. Atmosphärische Luft = 1 (bei 10 ° R. = 0,0012323 Wassergew., 18 d.
bei 0 ° nahe $1/_{770}$.) **A**lkoholdampf 1,613. **K**ohlenoxyd 0,941. Kohlensäure 1 524. Kohlenwasserstoff, ölbildend. 0,985; -grubengas 0,559. **Q**uecksilberdampf 6,98 bis 7,03. **S**auerstoff 1,103. Stickstoff 0,976. Steinkohlenleuchtgas 0,4 - 0,6. **W**asserdampf bei 100 ° C. 0,624. Wasserstoff 0,069.

19. Absolutes Gewicht. (S. die Beispiele auf S. 34.)

19 a. Gew. von 1	**Cub. Met.** (stère) **in Kilogr.**: Aus Tab. 18 durch × 1000 (od. dreistell. Rechtsrücken des Comma).	Für Gase noch Division mit 770 oder Mult. mit 0,0012323.	19 a.
	Cub. Fuss in (landübl.) **Pfunden**: Durch × aus Tab. 18 mit Tab. 17.		
	Hohlmas in Kilogr. od. Pfund: Mittels Division der vorig. Produkte durch Tab. 5 b, resp. 6 b.		

19 b. Prismat. u. cylindr. Metallkörper für je 1′ Länge (l) und 1 □″ Querschnitt (q) od. 1″ Durchmesser (d). Zunächst in prs. Mas u. neu. od. Zoll-Pfd. 19 b.

Für	Schmd.-Eisen.	Gs. Ei. Zinn.	Kupfer.	Messing.	Blei.	Zink.
q=1 □″	3,3132	3,1181	3,8326	3,6375	4,9368	3,0824
d=1″	2,602	2,449	3,010	2,857	3,877	2,438

α. Für and. Stärk. u. Läng.: Multiplic. d. betr. Gewichtsz. mit d. Produkt ql resp. $d^2 l$.

β. Für and. duodeczollig. Mas u. dasselbe (metr.) Pfund: Multiplic. die nach vorstehend. Regel erhaltene Gewichts- od. gleich die Tabellenzahl 19 b. mit der betreff. Z. der Spalte Preuss. in Tab. 2 b.

19c. Bleche oder Metallplatten für je 1 □′ Fläche. Zunächst in prss. Mas und alt. prss. Pfunden.

Dicke.	Schmd.-Eisen.	Gs.Ei. Zinn.	Kupf.	Messing.	Zink.
1/16″	2,64	2,43	3,07	2,85	2,43
⅛″	5,29	4,87	6,14	5,71	4,87
¼″	10,58	9,74	12,28	11,43	9,74
1″	42,34	39,05	49,13	45,72	39,05

Um diese Angaben zu übersetzen, 1) in neue od. metr. Pfd.: multipl. sie mit 0,9354; 2) in ein anderes duodeczollig. Mas u. landübl. Pfd.: multipl. sie mit Tab. 13a. Z. B. 1 östr. □′ Zink von 1″ Dicke nach wiener Pfund = 39,05 . 0,8533 = 33,32 w. Pf.

20. Absolutes Gewicht von Eisenwaaren.

Zunächst in preuss. Mas und alten preuss. Pfunden.

20a. Band-, Stab- und Stangeneisen.

Beim Querschnitt	A. wiegt 1 lauf. Fuss	B. gehen auf das Pfund
1/16□″	0,222 Pf.	4,517′
⅛ ″	0,443 ″	2,258′
¼ ″	0,885 ″	0,565′
1 ″	3,542 ″	0,2823′

Um diese Angaben zu übertragen 1) in neue oder metr. Pfunde: multiplicire A mit 0,9354 u. B mit 1,069, 2) in ein anderes duodeczollig. Mas und Gewicht: multiplicire A mit Tab. 13a und B mit Tab 13b. Z. B.: Wieviel östr. Fuss gehen auf das östr. Pfund bei 1□″ Querschnitt? = 0,2823 . 1,1720 = 0,331 wien. Fuss.

20b. Rundeisen.

Beim Durchmesser	a) wiegt d. lauf. Fuss	b) gehen auf das Pfund
3/16″	Pf 0,098	10,21 Fs
4	0,175	5.71*
5	0,272	3,67
6	0,390	2,56*
7	0,532	1,88-
8	0,695	1,49
9	0,880	1,13*
10	1,087	0,92
11	1,315	0,76
12	1,565	0,64
13	1,835	0,54*
14	2,130	0,47
15/16″	2,445	0,41
1″	2 782	0,36
1⅛″	3,52	0,28*
1 2	4,35	0.23
1 3	5,26	0,19
1 4	6,26	0,16
1 5	7,35	0,136
1 6 .	8,52	0,117
1⅞″	9,78	0,102
2″	11,13	0,090
2¼″	14,08	0,071
2 2/4	17,39	0,057*
2¾″	21,04	0.048
3″	25,03	0,040
3¼″	29,38	0,034
3 2/4	34,07	0,029
3¾″	39.12	0,026
4″	44,51	0,023
4½″	56,32	0,0178
5″	69,55	0,0144
6″	100,15	0,0010

Die Uebersetzung in andere Mas geschieht wie bei Tab. 20a. angegeben.

20c. Gusseiserne Röhren.

Bei der lichten Weite	und bei einer Wanddicke von ⅜″	½″	⅝″	¾″	⅞″	1″	1⅛″	1¼″
2″	9,23	12,97	17,02	21,40	26,10	31,12	36,47	42,15
2¼″	10,21	14,26	18,65	23,34	28,37	33,72	39,39	45,39
2½″	11,28	15 56	20,26	25,29	30,64	36,31	42,31	48,63
2¾″	12,16	16,86	21,88	27,23	32,91	38,90	45,22	51,87
3″	13,13	18,15	23,50	29,18	35,17	41,52	48,15	55,11
3½″	15,07	20,75	26,74	33,07	39,71	46,68	53 98	61,60
4″	17,02	23,34	29,09	36,96	44,25	51,87	59,81	68,08
4½″	18,96	25.94	33,23	40,85	48,79	57,06	65,65	74,57
5″	20,91	28,53	36,47	44,74	53,33	62,25	71,49	81,05
5½″	22,86	31,12	39,71	48,63	57,87	67,43	77,32	87,53
6″	24,80	33,72	42,96	52,52	62,41	72,62	83,16	94,02
7″	28,69	38,90	49,44	60,30	71,49	82,99	94,83	106,99
8″	32,58	44,09	55,92	68,08	80,57	93,37	106,50	119,95
9″	36,47	49,28	62,40	75,86	89,64	103,74	118,17	132,92
10″	40,36	54,46	68,90	83,64	98,72	114,12	129,84	145,90
11″	44,25	59,65	75,38	91,42	107,80	124,49	141,51	158,86
12″	48,14	64,84	81,86	99,20	116,87	134,87	153,18	171,83

Die Uebersetzung in anderes Mas geschieht wie oben bei Tab. 19c. angegeben.

20d. Gusseiserne Kugeln.

Durchm. Zoll.	Gew. Pfund.	Durchm. Zoll.	Gew. Pfund.	Durchm. Zoll.	Gew. Pfund.
1	0,14	2½	2,25	6	31,10
1⅛	0,21	2¾	2.99	6½	35,18
1¼	0,28	3	3,89	7	49.39
1⅜	0,37	3¼	4,94	7½	60,75
1½	0,49	3½	6,17	8	73,72
1⅝	0,62	3¾	7,59	9	104,96
1¾	0,77	4	9,22	10	143,99
1⅞	0,95	4½	13,12	11	191,65
2	1,15	5	18,00	12	248,82
2¼	1,64	5½	23,96		

Die Uebersetzung in anderes Mas geschieht wie bei Tab. 19c. angegeben.

Beispiele zu den Tabellen 18-20.

1) 1 C^m Alabaster? (Aus 18a.) = 2700 *kg.* — **2)** Ein östr. C′ Bausteine im Mittel u. östr. Gew.? (Aus 18a u. 17) = 2,5 . 56 32 = 141 wi. Pf. — **3)** 1 preuss. Quart absol. Alkohol bei mittl. T. in alt. Pf.? (Aus 18c, 17 u. 5b.) = 0,792 . 66:27 = 1,93 Pf. — **4)** 1 sächs. Schfl. Steinkohlen im Mittel u. Zollgew.? (Aus 18b, 17 u. 6b.) = 0,90 . 45,35 : 7/32 (od. × 32/7) = 187 n. Pf. — **5)** Stabeisen 4″ br., ½″ dick und 10′ lang preuss.; nach Zollgew.? (Aus 19b, da q = 2□″, ql = 20) ... 3,3122 . 20 = 66,3 n. Pf. Oder (aus 20a) ... 3,542 . 2″ . 10 = 70,84 a. Pf. = 70,84 . 0,9354 = 66,3 n Pf. — **6)** In östr. Mas: Gusseis. Röhren v. 4″ Weite u. ½″ Dicke f. je 1′ nach wi. Pf.? (Aus 20c u. 13a) = 18,15 . 0,8533 = 15,49 wi. Pf. — **7)** Nach preuss. Mas u. Zollpf.: 1000′ Bleidraht v. 1‴ Dicke? (Aus 19b, da $d = \frac{1}{12}$; $d^2 l = \frac{1000}{144}$) ... 3,877 . $\frac{1000}{144}$ = 26,9 Pf.

IV. Kapitel.
Allgemeine Arithmetik.

§. 1. Wie das griech. Alfabet parallel dem lateinischen zu brauchen.

α (alfa)	statt a.	ν (ni)	statt n.	Δ (Delta)	statt D.
β (beta)	,, b.	o (omīcron)	,, $\breve{o}$.	Φ (Fi)	,, F.
γ (gamma)	,, c u. g.	π (pi)	,, p.	Γ (Gamma)	,, G.
δ (delta)	,, d.	ψ (psi)	,, q.	Θ (Theta)	,, D u. O.
ε (epsīlon)	,, e.	ϱ (ro)	,, r.	Λ (Lamda)	,, L.
φ (fi)	,, f.	σ (sigma)	,, s.	Ω (Omēga)	,, O u. U.
χ (chi)	,, g.	τ (tau)	,, t.	Π (Pi)	,, P.
η ('eta)	,, h.	ϑ (theta)	,, d u. t.	Ψ (Psi)	,, Q.
ι (iota)	,, i.	ω (omĕga)	,, $\bar{o}$ u. u.	Σ (Sigma)	,, S.
$\varkappa$ (kappa)	,, k.	ξ (xi)	,, x.	Ξ (Xi)	,, X.
λ (lamda)	,, l.	υ (=ü; ypsīlon)	y.	Υ (Ypsīlon)	,, Y.
μ (mi)	,, m.	*ζ (zeta)	,, z.		

Wenn gleichart. Werthe von verschied. Grösse durch denselben Buchstaben bezeichnet werden sollen, wird denselben rechts unten ein Index angehängt, z. B. a_1, a_2, a_3 („a eins", „a zwei" etc.).

§. 2. Logarithmen.

Grundformeln, Tafel der Gem. Logarithmen, Verwandlung derselben in natür liche und umgekehrt, vergl. Knt. Rückseite u. S. 1.

§. 3. Reciproken (zur Ersparung von Divisionen).

S. Knt. r. Ecke u. S. 2. Z. B. $\frac{7}{0{,}01935}$? Da 193,5 auf 516,8 zeigt, folgt (wegen der 2 Anfangsnullen) $51{,}68 \cdot 7 = 361{,}76$. Die Vielfachen der Rec. von 144 u. 1728 s. Knt. l. Wand (Kreistafel) u. S. 4 f) u. g).

§. 4. Faktoren, Aufheben und Näherungswerthe.

α. 1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; 2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; 3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; 4) $ax^2+bxy+cy^2$ lässt sich in 2 binom. Fakt. zerlegen, sobald man die Coeff. a u. c in 2 solche Fakt. zerfällen kann, die, wechselsweise mit einander verbunden, zwei Produkte geben, deren Summe od. Diff. den mittl. Coeff. b bildet, welchen letztern man dann in 2 demgemâse Addenten zerlegt. Z. B. $6m^2+27mn-15n^2$? Da 1.6 u. 3.5 in der Comb. 1.3 u. 6.5 u. der Diff. dieser Prod. 3 u. 30 den Coeff. 27 bildet, folgt $6m^2+30mn-3mn-15n^2$ u. weiter $6m(m+5n)-3n(m+5n)=(m+5n)(2m-n)3$.

β. Den Fakt. 2, 4, 8 hat eine Zahl, wenn beziehlich ihre letzte, beid letzten, u. drei letzten Ziff. durch 2, beziehl. 4 od. 8 theilbar sind; den Fakt. 3 u. 9, wenn die Quersumme durch 3 resp. 9 theilbar; den Fakt. 11, wenn die Quersumme der gerad- von der der ungeradstell. abgezogen, zum Reste 0 od. ein Vielfaches von 11 gibt; den Fakt. 7 u. 13, wenn — v. der Rechten nach der Linken die Zahl in dreiziff. Klassen abgetheilt, u. die gerad- wie die ungeradstell. Klassen für sich summirt, u. diese Summ. v. einand. abgezogen — einen durch 7 resp. 13 theilbar. Rest lassen. Z. B. 3 603|551? Da 554 u. 603 die Differ. 49 geben, ist obige Z. durch 7 theilbar. Das gleichzeitig vorhand. Kennzeichen der Theilbarkeit durch a u. b bedingt die Theilbark. durch ab.

γ. Wenn ein ächter Bruch $\frac{m}{n}$, bei fortgesetzter Divis. des Zählers in den Nenner, und dann immer des Restes in den vorigen Divisor, success. die Quot. a, b, c, d hervorbringt, so finden sich dessen Näherungswerthe, wenn man mit $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{a}$ als Anfang, Zähler u. Nenner des jeletzten Bruchs nach u. nach mit b, c, d multipl. u. dabei immer den Z., resp. N. des vorigen dazu addirt. Z. B. Weil das (bis zur 2. Decimale richtige Durchmesser- u. Peripherie-) Verhältniss $\frac{1}{3{,}14}$ oder $\frac{100}{314}$ durch wechselseitige Division die Quot. 3, 7, 7 gibt, folgt aus

$$\frac{0}{1} \text{ und } \frac{1}{3}\Big|\overset{\times 7}{\frac{7}{22}}\Big|\overset{\times 7}{\frac{50}{157}}$$

der Näherungsbruch $\frac{1}{3}$ u. der genauere $\frac{7}{22}$.

§. 5. Potenzen.

α. **Binomische Reihe** (Newton's binomischer Lehrsatz).

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$
$$\pm \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-u+1)}{1.2.3\ldots u} a^{n-u} b^u.$$

Speciell für $(a \pm b)^2 = a^2 \pm ab + b^2$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab^2 + 3ab^2 \pm b^3$;

für $n = 4$ ist die Reihe der Binomial-Coefficienten $1 \pm 4 + 6 \pm 4 + 1$
„ $n = 5$ . . . . $1 \pm 5 + 10 \pm 10 + 5 \pm 1$
„ $n = 6$ . . . . $1 \pm 6 + 15 \pm 20 + 15 \pm 6 + 1$
„ $n = 7$ . . . . $1 \pm 7 + 21 \pm 35 + 35 \pm 21 + 7 \pm 1$.

β. **Alle Potenzen** aller Zahlen (d. i. z^n) leicht mittets der Log. des Knt.; bei Finanzrechnungen mittels der 7stelligen Log. des Randes. Z. B. 103^{20}? Da Log. 1,03 = 0,0128372 u. dessen 20faches = 0,256744, so zeigt d. Taf. hierzu $z = 1{,}806$.

γ. **Die Quadrate und Würfel** aller Zahlen bis zur 3. u. 4. Ziffer genau unmittelbar aus Knt's r. Wand, durch Aufsuchen in der Qw.- resp. Cw.-Spalte u. Ablesen in der Z.-Spalte. Vergl. S. 3.

§. 6. Wurzeln.

α. **Alle Wurzeln** aller Zahlen (d. i. $\sqrt[n]{z}$) leicht durch d. Logarithmentaf. Z. B. $\sqrt[8]{12{,}63}$? Log. 12,63 = 1,10141; : 8 = 0,13768. Zu dieser Mantisse die Zahl gesucht und (wegen 0 Kennziffer) 1 Ganzestelle abgeschnitten gibt 1,373.

β. **Die Quadrat- und Cubicwurzeln** aller Z. bis z. 3. u. 4. Ziff. genau gibt des Knt's r. Wand durch Aufsuchung des (abgetheilten) Radicanden in der Z.-Spalte u. Ablesung in der Qw.- resp. Cw.-Spalte. Vergl. S. 2 u. 3.

γ. **Näherungsformeln.** 1) $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}$; 2) $\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2}$; um so richtiger, je grösser a im Vergleich zu b ist. 3) $\sqrt{a^2 + b^2}$ (wo $a > b$) $= 0{,}9604\,a + 0{,}3978\,b$ (bis auf 4% genau).

§. 7. Niedere Gleichungen.

α. Aus $x \pm a = b$ folgt $x = b \mp a$; aus $ax = b \ldots x = \frac{b}{a}$; aus $\frac{x}{a} = b \ldots x = ab$.

β. Wenn $x + y = s$ und $x - y = d$, so ist $x = \frac{1}{2}(s + d)$ und $y = \frac{1}{2}(s - d)$.

γ. Wenn $\alpha x + \beta y = \gamma$ u. $ax + by = c$, so ist $x = \frac{\gamma b - \beta c}{\alpha b - \beta a}$; $y = \frac{\gamma a - \alpha c}{\beta a - \alpha b}$.

δ. Für die einfach unbestimmte Gl. $ax + by = c$ ist die relative Unbek. 1) $x = \frac{c - by}{a}$; für die dopp. unbest. $ax + by + cz = d$ d. relat. U. 2) $x = \frac{d - by - cz}{a}$; und man hat in (1) y und in (2) y u. z als absolute Unbekannte zwar willkührlich, jedoch dem Geiste der Aufgabe gemäs anzunehmen.

§. 8. Verhältnissgleichungen oder Proportionen.

I. Grundgesetze. *α.* Bezeichnet man die Differenzbeziehung $a \div b$ (soviel als $a - b$) als „arithm. Verhältniss“, so unterscheidet man das eigentl. Verhältniss $a : b$ (soviel als a verglichen und gemessen mit b u. daher $= \frac{a}{b}$) als „geometrisches“; und, wenn $a - b = c - d$, diese Gleichung als eine „arithmetische“; und $a : b = c : d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ als eine „geometr. Proportion“. *β.* Für erstere gilt $a + d = b + c$, für letztere $ad = bc$. *γ.* Aus der stetigen arithm. Proportion $a - m' = m' - b$ folgt für das sogenannte arithm. Mittel v. a u. b .. $m' = \frac{a + b}{2}$. *δ.* Aus d. stetig. geom. Proport. $a : m = m : b$ folgt für das sogenannte geom. Mittel von a u. b .. $m = \sqrt{ab}$.

I. II. I. II.

II. Verwandlungen. Eine richtige Proport. $a : b = c : d$ (wo also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ od. $ad = bc$) gibt wieder eine richtige, wenn man *α.* beide Verhältnisse umkehrt ($b : a = d : c$); *β.* die Innen- od. Aussenglieder vertauscht (z. B. $a : c = b : d$); *γ.* die I[n] od. auch die II[n] Glieder od. das eine od. auch beide Verhältnisse durch eine beliebige Zahl multipl. od. divid. (z. B. $am : b = em : d$); *δ.* sämmtl. Gl. in gleicher Weise potenzirt od. radicirt (z. B. $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$); *ε.* statt der I[n] u. II[n] Gl. die Summe od. Diff. der Gl. des angehör. Verhältn. setzt [so dass sogar $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$]. — **III. Verbindungen:**

α. Wenn $a : b = c : d$ und $e : f = g : h$ so ist auch $ae : bf = cg : dh$.

β. Wenn $a : b = c : d$ und $e : b = f : d$ so ist auch $a : e = c : f$.

γ. Wenn $a : b = c : d$ und $a : e = f : d$ od. $b : a = d : c$, $e : a = d : f$, so ist auch $b : e = f : c$.

δ. Wenn $a : b = c : d$ und $a : b = e : f$ und $a : b = g : h$ so ist auch $a : b = (c + e + g) : (d + f + h)$.

Quadrat., kubische, höhere, exponentiale Gleichungen. Geometr. Reihen.

§. 9. Quadratische Gleichungen.

Wenn 1) $x^2 = ax + b$, so ist $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$. — (Z. B. für $x^2 = -6x + 16$ ist $a = -6$, $b = 16$, folgl. $x = -3 \pm \sqrt{9+16} = -3 \pm 5 = +2$ u. -8.) In gleicher Weise, wenn 2) $x^{2n} = ax^n + b$, ist $x^n = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$.

§. 10. Cubische Gleichungen.

α. **Coefficientengesetz**: Sind α, β, γ die drei Wurzeln der Gleichung 1) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so ist stets $a = -(\alpha + \beta + \gamma)$; $b = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$; $c = -\alpha\beta\gamma$. Sobald eine von diesen 3 Wurz., etwa α, gefunden, so gibt die Divis. d. Gleich. durch $x - \alpha$ die verwandte quadr. Gl. 2) $x^2 + Ax + B = 0$, in welcher $A = -(b+c)$ und $B = bc$ ist, und deren Wurzeln die noch fehlenden Wurzeln der Gleichung 1) sind.

β. **Elimination** des 2. Gliedes. Aus der Gleich. $y^3 + \alpha y^2 + \beta y + y = 0$ verschwindet das Quadrat der Unbek. u. folgt die verwandte $x^3 + ax + b = 0$, wenn man setzt $y = x - \frac{1}{3}\alpha$; u. es wird u. ist dann $x = y + \frac{1}{3}\alpha$; $a = \beta - \frac{1}{3}\alpha^2$; $b = y - \frac{1}{3}\alpha\beta + \frac{2}{27}\alpha^3$.

γ. **Cardan's Regel**: Für $x^3 = ax + b$ findet sich die eine der Wurzeln durch 2) $x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$. Z. B.: Wenn $x^3 + 6x + 20 = 0$, also $x^3 = -6x - 20$, also nach (1) $a = -6$, $b = -20$, so ist nach (2) $x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{100+8}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{108}} = -2$.

δ. **Goniometr. Methode**: Wenn der Theil $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^3$ negativ u. somit die Card. Formel unlösbar wird, so setze $\sqrt{\frac{4a}{3}} = m$; und $-\frac{4b}{m^3} = \sin(3\varphi)$ und bestimme hieraus $\sin\varphi$. Dann hat man sämmtliche drei Wurzeln durch $x_1 = m \sin\varphi$; $x_2 = m \sin(60 - \varphi)$; $x_3 = -m \sin(60 + \varphi)$.

§. 11. Höhere Gleichungen.

α. **Newton's Näherungsmethode**. Ist für die höhere Zahlengleichung 1) $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots + mx + n = 0$ die Zahl z ein durch Versuche genäherter Wurzelwerth, so ergiebt sich letztrer schärfer, wenn man zu z addirt die Verbesserung:

$$2)\ r = -\frac{z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} \ldots + mz + n}{nz^{n-1} + (n-1)az^{n-2} + (n-2)bz^{n-3} \ldots + m}.$$

β. **Regula-Falsi-Methode**. Erzeugt in der Gleichung 1) die versuchsweis als Wurzel eingeführte Zahl z_1 statt 0 das kleine Resultat r_1, u. z_2 desgl. r_2, so erhält man die Wurzel schärfer als z_1 u. z_2, wenn man setzt 3) $x = z_1 - (z_1 - z_2)\frac{r_1}{r_1 - r_2}$.

§. 12. Exponentialgleichungen.

α. Wenn $a^x = b$, also $x \lg a = \lg b$, so folgt $x = \frac{\lg b}{\lg a}$.

β. Wenn $(a+b)^{x+c} = d$, also $(x+c)\lg(a+b) = \lg d$, folgt $x = \frac{\lg d}{\lg(a+b)} - c$.

Z. B. In wieviel Jahren n verdoppelt sich ein Kapital k bei 4% Zinsverzinsung? Aus $k \cdot 1{,}04^n = 2k$ folgt $n \lg 1{,}04 = \lg 2$; $n = \lg 2 : \lg 1{,}04 = 17\,^2/_3$ Jahre.

§. 13. Geometrische Reihen.

α. **Grundformeln**. Für die R. $\overset{1.}{a}, \frac{q}{}\overset{2.}{aq}, \frac{q}{}\overset{3.}{aq^2}, \frac{q}{}\overset{4.}{aq^3} \ldots \overset{n}{aq^{n-1}}$, und wenn u die Grösse des $n$ten (od. letzten) Gliedes u. s die Summe aller bedeutet, gilt 1) $u = aq^{n-1}$; 2) $s = a\frac{q^{n-1}}{q-1}$; 3) $s = \frac{qu - a}{q-1}$; wodurch, wenn v. d. 5 Elementen (Anfangs- u. Endglied, Quotus, Gliederzahl u. Summe) 3 gegeben sind, die 2 fehlenden stets gefunden werden können.

Z. B.: Wenn a, u u. s gegeben und n u. q gesucht, so folgt aus 3) leicht q und dann aus 1) leicht n.

β. Bei **Interpolation** von m Gliedern in geom. R. zwischen die gegeb. Endglieder a u. u, ist der dazu nöthige Factor oder Quotus $q = \sqrt[m+1]{u/a}$.

γ. Für eine **unendlich konvergirende** geom. R., wo also $q<1$, geht 2) über in $s=\frac{a}{1-q}$. — Z. B.: der period. Decimalbruch 0,5454.. (als eine g. R. mit $\frac{54}{100}=a$ u. $\frac{1}{100}=q$) ist $=\frac{54}{100-1}=\frac{54}{99}=\frac{6}{11}$. (Wenn d in Duod.″, ist die Kreisfläche $=0{,}005454\,..\,d^2\square'$, somit auch $={}^6/_{1100}\,d^2\square'$.)

§. 14. Niedere arithmetische Reihen.

α. **Grundformeln.** Für die R. $\overset{1.}{a},\overset{d}{\smile}\overset{2.}{a+d},\overset{d}{\smile}\overset{3.}{a+2d},\overset{d}{\smile}\overset{4.}{a+3d}\,..\,\overset{n.}{a+(n-1)d}$, wenn u und s wiederum das letzte und die Summe der Glieder bedeuten, gilt 1) $u=a+(n-1)d$; 2) $s=n(a+\frac{n-1}{2}d)$; 3) $s=\frac{a+u}{2}n$, womit aus 3 gegebenen Elementen die beiden andern leicht zu finden.

β. Betreffs der **Summe** ist die halbe Summe des Anfangs- und Endgliedes der Durchschnittswerth aller Glieder.

γ. Bei **Interpolation** von m Gliedern nach arithm. R. zwischen a u. u ist die dazu nöthige Differenz $d=\frac{u-a}{m+1}$.

§. 15. Höhere arithmetische Reihen.

Bedeutet a das Anfangsglied der Hauptreihe, b das der 1., c der 2., d der 3., e der 4. Differenzreihe, sowie u den Werth des $n$ten oder letzten u. s die Summe aller Glieder, so gilt

[Für Reih. d. II. Ordnung]
[F.R. d. I.O.]

$$u=a+\frac{n-1}{1}b+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}c+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}e,$$

[Für Reihen der III. Ordnung.]
[Für Reihen der IV. Ordnung.]

[Für Reih. der II. Ordnung]
[F.R. d. I.O.]

$$s=na+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}c+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}d+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}e.$$

[Für Reihen der III. Ordnung.]
[Für Reihen der IV. Ordnung.]

Anwendung auf Potenzreihen.

1) Die R. d **natürl. Zahlen** ist eine R. d. I. O. mit $a=1$, $b=1$, $c=d=e=0$, folgl.

$$(1+2+3+4\ldots+n)=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\text{ oder }=\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}.$$

2) Die R. d. **natürl. Quadrate** ist eine R. d. II. O. mit $a=1$, $b=3$, $c=2$, $d=0$, folgl.

$$(1^2+2^2+3^2+\ldots n^2)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\text{ oder auch }=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

3) Die R d. **natürl. Würfel** bildet eine R. d. III. Ordn. mit $a=1$, $b=7$, $c=12$, $d=6$, $e=0$, und somit

$$(1^3+2^3+3^3+\ldots n^3)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}\text{ oder }=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

4) Die R. d. **natürl. Biquadrate** ist eine R. d. IV. Ordn. mit $a=1$, $b=15$, $c=50$, $d=60$, $e=24$, $f=0$, daher

$$(1^4+2^4+3^4\ldots n^4)=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.$$

§. 16. Permutationen oder Versetzungen.

I. Ordnung.	II. Ordnung.	III. Ord.	IV. Ord.
a b | c d	b a c d	c a b d	d a b c
a b | d c	b a d c	c a d b	d a c b
a | c b d	b c a d	etc.	etc.
a | c d b	b c d a	c d b a	d c b a
a | d c c	b d a c		
a | d c b	b d c a		

1) **Ohne Wiederholung;** oder wenn die Dinge verschieden sind.

α. Bezeichne die verschiedenen Elemente, z. B. 4, durch die Buchstaben a, b, c, d. a heisst ein niederes Glied gegen b, b ein niederes gegen c, d also das höchste; $abcd$ die natürliche oder Grund-Komplexion. Um zu bilden die Perm. der I. Ord.: Setze das vorletzte Element vor das höchste oder letzte, also hier c vor d, u. vertausche beide. Beiden Komplex. setze b vor und vertausche nun erst b mit c, dann c mit d. Setze a vor jede dieser Komplex. — Permutat. der folgenden Ordnungen: Vertausche in der I. Ord. a mit b; in der II. Ord. b mit c; in der III. Ord. c mit d.

β. Oder so: Man leitet jede folgende Komplexion aus der vorhergehenden ab, indem man, von rechts nach links gehend, das Element sucht, das als niederes einem höhern vorangeht; dies vertauscht man mit demjenigen der rechts stehenden, das von der nächst höheren Ordnung ist, und ordnet es dann mit den anderen rechts gestandenen lexicographisch (d. h. alfabetisch).

2) **Mit Wiederholung;** d. h. wenn einige der Elemente einerlei und demgemäs mit gleichen Buchstaben zu bezeichnen sind, wie z. B. $aabbc$: Schreibe erst die Grund-Komplex. und verfahre dann nach Regel α.

2)
aabbc
aabcb
aacbb
ababc
abbac
abbca
abcab
abcba
etc.

3) **Anzahl** (Z) **der Permutationen** bei n verschiednen Elementen $Z = 2.3.4\ldots n$, wovon auf jede Ordnung oder Klasse der $n$te Theil kommt.

4) **Anzahl der Permutat.** bei n Dingen, unter denen m einerlei sind (z. B. $=a$); p ebenso ($=b$); q dgl. ($=c$). $Z = \dfrac{2.3.4\ldots n}{(2.3\ldots m)(2.3\ldots p)(2.3\ldots q)}$

§. 17. Combinationen oder Verbindungen im engern Sinne.

1) „Unionen" = Comb. I. Klasse = Verb. zu 1, wie a, b, c. — „Amben oder Binionen" = C. II. Kl. = Verb. zu 2, wie aa, ab. — „Ternionen od. Ternen" = C. III. Kl. = Verb. zu 3, wie aaa, aab, abc. — „Quaternen", „Quinternen" etc. — „Comb. ohne und mit Wiederholung": Je nachdem jedes Element nur mit andern oder auch mit sich selbst combinirt werden darf. — „Comb. der I., II., III. Ordnung": Je nachdem dieselben mit a oder b oder c anfangen.

2) **Bildung und Zahl** (Z.) sämmtlicher Combinationen v. n Elementen **ohne Wiederholung.** Beispielsweise für 5 Elemente.

Z. jed. Ord.	a	b	c	d	e	Z. jeder Klasse
1. $=(n-1)$		ab	ac	ad	ae	II. od. Amben $\frac{n(n-1)}{1.2}$
2. $=(n-2)$			bc	bd	be	
3. $=(n-3)$				cd	ce	
4. $=(n-4)$					de	
1. $=\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$			abc	abd	abe	III. od. Ternen $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$
				acd	ace	
					ade	
2. $=\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}$				bcd	bce	
					bde	
3. $=\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}$					cde	
1. $=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$				$abcd$	$abce$	IV. oder Quaternen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$
					$abde$	
					$acde$	
2. $=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}$					$bcde$	
1. $=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}$					$abcde$	$x$te Klasse $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{1.2.3\ldots x}$

Man schreibt die I. Klasse in natürl. Ordnung und bildet jede folgende dadurch, dass man allen vorhergehenden Combinationen von der Ordnung b an bis zu Ende das Element a, dann allen Comb. v. d. Ord. c an bis zu Ende das E. b, dann v. d. Ord. d an bis zu Ende das E. c vorsetzt. U. s. f. Die $n$te Klasse ist die letzte.

3) **Bildung und Zahl** (Z.) der Combinationen von n Elementen **mit Wiederholung;** beispielsweise für 5 Elemente.

Z. jed. Ord.	a	b	c	d	e	Z. jeder Klasse
1. $=n$	aa	ab	ac	ad	ae	II. od. Amben $\frac{n(n+1)}{1.2}$
2. $=n-1$		bb	bc	bd	be	
3. $=n-2$			cc	cd	ce	
				dd	de	
$m.=n-m+1$					ee	
1. $=\frac{n(n+1)}{1.2}$	aaa	aab	aac	aad	aae	III. od. Ternen $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ oder soviel als $(n+2)$ Elemente ohne Wiederholung.
		abb	abc	abd	abe	
			acc	acd	ace	
				add	ade	
					aee	
2. $=\frac{(n-1)n}{1.2}$		bbb	bbc	bbd	bbe	
			bcc	bcd	bce	
				bdd	bde	
					bee	
3. $=\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}$			ccc	ccd	cce	
				cdd	cde	
					cee	
4. $=\frac{(n-3)(n-2)}{1.2}$				ddd	dde	
					dee	
$m.=\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}$					eee	
	$aaaa$	$aaab$	$aaac$	$aaad$	$aaae$	$x$te Klasse $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+x-1)}{1.2.3\ldots x}$
		$aabb$	$aabc$	$aabd$	$aabe$	
			etc. (Ohne Ende.)			

Verfahre wie vorher, nur mit dem Unterschiede, dass das Element a allen Combinationen der vorigen Klasse von der Ordnung a an bis Ende, b allen von der Ordnung b an bis Ende etc. vorgesetzt wird.

§. 18. Variationen, oder permutirte Combinationen.

Bildung und Zahl (Z.) der Variationen von n Elementen.
Beispielsweise für 4 Elemente.

	α. Ohne Wiederholung.				β. Mit Wiederholung.			
	a	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*d*
II. Kl.		1. *ab*	*ac*	*ad*	1. *aa*	*ab*	*ac*	*ad*
		2. *ba*	*bc*	*bd*	2. *ba*	*bb*	*bc*	*bd*
		3. *ca*	*cb*	*cd*	3. *ca*	*cb*	*cc*	*cd*
		4. *da*	*db*	*dc*	4. *da*	*db*	*dc*	*dd*
III. Kl.			1. *abc*	*abd*	1. *aaa*	*aab*	*aac*	*aad*
			acb	*acd*	*aba*	*abb*	*abc*	*abd*
			adb	*adc*	*aca*	*acb*	*acc*	*acd*
			2. *bac*	*bad*	*ada*	*adb*	*adc*	*add*
			bca	*bcd*	2. *baa*	*bab*	*bac*	*bad*
			bda	*bdc*	*bba*	*bbb*	*bbc*	*bbd*
			etc.			etc.		
			4. *dca*	*dcb*	4. *dda*	*ddb*	*ddc*	*ddd*
IV. Klasse.				1. *abcd*	1. *aaaa*	*aaab*	*aaac*	*aaad*
				abdc	*aaba*	*aabb*	*aabc*	*aabd*
				etc.		etc.		
				4. *dcba*	4. *ddda*	*dddb*	*dddc*	*dddd*

Zu α. Variat. d. II. Kl.: Verbinde jedes E. mit jed. andern. — Var. d. III. Kl.: Setze an jede der vorgeh. Var. einzeln alle E., die sie selber nicht hat. U. s. f.

Zu β. Verbinde jedes E. einzeln mit allen einzeln, also auch mit sich selber; jede dies. Var. ebenso wieder mit allen E.; u. s. f.

1) Anzahl d. Var. ohne Wiederh. bei n Elem. in der $x$ten Klasse $= n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)$, Anzahl der Klassen $= n$.

2) Anzahl der Var. mit Wiederh. bei n Elem. in der $x$ten Klasse $= n^x$. Anzahl d. Klass. unendlich.

§. 19. Wahrscheinlichkeitstheorie.

1) Sprechen von $a+b$ gleich gewichtigen Gründen oder Fällen a für und b gegen das Eintreffen eines Ereignisses, so ist a die Zahl der günstigen, b der ungünst., $a+b$ der mögl. Fälle; und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen $w = \frac{a}{a+b}$; die entgegengesetzte Wahrsch. (für das Nichteintreffen) $w' = \frac{a}{a+b}$.
Und immer ist und muss sein $w + w' = 1$; $w' = 1 - w$.
Sind alle Fälle günstig, so wird $w = 1$ (das Eintreffen ist „gewiss").
„ ebenso viel *pro* als *contra* „ „ $w = \frac{1}{2}$ (das Eintreffen ist „zweifelhaft").
„ mehr *pro* als *contra* „ „ $w > \frac{1}{2}$ (d. Eintreffen ist „wahrscheinlich").
„ weniger *pro* als *contra* „ „ $w < \frac{1}{2}$ (d. Eintr. ist „unwahrscheinlich").
Ist kein Fall *pro*, alles *contra* „ „ $w = 0$ (Symbol des Unmöglichen).

2) Die einfache W. beziffert d. Eintreffen eines isolirt. Ereignisses an sich. — Z. B. die W., mit 2 Würfeln einen Pasch zu werfen? Zahl der mögl. Fälle = Z. der wiederholten Amben v. 6 Elemnt. $= 6^2$; Z. der günst. Fälle die 6 Pasche; also $w = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. — Mit 3 Würf.? $a = 6$; $a+b = 6^3$; $w = 6:6^3 = \frac{1}{36}$.

3) Die alternative W. bestimmt die einfache W. für das Eintreffen des einen oder andern Ereignisses, u. ist = der Summe der einfachen W. beider Ereignisse. Z. B. Wenn unter je 100 Mann eines Regimentes 10 Todte und 30 Blessirte sind, wie gross war die W. für den Mann, unter jenen oder diesen zu sein? Unter d. Todten $w_1 = \frac{1}{10}$; unt. d. Bless. $w_2 = \frac{3}{10}$; unt. jenen od. diesen $\frac{4}{10}$.

4) Die relative W. bestimmt, nach welchem Verhältniss ein Ereigniss mehr Wahrsch. hat als ein anderes. — Sie ist = der einf. W. des fragl. Ereig. dividirt durch die Summe der einfach. Ww. der mit einander verglich. Ereignisse. Z. B. Wenn beim Spiele mit 2 Würf. *A* auf die 7 und *B* auf die 5 wettet, wie gross ist da bei jedem Wurfe die W., dass die 7 u. nicht die 5 erscheint (oder dass *A* eher gewinne als *B*)? Bei dem Wurfe 7 sind 6 u. dem Wurfe 5 nur 4 günstige, bei jedem 36 mögl. Fälle; $w_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; $w_5 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; relative W. $= \frac{6}{36} : \frac{10}{36} = \frac{3}{5}$, d. h. unter 5 Treffern werden 3 auf *A* u. folgl. 2 auf *B* kommen.

5) Die zusammengesetzte W. beziffert die W. für das gemeinschaftliche Eintreffen zweier oder mehrer isolirter Ereignisse und ist gleich dem Produkte der einf. Ww. dieser Ee. Z. B. im Skatspiele (mit 32 Karten) sind 11 Trümpfe; wie gross hiernach die W., dass 2 herausgezogene Blätter (Skat) gerade 2 Trümpfe enthalten? W. für das erste Blatt $= \frac{11}{32}$; darauf für das zweite $= \frac{10}{31}$; für beide zugleich $= \frac{11}{32} \times \frac{10}{31} = \frac{55}{496}$; ganz nahe $= \frac{1}{9}$.

6) Werth der Erwartung (Mathematische Hoffnung). Wenn mit dem Eintreffen eines unsichern Ereignisses von der Wahrscheinlichkeit w ein Nutzen oder Gewinn g verknüpft ist, so hat dieser ungewisse Gewinn statt seines vollen Werthes nur den Erwartungswerth wg. Z. B.: Nach der Sterblichkeitstafel erreichen von 600 4jähr. Kindern nur 500 das 18. Jahr. Die W., dass ein solch Kind voll 18 Jahr alt wird, ist sonach $= \frac{5}{6}$. Welche (einmalige) Prämie müsste man demnach für ein 4jähr. Kind in eine Aussteuerversicherung zahlen, welche dem 18jähr. 1000 Thlr., und sonach mit 4% diskontirt einen gegenwärtigen Gewinn von 577 Thlr. verheisst; u. wenn man, wie billig, nur dessen Erwartungswerth zahlen will? Antw.: $wg = \frac{5}{6} \times 577 = 481$ Thlr.

7) Gleichgewicht der Zufallsspiele (Wetten). Der Erwartungswerth der einen Partei muss = sein dem der andern, oder ihre Einsätze müssen sich

zu einander verhalten, wie die Wahrscheinlichkeit, die jeder für sich hat. Z. B.: A wettet gegen B auf d. Pasch bei 2 Würfeln. Dann ist für A das $w=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; gegen A oder für B also $w'=1-w=\frac{5}{6}$. Also Einsatz von A zu dem von B $=1:5$. Wenn A 1 Thlr. setzt und B 5, hat A als math. Hoffnung des Gewinns $\frac{1}{6}\times 5$ Thlr. (des B) $=\frac{5}{6}$ Thlr., und B $\frac{5}{6}\times 1$ Thlr. (des A) $=\frac{5}{6}$ Thlr.

§. 20. Differenzialformeln.

(In den §§. 20-24 bedeutet: $\mathfrak{d}$ das Differenzialzeichen; a, m, n konstante, x, y, z sowohl ur- als abhängig-variable Grössen; lg_a den Logarithmus nach der Grundzahl a; lgn den natürlichen Logarithmus und e dessen Grundzahl 2,71828...)

1) $\mathfrak{d}(a+x)=\mathfrak{d}x$. **2)** $\mathfrak{d}(ax)=a\mathfrak{d}x$. **3)** $\mathfrak{d}(x+y+z)=\mathfrak{d}x+\mathfrak{d}y+\mathfrak{d}z$.

4) $\mathfrak{d}(xy)=x\mathfrak{d}y+y\mathfrak{d}x$. **5)** $\mathfrak{d}(xyz)=xyz\left(\frac{\mathfrak{d}x}{x}+\frac{\mathfrak{d}y}{y}+\frac{\mathfrak{d}z}{z}\right)$.

6) $\mathfrak{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\mathfrak{d}x-x\mathfrak{d}y}{y^2}$. **7)** $\mathfrak{d}(x^n)=nx^{n-1}\mathfrak{d}x$. **10)** $\mathfrak{d}(lg.\,ax)=\frac{1}{lgn\,a}\cdot\frac{\mathfrak{d}x}{x}$.

8) $\mathfrak{d}(a^x)=a^x\,lgn\,a\,\mathfrak{d}x$; $\mathfrak{d}(e^x)=e^x\mathfrak{d}x$. **9)** $\mathfrak{d}(x^y)=x^{y-1}(x\,lgn\,x\,\mathfrak{d}y+y\,\mathfrak{d}x)$.

11) $\mathfrak{d}(lgn\,x)=\frac{\mathfrak{d}x}{x}$. **12)** $\mathfrak{d}(\sin x)=\cos x\,\mathfrak{d}x$. **13)** $\mathfrak{d}(\cos x)=-\sin x\,\mathfrak{d}x$.

14) $\mathfrak{d}(tg\,x)=\frac{\mathfrak{d}x}{\cos^2 x}$. **15)** $\mathfrak{d}(cotg\,x)=-\frac{\mathfrak{d}x}{\sin^2 x}$. **16)** $\mathfrak{d}(\sec x)=\frac{\sin x\,\mathfrak{d}x}{\cos^2 x}$.

17) $\mathfrak{d}(cosec\,x)=-\frac{\cos x\,\mathfrak{d}x}{\sin^2 x}$. **18)** $\mathfrak{d}\,arc(\sin=x)=\pm\frac{\mathfrak{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, I. II. III. IV. Quad. $+\;-\;-\;+$

19) $\mathfrak{d}\,arc(\cos=x)=\mp\frac{\mathfrak{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, I. II. III. IV. Q. $-\;-\;+\;+$ **20)** $\mathfrak{d}\,arc(tg=x)=\frac{\mathfrak{d}x}{1+x^2}$.

21) $\mathfrak{d}\,arc(cotg=x)=-\frac{\mathfrak{d}x}{1+x^2}$.

§. 21. Taylor's und Maclaurin's Reihe.

1. Bedeutet $f^1(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$, $\left(\text{od.}=\frac{\mathfrak{d}fx}{\mathfrak{d}x}\right)$; $f^2(x)$ die zweite $\left(=\frac{\mathfrak{d}^2 f(x)}{\mathfrak{d}x^2}\right)$ etc. und m eine Zahl zwischen 0 und 1, so ist nach Taylor

$$f(x+y)=f(x)+f^1(x)\frac{y}{1}+f^2(x)\frac{y^2}{1.2}+\ldots+f^{n-1}(x)\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{(1-m)^{n-1}y^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^n(x+my).$$

2. Und bezeichnen $f(0)$, $f^1(0)$, $f^2(0)\ldots$ die Werthe, welche $f(x)$, $f^1(x)$, $f^2(x)\ldots$ annehmen, wenn man in ihnen $x=0$ setzt, so ist nach Maclaurin

$$f(x)=f(0)+f^1(0)\frac{x}{1}+f^2(0)\frac{x}{1.2}+\ldots+f^{n-1}(0).\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+f^n(mx).\frac{1-m^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

§. 22. Unbestimmte Formen.

1. $\frac{0}{0}$. Wenn ein Bruch $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x=a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt und $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ die Ableitungen von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nach x bedeuten, so erhält man des Bruches wahren Werth, sobald man in $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ für $x=a$ setzt; also $y=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$. Für den Fall, dass auch dies als $\frac{0}{0}$ erscheint, ist $y=\frac{\varphi^2(a)}{\psi^2(a)}$; u. s. f.

2. $\frac{\infty}{\infty}$. Wie vorige Form zu behandeln.

3. $0\times\infty$. Wenn $\varphi(x).\psi(x)$ für $x=a$ in $0.\infty$ übergeht, so substituirt man $\frac{1}{\psi(x)}=f(x)$ und erhält dadurch die Form 1).

4. 00, 0^∞, $\infty 0$. Nimmt der Ausdruck $\varphi(x)^{\psi(x)}$ für einen Werth $x=a$ eine jener 3 Formen an, so ist, wenn man $\varphi(x)^{\psi(x)}=y$ setzt, $lgn\,y=\psi(x).lgn\,\varphi(x)$; mithin $y=e^{\psi(x)\,.\,lgn\,\varphi(x)}$. Setzt man nun $lgn\,\varphi(x)=f(x)$, so erhält man $e^{\psi(x)\,.\,f(x)}$, und handelt es sich nun nur noch um Bestimmung des Werthes des Exponenten für $x=a$.

§. 23. Maxima und Minima.

1. Um den Werth von x zu ermitteln, für welchen $f(x)$ ein Max. od. Min. wird, setzt man die Ableitung nach x $f'(x)=0$ und löst die Gleichung in Bezug auf x auf, wodurch man einen od. mehrere Werthe von x erhält. Diesen Werthen entspricht ein Max. od. Min., je nachdem sie die zweite Ableitung $f''(x)$ negativ od. positiv machen. Sollte auch $f''(x)$ für einen dieser Werthe zu Null werden, so muss auch $f'''(x)$ für denselben $=0$ sein, wenn $f(x)$ zu einem Max. od. Min. werden soll, was der Fall ist, jenachdem $f''''(x)$ negativ od. positiv wird.

2. Wenn $f(x,y)=0$ gegeben ist, so bildet man die Differentialgleichung $\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}x}\mathfrak{d}x+\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}y}\mathfrak{d}y=0$ u. setzt darein $\frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}x}=0$. Aus der dadurch erhalt. Gleichung

zwischen x u. y und der gegebenen $f(x,y)=0$ eliminirt man y, und gelangt so gleichfalls zur Bestimmung von x. Diesen Werth nun u. $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ substituirt man in der Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei dasselbe gilt wie in 1.

3. Ist $z=f(x,y)$ gegeben, so liefern $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ u. $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ die Werthe, durch welche z zu einem Max. od. Min. wird. Diese müssen, damit überhaupt ein Max. od. Min. stattfinden kann, die Bedingung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial f}{\partial x\,.\,\partial y}\right)^2$ erfüllen u. je nachdem sie der Grösse $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ das negative od. positive Vorzeichen geben, einem Max. od. Min. entsprechen.

§. 24. Integralformeln.

($\int$ das Integralzeichen; C eine Constante, die übrigen Bezeichnungen wie in §. 20.)

1) $\int a\psi(x)\partial x = a\int\psi(x)\partial x = a\varphi(x)+C.$

2) $\int[\varphi(x)+\psi(x)]\partial x = \int\varphi(x)\partial x+\int\psi(x)\partial x.$

3) $\int x^n\partial x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$ 4) $\int\frac{\partial x}{x}=lgn\,x+C.$ 5) $\int a^x\partial x=\frac{a^x}{lgn\,a}+C.$

6) $\int e^x\partial x=e^x+C.$ 7) $\int x\partial y=xy-\int y\partial x.$ 8) $\int sin x\,\partial x=cos x+C.$

9) $\int cos x\,\partial x=-sin x+C.$ 10) $\int tg\,x\,\partial x=-lgn\,cos x+C.$

11) $\int cotg\,x\,\partial x=lgn\,sin\,x+C.$ 12) $\int\frac{\partial x}{sin x}=lgn\,tg\frac{x}{2}+C.$

13) $\int\frac{\partial x}{cos x}=lgn\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C=lgn\,cotg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$

14) $\int\frac{\partial x}{sin x^2}=-cotg\,x+C.$ 15) $\int\frac{\partial x}{cos x^2}=tg\,x+C.$

16) $\int sin\,x^2\partial x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}sin\,2x+C.$ 17) $\int cos\,x^2\partial x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}sin\,2x+C.$

18) $\int tg\,x^2\partial x=tg\,x-x+C.$ 19) $\int cotg\,x^2\partial x=cotg\,x+x+C.$

20) $\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=arc(sin=x)=-arc(cos=x)+C.$

21) $\int\frac{\partial x}{1+x^2}=arc(tg=x)+C=-arc(cotg=x)+C.$

22) $\int\frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}}=lgn\,(x+\sqrt{x^2-1})+C.$ 23) $\int\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}}=lgn\,(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

24) $\int\frac{\partial x}{1-x^2}=\frac{1}{2}lgn\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+C.$ 25) $\int\frac{\partial x}{x^2-1}=\frac{1}{2}lgn\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C.$

26) $\int\sqrt{1+x^2}\,.\,\partial x=\frac{1}{2}[x\sqrt{1-x^2}+lgn\,(x+\sqrt{1+x^2})]+C.$

27) $\int\sqrt{1-x^2}\,.\,\partial x=\frac{1}{2}[x\sqrt{1-x^2}+arc(sin=x)]+C.$

28) $\int\sqrt{x^2-1}\,.\,\partial x=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1}-lgn\,(x+\sqrt{x^2-1})]+C.$

29) $\int_c^{c_1}y\partial x=[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]\frac{c_1-c}{3n};$

wo, wenn $y=\varphi(x)$ ist, $y_0=\varphi(c)$, $y_1=\varphi\left(c+\frac{c_1-c}{n}\right)$, $y_2=\varphi\left(c+\frac{2(c_1-c)}{n}\right)$, $y_3=\varphi\left(c+\frac{3(c_1-c)}{n}\right)$, $\ldots y_{n-1}=\varphi\left(c-\frac{n-1}{n}(c_1-c)\right)$, $y_n=\varphi(c_1)$ bezeichnet, und für n eine möglichst grosse gerade Zahl anzunehmen ist.

30) $\int_{c_1}^{c_1}y\partial x=[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n]\frac{c_1-c}{n}+\frac{tg\,\alpha-tg\,\alpha_n}{12}\left(\frac{c_1-c}{n}\right)^2,$

wo $tg\,\alpha=\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x=c$, sowie $tg\,\alpha_1=\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x=c_1$, und für n eine beliebige grosse Zahl einzuführen ist.

31) Ist $z=\int y\partial x=\int\psi(x)\,.\,\partial x=\varphi(x)+C$, und für $x=c$, $z=m$, so hat man die Constante $C=m-\varphi(c)$.

Aus dem unbestimmten Integral $\int y\partial x=\int\psi(x)\partial x=\varphi(x)$, folgt das bestimmte

32) $\int_c^{c_1}y\partial x=\int_c^{c_1}\psi(x)\partial x=\varphi(c_1)-\varphi(c).$

33) $\int_c^{c_1}y\partial x=-\int_{c_1}^{c}y\partial x=\int_c^{a}y\partial x+\int_a^{c_1}y\partial x.$ 34) $\int_{-c}^{c}y\partial x=2\int_0^{c}y\partial x.$

V. Kapitel.
Praktische Arithmetik.

(Die deutschen Buchstaben bedeuten bestimmte Maseinheiten, z. B. Pfunde, Scheffel, Thaler, und x, x_1, x_2, x_3 die gesuchte oder fragliche Grösse.)

§. 25. Kettenregel.

Kann das x einer Aufgabe angesetzt werden als Anfangsglied einer Kette von Masgleichungen, deren jede mit derjenigen Masbenennung beginnt, mit der die vorige schloss, und deren letzte gleichnamig mit dem Anfang der ganzen Kette schliesst, wie z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} x\mathfrak{M} = a\mathfrak{N} \\ b\mathfrak{N} = c\mathfrak{O} \\ d\mathfrak{O} = e\mathfrak{M} \end{array}\right\}$$ so ist immer $x =$ dem Produkte der rechten Zahlen, dividirt durch das der linken, oder $x = \frac{ace}{bd}$.

§. 26. Einfache Proportionsrechnung. (Regeldetri.)

Wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Q}$ 2 Dinge sind, die in proportionaler Beziehung stehen, und $a\mathfrak{M}$ den Betrag $b\mathfrak{Q}$ bedingt, u. es wird nach dem zur Grösse $c\mathfrak{M}$ gehörigen Betrage $x\mathfrak{Q}$ gefragt, so ist: „$a\mathfrak{M}$ geben $b\mathfrak{Q}$“ der Bedingungs-, „$c\mathfrak{M}$ geben $x\mathfrak{Q}$“ der Fragesatz, $a:c$ das Bestimmungsverhältniss und c dessen Frageglied, das beim direkten Ansatze immer ins 2. Glied der Proportion kommt; so dass

1) $a\mathfrak{M} : c\mathfrak{M} = b\mathfrak{Q} : x\mathfrak{Q}$, also $a:c = b:x$, und folglich $x = \frac{bc}{a}$ (s. S. 36).

Wenn jedoch auf das: „Je mehr von $\mathfrak{M}$“, ein: „desto weniger von $\mathfrak{Q}$“ geschlossen werden muss, so ist die Beziehung zwischen $\mathfrak{M}$ u. $\mathfrak{Q}$ eine verkehrt proport., u. beim direkten Ansatz 1) das Bestimmungsverhältn. umzukehren. — Z. B.: 4 Arbeiter brauchten 18 Tage; wieviel demnach 9 Arb.? Frageglied $9\mathfrak{A}$; also direkter Ansatz: $4\mathfrak{A} : 9\mathfrak{A} = 18\mathfrak{T} : x\mathfrak{T}$; „je mehr $\mathfrak{A}$, desto weniger $\mathfrak{T}$“, mithin indirekt, folglich $9:4 = 18:x$ und $x = \frac{4 \cdot 18}{9} = 8\mathfrak{T}$.

§. 27. Zusammengesetzte Proportionsrechng. (Rees'sche Regel.)

Auf die fragl. Grösse (x) sind gleichzeitig mehrere Bestimmungsverhältnisse (s. vorigen Paragraph) einwirkend. Z. B.:
Bedingungssatz: Wenn $g\mathfrak{Q}$ sich ergeben durch $a\mathfrak{M}$ unt. Mitwirkg. v. $b\mathfrak{N}$ u. $c\mathfrak{O}$;
Fragesatz: Wieviel (od. x) $\mathfrak{Q}$ ergeb. s. dann durch $d\mathfrak{M}$ unt. Mitwirkg. v. $e\mathfrak{N}$ u. $f\mathfrak{O}$?

Ansatz:	
$x\mathfrak{Q}$	$g\mathfrak{Q}$
$a\mathfrak{M}$	$d\mathfrak{M}$
$b\mathfrak{N}$	$e\mathfrak{N}$
$c\mathfrak{O}$	$f\mathfrak{O}$

Mit x beginnend, gegenüber sein Gleichnamiges; darunter rechts alle Frage-, gegenüber links in gleicher Benennung alle Bedingungsglieder. Hierauf Untersuchung, ob indirekte Verhältnisse darin (ob z. B. auf die Frage: „je mehr von $\mathfrak{M}$ od. $\mathfrak{N}$ od. $\mathfrak{O}$“ ein „desto weniger von $\mathfrak{Q}$“ als Antwort erfolgt) und Umkehrung solcher. Dann wie beim Kettensatz, .. $x =$ Produkt der rechten Zahlen divid. durchs Produkt der linken. (In der Verbindung: Wieviel (x) $\mathfrak{Q}$ erfolgen bei $d\mathfrak{M}$, $e\mathfrak{N}$, $f\mathfrak{O}$, da bei $a\mathfrak{M}$, $b\mathfrak{N}$, $c\mathfrak{O}$ ... $g\mathfrak{Q}$ erfolgten, bildet der Ansatz einen vollständigen Redesatz.)

§. 28. Repartitions- (Gesellschafts- oder Theil-) Rechnung.

1) Die Grösse G soll nach Verhältniss der Werthe a, b, c, d (= natürl. Repartitionszahlen) getheilt werden. Regel: Multiplicire die Repartitionsquote $\frac{G}{a+b+c+d}$ nach und nach mit allen Repartitionszahlen a, b, c... (Letztere können vorher durch eine beliebige Grösse multiplicirt oder dividirt werden).

2) Wenn G so zu theilen, dass sich der I. Theil zum II. wie $a:b$, der II. zum III. wie $c:d$, der III. zum IV. wie $e:f$ verhalte, so findet man die natürl. Repartitionszahl, wenn man setzt:

Reprtz. des I. Th. $= a.c.e$ (= Produkt aller ersten Glieder)
„ „ II. „ $= b.c.e$ (wegen I.: II. $= a:b$ ward in I. a mit b vertauscht)
„ „ III. „ $= b.d.e$ („ II.:III. $= c:d$ „ „ II. c „ d „)
„ „ IV. „ $= b.d.f$ („ III.:IV. $= e:f$ „ „ III. e „ f „)

3) Wenn G so zu theilen, dass I.:II. wie $a:b$, III.:I. $= c:d$, IV.:II. $= e:f$, so ordne erst die Repartitionsverhältn. nach einerlei Richtung, also I.:II. $= a:b$, I.:III. $= d:c$, II.:IV. $= f:e$, und setze

Reprtz. von I. $= a.d.f$ (also wie vorher = Produkt aller ersten Glieder)
„ „ II. $= b.d.f$ (wegen I.: II. $= a:b$ ward in I. a mit b vertauscht)
„ „ III. $= a.c.f$ („ I.:III. $= d:c$ „ „ I. d „ c „)
„ „ IV. $= b.d.e$ („ II.:IV. $= f:e$ „ „ II. f „ e „)

4) Wenn die Zertheilung von G durch das Zusammenwirken von mehreren neben einander bestehenden Repartitionsreihen, wie $A\mathfrak{M}$, $B\mathfrak{M}$ und $C\mathfrak{M}$

und gleichzeitig durch $a\mathfrak{N}$, $b\mathfrak{N}$, und $c\mathfrak{N}$, bedingt ist, so sind die masgebenden Repartitionszahlen für die Theile I., II., III.... 1) wenn sowohl $\mathfrak{M}$ als $\mathfrak{N}$ zu dem Dinge G in direktem Verhältn. steht (also auf ein ,,je mehr von $\mathfrak{M}$" ein ,,desto mehr von G" sich folgert) ... Aa, Bb, Cc... 2) wenn die Dinge der Reihe A, B, C in verkehrtem Verhältn. zu G stehen ... $\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$, $\frac{c}{C}$... 3) wenn das letztere (verkehrte Verhältniss) bei beiden Reihen der Fall ... $\frac{1}{Aa}$, $\frac{1}{Bb}$, $\frac{1}{Cc}$.

Z. B.: Wenn auf der Section I. wöchentl. 6 Tage à 8 Stund., II. 5 $\mathfrak{T}$. à 9 $\mathfrak{St}$. u. III. nur 4 $\mathfrak{T}$. à 10 $\mathfrak{St}$. gearbeitet werden kann, wie hat man da 100 Arbeiter zu vertheilen, so dass auf jeder Section dieselbe Arbeitsgrösse pro Woche zu Stande kommt. — ,,Je mehr $\mathfrak{T}$ pro $\mathfrak{W}$, desto weniger $\mathfrak{A}$", ,,je mehr $\mathfrak{St}$ pro $\mathfrak{T}$, desto weniger $\mathfrak{A}$; beide Verhältnissreihen also indirekt; folglich erhält als Reprtz.

I. $\frac{1}{6\,.\,8} = \frac{1}{48}$
II. $\frac{1}{5\,.\,9} = \frac{1}{45}$
III. $\frac{1}{4\,.\,10} = \frac{1}{40}$

welche Repartitionsreihe, mit ihrem Generalnenner 720 multiplicirt, sich auf 15, 16, 18 abrundet, deren Summe $= 49$; so dass die Repartitions-Quote $= \frac{100}{49} = 2^2/_{49}$ und somit

I. $= 2^2/_{49} \cdot 15 = 30^{30}/_{49}$ Mann;
II. $= 2^2/_{49} \cdot 16 = 32^{32}/_{49}$,,
III. $= 2^2/_{49} \cdot 18 = 36^{36}/_{49}$,,

§. 29. Vermischungs- (und Durchschnitts-) Rechnung.

Qn. Quantität; Ql. Qualität; W. Werth; S. Summe. Es repräsentiren die Buchstaben A, B, C, D die Qn's-, a, b, c, d die Ql's-, also die Produkte Aa, Bb etc. die W's-Zahlen od. W's-Verhältnisse der im eigentlichen od. bildlichen Sinne zu vermischenden Dinge (Theile).

1) Die mittlere od. Durchschnitts-Ql. m zu finden: $m = \frac{Aa + Bb + Cc}{A + B + C}$ oder als Regel: S. der W's- divid. durch die S. der Qn's-Zahlen. Z. B.: Wenn im Holzbestande 30 Klaftern 2%, 50 Kl. 3% u. 10 Kl. 4% Zuwachs haben, so ists dasselbe, als wenn das Ganze $\frac{30\,.\,2 + 50\,.\,3 + 10\,.\,4}{30 + 50 + 10} = \frac{3\,.\,2 + 5\,.\,3 + 1\,.\,4}{9}$ $= 2^7/_9$% Zuwachs hätte.

2) Qn. und Ql. des Ganzen (G u. g), sowie aller Theile (A u. a, B u. b etc.) bis auf einen (X und x) sind gegeben; so ist dessen fragliche Qn. $X = G - (A + B + \ldots) =$ Qn. des Ganzen minus Qn. aller gegebenen Theile; und die fragl. Ql. $x = \frac{Gg - (Aa + Bb + \ldots)}{x} =$ W. des Ganzen minus W. aller gegebenen Theile, divid. durch die Qn. des Fehlend. Z. B.: Wenn mit Verwendung v. 10 Scheff. à 140 Pfd. 24 Schff. à 160 Pfd. gemischt werden sollen, welche Qn. u. Ql. gehört dazu? Qn. $X = 24 - 10 = 14$ Sch. Ql. $x = \frac{24\,.\,160 - 10\,.\,140}{14} = 174^2/_7$ Pfd.

3) Aus der grössern Ql. a und der geringern b eine bestimmte mittlere m zu bilden. Setzt man a m b, so erhält man das fragl. Qn.-Verhältn. (v. a zu b) als $A : B = (m - b) : (a - m)$. War eine bestimmte Qn. $= G$ verlangt, so ist G diesen Verhältnisszahlen gemäs nach §. 28 (1) zu zerlegen. Z. B.: Aus 80gräd. Spiritus und Wasser (0gräd.) 8 Kannen 60gräd. zu mischen? Aus 80, 60, 0 u. deren Diff. 20 u. 60 folgt Sp.: Ws. wie umgekehrt 20:60, also wie 3:1. Da nun die Summe der Repartitionsz. $= 4$, die Rep.-Quote $8:4 = 2$, folgt $3.2 = 6$ Ka. Spir. und $1.2 = 2$ Ka. Wasser.

4. Aus mehr als 2 Ql. a, b, c, d, e eine mittlere m zu bilden. Sind beispielsweise a b c die obern u. d u. e d. unt. Qln., so gib den Nennern $a - m$, $b - m$, $c - m$ . . . . $m - d$ $m - e$ solche Zähler, dass die Zählersumme der obern Qln. = der Zählersumme der untern. Die so entstehenden (beliebig zu variirenden) Brüche bilden die gesuchte Repartitions- oder Verhältnissreihe. — Z. B.: Den Futterwerth vom Heu $= 100$ gesetzt, rechnet man den von Korn 300, Kleie 240, Kartoffeln 50 u Stroh 30. Wie kann man aus diesen 4 letzten Substanzen ein Futter mischen, das denselben Nahrungswerth wie Heu bei gleichem Gewicht besitzt?

	300,	240,	(100,)	50;	30	* Aus 30—10; 24—10; 10—5; 10—3.
oder	30	24	(10,)	5	3	** Summe der oberen Zähler 20+14
Nenner*:	20,	14		5,	7	=Sum. der unteren Zähler 20+14.
Bei **	$\frac{20}{20}$,	$\frac{14}{14}$	. . .	$\frac{20}{5}$,	$\frac{14}{7}$	erhält man $\frac{20}{20} = 1$ Th. Korn; $\frac{14}{14} = 1$ Th. Kl.; $\frac{20}{5} = 4$ Th. Kart.; $\frac{14}{7} = 2$ Th. Stroh.
Bei	$\frac{20}{20}$,	$\frac{56}{14}$	. . .	$\frac{30}{5}$,	$\frac{46}{7}$	dagegen erhält man 1 Th. Korn; 4 Th. Kl.; 6 Th. Kart.; $6^1/_7$ Stroh.

§. 30. Zuwachsdurchschnitt und Zuwachsprocent.

(p das Zuwachsproc.; $e = p/_{100} =$ Einheitszins; auch $0{,}0p$ geschrieben.)

Gelangt der Vorwerth k inner n Jahren auf den Nachw. K, so ist der (resp. das) auf alle Jahre gleichmässig vertheilte

1) Durchschnittszuwachs $d = \frac{K - k}{n}$. 2) Mehrungsfactor $(1 + e)$ od. $1{,}0p = \sqrt{\frac{K}{k}}$.

Zuwachs-, Zins u. Rentenrechnung.

3) Zuwachs% $p =$ beid-erste Decimalen des Mehrungsfakt.; $= \left(\sqrt[n]{\frac{K}{k}} - 1\right) 100.$
Der auf alle n J. gleichmässig repart. Durchschnittszuw. d (Formel 1), dargestellt als Procentgrösse des Anfangswerthes k, ist
4) $p_1 = \frac{K-k}{k} 100$; des Endwerthes K 5) $p_2 = \frac{K-k}{k} . 100$; des mittleren oder Durchschnittsw. 6) $p_3 = \frac{K-k}{K+k} . \frac{200}{n}$; welcher letztere dem Zuwachsprocent nach Formel 3) sehr nahe kommt, namentlich wenn p und n nicht gar zu gross.

§. 31. Einfacher Zins. Mehrung nach arithmetischer Reihe.

Konstanter Zuwachs. (Buchstabenbedeutung s. folg. §.)

1) $z = ke$ oder $\frac{kp}{100}$. 2) $Z = ken$ oder $\frac{kpn}{100}$.

3) $K = k(1+en)$ oder $\frac{k(100+pn)}{100}$. 4) $k = \frac{K}{1+en}$ oder $\frac{100\,K}{100+pn}$.

§. 32. Zinseszins. Wirkl. Jahres- u. Termin-Verzinsung.

Mehrung nach geometrischer Reihe. Konstantes Zuwachsprocent.

k der frühere od. Vorwerth; K der durch den $n$jähr. Zuwachs Z entstandene spätere od. Nachwerth; p das Z%; e der Einheitszins $= p/_{100}$ od. $0{,}0\,p$; z der jährl. Zuwachs od. Zins; $1+e$ od. $1{,}0\,p$ der Mehrungsfaktor; V_n od. V der Vor- u. N_n od. N der Nachwerthsfaktor aus S. 46.

Jahresrente 1) $z = ke$; der $n$jähr. Zuw. 2) $Z = [(1+e)^n - 1]\,k$ oder $[1{,}0\,p^n - 1]\,k$; der prolongirte od. Nachwerth von k 3) $K = (1+e)^n k = 1{,}0\,p^n k$; der diskontirte oder Vorw. von K 4) $k = \frac{1}{(1+e)^n} K$ od. $\frac{1}{1{,}0\,p^n} K$. — Oder kürzer mittels Zinstafel S. 46 . . . 5) $k = V.K$; 6) $K = N.k$; 7) $Z = (N-1)\,k$.

8) Bei **nicht jährlicher Verzinsung** setzt man für n überall die Zahl (nicht der Jahre, sondern) der Zinsverzinsungstermine; u. für p nicht das jährl., sondern das auf den Termin kommende Zprocent. — Z. B.: Den Nachwerth des Kapitales 1 für 50 Jahre beim Zinsfuss 4 zu finden a. bei jährlicher, b. bei halbjährlicher ($n = 100$ Halbjahre mit 2%) und c. bei 5jährlicher ($n = 10$ Jahrfünfte zu 20%) Verzinsung? — Mittels des Knt's Rückseite, r. Rand.

a. $K = 1{,}04^{50}$? — $50\,lg\,1{,}04 = 0{,}0170333 . 50 = 0{,}851665$; Zahl hierzu $= 7{,}107$.
b. $K = 1{,}02^{100}$? — $100\,lg\,1{,}02 = 0{,}0086002 . 100 = 0{,}86002$; ,, ,, $= 7{,}245$.
c. $K = 1{,}20^{10}$? — $10\,lg\,1{,}20 = 0{,}07918 . 10 = 0{,}7918$; ,, ,, $= 6{,}192$.

9) Bei **zweierlei Zinsfuss**, z. B. p% für den Fond u. q% für d. Verzins. der Zinsen, behandelt (summirt) man letztere als eine Jahresrente $r = kp : 100$ nach den Regeln des §. 34 mit q%.

§. 33. Renten bei einfach. Zins od. konstant. Zuw. ($e = p/_{100}$ od. $0{,}0\,p$)

α. Eine $n$malige Jahresrente r wächst mit p% einfachem Zins bei und mit dem letzten Erfolge auf den Endwerth 1) $K = \frac{n}{2}[2 + e(n-1)]\,r$, od. hat, auf den Anfang des 1. J. reducirt, den Anfangsw. 2) $k = \frac{n}{2} . \frac{2+e(n-1)}{1+en} . r$.

β. (Abtriebsformel.) Wenn ein Fond A mit p% od. Ae einfach. Zuw. durch eine jährliche Entnahme r nach n J. bis auf den Rest B aufgezehrt wird, so ist
3) $\frac{n}{2}[2 + e(n-1)\,r] = A(1+en) - B$ oder $B = A(1+en) - \frac{n}{2}[2 + e(n-1)]\,r$.
Z. B.: Ein Bestand von 1000 Klaftern, mit 20 Kl. od. 2% konstant. Zuwachs, soll in 10 ganz gleichen Jahresschlägen abgeholzt werden. Wie gross die jährl. Hiebsrate? — Da $A = 1000$, $e = 0{,}02$, $n = 10$, $B = 0$ folgt nach 3)

$$5\,[2{,}18]\,r = 1000 . 1{,}20; \text{ also } r = \frac{1200}{5 . 2{,}18} = 110{,}1 \text{ Klaftern.}$$

§. 34. Eigentliche Rentenrechnung. (Nach wirkl. jährl. od. Zins-Verz.)

1) **Buchstabenbedeutung:** p, e, V, N wie in Paragraph 32. Dazu: ,,Gemeine Rente", auch Rente kurzweg: welche jährlich und zwar nachschussweise (zu Ende des J.) erfolgt. A_n der $n$jähr. Anfangsfaktor (s. S. 47) oder der auf den Anf. des 1. Rentenjahres diskontirte Werth aller Glieder einer $n$mal. gem. R. v. d. Grösse $r = 1$. E_n der $n$jähr. Endwerthsfaktor (s. S. 47) od. der auf das Ende des letzten J. prolong. u. summirte W. aller Glieder der Einheitsrente, einschliesslich des letzten oder $n$ten Gliedes. k der anfängl., resp. gegenwärtige, u. K der schliessliche (bei und mit dem letzten Gliede summirte) Kapitalwerth jeder beliebigen Rente r. — j. jährig; Vwf. Vorwerthsfactor; etc.

2) **Eine unaufhörliche Jahresrente** r, deren erster Eingang
α. nach 1 J. erfolgt, hat $k = r . \frac{100}{p}$ od. re od. bei 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5% $r . 33\,1/_3$, $.28\,4/_7$, $.25$, $.22\,2/_9$, $.20$.
β. gerade bevorsteht, hat $k' = r\left(\frac{100}{p} + 1\right)$ od. $\left(\frac{1}{e} + 1\right) r$ od. voriges $k + r$.
γ. nach m J. bevorst., hat $k'' = \frac{1}{e(1+e)^{m-1}} . r$ od. $k . V_{m-1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ersteres } k \times \\ (m-1) \text{ j. Vwf.} \end{array} \right.$

Zins- u. Rentenrechnung.

§. 35. Zinstafel. (Vor- und Nachwerthsfaktoren nach §. 32.)

Jahr (n)	Des Kap. 1 Vorwerth $V_n = \frac{1}{(1+e)^n}$. Ein nach n J. fällig. Kapital 1 hat den gegenw. (diskont.) Werth:					Des Kap. 1 Nachwerth $N_n = (1+e)^n$. Ein jetzt fällig. Kap. 1 wächst in n J. auf den (prolong.) Werth:				
	$p=3\%$	3½ %	4 %	4½ %	5 %	$p=3\%$	3½ %	4 %	4½ %	5 %
1	0,97087	0,96618	0,96154	0,95694	0,95238	1,0300	1,0350	1,0400	1,0450	1,0500
2	0,94260	0,93351	0,92456	0,91573	0,90703	1,0609	1,0712	1,0816	1,0920	1,1025
3	0,91514	0,90194	0,88900	0,87630	0,86384	1,0927	1,1087	1,1249	1,1412	1,1576
4	0,88849	0,87144	0,85480	0,83856	0,82270	1,1255	1,1475	1,1699	1,1925	1,2155
5	0,86261	0,84197	0,82193	0,80245	0,78353	1,1593	1,1877	1,2167	1,2462	1,2763
6	0,83748	0,81350	0,79031	0,76790	0,74622	1,1941	1,2293	1,2653	1,3023	1,3401
7	0,81309	0,78599	0,75992	0 73483	0,71068	1,2299	1,2723	1,3159	1,3609	1,4071
8	0,78941	0,75941	0,73069	6,70319	0,67684	1,2668	1,3168	1,3686	1,4221	1,4775
9	0,77742	0,73373	0,70259	0,67290	0,64461	1,3048	1,3629	1,4233	1,4861	1,5513
10	0,74409	0,70892	0,67556	0,64393	0,61391	1,3439	1,4106	1,4802	1,5530	1,6289
11	0,72242	0,68495	0,64958	0,61620	0,58468	1,3842	1,4600	1,5395	1,6229	1,7103
12	0,70138	0,66178	0,62460	0,58966	0,55684	1,4258	1,5111	1,6010	1,6959	1,7959
13	0,68095	0,63940	0.60057	0,56427	0,53032	1,4685	1,5640	1,6651	1,7722	1,8856
14	0,66112	0,61778	0,57748	0,53997	0,50507	1,5126	1,6187	1,7317	1,8519	1,9799
15	0,64186	0,59689	0,55526	0,51672	0,48102	1,5580	1,6753	1,8009	1,9353	2,0789
16	0,62317	0,57671	0,53391	0,49447	0,45811	1,6047	1,7340	1,8730	2,0224	2,1829
17	0,60502	0,55720	0,51337	0,47318	0,43630	1,6528	1,7947	1,9479	2,1134	2,2920
18	0,58739	0,53836	0,49363	0,45280	0,41552	1,7024	1,8575	2,0258	2,2085	2,4066
19	0,57029	0,52016	0,47464	0,43330	0,39573	1,7535	1,9225	2,1068	2,3079	2,5270
20	0,55368	0,50257	0,45639	0,41464	0,37689	1,8061	1,9898	2,1911	2,4117	2,6533
25	0,47761	0,42315	0,37512	0,33273	0,29530	2,0938	2,3632	2,6658	3,0054	3,3864
30	0,41199	0,35628	0,30832	0,26700	0,23138	2,4273	2,8068	3,2434	3,7453	4,3219
35	0,35538	0,29998	0,25342	0,21425	0,18129	2,8139	3,3336	3,9461	4,6673	5,5160
40	0,30656	0,25257	0,20829	0,17193	0,14205	3,2620	3,9593	4,8010	5,8164	7,0400
45	0,26444	0,21266	0,17120	0,13796	0,11130	3,7816	4,7024	5,8412	7,2482	8,9850
50	0,22811	0,17905	0,14071	0,11071	0,08720	4,3839	5,5849	7,1067	9,0326	11,467
60	0,16973	0,12693	0,09506	0,07129	0,05354	5,8916	7,8781	10,520	14,027	18,679
70	0,12630	0,08999	0,06422	0,04591	0,03287	7,9178	11,113	15,572	21,784	30,426
80	0,09398	0,06379	0,04338	0,02956	0,02018	10,641	15,676	23,050	33,830	49,561
90	0,06993	0,04522	0,02931	0,01903	0,01239	14,300	22,112	34,119	52,537	80,730
100	0,05203	0,03206	0,01980	0,01226	0,00760	19,219	31,191	50,505	81,589	131,50
120	0,02881	0,01611	0,00903	0,00508	0,00287	34,71	62,06	110,7	196,8	348,9
140	0,01595	0,00810	0,00412	0,00211	0,00108	62,69	123,5	242,5	474,5	925,8
160	0,00885	0,00407	0,00188	0,00087	0,00041	113,2	245,7	531,3	1145,	2456,
180	0,00489	0,00204	0,00086	0,00037	0,00015	204,5	489,0	1164,	2669,	6517,
200	0,00271	0,00103	0,00039	0,00015	0,00006	369,4	972,9	2551,	6549,	17293,

Der um 1 verminderte Nachwerthsfaktor $(N_n - 1)$ ist der entsprechende Zinsfaktor oder $n$jährige Zinseszins des Kapitals 1.

§. 34. Fortsetzung.

3) Eine $n$malige Jahresrente r (ein $n$gliedr. Rentenstück).

Wenn der erste Eingang

α. nach 1 J. erfolgt, $k = \frac{(1+e)^n - 1}{e(1+e)^n} r$ od. $A_n . r$ $\left\{\begin{array}{l}= \text{dem zu } n \text{ gehör. Anfgsw.} \\ \text{der Taf. S. 47} \times \text{Rtnglied } r.\end{array}\right.$

β. gerade bevorsteht, $k' = \frac{(1+e)^n - 1}{e(1+e)^{n-1}} r$ od. $k . N_1$ od. $A_n . N_1 . r$ $\left\{\begin{array}{l}= n\text{j. Anfgs-} \\ \times 1\text{j. Nchwf.} \\ \times r.\end{array}\right.$

γ. nach m J. bevorst., $k'' = \frac{(1+e)^n - 1}{e(1+e)^{m+n-1}}$ od. $k . V_{m-1}$ od. $A_n . V_{m-1} . r$.

δ. Aufs Ende summirt geben alle drei $\Big\}$ $K = \frac{(1+e)^n - 1}{e} r$ od. $E_n . r$ $\left\{\begin{array}{l}= \text{dem zu } n \text{ geh. Endw.} \\ \text{der Rententaf. S. 47} \times r.\end{array}\right.$

4) Eine alle o Jahre (= Periode) **repetir. unaufhörl. Rente** r.

Wenn der erste Eingang

α. nach o J. erfolgt, $k = \frac{1}{(1+e)^o - 1} r$ od. $\frac{r}{N_o - 1}$ $\left\{\begin{array}{l}= r \text{ divid. durch den um 1} \\ \text{vermind. } o\text{jährig. Nachwf.)}\end{array}\right.$

β. gerade bevorsteht, $k' = \frac{(1+e)^o}{(1+e)^o - 1} r$ od. $k . N_o$ od. $\frac{N_o}{N_o - 1} . r$.

γ. nach m J. bevorst., $k'' = \frac{(1+e)^{o-m}}{(1+e)^o - 1} r$

$$\text{od.} = \frac{r}{(1+e)^m - (1+e)^{m-o}} = \left\{\begin{array}{l} k . N_{o-m} = \frac{N_{o-m}}{N_o - 1} r. \\ k . V_{m-o} = \frac{V_{m-o}}{N_o - 1} r.\end{array}\right.$$

§. 36. Rententafel. (Anfang- u. Endwerthsfaktoren nach 3, §. 34.)

Jahr (n)	Der R. 1 Anfgsw. $A_n = \frac{(1+e)^n - 1}{e\,(1+e)^n}$. Eine z. Ende jed. J. erfolg. $n$mal. Rente 1 hat zu Anf. des 1. J. den Kapitalw.:					Der Rente 1 Endw. $E_n = \frac{(1+e)^n - 1}{e}$. Eine n mal. J.-Rente 1 wächst zu u. mit dem letzt. Termin auf d. Kap.-Summe:				
	$p = 3\%$	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	$p = 3\%$	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%
1	0,9709	0,9662	0,9615	0,9569	0,9524	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,9135	1,8997	1,8861	1,8727	1,8594	2,0300	2,0350	2,0400	2,0450	2,0500
3	2,8286	2,8016	2,7751	2,7490	2,7232	3,0909	3,1062	3,1216	3,1370	3,1525
4	3,7171	3,6731	3,6299	3,5875	3,5460	4,1836	4,2149	4,2465	4,2782	4,3101
5	4,5797	4,5151	4,4518	4.3900	4,3295	5,3091	5,3625	5,4163	5,4707	5,5256
6	5,4172	5,3286	5,2421	5,1579	5,0757	6,4684	6,5502	6,6330	6,7169	6,8019
7	6,2303	6.1145	6,0021	5,8927	5,7864	7,6625	7,7794	7,8983	8.0192	8,1420
8	7,0197	6,8740	6,7327	6,5959	6.4632	8,8923	9,0517	9,2142	9,3800	9,5491
9	7,7861	7,6077	7,4353	7,2688	7,1078	10,159	10,368	10,583	10,802	11,027
10	8,5302	8,3166	8,1109	7,9127	7,7217	11,464	11,731	12,006	12,288	12,578
11	9,2526	9,0016	8,7605	8,5289	8,3064	12,808	13,142	13,486	13,841	14,207
12	9,9540	9,6633	9,3851	9,1186	8,8633	14,192	14,602	15,026	15,464	15,917
13	10,635	10,303	9,9856	9,6829	9,3936	15,618	16,113	16,627	17,160	17,713
14	11,296	10,921	10,563	10,223	9,8986	17,086	17,677	18,292	18,932	19,599
15	11,938	11,517	11,118	10,740	10,380	18,599	19,296	20,024	20,784	21,579
16	12,561	12,094	11,652	11,234	10,838	20,157	20,971	21,825	22,719	23,657
17	13,166	12,651	12,166	11,707	11,274	21,762	22,705	23,698	24,742	25,840
18	13,754	13,190	12,659	12,160	11,690	23,414	24,500	25,645	26,855	28,132
19	14,324	13,710	13,134	12,593	12,085	25,117	26,357	27,671	29,064	30,539
20	14,877	14,212	13,590	13,008	12,462	26,870	28,280	29,778	31,371	33,066
25	17,413	16,482	15,662	14,828	14,094	36,459	38,950	41,646	44,565	47,727
30	19,600	18,392	17,292	16,289	15,372	47,575	51,623	56,085	61,007	66,439
35	21,487	20,001	18,665	17,461	16,374	60,462	66,674	73,652	81,497	90,320
40	23,115	21,355	19,793	18,402	17,159	75,401	84,550	95,026	107,03	120,80
45	24,519	22,495	20,720	19,156	17,774	92.720	105,78	121,03	138,85	159,70
50	25,730	23,456	21,482	19,762	18,256	112,80	131,00	152,67	178,50	209,35
60	27,676	24,945	22.623	20,638	18,929	163,05	196,52	237,99	289,50	353,58
60	29,123	26,000	23,395	21,202	19,343	230,59	288,94	364,29	461,87	588,53
80	30,201	26,749	23,915	21,565	19,596	321,36	419,31	551,24	729,56	971,23
90	31,002	27,279	24,267	21,799	19,752	443,35	603,21	827,98	1145,3	1594,6
100	31,599	27,655	24,505	21,950	19,848	607,29	862,61	1237,6	1790,9	2610,0
120	32,37	28,11	24,77	22,11	19,94	1124	1745	2822	4354	6958
140	32,79	28,34	24,90	22,18	19,98	2056	3500	6643	10523	18495
160	33,04	28,46	24,95	22,20	19,99	3741	6992	13257	25410	49106
180	33,17	28,51	24,98	22,22	20,00	6783	13941	29087	61315	130388
200	33,24	28,54	24,99	22,22	20,00	12279	27769	63744	147905	345832

§. 34. Fortsetzung.

5) **Eine Periodenrente** r, welche alle o J. repetirt, im Ganzen jedoch nur n Male erfolgt.

Wenn der erste Eingang

α. nach o J. bevorst., $k = \dfrac{1 - \dfrac{1}{(1+e)^{on}}}{(1+e)^o - 1}\, r = \dfrac{1 - V_{on}}{N_o - 1}\, r$ od. $\dfrac{N_{on} - 1}{N_{on}(N_o - 1)}\, r$.

β. gerade bevorsteht, $k' = \left[1 - \dfrac{1}{(1+e)^{on}}\right] \dfrac{(1+e)^o}{(1+e)^o - 1}\, r$ od. $k \,.\, N_o$

od. $(1 - V_{on}) \dfrac{N_o}{N_o - 1}\, r$ od. $\dfrac{N_{on} - 1}{N_{o(n-1)}(N_o - 1)}\, r$.

γ. nach m J. bevorst., $k'' = \left[1 - \dfrac{1}{(1+e)^{on}}\right] \dfrac{(1+e)^{o \cdot m}}{(1+e)^o - 1}$

od. $\dfrac{(1+e)^{on} - 1}{[(1+e)^o - 1]\,(1+e)^{o(n-1)+m}} \,.\, r$ od. $k \,.\, N_{o \cdot m}$ od. $\dfrac{(1 - V_{on})\, N_{o \cdot m}}{N_o - 1}\, r$.

δ. **Jede derselben** hat aber bei und mit dem letzten Eingange sich auf einen **Endwerth** summirt v. $K = \dfrac{(1+e)^{on} - 1}{(1+e)^o - 1}$ od. $= \dfrac{N_{on} - 1}{N_o - 1}$.

6) **Wenn statt der ganzen Jahre Halb- od. Doppeljahre od. dgl.** als Zins- u. Rententermine gefordert sind, so werden in die Formeln 2)-5) die Zeit- und Procentziffern auch nach diesen Terminen bemessen. Beim Zinsfuss 4 z. B. u. wenn Alles nach Doppeljahren zu bemessen, hätte man m, n u. o nach Doppeljahren und e als 0,08 einzusetzen.

§. 37. Rentenleistungen gegen spätere R.-Gegenleistungen.

(Pensionsformel.) Zahlt Jemand vor Mitte jeden Jahres, also „vorschussweise", m J. lang die Rente r u. erhält vom $q$ten J. nach der letzten Einzahlung an die ebenfalls vorschussweise Rente R und zwar n J. lang, und werden die Einzahlungen mit $p\%$, die Auszahlungen mit $\pi\%$ in Anrechnung gebracht, so gilt für das Gleichgewicht der Leistungen und Gegenleistungen, wenn $0{,}0p = e$ und $0{,}0\pi = \varepsilon$ gesetzt wird,

$$\frac{(1+e)^m-1}{e}(1+e)^{q+n-1} = r\,\frac{(1+\varepsilon)^n-1}{\varepsilon}\,R.$$

Beim gewöhnlichen u. Staats-Pensionswesen ist in der Regel $p=\pi$ u. $q=1$ zu setzen.

Sterblichkeits- und Sterblichkeitsversicherungs-Theorie.

A. Alter; L. Leben; j. jährig; J. Jahr; P. Person; z. u. Z. Zahl.

§. 38. Mortalitätstafeln. (Naturgesetz der Lebens-Erlahmung.)

1) Süssmilch-Baumann'sche: theils nach Zählungen in der Mark, theils nach den Sterberegistern grosser u. kleiner Städte des nördlichen Deutschland; 2) Deparcieux'sche: Basis der grossen Pariser Versicherungsbank Union. 3) Neue Englische, 1847 gemeinsam von 17 Londoner Versicherungsgesellschaften auf Grund ihrer vereinigten Erfahrungen aufgestellt. (S. Rosenberg, Beitrag zur Berechnung etc. Hamburg. Jowien 1859.)

Alter oder Jahre: a.	1) Baumann. Lebende. l_a	2) Deparcieux. Lebende. l_a	3) Englische nach neuester Revision. A. Lebende. l_a	B. Sterbende.	C. Summe der Lebenden.	D. Reihe A. mit 3% auf d. Anfang diskontirt.	E. Summe der diskontirten Werthe in D.	F. Mittlere Lebensdauer.
0	1000	10000	20530		613011		271963	29,4
1	750	7450	15243	5287	592481	14799	257164	38,4
2	661	7088	12834	2409	577238	12097	245067	44,5
3	618	6823	11949	885	564404	10935	234132	46,7
4	593	6618	11359	590	552455	10092	224039	48,1
5	579	6468	11012	347	541096	9499	214540	48,6
6	567	6345	10688	324	530084	8951	205589	49,1
7	556	6243	10441	247	519396	8489	197100	49,2*
8	547	6154	10247	194	508955	8089	189011	49,2
9	539	6073	10106	141	498708	7745	181265	48,9
10	532	6004	10000	106	488602	7441	173824	48,4
11	527	5946	9932	68	478602	7175	166649	47,7
12	523	5897	9865	67	468670	6919	159730	47,0
13	519	5854	9798	67	458805	6672	153058	46,3
14	515	5815	9731	67	449007	6433	146625	45,6
15	511	5778	9664	67	439276	6203	140422	45,0
16	507	5740	9597	67	429612	5981	134441	44,3
17	503	5699	9529	68	420015	5765	128676	43,6
18	499	5655	9462	67	410486	5558	123118	42,9
19	495	5608	9395	67	401024	5358	117760	42,2
20	491	5558	9327	68	391629	5164	112596	41,5
21	486	5506	9259	68	382302	4977	107619	40,8
22	481	5453	9191	68	373043	4797	102822	40,1
23	476	5399	9122	69	363852	4622	98200	39,4
24	471	5344	9053	69	354730	4453	93747	38,7
25	466	5288	8984	69	345677	4291	89456	38,0
26	461	5231	8914	70	336693	4133	85323	37,3
27	456	5173	8843	71	327779	3981	81342	36,6
28	451	5116	8773	70	318936	3834	77507	35,8*
29	445	5060	8701	72	310163	3692	73815	35,1*
30	439	5005	8629	72	301462	3555	70260	34,4*
31	433	4951	8557	72	292833	3423	66837	33,7
32	427	4897	8483	74	284276	3294	63543	33,0
33	421	4844	8409	74	275793	3170	60373	32,3
34	415	4792	8334	75	267384	3051	57322	31,6
35	409	4740	8258	76	259050	2935	54387	30,9
36	402	4688	8181	77	250792	2823	51565	30,2*
37	395	4637	8104	77	242611	2715	48850	29,4*
38	388	4587	8025	79	234507	2610	46240	28,7
39	381	4538	7946	79	226482	2509	43731	28,0

Mortalitätstafeln.

Alter oder Jahre: a.	1) Baumann. Lebende. l_a	2) Deparcieux. Lebende. l_a	3) Englische nach neuester Revision. A. Lebende. l_a	B. Sterbende. s_a	C. Summe der Lebenden v. a-99 J. S_a	D. Reihe A. mit 3% auf d. Anfang diskontirt.	E. Summe der diskontirten Werthe in D.	F. Mittlere Lebensdauer.
40	374	4490	7865	81	218536	2411	41320	27,3
41	367	4441	7784	81	210671	2317	39003	26,6
42	360	4392	7701	83	202887	2225	36778	25,9
43	353	4342	7617	84	195186	2137	34641	25,1
44	346	4291	7532	85	187569	2052	32589	24,4
45	339	4239	7444	88	180037	1968	30621	23,7
46	332	4186	7353	91	172593	1888	28733	23,0
47	324	4132	7258	95	165240	1809	26924	22,3
48	316	4077	7160	98	157982	1733	25191	21,6
49	308	4021	7058	102	150822	1658	23533	20,9
50	300	3964	6952	106	143764	1586	21947	20,2
51	291	3905	6841	111	136812	1515	20432	19,5
52	282	3843	6725	116	129971	1447	18985	18,8
53	273	3777	6605	120	123246	1411	17574	18,2
54	264	3707	6479	126	116641	1313	16261	17,5
55	255	3631	6347	132	110162	1249	15012	16,9
56	246	3550	6209	138	103815	1186	13826	16,2
57	237	3465	6066	143	97606	1125	12701	15,6
58	228	3377	5916	150	91540	1065	11636	15,0
59	219	3286	5760	156	85624	1007	10629	14,4
60	210	3191	5597	163	79864	950	9679	13,8
61	201	3092	5428	169	74267	894,5	8784	13,2
62	192	2990	5251	177	68839	840,1	7944	12,6
63	182	2885	5066	185	63588	786,9	7157	12,1
64	172	2778	4874	192	58522	735,0	6422	11,5
65	162	2669	4675	199	53648	684,5	5738	11,0
66	152	2559	4469	206	48973	635,3	5103	10,5
67	142	2448	4257	212	44504	587,5	4515	9,95
68	132	2336	4037	220	40247	540,9	3975	9,47
69	122	2223	3813	224	36210	495,8	3478	9,00
70	112	2109	3584	229	33397	452,6	3026	8,54
71	103	1993	3351	233	28813	410,9	2615	8,10
72	94	1874	3116	235	25462	371,0	2244	7,67
73	85	1749	2880	236	22346	332,9	1911	7,26
74	77	1616	2644	236	19466	296,7	1614	6,86
75	69	1479	2410	234	16822	262,6	1352	6,48
76	62	1337	2180	230	14412	230,6	1121	6,11
77	55	1198	1955	225	12232	200,8	920,5	5,76
78	49	1064	1737	218	10277	173,2	747,3	5,42
79	43	936	1528	209	8540	147,9	599,4	5,09
80	37	812	1329	199	7012	124,9	474,5	4,78
81	32	697	1142	187	5683	104,2	370,3	4,48
82	28	590	969	173	4541	85,84	284,5	4,19
83	24	492	811	158	3572	69,75	214,7	3,90
84	20	404	669	142	2761	55,86	158,9	3,63
85	17	327	542	127	2092	43,94	114,9	3,36
86	14	261	431	111	1550	33,92	81,00	3,10
87	12	206	335	96	1119	25,60	55,40	2,84
88	10	159	254	81	784	18,84	36,56	2,59
89	8	117	186	68	530	13,40	23,16	2,35
90	6	80	132	54	344	9,23	13,93	2,11
91	5	50	89	43	212	6,04	7,91	1,88
92	4	28	57	32	123	3,76	4,13	1,66
93	3	14	34	23	66	2,18	1,95	1,44
94	2	6	18	16	32	1,12	0,83	1,28
95	1	3	9	9	14	0,54	0,29	1,06
96	0	1	4	5	5	0,23	0,06	0,75
97	—	0	1	3	1	0,06	0,00	0,50
98	—	—	0	1	0	—	—	—
99	—	—	—	0	—	—	—	—

§. 39. Volkszählung mittels Sterblichkeitstafeln.

Die „Durchlebungszahlen" l_a (z. B. Spalte A.) bilden das Modell einer abgeschloss. Bevölkerung. Ihre Summirung von hinten her gibt die, vom beistehenden Alter a ab, davon noch vorhandene Bevölkerungszahl (Spalte C.). Je mehr die Tafel den Verhältnissen eines Ortes od. Landes entspricht u. je mehr dessen Bevölkerung im „Beharrungszustande" sich befindet, desto zuverlässiger sind folgende Anwendungen. (Die Beispiele nach der engl. Tafel.)

1) **Die Bevölkerungszahl** x zu finden aus der bekannten Zahl α) der jährl. Geburten z_0; β) der $a$jähr. Altersklasse z_a. — Regel: Die bek. Zahl z_0 od. z_a verhält sich zur entsprech. Tafelzahl l_0 od. l_a (Sp. A.), wie die gesuchte Bevölkerung x zur Tafelbevölkg. S_0 od. S_a (Spalte C.). — Z. B.: Wenn ein Ort jährl. 100 Militärpflichtige à 20 J. stellt, so ist seine männl. Bevölkerung nach Tafel 3? Aus $100:9327=x:391629$, folgt $x=4200$.

2) **Die Stärke einer Altersklasse** z_a zu finden α) aus der bekannten Totalsumme S der Bevölkg. oder β) der jährl. Geburten G. — Regel: Die gegebenen Bevölkgs- oder auch Geburtszahlen verhalten sich zu den entsprech. Tafelzahlen wie die gesuchte Altersklasse zur Tafelzahl derselben. — Z. B.: Wie viel Militärpfl. à 20 J. gibt es jährl., wenn die Z. der jährl. männl. Geburten 100 beträgt? $100:20530=z_{20}:9327$, woraus $z_{20}=45$.

3) **Die Stärke** x **verschiedener Bevölkerungsabtheilungen** v. einem gewissen Alter a an auf- od. abwärts zu finden α) aus der gegeb. Totalsumme od. β) aus den Geburten- od. γ) aus einer Klassenzahl der Bevölkerung. — Regel: Wie die gegeb. Zahl sich zur entsprech. Tafelzahl verhält, so verhält sich die gesuchte Abtheilung x vom Alter a bis b zur Tafelbevölkg. dieses Alters, d. h. zu S_a-S_b. — Z. B.: 1) Wie gross ist bei 100 jährl. Geburten die Z. Derj., die über 50 J. alt sind? $100:20530=x:S_{50}$ (od. 143764); also $x=700$. — 2) Wieviel männl. Vierziger (zw. 40 u. 50 J.) sind in einer Stadt, wo sich durchschnittl. 100 Jüngl. à 20 J. zur Rekrutirung stellen? Zahl x der 40- bis 50 Jährigen aus $100:l_{20}=x:S_{40}-S_{50}$; also $x=100(218536-143764):9327=800$.

§. 40. Sterblichkeit einfacher Leben. {A. Alter; L. Leben; P. Personen; J. Jahr; j. jährig.

Es bedeutet l_1, l_2, l_a die Zahl der beim A. 1, 2, a noch Lebenden, also l_0 die Gebornen; sowie s_1, s_2, s_a die im 1ten, 2ten, $a$ten Lebensj. Sterbenden, also $s_1=l_0-l_1$; $s_2=l_1-l_2$; $s_a=l_{a-1}-l_a$; w die Wahrscheinlichkeit (s. Seite 40). (Die Zahlenbeispiele sind, wo nichts anders bemerkt ist, für das A. $a=30$ und $b=40$, also $b-a=10$ J. u. nach der Baumann'schen Tafel berechnet.)

1) Dass eine aj. P. das A. b erreiche od. noch $b-a$ J. lebe?

$$w_1=\frac{l_b}{l_a};\ \left(=\frac{374}{439}=0{,}85 \text{ od. fast } 6/7. \text{ Unter 7 Dreissigern erreichen 6 das 40. J.}\right)$$

2) Dass eine aj. P. das A. b nicht erreiche od. binnen $b-a$ J. sterbe?

$$w_2=\frac{l_a-l_b}{l_a} \text{ od. } 1-w_1, \text{ d. h. } 1-\frac{l_b}{l_a};\ =\frac{439-374}{439}\left\{\begin{array}{l}=0{,}15 \text{ od. reichl. } 1/7\ (=w,\\ \text{dass ein Dreissiger in den}\\ \text{dreissiger Jahren sterbe).}\end{array}\right.$$

3) Dass eine aj. P. gerade im $b$ten J. u. nicht früher u. nicht später sterbe od. gerade noch b J. lebe?

$$w_3=\frac{s_b}{l_a}=\frac{l_{b-1}-l_b}{l_a};\ =\frac{381-374}{439}=\frac{7}{439}=\text{ca. }\frac{1}{63}.$$

4) Wieviel (x) von n Personen des A. a im A. b noch leben werden?

$$x=\text{Erwartungswerth v. } n \text{ nach der } w_1;\ \text{also } x=n\frac{l_b}{l_a}\left\{\begin{array}{l}\text{von 10 Dreissigern leben}\\ \text{im 40. J. noch } 10\times 0{,}85\\ =8{,}5, \text{ also 8 bis 9.}\end{array}\right.$$

5) Wieviel von n Personen des A. a bis zum A. b sterben werden? —

$$x=\text{Erwartwrth v. } n \text{ nach der } w_2;\ =n\left(1-\frac{l_b}{l_a}\right);\ \text{für } n=10 \text{ wird } x=1{,}5, \text{ d. h. 1 bis 2 P.}$$

6) Die Skala der Lebenserlahmung von a bis b festzustellen:

Die w, dass die $a$jähr. Person noch lebe im 1. 2. 3. (b-a). J. ist $=\frac{l_{a+1}}{l_a};\ \frac{l_{a+2}}{l_a};\ \frac{l_{a+3}}{l_a};\ \ldots\frac{l_b}{l_a}=$ | Dass ein Dreissiger noch lebe im 30. 31. 32. 40. J. $\frac{439}{439}, \frac{433}{439}, \frac{427}{439}, \ldots\ldots \frac{374}{439}$,

oder in Hunderteln: 100; 98; 96; 95; 93; 92; 90, 88; 86; 85; welche Zahlenreihe das Naturgesetz darstellt, nach welchem die Todwiderstands- oder Lebenskraft einer aj. P. abnimmt.

7) Die wahrscheinliche Lebensdauer (x) einer aj. P. (die Anzahl J., innerhalb deren die w, noch am Leben zu sein, grösser als ½; vor deren Grenze zu leben also wahrscheinlich, auf derselben zu leben zweifelhaft, nach derselben unwahrscheinl. ist) zu finden: Suche das Alter n, bei welchem l_n halb so gross als l_a, dann ist $x=n-a$; (da $l_{30}=439$ und dessen Hälfte 220 bei l_{59} steht, so folgt für die 30j. P. $x=29$ J.)

8) Die mittlere Lebensdauer einer aj P. (Durchschnittszahl derj. J., welche in Summa alle aj. P. zu durchleb. haben) zu finden: Dividire die Summe von l_{a+1} bis l_{100} (od. Spalte C.) durch l_a (od. vorgehende Z. der Sp. A.) und mehre den Quotienten um ½. — Z. B.: Für eine $a=84$j. P. folgt n. Baumann: Es leben zu Anfang des 85. J. od.

i. A. 84 noch 20	Von diesen 20 haben sonach	Somit die Ldauer aller Einzelnen in Summa: 17+14+12+10+8+6+5+4+3+2+1 = 82 J.; kommt also im Durchschnitt à P. 82 : 20 = 4,1 J., d. h. wenn
85 ,, 17	17 eine gewisse Ldauer von 1 J.	
86 ,, 14	14 ,, ,, ,, v. noch 1 ,,	
87 ,, 12	12 ,, ,, ,, ,, ,, 1 ,,	
. . . .	. . . .	

alle P. zu Anf. d. J. stürben; also für das Mittel noch ½ J. hinzu, macht 4,6 J. — Oder: der Erwartungswerth des folg. 1. Lebensj. ist $=\frac{17}{20}$ J.; des 2. $\frac{14}{20}$ etc. des 12. 0; u. somit der sämmtl. $=(17+14\ldots+1):20=4{,}1$ J., wie vorher. Die engl. Tafel gibt dafür unter F. 3,6 J.; (indem bei ihr $l_{84}=669$; $l_{85}+l_{86}$ etc. aus C. $=2092$; und $2092:699=3{,}1$; und $3{,}1+\frac{1}{2}=3{,}6$.)

§. 41. Sterblichkeit verbund. Leben. Ehedauer. { Abkürz. s. §. 40.

Die aj. P. heisse Mann; die bj. Frau; ihr gleichzeit. L Ehe. Die Beispiele nach Baumann für einen $a=36$j. Mann, eine $b=29$j. Frau u. einen $n=20$j. Termin.

1) Dass die Ehe noch n Jahre dauere (od. beide Gatten noch n J. mit einander leben) hat Wahrscheinlichkeit $w_1=\frac{l_{a+n}}{l_a}\times\frac{l_{b+n}}{l_b}\left[=\frac{246}{402}\times\frac{308}{455}=0{,}42\right]$. Vergl. S. 40 u. S. 50.

2) Dass die Ehe nicht mehr n J. dauere (od. dass nach n J. wenigstens eines, wo nicht beide gestorben sein werden) hat die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit vom vorigen; d. i. $w_2=1-w_1$ $[=1-0{,}42=0{,}58]$.

3) Dass nach n J. der Mann noch lebe, die Frau aber nicht,

$$w_3=\frac{l_{a+n}}{l_a}\times\left(1-\frac{l_{b+n}}{l_a}\right)=\left[\frac{246}{402}\left(1-\frac{308}{445}\right)=0{,}19 \text{ od. fast } {}^1/_5\right].$$

4) Dass nach n J. die Frau noch lebe, der Mann aber todt sei,

$$w_4=\frac{l_{b+n}}{l_b}\left(1-\frac{l_{a+n}}{l_a}\right)=\left[\frac{308}{445}\left(1-\frac{246}{402}\right)=0{,}27 \text{ od. fast } {}^3/_{11}\right].$$

5) Dass nach n J. beide todt seien (od. keines von beiden mehr lebe),

$$w_5=\left(1-\frac{l_{a+n}}{l_a}\right)\left(1-\frac{l_{b+n}}{l_a}\right)=\left[\left(1-\frac{246}{402}\right)\left(1-\frac{308}{445}\right)=0{,}12 \text{ od. fast } {}^1/_8\right].$$

6) Dass nach n J. eines v. beid. noch lebe (also nicht beide todt seien), $w_6=$ entgegengesetzte w_5; $=1-w_5$ $[=1-0{,}12=0{,}88$ od. fast $^9/_{10}]$. Oder auch $=$ alternative Wahrschl. von w_1, w_3 u. w_4, also (nach 3. S. 40)

$$w_6=w_1+w_3+w_4=[0{,}42+0{,}19+0{,}27=0{,}88].$$

7) Die wahrscheinl. Ehedauer x (der Zeitraum, nach dessen Verlauf die w des Ehebestandes auf ½, d. h. auf das Zweifelhafte herabgekommen ist) folgt nach 1) durch $\frac{l_{a+x}}{l_a}\times\frac{l_{b+x}}{l_b}=\frac{1}{2}$ od. $l_{a+x}\times l_{b+x}=\frac{l_a\times l_b}{2}$; oder durch die Regel: Bestimme aus der Tafel das halbe Produkt von $l_a\times l_b$ und suche durch Probiren die Anzahl x von J., die zu beiden Altern addirt solche Tafelzahlen l_{a+x} u. l_{a+b} geben, dass deren Produkt jenem erstern halben gleichkommt. — Für $a=36$ u. $b=24$ findet sich $\frac{1}{2}l_{36}\cdot l_{24}=\frac{1}{2}\cdot402\cdot471=94671$. Für $x=18$ wird $l_{54}\cdot l_{42}=264\cdot360=95040$; für $x=19$ ist $l_{55}\cdot l_{43}=255\cdot353=90015$. Also liegt x zwisch. 18 u. 19 u. findet sich mittels gewöhnl. Interpolat. $=18{,}1$ J.

8) Die mittlere Ehedauer x [ähnl. wie *sub* 8 des vorig. §.] $=\frac{1}{2}+$ Summe der Erwartungswerthe aller einzelnen künftigen Ehejahre, und somit gleich $\frac{1}{2}+(l_{a+1}\cdot l_{b+1}+l_{a+2}\cdot l_{b+2}+l_{a+3}\cdot l_{b+3}$ etc. bis ans Ende d. Morttaf.) $:l_a l_b$. Für $a=82$ u. $b=79$ wird $x=\frac{1}{2}+(24\cdot37+20\cdot32+17\cdot28+14\cdot24+12\cdot20+10\cdot17+8\cdot14+6\cdot12+5\cdot10+4\cdot8+3\cdot6+2\cdot5+1\cdot4):28\cdot43=\frac{1}{2}+3048:1024=3{,}03$ J., d. h. eine Ehe zwischen 82- u. 79j. Gatten dauert in der Regel noch 3 Jahre.

§. 42. Kapitalversich. auf späteres Leben. Aussteuerversich.

a) Durch einmalige Prämie. (Abkürzungen s. S. 50 u. 45.)

a das jetzige, $a+n$ das versicherte Alter, K das nach n J. zu erwartende Kapital, P die dafür jetzt zu zahlende Prämie; so ist der Erwartungswerth v. K $=\frac{l_{a+n}}{l_a}K$ $\left\{\begin{matrix}\text{zahlbar nach } n \text{ J. u. also}\\ \text{mit } p\% \text{ diskontirt sein}\end{matrix}\right\}$ Baarwerth $P=\frac{l_{a+n}}{l_a}\cdot\frac{1}{(1{,}0p)^n}K$. (S. §. 48.)

Für ein Neugebornes 100 Thlr., zahlbar nach erreicht. 18. Lebensj., zu versichern, wäre nach Baumann's Tafel und bei 3½% Diskonto sofort zu zahlen eine

$P=\frac{l_{18}}{l_0}\cdot\frac{1}{1{,}035^{18}}\cdot100=\frac{499}{1000}\cdot0{,}5384\cdot100=$ knapp 27 Thlr. (excl. Verwaltgskost.)

Aussteuer- und Leibrentenversicherung.

b) Durch jährliche Prämien (P). (S. auch §. 48.)

Die Prämienzahlung vorschussweise, am Tage der Versicherung u. dann zu Anfang jeden J. bis incl. 1 J. vor der Auszahlungszeit. Stirbt die versicherte P. eher, so hören von deren Tode an die beiderseitigen Verbindlichkeiten auf. Wenn beispielsweise $a=0$, $n=18$ und alle 0 Jährige der Baumann'schen Tafel mit 1 Thlr. Jahresprämie sich einkaufen, so sind bis zum 18. J. an P. u. 4% Zinsen eingegangen $1000 \cdot 1{,}04^{18}+750 \cdot 1{,}04^{17}+661 \cdot 1{,}04^{16} \ldots +503 \cdot 1{,}04^{1} = 16074$ Thlr.

In dieser Weise bildet sich nach Baumann's Tafel und 4% Zinsen folgende

Hülfstafel zur Ermittellung der jährlichen Prämie

bei Aussteuerversicherungen von Kindern unter 13 J. (excl. Verwaltungskost.)

Alter a.	Drchlebungszahl l_a	Summe S, zu welcher der Beitrag 1 Thlr. wächst, wenn sich die vorstehende Durchlebungszahl zur Versicherung eintragen lässt, u. zwar bis zum 18. Lebensj.	21. Lebensj.	24. Lebensj.
0	1000	16074 Thlr.	19311 Thlr.	23284 Thlr.
1	750	14049 „	17032 „	20721 „
2	661	12647 „	15456 „	18947 „
3	618	11409 „	14063 „	17381 „
4	593	10296 „	12811 „	15973 „
5	579	9269 „	11656 „	14673 „
6	569	8305 „	10551 „	13430 „
7	556	7397 „	9928 „	12729 „
8	547	6541 „	8964 „	11621 „
9	539	5732 „	8054 „	10621 „
10	532	4964 „	7191 „	9650 „
11	527	4236 „	6372 „	8713 „
12	520	3543 „	5592 „	7852 „

Daraus findet sich die jährl. Prämie, wenn man die dem versichert. Alt. entsprechende Durchlebngszahl (l_{18}, l_{21}, l_{24}) der Baumann'sch. Mortalitätstafel ($=499$; 486; 471) durch die entsprechende S dieser Hülfstafel dividirt u. den Quot. mit dem versicherten Kapital K multiplicirt. (Indem jene S zu diesem Kap. sich verhält wie l_{18} oder l_{24} zu P.)

Z. B.: Ein Neugebornes mit 100 Thlr. auf d. 18. J. versichrt, ist werth bis mit Anfang des 18. J. eine jährl. vorschussw. $P = \frac{499}{16074} \cdot 100 = 3{,}10$ Thlr.; ein Einjähriges $= \frac{499}{14049} \cdot 100 = 3{,}55$ Thlr.; und ein Zehnj. mit 100 Thlr. auf das 24. J. $= \frac{471}{9650} \cdot 100 = 4{,}88$ Thlr.

§. 43. Leibrenten: *a)* Im Allgemeinen.

Baare: mit Ende des Einkaufsj. a beginnend. **Aufgeschobene:** erst nach n J. beginnend. **Volle:** bis zum Tode dauernd. **Begrenzte:** höchstens m J. dauernd. $L_{a,1}$, $L_{a,1,m}$, $L_{a,n}$, $L_{a,n,m}$ Symbole (des Kapitalwerths) der vollen u. baaren, der baaren begrenzten, der vollen aufgeschob., der aufgeschob. begrenzten Leibrente. Uebrige Abkürz. u. Buchstaben wie in §. 40.

Leibrentenvertrag: Bei einmalig. od. Kapital-Prämie k muss dieser Anfangs- od. Baarwerth der zu versichernden (vollen od. zeitweisen) Leibrente r für eine $a$jähr. P. gleich sein der Summe der diskontirten Erwartungswerthe aller möglichen Glieder dieser r. — Bei jährl. Prämie: siehe §. 44.

b) Baare volle Leibrente (r beginnt nach 1 J. u. dauert bis z. Tode).

$$1)\ L_{a,1} = \frac{1}{l_a}\left[\frac{l_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{l_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{l_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \text{ bis zu Ende d. Sterblktaf.}\right] r.$$

Z. B.: Für einen 90jähr., der vom 91. J. ab 100 Thlr. Rente beziehen will, wäre nach Baumann's Tafel u. 4% deren (baarer Prämien-) Werth $=$

$$L_{90,1} = \frac{1}{11}\left[\frac{7}{1{,}04} + \frac{4}{1{,}04^2} + \frac{3}{1{,}04^3} + \frac{1}{1{,}04^4} + \frac{0}{1{,}04^5}\right] 100 = 126{,}8 \text{ Thlr. (excl. Verwaltgskost.)}$$

Werthe v. $L_{a,1}$, nach Deparcieux fürs Einkaufsalter a u. beim Zinsf. 3-4%.

a	3%	3½%	4%	a	3%	3½%	4%
4	22,39	20,32	18,65	50	13,90	13,18	12,53
5	22,60	20,52	18,75	55	12,25	11,69	11,17
6	22,73	20,65	18,88	60	10,52	10,10	9,71
7	22,79	20,72	18,95	65	8,60	8,31	8,04
8	22,81	20,75	19,00	70	6,77	6,58	6,39
9	22,81	20,77	19,02	75	5,18	5,06	4,95
10	22,77	20,74	19,01	80	3,73	3,66	3,60
15	22,00	20,12	18,50	82	3,27	3,22	3,16
20	21,17	19,44	17,94	84	2,76	2,72	2,68
25	20,39	18,81	17,42	86	2,24	2,21	2,19
30	19,49	18,07	16,81	88	1,75	1,73	1,71
35	18,46	17,21	16,08	90	1,21	1,20	1,19
40	17,18	16,11	15,13	92	0,72	0,72	0,71
45	15,61	14,72	13,90	excl. Verwaltungskost.			

Z. B.: Welchen gegenwärtig. Kapitalwerth hatte bei 3½% für eine jetzt 40jährige Gattin eine nach 1 J. beginnende lebenslängliche Rente von 200 Thlr.? — $16{,}10 \times 200 = 3220$ Thlr.

Kapital- und Rentenversicherungen.

c) Aufgeschob. volle Leibr. (r beginnt nach n J. u. geht bis zum Tode).

$L_{a,n}$=Anfangswrth. der voll. Leibr. 1) für eine $(a+n-1)$j. P. $\times$ $(n-1)$j. Vorwerthfakt. $\times$ Wahrscheinlichk., dass die aj. P. das $(a+n-1)$te J. erreicht.

Also 2) $L_{a,n} = L_{a+n-1} \cdot \frac{1}{(1,0\,p)^{n-1}} \cdot \frac{l_{a+n-1}}{l_a}$.

d) Baare begrenzte Leibr. (r beg. nach 1 J. u. soll höchstens m J. dauern).

$L_{a,1,m} = \frac{1}{l_a}\left[\frac{l_{a+1}}{1,0\,p} + \frac{l_{a+2}}{1,0\,p^2} \ldots + \frac{l_{a+m}}{1,0\,p^m}\right] r$ od.: Nimm den Kapitalwerth der vollen Leibr. einer $a$jähr. P. $(L_{a,1})$ u. ziehe davon ab den einer $a+m$j. P., nachdem dieser vorher mit dem mj. Vorwerthsfaktor und mit der Wahrscheinlichk., dass die aj. P. das A. $a+m$ erreiche, multiplicirt worden. Also

$$3)\quad L_{a,1,m} = L_{a,1} - L_{a+m} \cdot \frac{1}{1,0\,p^m} \cdot \frac{l_{a+m}}{l_a}.$$

e) Aufgeschob. begrenzte Leibr. (r soll nach n J. beg. u. höchstens m J. dauern).

4) $L_{a,n,m} = L_{a,n} - L_{a,(n+m)}$, beide nach 2) berechnet; od. = Anfangswerth d. vollen Leibr. einer $(a+n-1)$j. P. $\times$ $(n-1)$j. Vorwerthsfakt. $\times$ Wahrscheinlichk. vom A. a das A. $(a+n-1)$ zu erreichen; u. davon abgezogen den Anfangsw. der vollen Lbr. einer $(a+n+m-1)$j. P. $\times$ $(n+m-1)$j. Vorwthfkt. $\times$ Wahrscheinlichkeit vom A. a auf das A. $(a+n+m-1)$ zu kommen.

§. 44. Pensionsversicherg od. aufgeschob. Leibr. bei jährl. Prämie.

Steuert eine Person vom A. a bis z. A. $a+m$, also $m+1$ Male die Rente ϱ, um als Gegenleistung eine Pension od. Leibr. r zu erwerben, die 1 J. nach der letzten Beitragszahlung, also mit dem $(a+m+1)$ten J. beginnt, so findet sich die masgebende Gleichung nach folgenden Regeln:

1) Berechne nach §. 43b. den Kapitalw. d. Pensionsrente u. behandle solchen als ein durch Jahresprämie zu versicherndes Aussteuerkapital nach §. 42b. Oder

2) Berechne den Baarwerth der Beitragsrente als einer begrenzten Leibrente (nach §. 43d, unter Vermehrung dieses Resultates um den ersten Baarbeitrag) $= \varrho + L_{a,1,m} = B$. Berechne ferner d. Baarwth. B_1 d. Pensionsrente r als einer aufgeschobenen nach $m+1$ J. beginnenden Leibr. $= L_{a,(m+1)}$ nach §. 43c.; setze $B_1 = B$ u. leite aus dieser Gleichung die Unbekannte r od. ϱ ab.

§. 45. Gewöhnliche Lebensversicherung. (Sterbe- oder Grabe-Kassen-Rechnung.) Kapitalversicherung auf d. Tod für einzelnes Leben.

Eine aj. P. will ein bei ihrem Tode durch die Versicherungsbank zahlbares Kapital K erwerben, und zwar

1. durch sofort zahlbaren **einmaligen** Kapitalbeitrag k. — Die auf den Baarw. diskont. Erwartungswerthe aller (mögl.) Leist. der Bank (+ Verwaltungsaufw.) müssen $= k$ sein; woraus folgt

$$1)\quad k = K\left[\frac{1}{1,0\,p} - L_{a,1}\left(1 - \frac{1}{1,0\,p}\right)\right].$$

2. Bei **jährlichen** Beiträgen r tritt in diese Formel statt k der Baarw. aller Erwartgsw. dieser (mögl.) Leistungen des Versicherten:

$$2)\quad r\,(1 + L_{a,1}) = K\left[\frac{1}{1,0\,p} - L_{a,1}\left(1 - \frac{1}{1,0\,p}\right)\right] \text{ oder } = k.$$

Hierauf gründet sich die Tab. §. 48.

Z. B.: Eine 30j. P. will zu ihrem Begräbniss ein Kapital v. 100 Thlr. versichern. Wieviel hatte sie bei Zugrundelegung der Taf. §. 43b. und 4% dafür α. einmal, od. β. jährlich einzuzahlen, excl. Verwaltungsaufwand?

Nach 1) $k = 100\left[\frac{1}{1,04} - L_{30}\left(1 - \frac{1}{1,04}\right)\right] = 100\,[0,9615 - 16,81 \,.\, 0,0385] = 31,4$ Thlr.

Der fragl. Rentenbeitrag nach 2): $r = k : (1 + L_{30;1}) = 31,4 : 17,81 = 1,76$ Thlr.

§. 46. Kapitalversich. auf Ueberlebung. (Wittwen-Aussteuer.)

Die aj. P. versich. zu Gunsten einer bj. P. (gewöhnl. Gattin) ein Kapital K, das beim Tode der erstern an letztere ausgezahlt wird. Im Falle letztere eher stirbt, hört mit deren Tode alle Verbindlichkeit des Versichernden wie auch der Bank sofort auf. — Die Formel beruht auf der 4. §. 41 bestimmten Wahrschlk., nach welcher die aj. P. früher sterbe als die bj. $w_4 = \frac{l_{b+n}}{l_b}\left(1 - \frac{l_{a+n}}{l_a}\right)$.

In Folge dessen wird bei Versicherung mittels **einmaliger** Kapitalprämie k

$$1)\quad k = \frac{1}{l_a \cdot l_b}\left\{\frac{(l_a - l_{a+1})\,(l_b - l_{b+1})}{1,0\,p} + \frac{(l_{a+1} - l_{a+2})\,(l_{b+1} - l_{b+2})}{1,0\,p^2} + \ldots 0\right\} K.$$

2. Bei Versicherung durch **jährliche** Beiträge r ist an Stelle k der baare Erwartungswerth sämmtl. mögl. Leistungen des Steuernden zu setzen, mit Zugrundelegung der Wahrschlk., dass Beide nur 1, 2, 3 etc. J. noch zusammen leben, d. i. nach 1. §. 41 $w_1 = \frac{l_{a+n}}{l_a} \cdot \frac{l_{b+n}}{l_b}$, so dass in 1) statt k zu setzen

$$\left\{1 + \frac{1}{l_a \cdot l_b}\left[\frac{l_{a+1} \cdot l_{b+1}}{1,0\,p} + \frac{l_{a+2} \cdot l_{b+2}}{1,0\,p^2} + \ldots 0\right]\right\} r.$$

Kapital- und Rentenversicherungen.

§. 47. Leibrentenvers. auf Ueberlebg. (Wittwen- u. Waisenpension.)

Während im vorigen Falle die bj. P., falls sie die aj. überlebt, ein Kapital K erhielt, gelangt sie hier zu einer Leibrente r (Symbol L_{b-a}). Der Erwartungswerth dieser Rente ist wiederum bedingt durch die Wahrschlk., dass nach 1, 2, 3, n J. die aj. P. gestorben sei, die bj. aber noch lebe (n. 4. §. 41 wie oben). So wird bei **einmaliger** oder Kapital-Prämienzahlung k

$$1)\ r\,L_{b-a}\ \text{od.}\ k = \frac{1}{l_a \cdot l_b}\left[\frac{(l_a - l_{a+1})\,l_{b+1}}{1{,}0\,p} + \frac{(l_a - l_{a+2})\,l_{b+2}}{1{,}0\,p^2} + \ldots 0\right] r.$$

Bei **jährlicher** oder Rentenzahlung ϱ setze man im Vorigen statt k die diskont. Erwartungswerthe aller mögl. Leistungen des Rentenkäufers, berechnet nach d. Wahrschlk., dass die aj. u. bj. P. noch 1, 2, 3 J. u. so fort bis zur Lebensgrenze noch zusammen leben; d. h. nach $w = \frac{l_{a+n}}{l_a} \cdot \frac{l_{b+n}}{l_b}$; also

$$\left[1 + \frac{1}{l_a \cdot l_b}\left(\frac{l_{a+1} \cdot l_{b+1}}{1{,}0\,p} + \frac{l_{a+2} \cdot l_{b+2}}{1{,}0\,p^2} + \ldots 0\right)\right] \varrho = \text{Werth v. 1) zu setzen,}$$

woraus das unbekannte r od. k od. ϱ zu find. (jedoch ohn. Rücks. auf Verwaltgskost). Für d. Fall, dass eine Waisen- od. Wittwenpensionskasse ein Eintrittsgeld E fordert, ist der Leistung der versichernd. Pers. ($=k$ od. $=\varrho\,L_{b-a}$) noch E hinzuzurechnen.

§. 48. Kapitalversicherungs- und Leibrententarif

der pariser „Union", nach den Regeln der §§. 42 etc. auf Grund v. Deparcieux's Sterblichkeitstafel, incl. Verwaltungskosten.

Einkaufsalter d. Versicherten.	A. Für Entrichtung der **einmaligen** Prämie 100 wird ausgezahlt, wenn der Kapitalbezug oder der Rentenbeginn stattfinden soll											
	nach 10 J.		nach 15 J.		nach 20 J.		nach 25 J.		nach 30 J.		nach 40 J.	
	Kap.	Rent.	Kap.	Rent.	Kap.	Rent.	Kap.	Rent.	Kap.	Rent.	Kapit.	Rente.
0	228,6	11,8	288,6	15,3	365,8	20,0	468,1	26,4	600,5	35,0	993,1	46,1
1	185,4	9,6	233,6	12,5	296,9	26,3	380,0	21,6	387,9	28,6	806,6	52,9
2	178,3	9,3	225,0	12,1	286,4	15,9	366,8	20,9	471,2	27,9	778,8	51,8
3	172,1	9,0	217,5	11,8	277,4	15,4	355,5	20,4	456,8	27,3	754,9	51,1
4	168,1	8,9	212,8	11,6	271,8	15,2	348,5	20,2	448,2	27,0	740,4	50,9
5	165,5	8,8	209,7	11,5	268,4	15,1	344,3	20,1	443,0	28,1	731,7	51,3
10	160,0	8,8	204,8	11,5	262,7	15,5	338,0	20,6	434,4	31,0	727,2	56,4
15	162,2	9,1	208,1	12,1	267,7	16,3	344,1	22,2	442,2	35,2	774,0	67,0
20	164,2	9,6	211,2	12,9	271,5	17,5	348,9	24,5	454,4	41,3	844,1	83,4
25	165,1	10,0	212,2	13,7	272,7	19,1	354,1	27,5	477,3	50,8	940,8	111,0
30	165,8	10,7	212,5	14,9	276,8	21,5	372,0	32,2	514,2	67,2	1136,8	142,1
35	166,6	11,6	215,1	16,7	289,1	25,0	399,6	39,5	569,9	85,9		
40	167,4	13,0	225,0	19,5	310,9	30,7	443,4	52,3	687,4			
45	175,0	15,1	241,9	23,9	450,0	40,7	534,9	66,9				
50	185,8	18 4	264,9	31,3	410,7	51,3						
55	197,1	23,3	305,6	38,2								
60	221,1	27,6										

Einkaufsalter d. Versicherten.	B. Für Entrichtung der **jährlichen** Prämie 100 wird ausgezahlt, wenn der Kapitalbezug oder der Rentenbeginn stattfinden soll											
	nach 10 J.		nach 15 J.		nach 20 J.		nach 25 J.		nach 30 J.		nach 40 J.	
	Kap.	Rent.	Kap.	Rent.	Kap.	Rent.	Kap.	Rent.	Kap.	Rent.	Kapit.	Rente.
0	1444	75	2399	128	3619	198	5212	294	7269	424	13352	862
1	1381	72	2315	124	3522	194	5090	289	7117	417	13097	858
2	1357	71	2288	123	3493	193	5055	289	7076	419	13027	867
3	1339	70	2269	123	3473	193	5033	289	7051	422	12983	878
4	1327	70	2256	123	3463	194	5022	291	7042	425	12964	892
5	1318	70	2248	123	3458	195	5019	293	7041	429	12961	909
10	1308	72	2255	127	3477	203	5055	308	7079	457	13878	1023
15	1321	74	2277	133	3513	214	5097	329	7133	500	13879	1200
20	1328	77	2292	140	3528	228	5117	359	7253	562	14914	1474
25	1333	81	2295	148	3532	248	5189	402	7574	655	16424	1938
30	1338	86	2291	161	3577	277	5408	468	8086	799	19507	2438
35	1343	93	2223	180	3722	322	5755	569	8832	1042		
40	1348	104	2412	209	3945	390	6249	737	10350	1294		
45	1392	120	2535	251	4239	500	7233	904				
50	1439	142	2679	316	4815	602						
55	1495	176	2980	373								
60	1629	203										

VI. Kapitel.

Planimetrie oder Ebenraumlehre.

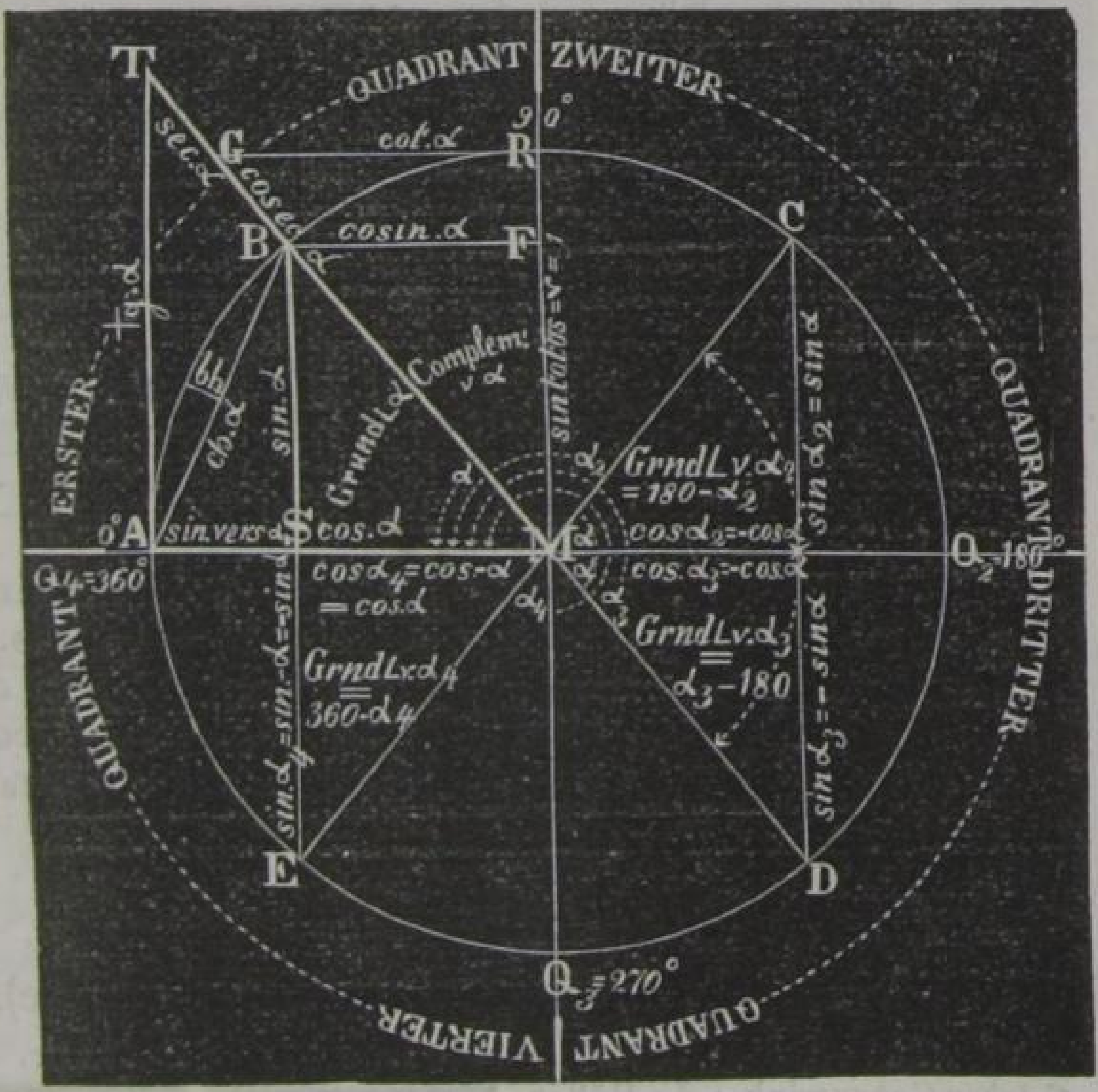
§. 1. Um die Vortheile des **Schnellrechnens** mittels des Ingenieurknechts auch auf dem geometr. Felde möglichst auszubeuten, halte man bei derlei Arbeiten die Mitbenutzung seiner Reciproken-, Potenz-, Wurzel- u. Logarithmen-Tafel im Auge. Und um ausnahmsweise hierbei auch einmal einer grösseren Genauigkeit entsprechen zu können, beachte man, dass die linke Ecke die Sinusse fast von Min. zu Min. u. bis auf 2 Einheit. der 4. Decimale genau, u. folgl. auch (nach dem folg. §. 4) die andern trig. Linien mit ähnl. Feinheit abzuleiten gestattet. Für einzelne Min. u. Sek. gleich aus dem linken Zwickel u. nach dem Satze, dass bei so kl. Winkeln Sin., Tg. u. Ch. dem Gradmas proportional sind. Dann nach §. 4, No. 6-8, auch für Winkel von $(\alpha^0 + \beta' + \gamma'')$. — Für $\alpha^0 + \beta'$ aber auch gleich aus der Chorden-Tafel; z. B. sin. $48^0 7'$? ... $= \frac{1}{2}$ ch. $96^0 14' = \frac{1}{2}$ ch. $96{,}23^0$, deutlich genug abzulesen als $\frac{1}{2} \cdot 1{,}4890 = 0{,}7445$. Oder so: Weil aus der Ch.-Spalte sin. $48{,}1' = \frac{1}{2}$ ch. $96{,}2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}4886 = 0{,}7443$ und sin. $48{,}2^0 = \frac{1}{2}$. ch. $96{,}4 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}49 = 0{,}7455$, so folgt zwischen sin. $48^0 6' = 0{,}7443$ und sin. $48^0 12' = 0{,}7455$ eine Differ. pro 1 Min. von 0,0002; also sin. $48^0 7' = 0{,}7445$; sin. $48^0 8' = 0{,}7447$; sin. $48^0 11' = 0{,}7453$. (Die genauen Werthe sind: 0,744506; 0,744700; 0,745282.)

A. Winkellehre (Goniometrie).

§. 2. Goniometrische Linien (G. Werthe) im 1. Quadranten.

Jeder spitze Winkel (W. des 1. Q., Grundw.) ist ausser 1. durch sein Gradmas α $(=\alpha^0)$ bestimmt durch 2. den Bogen (arcus; arc. α, bg α); 3. den Sinus (sin. α; $= \frac{1}{2}$ ch. v. 2α); 4. den Cosinus (Complementssinus; cos. α); 5. die Tangente (tg. α); 6. die Sekante (sec. α); 7. d. Sinus versus (= Radius — cos.; sinv. α); 8. die Sehne od. Chorde (ch. α; $= 2 \sin. \frac{1}{2} \alpha$); 9. die Sagitta od. Bogenhöhe (bh. α; $=$ sin. v. $\frac{1}{2} \alpha$); sowie durch dieselben Linien seines Complementswinkels $(90 - \alpha)$, also ausser durch den Cos. noch durch 10. die Cotangente [cot. α; $=$ tg. $(90 - \alpha)$]; 11. die Cosecante [cosec. α; $=$ sec. $(90 - \alpha)$]; u. s. w.

Fig. 50.



In den Formeln ist unter bg. α, sin. α, ch. α etc. stets deren natürlicher Werth, d. h. für den Radius 1, verstanden. So auch in d. Tafeln (des l. u. r. Randes; nur in der l. Ecke sind ch. u. bh. 100fach aufgeführt). Der gemeine Werth derselben (für ein beliebig r) ist einfach = natürl. W. $\times\, r$; od. sin.$_r\,\alpha = r \cdot \sin.\alpha$; ch.$_r\,\alpha =$ (ch. α) r. — Z. B. für Fig. 22, S. 10, u. $a = 80'$ u. $\alpha = 40^0$ ist die Oberhöhe $HC = 80$ fach. tg. 40^0 oder besser 8 mal die 10 fache tg. $40^0 = 8 \cdot 8{,}4 = 67{,}2'$; ingleichen AC die 80 f sec. $40^0 = 1{,}304 \cdot 80 = 104{,}3'$; und $BC = \text{tg.}_a\,\alpha + \text{tg.}_a\,\beta = (\text{tg.}\,\alpha + \text{tg.}\,\beta)\,a$; worauf des Knt's einfache hypsometrische und trigonometrische Praxis beruht. S. Kap. II.

§. 3. Die goniometrischen Werthe im 2., 3. u. 4. Quadr.

Bezeichnen α_1, α_2, α_3, α_4 vier einander entsprechende Winkel des 1., 2., 3. u. 4. Q. u. α $(=\alpha_1)$ ihren bestimmenden Grundwinkel, so hat man (aus jeder trigonometrischen Tafel): (Fig. 50.)

a) Die Sinusse und Cosinusse

1. für alle spitzen od. Grundw. (0 bis 90°; W. d. 1. Q.) $=\alpha$ unmittelbar;
2. für alle stumpfen W. (90 bis 180°; W. d. 2. Q.) $=\alpha_2$ mittelbar durch die des zugehörigen Grundw. $180-\alpha_2$ und die aus der Fig. ersichtlichen Thatsachen, dass $\begin{cases}\sin.\ \alpha_2 = \ \ \sin.\ \alpha = \ \ \sin.(180-\alpha_2)\\ \cos.\ \alpha_2 = -\cos.\ \alpha = -\cos.(180-\alpha_2)\end{cases}$
3. für alle einfach überstumpfen W. (180 bis 270; W. d. 3. Q.) $=\alpha_3$ durch deren Grundwink. $=\alpha_3-180$ und das Gesetz . . . $\begin{cases}\sin.\ \alpha_3 = -\sin.\ \alpha = -\sin.(\alpha_3-180)\\ \cos.\ \alpha_3 = -\cos.\ \alpha = -\cos.(\alpha_3-180)\end{cases}$
4. für alle doppelt überstumpfen W. (270 bis 360°; W. d. 4. Q.) $=\alpha_4$ durch deren Grundwink. $=360-\alpha_4$ und das Gesetz . . . $\begin{cases}\sin.\ \alpha_4 = -\sin.\ \alpha = -\sin.(360-\alpha_4)\\ \cos.\ \alpha_4 = -\cos.\ \alpha = -\cos.(360-\alpha_4)\end{cases}$

d. h.: die Sinusse der beiden untern und die Cosinusse der beiden rechten Quadranten haben negative Lage u. Werthe; ein Gesetz, nach dem sich nun alle von sin. u. cos. bestimmbaren übrigen goniometr. Werthe richten müssen.

b) Die Tangenten, Secanten, Cotangenten etc.: Aus vorig. Sin. u. Cos. gemäs den Formeln 2-5 des folgenden Paragraphen.

Beispiele. *a*) für den 1. Q.: s. S. 6 u. 7. — *b*) für den 2. Q.: sin. 106°? $=\sin.(180-106)=\sin.74^0=0{,}961^*$ (s. Knt's l. Rand); $\cos.106^0=-\cos.74^0$; laut r. Rand des Knt's $=-0{,}276$; tg. 106° $\left(\text{laut 2. des folg. §.} = \frac{\sin.}{-\cos.}\right)$ $=-\text{tg}.74=-3{,}48$.

§. 4. Gegenseitige Abhängigkeit und Bestimmbarkeit der goniometrischen Linien.

1) $\sin.^2+\cos.^2=1$; $\sin.=\sqrt{1-\cos.^2}$; $\cos.=\sqrt{1-\sin.^2}$.

2) $\text{tg}.=\frac{\sin.}{\cos.}=\frac{\sin.}{\sqrt{1-\sin.^2}}=\frac{1}{\cot.}=\sqrt{\sec.^2-1}$.

3) $\cot.=\frac{1}{\text{tg}.}$ (also = Reciproke der vorigen Formeln); $\text{tg}.\cot.=1$.

4) $\sec.=\frac{1}{\cos.}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin.^2}}=\sqrt{1+\text{tg}.^2}$; $\cos.=\frac{1}{\sec.}$.

5) $\text{cosec}.=\frac{1}{\sin.}=\sqrt{1+\cot.^2}=\frac{\sec.}{\sqrt{\sec.^2-1}}$; $\sin.=\frac{1}{\text{cosec}.}$.

6) $\sin.(\alpha\pm\beta)=\sin.\alpha\cos.\beta\pm\sin.\beta\cos.\alpha$.

7) $\cos.(\alpha\pm\beta)=\cos.\alpha\cos.\beta\mp\sin.\alpha\sin.\beta$.

8) $\text{tg}.(\alpha\pm\beta)=\frac{\text{tg}.\alpha\pm\text{tg}.\beta}{1\mp\text{tg}.\alpha\,\text{tg}.\beta}$.

9) $\sin.\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos.\alpha}{2}}$.

10) $\cos.\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos.\alpha}{2}}$.

11) $\begin{cases}\sin.2\alpha=2\sin.\alpha\cos.\alpha\\ \sin.\alpha=2\sin.\frac{1}{2}\alpha\cos.\frac{1}{2}\alpha\end{cases}$ **12)** $\begin{cases}\cos.2\alpha=1-2\sin.^2\alpha=2\cos.^2\alpha-1\\ \cos.^2\alpha=(1+\cos.2\alpha):2\end{cases}$

13) $\begin{cases}\sin.3\alpha=3\sin.\alpha-4\sin.^3\alpha\\ \sin.^3\alpha=(3\sin.\alpha-\sin.3\alpha):4\end{cases}$ **14)** $\begin{cases}\cos.3\alpha=4\cos.^3\alpha-3\cos.\alpha\\ \cos.\alpha^3=(3\cos.\alpha+\cos.3\alpha):4\end{cases}$

Hierzu für bg., bh. u. ch. (Bogen, Bogenhöhe oder Pfeil, und Chorde):

15) $\text{bg}.\alpha=\frac{\pi}{180}\alpha$. **16)** $\text{bh}.\alpha=1-\cos.\frac{1}{2}\alpha$.

17) $\text{ch}.\alpha=2\sin.\frac{1}{2}\alpha$ oder $\sin.\alpha=\frac{1}{2}\text{ch}.2\alpha$.

B. Dreieckslehre (Trigonometrie).

a, *b*, *c* die drei Seiten; *A*, *B*, *C* deren Gegenwink.; h_b Höhenloth auf *b*; *F* Fläche.

Fig. 51.

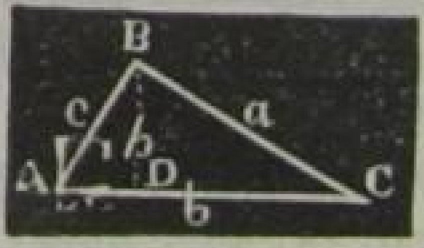


Fig. 52.

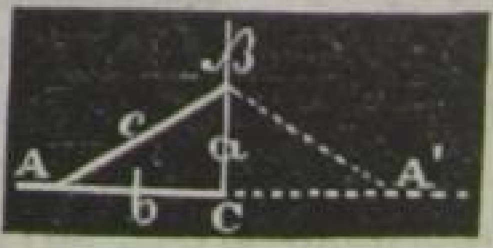


Fig. 53.

§. 5. Ueberhaupt.

1. $A+B+C=180{,}0$. Jeder Winkel = Supplement der Summe der beiden andern. 2. Aussenwinkel bei $A=B+C$. 3. $F=\frac{b\,.\,h_b}{2}$ od. $\frac{c\,.\,h_c}{2}$. 4. Wenn in

zwei Dreiecken die Wink. od. die Seitenverhältnisse des einen = denen des andern (d. h. beide gleichgestaltet od. ähnlich) sind, so verhalten sich deren F wie die 2. Potenzen homologer (gleichliegender) Abmessungen (Seit., Höh., Transversal.).

§. 6. Das rechtwinklige Dreieck.

C der rechte Winkel, also c die Hypotenuse, a und b die Katheten; A das Complement von B, also auch $B = 90^0 - A$.

1. Zwischen **den 3 Seiten:** $a^2 + b^2 + c^2$ (Pythagoras' Lehrsatz).
2. Zwischen **1 Winkel und 2 Seiten:** Betrachte die eine Seite als r (Rad.), dann wird die andere eine $r$fache goniometr. Linie des betreff. Winkels; schreibe sie als solche in Form einer Gleichung hin u. reducire.
3. **Für die Fläche:** $F = \frac{1}{2} ab$ oder $= \frac{1}{4} c^2 \sin. 2A$ oder $= \frac{1}{4} c^2 \sin. 2B$.
4. **Fürs gleichseitige Dreieck** (Fig. 53): $F = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = 0{,}43301\, a^2$.

Beispiele (Fig. 52): **1)** c eine schiefe Distanz oder Fläche = 70 mit einem Fallwinkel $A = 22^0$; wie gross die Horizontalprojection b? Für c als Radius erscheint b als gemeiner Cosinus von A, d. h. es ist $b = c . \cos. A = 70 . 0{,}927 = 64{,}9$. — **2)** Wenn ein Weg c, gleichviel ob gerad od. gewunden, im Mittel 8^0 Steigung hat, so erreicht er auf je 1 geogr. Meile Länge eine Höhe von? Für c als Rad. erscheint a als der $c$fache $\sin. A$; u. da $c = 7420^m$ (S. 24), folgt $a = 7420 . 0{,}139 = 1030^m$. — **3)** Welche Steigung hat ein Dach, das auf $b = 30'$ Grundbreite eine Höhe $a = 12'$ hat? Für b als Rad erscheint a als $b$fache Tang. A, d. h. $b . \text{tg}. A = a$, woraus $\text{tg}. A = a/_b = {}^{12}/_{30} = 0{,}40$, wozu des Knt's Tangentenskala $21{,}8^0$ zeigt.

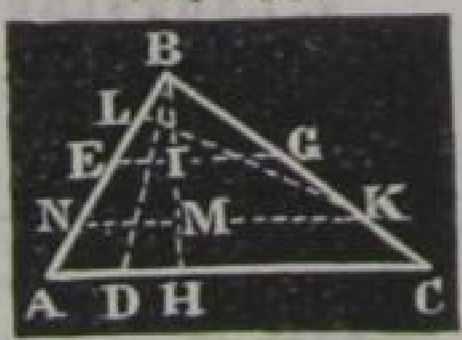
§. 7. Das schiefwinklige Dreieck. (Fig. 51.)

Gegeben:	Gesucht:
I. 1 S. a und 2 Winkel.	die S. b ... 1) $a : b = \sin. A : \sin. B$; od. $a \sin. B = b \sin. A$ (Sinussatz). die Fläch. . 2) $F = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin. B \sin\ C}{\sin. A}$.
II. 2 S. a, b u. 1 Gegenw. A.	die andern W. ... Der Gegenw. B mittels des Sinussatzes; der 3. W. $C = 180 - (A + B)$. die 3. S. c ... Erst die andern W. wie vorstehend; dann die 3. S. nach 1) aus $c \sin. A = a \sin. C$. die Fläche ... Erst die and. W.; dann $F = \frac{ab \sin. C}{2}$ oder wie 2).
III. 2 S. a, b u. ihr Zwischenwinkel C.	die and. W. . 3) $(a+b) : (a-b) = \text{tg.} \left(\frac{A+B}{2}\right) : \text{tg.} \left(\frac{A-B}{2}\right)$ (Tangentensatz), worin $\frac{A+B}{2} = 90 - \frac{C}{2}$ bekannt, somit $\frac{A-B}{2}$ die einzige Unbekannte u. dann $\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A$ und $\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = B$. die 3. S. c ... Entweder erst mittels 3) die Winkel und dann mittels 1) die fragliche Seite; oder gleich mittels 4) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. C$ (Cotes' Lehrsatz). die Fläche . . 5) $F = \frac{1}{2} ab \sin. C$.
IV. Alle 3 Seiten.	die Wink. ... Der erste C aus 4), als $\cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$; oder 6) $\cos. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s - c)}{ab}}$; oder 7) $\sin. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2} s - a)(\frac{1}{2} s - b)}{ab}}$. Der zweite dann mittels 1) oder wieder mittels 4). eine Höhe . . 8) $h_b = {}^2/_b \sqrt{\frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s - a)(\frac{1}{2} s - b)(\frac{1}{2} s - c)}$. die Fläche . . 9) $F = \sqrt{\frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s - a)(\frac{1}{2} s - b)(\frac{1}{2} s - c)}$.

§. 8. Theilung.

[F die ganze, f die abzuschneidende Fläche, also $\frac{f}{F}$ das Verhältniss des Theils zum Ganzen.]

Fig. 54.



1. Die Theillinie (BD) von einer Ecke aus, so dass $ABD = f$. Mache $AD = \frac{f}{F} AC$.
2. Die Theillinie EG parallel mit AC, so dass $BEG = f$. Mache $BE = BA \sqrt{\frac{f}{F}}$ und $BG = BC \sqrt{\frac{f}{F}}$ od. $BI = BH \sqrt{\frac{f}{F}}$.
3. Die Theilung v. einem bestimmten Seitenpunkte (K) aus, so dass $KBL = f$. Mache BL so lang, dass $BL . BK = BA . BC . \frac{f}{F}$ od. $BL = \frac{BA . BC}{BK} \cdot \frac{f}{F}$ wird. (Auch aus $BL . BK \sin. B = 2f$.)

Beisp. In der Höhenlinie $BH = 40$ R. die Punkte I u. M zu finden, deren rechtwinklig zu ihr (od. parallel zur Basis) durchgelegte Linien das Dreieck in 3 gleiche Flächen zerlegen. $BI = 80 \sqrt{1/_3}$; $BM = 80 \sqrt{2/_3}$. — Oder da nach des Knt's Qw.-Tafel $\sqrt{0{,}3333} = 0{,}577$ u. $\sqrt{0{,}667} = 0{,}817$, folgt $BI = 46{,}2$ R.; $BM = 65{,}4$ R.

B. Dreieckslehre. C. Viereckslehre.

§. 9. Verwandlungen durch Construction.

[Für die Praxis ist jedoch der Weg der Rechnung fast immer der beste.]

Fig. 55.

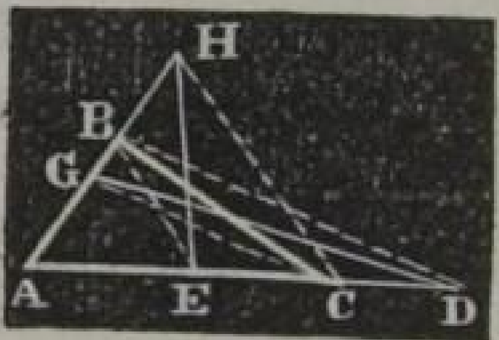
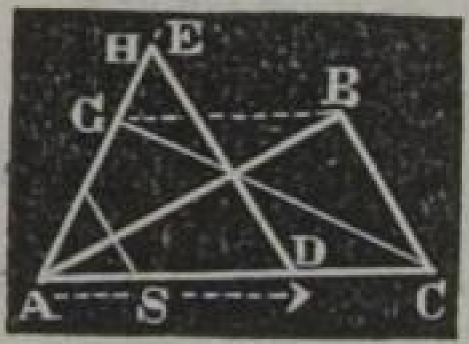
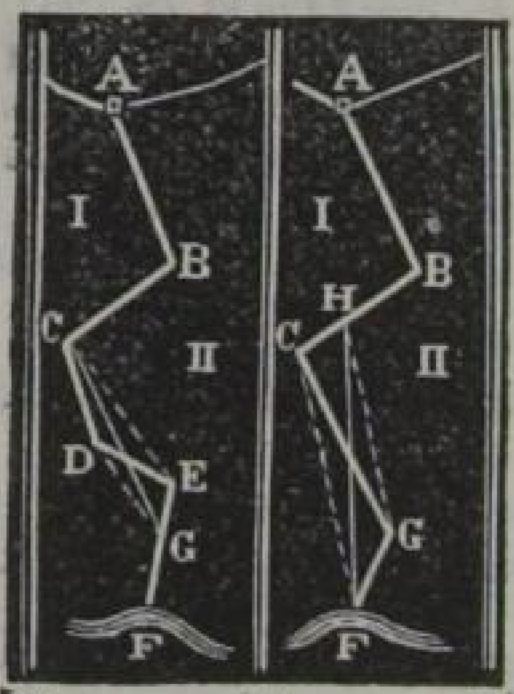


Fig. 56.



a. Fig. 57. b.



1. (Fig. 55.) Das Dreieck ABC so umzugestalten, dass es statt der Seite AC 1. die längere AD, 2. die kürzere AE erhält. — Zu 1. Parallel zu BD ziehe CG, so ist Dreieck AGD das gesuchte. Zu 2. Parallel mit EB ziehe CF, so ists AHE.

2. (Fig. 56.) Das Dreieck ABC in ein anderes von bestimmter Seite $AD = s$ u. bestimmten Winkel w zu verwandeln. Bilde bei A den $\angle CAE = w$ u. ziehe $BG \parallel AC$, so ist $\triangle AGC = \triangle ABC$. Hierauf mache AH so lang, dass $AH \cdot AD = AG \cdot AC$.

3. (Fig. 56.) Ein ungleichseitiges Dreieck ABC in ein gleichseitiges umzugestalten. Verfahre wie vorher, nur mit dem Unterschiede, dass $w = 60^0$ gebildet u. in die Bestimmungsforml $AH = AD = s$ gesetzt und daraus letztere $= \sqrt{AG \cdot AC}$ gefunden wird.

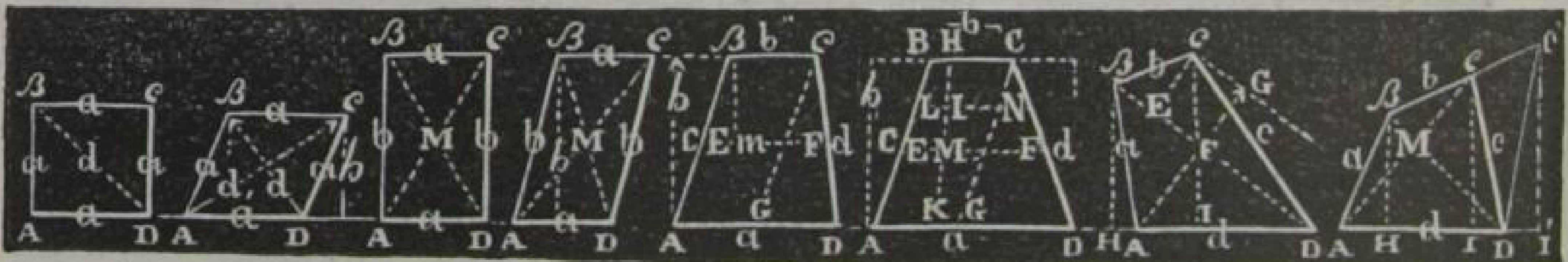
4. Aus jedwedem Vieleck eine Ecke wegzuschaffen.

Rektifikation gebrochener Grenzen.

Um in der Grenze zwischen I u. II (Fig. 57) die Ecke D (Fig. 57a) nach EF zu verlegen, ziehe EC und parallel dazu DG, dann ist $ABCGF$ die neue Grenze. Um in dieser (Fig. 57b) G nach BC zu verlegen, ziehe FC und parallel dazu GH, so ist $ABHF$ die um eine zweite Ecke verminderte Figur.

C. Viereckslehre (Tetragonometrie).

58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65.



§. 10. Parallelogramme.

Quadrat. Fig. 58. $F = a^2 = \frac{1}{2} d^2$. — Rhombus (Rhaude) Fig. 59. $F = ah = a^2 \sin. A = \frac{1}{2} d_1 . d$. — Rechteck (Oblongum) Fig. 60. $F = ab = a\sqrt{d^2 - a^2}$. — Rhomboid (verschobenes Rechteck) Fig. 61. $F = ah = ab \sin. A$.

§. 11. Trapeze (Paralleltrapez).

Fig. 62 und 63. a die grössere oder eigentliche Grund-, b die kleinere Grund- od. Deckseite; h ihr Abstand; $EF = m$ die ihnen parallele Mittellinie; c u. d die Nebenseiten; $a+b+c+d = s$. Dann ist

1. $h = c \sin. A = d \sin. D = \frac{1}{2(a-b)} \sqrt{[s-2a][s-2b][s-2(b+c)][s-2(b+d)]}$.

2. $F = \frac{a+b}{2} h = mh = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{[\frac{1}{2}s-a][\frac{1}{2}s-b][\frac{1}{2}s-(b+c)][\frac{1}{2}s-(b+d)]}$.

3. Quertheilung (Fig. 63). Durch eine recht- od. schiefwinkl. Querlinie HK ein Stück $AH = f$ od. $\frac{1}{n} F$ abzuschneiden? Regel: Lege HK so, dass $EM = \frac{m}{n}$ od. $= \frac{f}{F} m$ od. $= \frac{f}{h}$; od. so, dass $AK + BH = \frac{a+b}{n}$ od. $= \frac{f}{F}(a+b)$ od. $= \frac{2f}{h}$.

4. Längstheilung (Fig. 63). An der kleinen Grundseite durch eine Parallele LN ein Stück $= f$ oder $\frac{1}{n} F$ abzuschneiden. — Lothrechte Breite

$$HI = \frac{h}{a-b}\left[-b+\sqrt{\frac{a^2+(n-1)b^2}{n}}\right] \text{ oder } = \frac{h}{a-b}\left[-b+\sqrt{\frac{2(a-b)f+b^2h}{h}}\right];$$

oder $= \frac{h}{a-b}\left[-b+\sqrt{\frac{f}{F}(a^2-b^2)+b^2}\right]$. Die Punkte L u. N giebt die Proportion $h : h_1 = c : BL = d : CN$. — Soll das Stück f od. $\frac{F}{n}$ an der gross. Grundseite liegen, so setzt man in obige Formel $F-f$ statt f oder $\frac{n}{n-1}$ statt n.

Ein Trapez, dessen $a = 9$, $b = 6$ u. $h = 8$ in 4 gleich grosse Parallelstreifen zu theilen, setze in die 3. Formel erstlich $\frac{f}{F} = \frac{1}{4}$, dann $\frac{1}{2}$, dann $\frac{3}{4}$. Für $\frac{f}{F} = \frac{1}{4}$ wird $BK = h_1 = \frac{8}{3}[-6+\sqrt{11,25+36}] = 2,32$.

C. Viereckslehre. D. Vieleckslehre.

§. 12. Trapezoide, od. das unregelmäss. od. allgemeine Viereck.

Fig. 64 und 65. 1. $F = BD\,(AF + CE) : 2$; oder 2. $F = BD \,.\, AG : 2$; oder 3. (Coordinatenmethode) $F = [BH \,.\, AH + (BH + CI)\, HI + CI \,.\, ID] : 2$. 4. Aus den Diag. $F = (AC \,.\, BD \sin. M) : 2$. 5. Aus den Seiten u. 2 Gegenwink. $F = (a \,.\, d \,.\sin. A + b \,.\, c \sin. C) : 2$. 6. Aus dem Umfange (polygonometrisch): Ordinate v. $B\ (= BH) = a \sin. A$; Ordinate v. $C = a \sin. A - b \sin. (A + B)$; Abscisse v. $B\ (= AH) = a \cos. A$; Abscisse v. $C = a \cos. A - b \cos. (A + B)$;

Ordinate von $D = 0 = a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C)$;

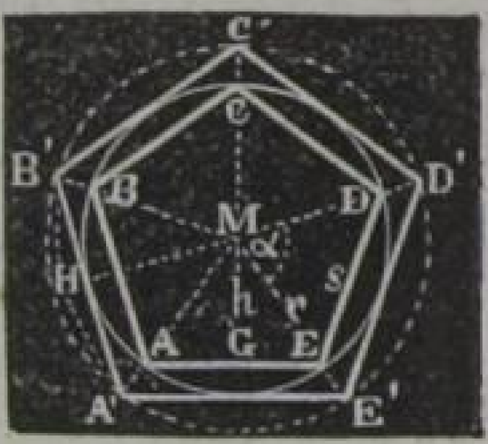
Abscisse von $D = d = a \cos. A - b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C)$.

Bei gemessenem d u. zur Berechnung der F sind die beiden letzten Gleichungen nicht nöthig, wohl aber zur Prüfung und Berichtigung des Coordinatennetzes. Auch kann die Gleichung der letzten Ordinate $= 0$ zur Auffindung eines Winkels (A od. B od. C) und dann die der letzten Abscisse zur Berechnung der Basis d dienen. (S. S 20.)

D. Vieleckslehre (Polygonometrie).

§. 13. Das regelmässige n-Eck.

Fig. 66.



α ein Mittelpunkts- od. Centriwinkel; $\angle A = B = C$ ein Umfangs- od. Polygonwinkel $= 180^0 - \alpha$; h die Centralhöhe MG (= Rad. des eingeschrieb. Kr.); r des n-Ecks eigentlicher (umschreibend.) od. Grundkreis-Radius $= MA = MB$ etc.; s, u, f Seite, Umfang u. Fläche des n-Ecks; s_2, u_2, f_2 des $2n$-Ecks. R, S, U, F etc. die gleichlautenden Grössen des äusseren oder umschriebenen Vielecks $A'B'C'$ etc.

1. $\angle \alpha = 360^0 : n$; $\angle A = 180^0 - \alpha$ od. $(n-2)\,180 : n$.

2. Zwisch. r, s u. h ... $s^2 = 4(r^2 - h^2)$; $s = 2r \sin. \frac{\alpha}{2} = 2h \,\mathrm{tg}. \frac{\alpha}{2}$; $h = r \cos. \frac{\alpha}{2}$.

3. Für u ... $u = ns$; $= 2nr \sin. \frac{\alpha}{2}$; $2nh \,\mathrm{tg}. \frac{\alpha}{2}$.

4. Für f ... $f = \frac{uh}{2}$; $= \frac{nsh}{2}$; $= \frac{ns}{4}\sqrt{4r^2 - s^2}$; $= \frac{nr^2 \sin. \alpha}{2}$; $= nh^2 \,\mathrm{tg}. \frac{\alpha}{2}$.

5. Fürs $2n$-Eck ... $s_2 = \sqrt{2r\,(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2})}$; also für $r = 1$ ... $s_2 = \sqrt{2 \sqrt{4 - s^2}}$. Und nach 4. $f_2 = \frac{ns_2}{2}\sqrt{4r^2 - s_2{}^2}$; $= r^2 \sin. \frac{1}{2}\alpha$.

6. Fürs äussere n-Eck ... $r : R = s : S = u : U = h : r = 1 : \sec. \frac{\alpha}{2}$. Somit $S = s\,\frac{r}{h}$; $= s \sec. \frac{\alpha}{2}$; $= \frac{2r}{h}\sqrt{r^2 - h^2}$; $F = f\left(\frac{r}{h}\right)^2$; $= f\left(\frac{S}{s}\right)^2 = f \sec.^2 \frac{\alpha}{2}$.

7. Fürs äussere $2n$-Eck. (Nach 5. u. 6.) $S_2 = s_2\,\frac{r}{h}$; $= s_2 \,.\, \sec. \frac{\alpha}{2}$; $= \frac{r}{h}\sqrt{2r\,(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2})}$; $F_2 = \frac{nS_2}{2}\sqrt{4R^2 - S_2}$; $= R^2 \sin. \frac{\alpha}{2}$.

1. Beisp. Von dem inneren 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck etc. den Umfang für den Durchmesser d od. Radius $r = \frac{1}{2} d$ zu finden. Da fürs 6-Eck $s = r$, folgt aus 3. $u_6 = 6r = 3d$; fürs 12-Eck nach 5. $s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \,.\, r = 0{,}5176380 \ldots r$; also $u_{12} = 6{,}212 \ldots r = 3{,}106 \ldots d$. Und durch fortgesetzte Verdoppelg. fürs 32768-Eck $u_{32768} = 6{,}2831852 \ldots r = 3{,}1415926 \ldots d$. — 2. Beisp. Dasselbe fürs äussere 12- bis 32768-Eck? Insofern fürs innere 12-Eck $s_{12} = 0{,}5176 \ldots r$ war u. $\alpha = {}^{360}/_{12} = 30$, folgt nach 6. $U_{12} = u_{12} \sec. 15^0 = u_{12} : \cos. 15^0 = 3{,}14 \ldots d : 0{,}96592 = 3{,}215388 \ldots d$. Und so auch fürs äussere 32768-Eck: $U_{32768} = 3{,}1415926 \ldots d$. Also bis zur 7. Decimale mit dem innern, u. somit auch dem dazwischen liegenden Kreisumfange, übereinstimmend.

§. 14. Grössenverhältnisse des regelmäss. 3- bis 12-Ecks.

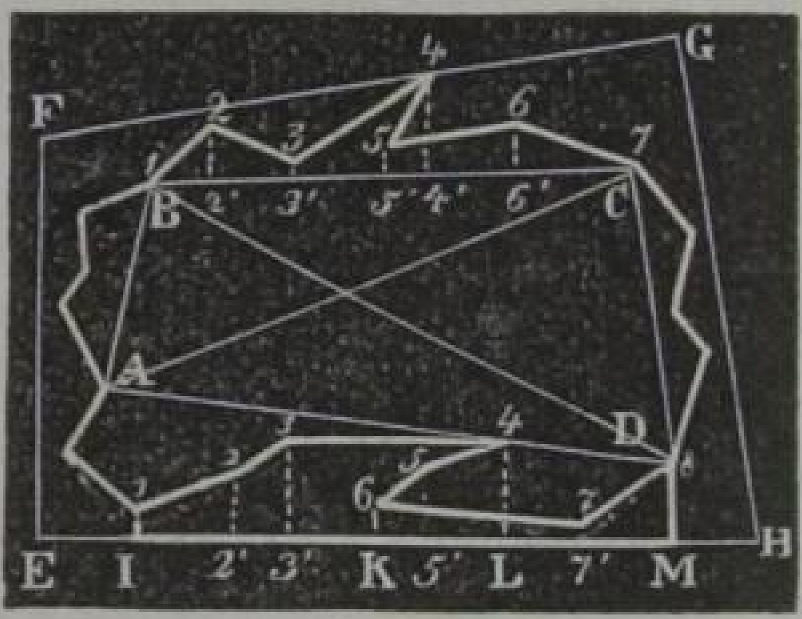
r Rad. d. umschrieb. Kr.; h Centralhöhe od. Rad. d. eingeschr. Kr.; s Seite.

	innre S.	äussre S.	Fläche $f =$		
3-Eck.	1,73205 r;	3,4641 r	0,4330 . s^2	=1,2993 . r^2	=5,1961 h^2
4 ,,	1,41421 ,,	2 ,,	1 ,,	2 ,,	4 ,,
5 ,,	1,17557 ,,	1,4531 ,,	1,7205 ,,	2,3776 ,,	3,6327 ,,
6 ,,	1 ,,	1,1547 ,,	2,5981 ,,	2,5981 ,,	3,4641 ,,
7 ,,	0,86777 ,,	0,9631 ,,	3,6339 ,,	2,7364 ,,	3,3710 ,,
8 ,,	0,76537 ,,	0,8284 ,,	4,8284 ,,	2,8284 ,,	3,3137 ,,
9 ,,	0,68404 ,,	0,7279 ,,	6,1818 ,,	2,8925 ,,	3,2757 ,,
10 ,,	0,61803 ,,	0,6498 ,,	7,6942 ,,	2,9389 ,,	3,2492 ,,
11 ,,	0,56347 ,,	0,5873 ,,	9,3656 ,,	2,9735 ,,	3,2299 ,,
12 ,,	0,51764 ,,	0,5359 ,,	11,1962 ,,	3 ,,	3,2154 ,,

Für andre n-Ecke am schnellsten aus d. Chordentafel des Knt's; z. B. fürs 13-Eck, wo $\alpha = 360 : 13 = 27{,}7^0$, ist $s = \mathrm{ch.}\ 27{,}7^0 = 0{,}4787\,r$; bh. $= 0{,}0291\,r$; Centralh. $h = 1 - 0{,}0291 = 0{,}9709\,r$; $u = 0{,}4787\,r \,.\, 13 = 6{,}223\,r$; $f = \frac{6{,}223\,r \,.\, 0{,}9709\,r}{2} = 3{,}021\,r^2$.

D. Vieleckslehre. E. Kreislehre.

Fig. 67.



§. 15. Das unregelmässige n-Eck.

1. Durch $(n-3)$ Diag. in $(n-2)$ Dreiecke zu zerlegen; daher Summe aller Polygonwinkel $= (n-2)\,180^0$.

2. Alle Messungs- und Berechnungsarbeiten sind durch Zerlegung in Dreiecke od. Trapezoide od. Trapeze auf die der Drei- u. Viereckslehre (§§. 5-7, 11-12) zurückzuführen.

3. Durch Ein od. Umschreibung einer leicht mess- und berechenbaren Figur, z. B. $ABCD$ oder $EFGH$ (Fig. 60), wird oft bedeutende Vereinfachung bewirkt, indem diese Grundfigur nach ihrer Messungsweise, u. jedes der von ihr ab- oder zugeschnittenen Segmente durch Zerlegung in rechtwinklige Trapeze, zu bestimmen ist. (Letzteres am besten durch die folgende Methode.)

4. Verbundene Trapezialmethode mit einer Seite als Basis. Beispielsweise angewendet auf das äussere Stück $I, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\,M$. Bedeutet IM die als Abscissenbasis gewählte Grundseite; y_1, y_2 ... die von allen Ecken 1, 2 ... rechtwinklig darauf gezogenen Ordinaten (Breiten, Abschläge), also $y_1 = 1I$; $y_4 = 4L$; x_2, x_3 etc. die den Punkten 2, 3 etc. zugehörigen stets vom Anfangspunkte (I) an gerechneten Abscissen (Längen; also $x_4 = IL$, $x_6 = IK$): so findet sich die Fläche zwischen der Basis IM u. den Endbreiten $1I$ und $8M$ durch folgendes Rechnungswerk.

Coordinat. Breit	Coordinat. Läng.	Berechnung. Formlänge
y_1		$(y_1 - y_3)\,x_2$
y_2	x_2	$(y_2 - y_4)\,x_3$
y_3	x_3	$(y_3 - y_5)\,x_4$
y_4	x_4	$(y_4 - y_6)\,x_5$
y_5	x_5	$(y_5 - y_7)\,x_6$
y_6	x_6	$(y_6 - y_8)\,x_7$
y_7	x_7	$(y_7 + y_8)\,x_8$
y_8	x_8	$\frac{\text{Summe}}{2} = F$

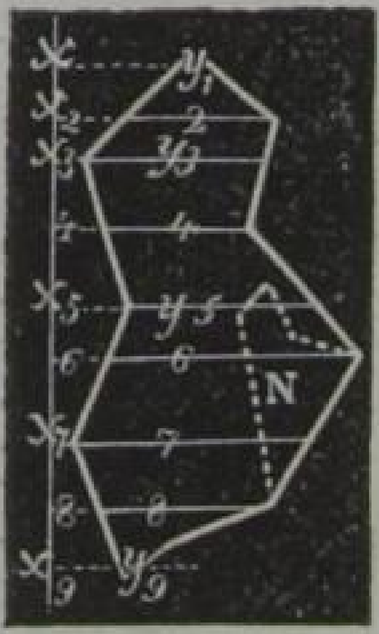
Regel: Von jeder Breite ziehe die zweitfolgende ab u. multiplic. die 1., 2., 3., ... Diff. mit d. 1., resp. 2., 3. etc. Länge. Die beiden letzten Breiten addire und multiplic. ihre Summe mit der letzten d. i. ganzen Länge. Die algebraische (d. h. mit Beachtung der + u. − Zeichen bewirkte) Summe sämmtlicher Produkte dividire durch 2.

Zusätze: Geht die Figur an einem od. an beiden Enden in Dreiecke über, so setzt man die betreff. Endbreiten $= 0$. — Fallen die ersten Abscissen x_2, x_3 links vom Anfangspkte, so setzt man sie negativ ein.

Beispiel für das Stück zwischen BC und 1, 4, 7. Fig. 67.

Breiten.	Längen.	
$1B = 0{,}0$ R.		
$2 . 2' = 2{,}4$,,	$2{,}6\ (= B2')$	$(0{,}0 - 1{,}2) \times 2{,}6 = -\ 3{,}12$
$3 . 3' = 1{,}2$,,	$4{,}9\ (= B3')$	$(2{,}4 - 3{,}6) \times 4{,}9 = -\ 5{,}88$
$4 . 4' = 3{,}6$,,	$10{,}5\ (= B4')$	$(1{,}2 - 1{,}8) \times 10{,}5 = -\ 6{,}30$
$5 . 5' = 1{,}8$,,	$8{,}3\ (= B5')$	$(3{,}6 - 2{,}3) \times 8{,}3 = +\ 10{,}79$
$6 . 6' = 2{,}3$,,	$14{,}8\ (= B6')$	$(1{,}8 - 0{,}0) \times 14{,}8 = +\ 26{,}64$
$7C = 0{,}0$,,	$18{,}4\ (= BC)$	$(2{,}3 + 0{,}0) \times 18{,}4 = +\ 42{,}32$
		$64{,}45$
		$2\,)\ 32{,}225\ \square$R. $= F$.

Fig. 68.



5. Verbundene Trapezialmethode mit einer Diagonale oder einer Transversale als Basis. (Fig. 68.) Man ziehe die beliebige Längenbasis $x\,x_9$ u. rechtwinklig zu ihr durch alle Eckpunkte der Figur durchgehende Breiten y_1, $y_2 \ldots y_9$. Rückspringende Theile der Umfänge sind in diesem Falle auszuscheiden (wie bei N zu sehen) u. später in besonderer Berechnung zu erledigen. Bedeuten nun wiederum y_1, y_2, y_3 ... die Breiten, aber in der Grösse und Folge, wie sie innerhalb der Fig. liegen; u. x_2, $x_3 \ldots x_9$ die entsprech. Längen vom Anfangspunkte x od. (wenn die Längenbasis innerhalb gelegt wäre) von y_1 an gerechnet: so gilt dann ganz die vorige Formel und Regel

$F = [(y_1 - y_3)\,x_2 + (y_2 - y_4)\,x_3 \ldots (y_7 - y_9)\,x_8 + (y_8 + y_9)\,x_9] : 2$, wobei y_1 od. $y_9 = 0$ zu setzen, wenn das erste oder letzte Flächenstück ein Dreieck wäre.

6. Eigentliche **polygonometrische** (trigonometr. Umfangs-) Methode mit Seite oder mit Diagonale als Basis: siehe vorn S. 20.

E. Kreislehre (Cyclometrie).

§. 16. Abkürzungen, Symbolik, Allgemeines.

r Radius; d Durchmesser (Diameter); u Umfang (Peripherie); kr. d, kr. u die zum Durchm. d od. Umf. u gehörige Kreisfläche; π Verhältniss des u zum d; $\pi = 3{,}1415927\ldots$ (Ludolph); $= {}^{22}/_{7}$ (Archimedes; um $^1/_{25}$ % zu gross); noch näher $^{355}/_{113}$ (Metius; bis incl. 6. Decim. genau); $\pi^2 = 9{,}869604$; $\pi\sqrt{2} = 4{,}442889$; $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2{,}221445$; $\frac{\pi}{180} = 0{,}017453$; $\frac{\pi}{360} = 0{,}008727$; $\sqrt{\pi} = 1{,}77245$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}253314$;

E. Kreis. F. Anderweite Kurven (Ellipse).

$\frac{1}{\pi}=0{,}818310$; $\frac{1}{\pi^2}=0{,}101321$; $\frac{\sqrt{2}}{\pi}=0{,}450158$; $\sqrt{\frac{1}{\pi}}=0{,}564190$; $\sqrt{\frac{2}{\pi}}=0{,}707885$.

Vergl. hierzu die Winkel- und Kreisfunktionen S. 53 und 54.

Mittelpunktsgleichung (der Drchm. d als Basis, sein Centrum als Coordinatenanfang) $y^2=r^2-x^2$ oder $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}=\pm\sqrt{(r+x)(r-x)}$.

Scheitelgleichung. (d als Basis; sein Endpunkt als Coordinatenanfang.) $y^2=x(2r-x)$; oder $y=\pm\sqrt{x(2r-x)}$ und $r=(x^2+y^2):2x$.

Beispiel. Ein Stück Kreiskurve AB (Fig. 50, S. 55) von 150^m Radius durch Ordinaten auf AM, zu den von A aus gerechneten Abscissen 5^m, 10^m und 20^m abzustecken. 1. Ord. $=\sqrt{5(300-5)}=\sqrt{1475}$; 2. Ord. $=\sqrt{10(300-10)}=\sqrt{2900}$; 3. Ord. $=\sqrt{5600}$; wozu des Knechtes Qw.-Tafel (S. 3) 38,4; 53,8 u. 74,8 anzeigt.

§. 17. Vollkreis. (Alle Rechng. durch Knt's linke Wand entbehrlich; s. S. 4.)

1. Umfang $u=\pi d=2\pi r$; $d=\frac{u}{\pi}$.
2. Umfang constructiv: Des Quadranten Chorde um ihr Neuntel vergrössert gibt den Quadrantbogen um nur $0{,}00055\,r$ zu gross.
3. Inhalt $k=\frac{\pi}{4}d^2=0{,}78540\,.\,d^2$ (nahe $^{11}/_{14}\,d^2$) $=\pi r^2=\frac{u^2}{4\pi}=0{,}0796\,u^2$. (S. Knt's Dec.-$D$- u. K-Spalte.)
4. Wenn der Durchmesser in Duodezzollen und der Inhalt k in Quadratfussen: $k=0{,}005454\ldots d^2$ (sehr nahe $=\frac{6}{1100}d^2$) $=0{,}02180\,r^2=0{,}00055\,u^2$. (S. Knt's Duod.-$D$-, U- und K-Spalte.)
5. Inhalt constructiv: Der Durchm., um sein Viertel vergrössert, gibt die Diag. eines Quadrats, dess. Fläche um $0{,}0041\,d^2$ (ca. ½ %) kleiner als die des Kreises ist.

§. 18. Kreis-Aus- u. Abschnitt. (Alle Formelrechnung durch Knecht's link. Rand u. link. Ecke entbehrlich.)

Bogengradmas α; Bogenlänge $=$ arc. $\alpha=b$; Chorde $=c$; Bogenhöhe $=h$; Kreisfläche $=k$; Sektorfl. $=S$; Segmentfl. $=s$.

1. $b=\frac{\alpha u}{360}=\frac{\pi\alpha d}{360}=\frac{\pi\alpha r}{180}=0{,}017453\,\alpha r$. (S. BOG.-Tafel des Knechts.)
2. $r=\frac{c^2+4h^2}{8h}=\frac{c^2}{8h}+\tfrac{1}{2}h$; $c=2\sqrt{h(2r-h)}=2r\sin.\frac{\alpha}{2}$. (S. Ch.-Tafel des Knechts.)

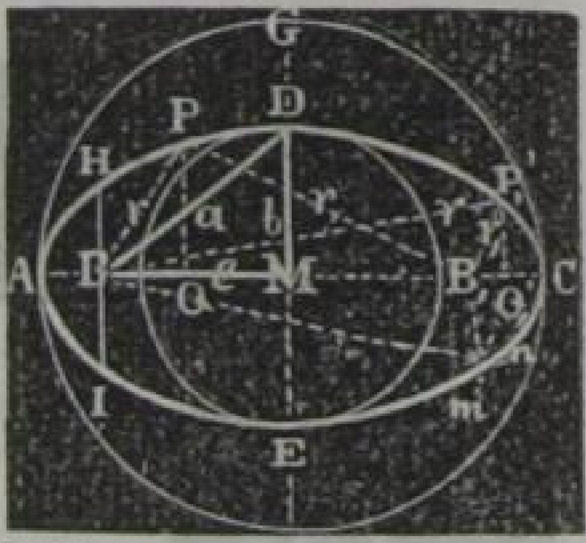
   $h=r\pm\sqrt{r^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=r\left(1-\cos.\frac{\alpha}{2}\right)$. (S. Bh.-Tafel des Knechts.)
3. $S=\frac{br}{2}=\frac{\pi\alpha r^2}{360}=\frac{\alpha}{360}k=0{,}002778\,\alpha k$. (Mittels BOG.- oder Kreis-Tafel.)

   Näherungsweise, als Parabelsegment ... $S=\,^2/_3\,c\,.\,h$.
4. $s=\frac{br-c(r-h)}{2}=\frac{br-2(r-h)\sqrt{h(2r-h)}}{2}=\frac{c^2(b-c)+4h^2(b+c)}{16h}=$

   $=\left(\frac{\pi}{360}\alpha-\frac{\sin.\alpha}{2}\right)r^2=\left(\frac{\text{arc.}\,\alpha-\sin.\alpha}{2}\right)r^2=$ Knechts SEGMziffer $\times\,r^2$.

F. Anderweite Kurven.

Fig. 69.



§. 19. Die Ellipse.

Grosse Achse $AC=d$; kleine Achse $DE=\delta$; ihre Hälften $MA=a$; $MD=b$; Excentricität der Brennpunkte $MB=MB,=e$; Ordinate der Brennpunkte $BH=$ halber Parameter $=p$; erster Radiusvector $BP=r$, zweiter $B,P=r,$; Abscisse aus der Mitte $MQ=\xi$, aus dem Scheitel $AQ=x$; kr.d, umf.d der dem Durchm. d entsprechende Kreisinhalt, resp. Umfang.

1. Krümmungsgesetz: $r+r,=2a=d$.
2. Excentricität $e^2=a^2-b^2$. 3. Parameter $2p=\frac{2b^2}{a}$.
4. Radiusvector $r=a\pm\frac{e\xi}{a}$; $r,=a\mp\frac{e\xi}{a}$.
5. Mittelpunktsgleichung $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\xi^2)$.
6. Scheitelgleichung $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)=2px\left(1-\frac{x}{d}\right)$.
7. Krümmungshalbmesser eines Punktes $\ldots=\varrho=\frac{\sqrt{(r\,r,)^3}}{ab}$; demnach $\varrho=\frac{b^2}{a}$ für A u. $\frac{a^2}{b}$ für D.
8. Fläche $F=\pi ab=\frac{\pi}{4}d\delta=$ dem nach Verhältniss der beiden Achsen proportionirten kr. d oder kr. δ; und auch $=$ kr. $\left(\frac{d+\delta}{2}\right)-$ kr. $\left(\frac{d-\delta}{2}\right)$.
9. Ellipsen-Trapez $MDPQ=\tfrac{1}{2}\left(\xi y+ab\,\text{arc.sin.}\frac{\xi}{a}\right)$.

F. Anderweite Kurven (Ellipse, Parabel).

10. Ellipsen-Umfang U. Wenn $u =$ Kreisumfang zum mittl. Durchm. $\frac{d+\delta}{2}$ od. $= \pi(a+b)$, und c den Bruch $\frac{d-\delta}{d+\delta}$ od. $\frac{a-b}{a+b}$ bedeutet, so ist

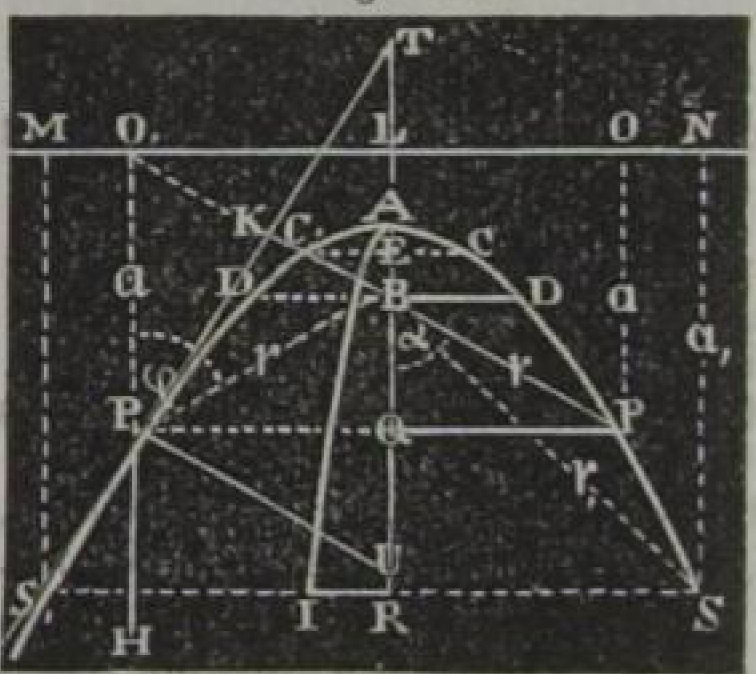
$$U = u\,(1 + \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{64}c^4 + \tfrac{1}{256}c^6 + \ldots),$$ und demgemäs bei

$c =$	0,0;	0,1;	0,2;	0,3;	0,4;	0,5;	0,6;	0,7;	0,8;	0,9;	1,0.
$U = u \times$	1,000;	1,003;	1,010;	1,023;	1,040;	1,063;	1,092;	1,127;	1,167;	1,216;	1,273.

11. Construction. Mittels eines in B u. $B_{,}$ befestigt. Fadens FPB' von der Länge d. — Oder mittels Zirkels, indem man aus B u. B' Kreuzbogen m u. n mit den Radien r u. $d-r$ beschreibt. — Oder, indem man alle Ordinaten des um- oder eingeschriebenen Kreises nach dem Verhältnisse beider Achsen verkürzt, resp. verlängert.

§. 20. Die Parabel.

Fig. 70.



Abscissen auf d. Achse AR u. aus d. Scheitel A; $= AQ = x$. Ordinate $QP = y$, im Brennpunkte $B = BD = p$. Radiusvector $PB = r$. Abstand v. der Directrix (Leitlinie MN) $= PO = a$.

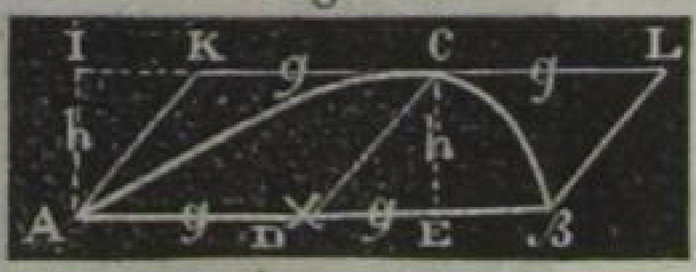
1. Krümmungsgesetz: $r = a$; $r_{,} = a_{,}$ etc.
2. $BL = p$; $AL = AB = \frac{1}{2}p$; Parameter $DD_{,} = 2p$.
3. Scheitelgleichung $y^2 = 2px$.
4. Polargleichung. Für $BQ = x$, ist $r = p + x, = p : 2 \sin. \frac{1}{2}\alpha$.
5. Krümmungshalbm. $\varrho = \sqrt{\frac{(2x+p)^3}{p}}$.
6. Construction bei gegebenem Parameter $DD_{,} = 2p$. Ziehe $LR \perp MN$; mache $LA = AB = \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}DD_{,}$ u. durchschneide v. B aus jede zu MN Parallele (Achsensehne) $CC_{,}$, $PP_{,}$, SS, mit ihrem Abstande EL, QL u. RL.
7. Die Tangente $P_{,}T$ halbirt den von r u. a gebildeten Winkel φ und ist $= 2\sqrt{rx}$. Subtang. $QT = 2x$. Normale $P_{,}U = \sqrt{2pr}$. Subnorm. $QU = p$.
8. Der Durchmesser $P_{,}H$ des Tangirungspunktes u. der Radiusvector BP, desselben bilden mit der Tangente (also auch mit der Kurve) den gleichen Winkel. — Der Durchm. halbirt alle der Tang. parallelen Sehnen. — Die Quadrate der Ordinaten wachsen wie die einfachen Absciss. — Die Proportionirung (z. B. Viertelung) der Ordinaten gibt eine Parabel (wie AI) von anderer Brennweite.
9. Länge eines Astes oder Bogenstückes

$$ADP = l = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)} + \text{lgnat.}\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right].$$

Wenn der Bruch $\frac{x}{y}$ (bei Kettenbrüchen = Bogenhöhe divid. durch halbe Spannweite) klein, so ist annähernd $l = y\left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \tfrac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right]$.

10. Auch für Bogen anderer Kurven, deren Höhe h klein gegen ihre Spannung oder Chorde c, folgt aus 9. deren Länge annähernd $\left[1 + \tfrac{8}{3}\left(\frac{h}{c}\right)^2\right]c$. Wenn also $C_1C = 100$, $AE = 5$, folgt $C_1AC = [1 + \tfrac{8}{3} \cdot (\tfrac{1}{20})^2]\,100 = 100{,}67$.

Fig. 71.



11. Parabel-Segment u. -Dreieck. Ist KL die der Sehne AB parallele Tangente, C ihr Berührungspunkt, D die Sehnenmitte, $AD = DB = g$, und $CE = AI =$ Höhe des Segments wie auch der innern und äussern Dreiecke $= h$, so ist Segment $ACB \ldots = \tfrac{2}{3}$ umschrieb. Parallelogr. $AL = \tfrac{2}{3}\,AB \,.\, CE$; und sowohl Dreieck ACD wie Dreieck $DCB = \tfrac{2}{3}gh$. Dagegen jedes der konkaven oder äusseren Dreiecke AKC od. $BCL = \tfrac{1}{3}gh$. Beim sogenannten Achsensegmente (wo C der Scheitel und CD die Achse der Parabel) werden diese Dreiecke rechtwinklig und symmetrisch.

Fig. 72.

12. Parabeltrapez (Fig. 72) mit den (zur Achse parallelen) Grundlinien a_1 u. a_3, der Mittellinie a_2 u. der halben Breite b.

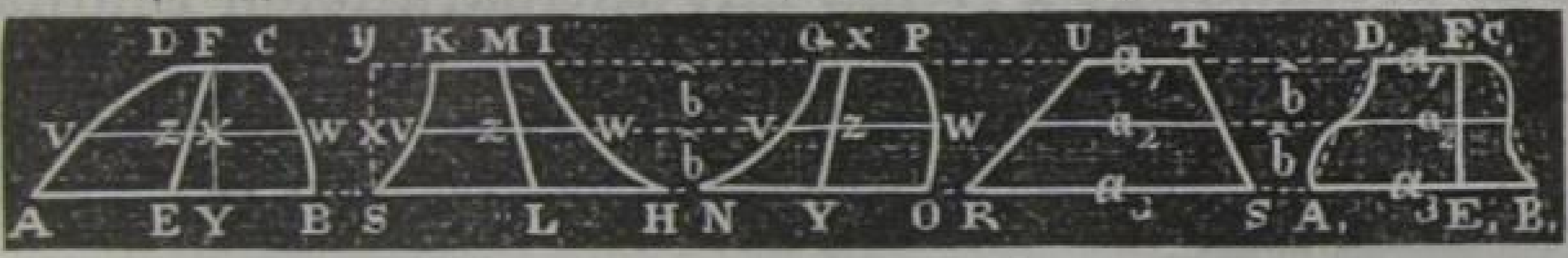
$$ABCDEA = (a_1 + 4\,a_2 + a_3)\,\frac{b}{3}.$$ (Simpson's Lehrsatz.)

§. 21. Flächeninhalt beliebig ein- und ausgebauchter Figuren.

α. **Kurven-Segmente** (ähnlich EDC, Fig. 72) **und einseitige Kurven-Dreiecke** (wie EDI u. EGD, Fig. 72), wenn deren Kurve genau genug irgend einem Parabelstück entspricht: Nach 11. des vorigen §.

β. **Zweiseitige Kurven-Dreiecke und Curven-Trapeze**, wenn die betreffenden Seiten als parabolisch ein- od. ausgebaucht, oder ausgleichungsweise auch als gerade zu betrachten, wie Fig. 73—77 (in Dreiecke übergehend, sobald die obere Grundl. $= 0$): Gemeinsam durch $F = (a_1 + 4\,a_2 + a_3)\,\frac{b}{3}$, wo b die Breite

Fig. 73. 74. 75. 76. 77.



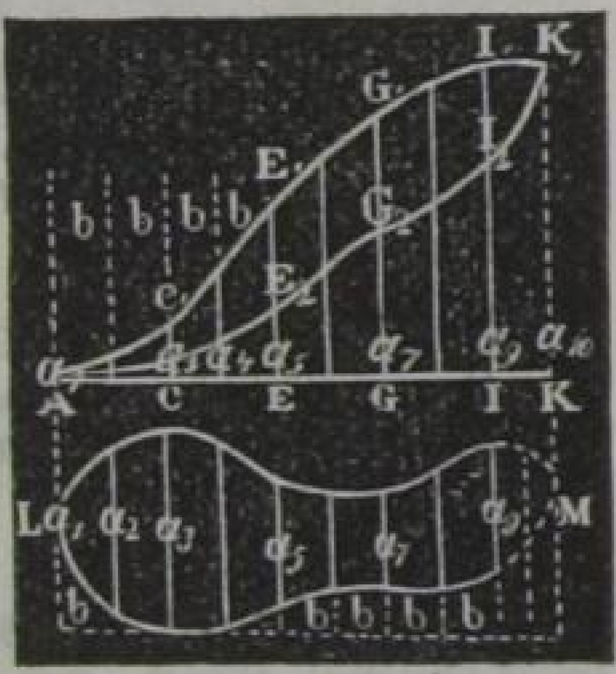
der durch die Mittelparallele a_2 gebildeten Streifen bedeutet. — Gleichmässig gültig für AC wie EC; SM wie SI; YP wie OQ; RT wie A_1F_1 und D_1B_1.

γ. **Jede gerade Anzahl gleichbreiter Sektionen**, von denen immer je zwei und zwei genau genug ein Dreieck od. Trapez der vorigen Art bilden, also jedes dergl. Flächenstück zwischen zwei ungeradstelligen Parallelen, wie z. B. a_1 bis a_9:

$$F=[a_1+a_9+(a_3+a_5+a_7)2+(a_4+a_6+a_8)4]\frac{b}{3},$$

d. h.: Summe des ersten u. letzten Gliedes einfach; S. aller übrigen ungeradstelligen Glieder doppelt; S. aller geradstelligen Glieder vierfach; dann $F=$ S. Summarum $\times$ Drittel des Gliederabstandes. Gültig für AII_2, wie AII_1 u. AI_2I_1 u. La_9. — Bei ungerader Sektions- od. gerader Gliederzahl ist eine der Endsektionen (z. B. die zwischen a_9 u. a_{10}, oder a_1 u. a_2) nach α. od. β. separat zu berechnen. Diese erweiterte Simpson'sche R. dient zugleich zur annähernd richtigsten Summirung v. Erfahrungsreihen aller Art.

Fig. 78.



Z. B.: 1) Die Fig. AE_1I_1I sei das Bild einer Bestands-Massentafel nach 10jähr. Stufen. Wenn nun der 20jähr. Best. $a_3 = 12$ Klaftern, der 30jähr. $a_4 = 28$ Kl., der 40jähr. $a_5 = 40$ Kl., so enthält diese 20gliedr. Bestandsreihe (vom $20\frac{1}{2}$ten bis $39\frac{1}{2}$ten J.) an Gesammtvorrath $(12+40+28.4)^{10}/_3 = 547$ Klaftern; im Mittel also 27,35 pro Glied. – 2) Die Figur AE_2I_2I sei das Bild einer Bestands-Werthstafel (gleichviel ob Ertrags- od. Kostenwerth). Wenn nun 3 auf einander folgende 10jähr. Altersstufen die Werthe 30, 60, 120 Thlr. ergaben, so ist der wahrscheinlichste Werth d. ganzen 20gliedr. Altersklasse $=(30+120+60.4)^{10}/_3=$ 1300 Thlr. — 3) Eine der obigen Figuren repräsentire eine in Abständen von 10 zu 10 (Jahren od. Minut. etc.) beobachtete Erfahrungstafel über Erträge, oder mechan. Widerstände, od. Menschenleistungen etc., mit den 9 Stufenwerthen a_1 bis $a_9 = 0, 2, 5, 7, 9, 10, 12, 15, 19$ Dann ist die Summe aller 90 Glieder der hierdurch angedeuteten Erfahrungsreihe vom Mittelwerthe des erst. bis Mittelwrth. des letzten Gliedes $=[0+19+(5+9+12)2+(2+7+10+15)4]\,{}^{10}/_3 = 756\,{}^2/_3$ und somit die Durchschnittsgrösse dieser 90 Glieder $= 756{,}67 : 90 = 8{,}407$.

VII. Kapitel.

Stereometrie oder Körperraumlehre.

Einschliesslich Spärische Trigonometrie und Holzmassenschätzung.

G Grundfläche; M Mantel oder Summe der Seitenflächen; O gesammte Oberfläche; V Volumen oder Rauminhalt. Symbole und Werthe für die Kreiskörper s. S. 60. Für Berechnungen in Bezug auf Hohlmas oder Gewicht beachte die Tabellen der Maskunde, namentlich Tab. 5.b, 6.b, 17 und 18 (S. 29 u. 32).

A. Prismatische Formen. (Seitenkanten parallel, parallele Querschnitte ähnlichgleich.)

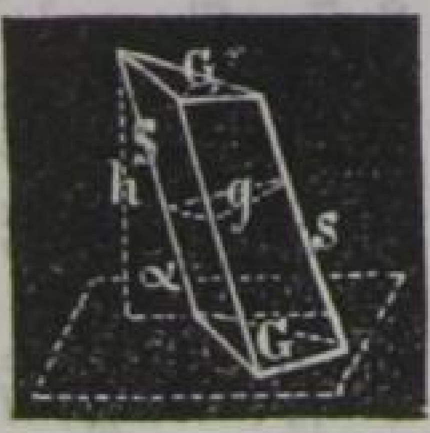
§. 1. Würfel (Cubus) mit der Seite a. $V=a^3$; $O=6a^2$.

Weshalb sich nicht blos alle Würfel, sondern auch alle unter sich ähnlichen (gleichgestalteten oder durchweg proportionirlich geformten) Körper ihrem V nach wie die dritten, ihrer Oberfläche nach wie die zweiten Potenzen homologer (gleichliegender) Dimensionen verhalten.

§. 2. Jedwede Art prismatischer Räume zwischen zwei parallelen Grundflächen. ($G \# G_1$)

α Neigungswinkel der Seiten zu G od. G_1 (Schiefe des Pr.), g der (rechtwinkl. durch die Seiten geführte) Normalquerschnitt, s die Seitenlänge, h die lothrechte Höhe (der Abstand der Endflächen). — 1. die Neig. v. g zu $G = 90 - \alpha$; — 2. $h = s\sin.\alpha$; — 3. $g = G\sin.\alpha$; — 4. $G = g\sec.\alpha$; — 5. Rauminhalt $V = Gh = Gs\sin.\alpha$ oder $V = gs$.

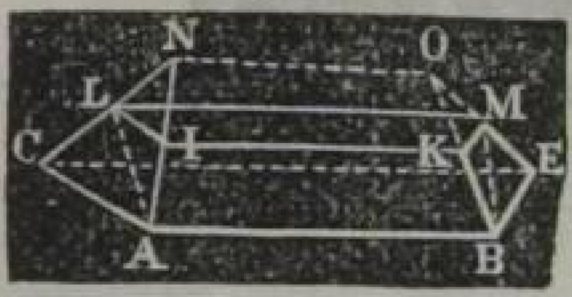
Fig. 79.



§. 3. Das dreikantige Prisma mit antiparallelen Endflächen.

Wenn in vorig. Fig. G u. $G_{,}$ nicht parallel; s_1, s_2, s_3 die Parallel-Seiten; g der Normalquerschnitt und S die die Schwerpunkte beider Endflächen verbindende (Schwer-) Linie; so ist $V = g \,.\, \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3}$ oder auch $= g \,.\, S$.

Fig. 80.



Beisp. An dem Keile od. dachförmigen Haufen, Fig. 80, ($AB \,//\, CE \,//\, NO$) fand man die Grundlängen $AB = 20'$, $CE = 25'$, deren Breitenabstand $= 8'$; Länge des Rückens $NO = 12'$, seine Höhe $= 6'$. So ist der Normal-Querschn. $g = 24\square'$, mittl. Länge $= 19'$, also Inhalt $= 24 \,.\, 19 = 456$ C'.

§. 4. Das vierseitige Prisma mit antiparallelen Endflächen,

wie z. B. der abgestumpfte Dachkörper AM (Fig. 80), wird entweder als Summe der dreikantigen $ACLMEB$ und $AILMKB$ kubirt, oder als Differenz der dreikantigen AO und IO.

§. 5. Cylinder oder Walze,

wenn d der Durchm. u. l die Achsenlänge. $V = (\text{kr.}\,d)\,l$, gleichviel ob gerad oder schief, parallel oder antiparallel abgeschnitten; und $M = \pi d l$ od. $(\text{umf.}\,d)\,l$, wenn beide Endflächen einerlei Neigungswinkel zur Achse haben.

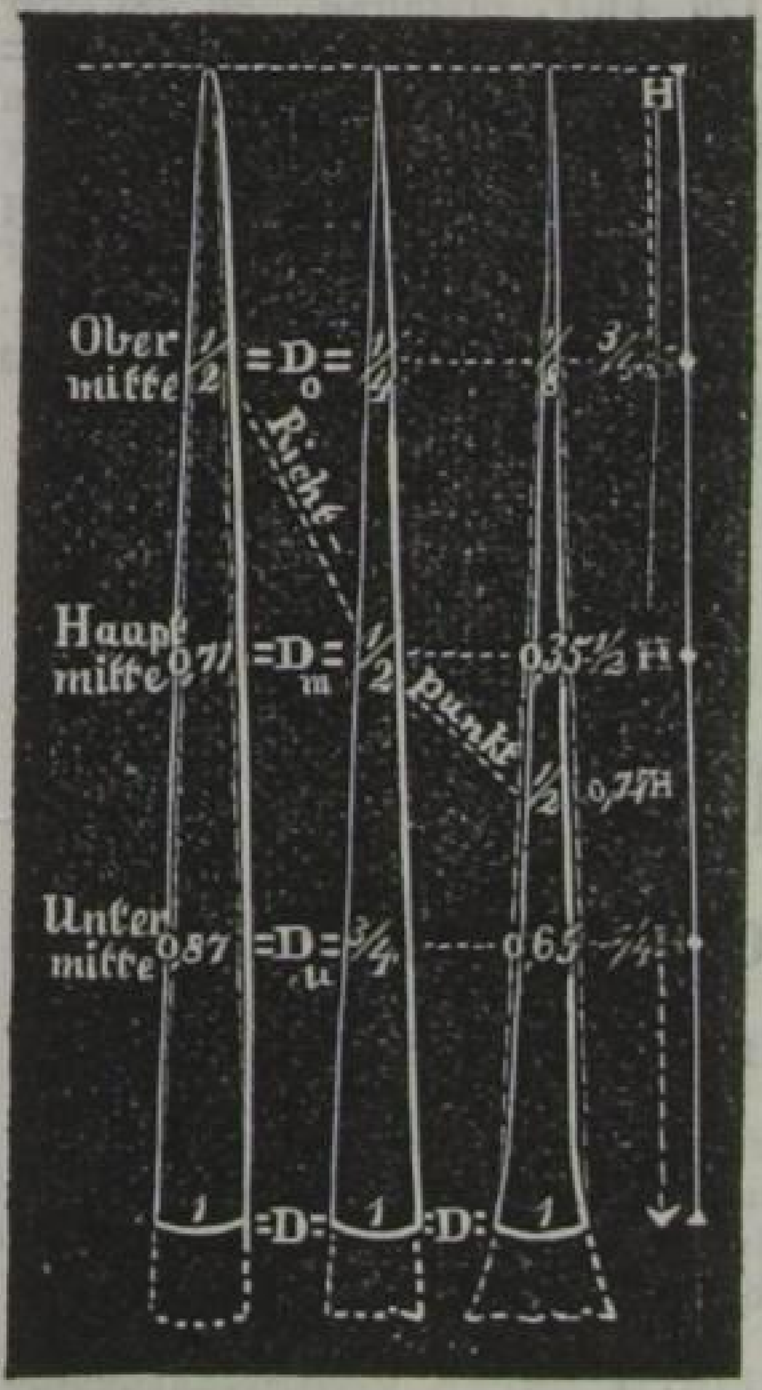
B. Pyramidale Formen.

Alle Seitenkanten nach den Scheitelpunkten konvergirend; alle Querschnitte parallel zur Grundfläche letzterer ähnlich.

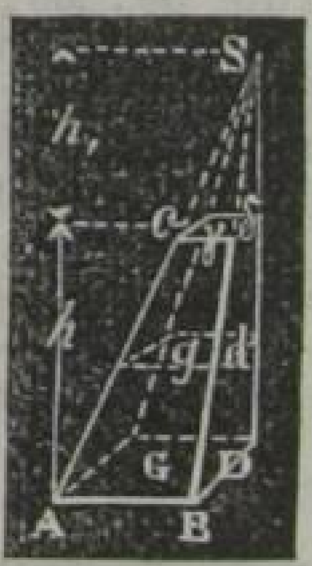
§. 6. Formirungsgesetze.

Als Seitenstück zu den 3 Kegeln, Fig. 81, 82 und 83, denke man sich noch 3 Pyramiden mit einem beliebigen Drei-, Vier- oder Vielecke als *Grundfläche* (G), wo dann D nicht mehr blos Durchm., sondern irgend eine beliebige *Dimension* am Grunde bedeutet, wie z. B. in Fig. 84 angedeutet ist. H *Scheitelhöhe* (Loth v. der Spitze auf die Basis), $\frac{1}{4}H$, $\frac{1}{2}H$ u. $\frac{3}{4}H$ *Unter-*, *Haupt-* und *Obermitte;* G_u, G_m, G_o die diesen drei Mittenpunkten entsprechend. *Grundflächen,* D_u, D_m, D_o ihre zu D homologen Dimensionen; γ u. δ die der G u. D entsprech. Parallelgrössen in beliebig. *Unterhöhe* h oder *Oberhöhe* $h_{,}$, $(= H - h)$; g u. d desgleichen bei $\frac{1}{2}h$, d. h. in der Mitte des durch g und das ihr parallele γ abgegrenzten (Pyramiden- od. Kegel-) Stumpfes. *Richtpunktshöhe* die Höhe, bei der D auf die Hälfte, also G auf das Viertel sich verkleinert hat; oder: *Richtpunkt* = Punkt der halben Grundstärken. *Grundwalze* u. *Mittenwalze* ... der Cylinder, der mit dem Kegel gleiche Höhe und gleiche Grund- resp. Mittenstärke hat. — Denkt man sich alle 3 Formen aus d. Grundfl. G durch paralleles Fortrücken nach dem Scheitel entstanden, so wird:

Fig. 81. 82. 83.



84.



α. Wenn die Grundflächen abnehmen wie die Oberhöhen, also $G : \gamma = H : h_{,}$ u. $D : \delta = \sqrt{H} : \sqrt{h_{,}}$, eine Pyramide, deren Seiten nach der gewöhnlichen oder appollonischen Parabel ausgebaucht sind; **Parabelpyramide, -kegel** (Paraboloid); Fig. 81.

β. Wenn die Grundflächen abnehmen wie die Quadrate der Oberhöhen, also $G : \gamma = H^2 : h_{,}^2$ und $D : \delta = H : h_{,}$, eine Pyr. mit geraden Seiten; **gemeine** (od. schlichtweg) **Pyramide,** desgl. **Kegel;** Fig. 84 u. 82.

γ. Wenn die Grundflächen abnehmen wie die Würfel der Oberhöhen, also $G : \gamma = H^3 : h_{,}^3$ und $D : d = \sqrt{H^3} : \sqrt{h_{,}^3}$ eine Pyr., deren Seiten nach der semikubischen od. neil'schen Parabel (= Evolute der apoll. Parabel; deren Gleichung: $y^2 = px^3$) eingebaucht erscheinen; **Neil'sche Pyr.,** als Kegel: **Neiloid;** Fig. 83.

§. 7. Geradseitige oder Gemeine Pyramiden und Kegel.

α Voll oder unabgewipfelt. Fig. 82 u. 84. Buchstabenbedeutung: §. 6.

1. $D_u = \frac{3}{4}D$; $D_m = \frac{1}{2}D$; $D_o = \frac{1}{4}D$.
2. Richtpunkt in der Hauptmitte; Richtpunktshöhe $= \frac{1}{2}H$.
3. $V = \frac{1}{3}GH$; $= 1\frac{1}{3}G_m \,.\, H$ (beim Kegel $G = \text{kr.}\,D$ od. $\text{kr.}\,2D_m$; $G_m = \text{kr.}\,D_m$).
4. Für das Kegelvolum insbesondere: $V = \frac{\pi}{12}D^2H$; $= \frac{\text{kr.}\,D \,.\, H}{3}$; $= \frac{4}{3}(\text{kr.}\,D_m)\,H$; $= \frac{1}{3}$ Grundwalze; $= \frac{4}{3}$ Mittenwalze.

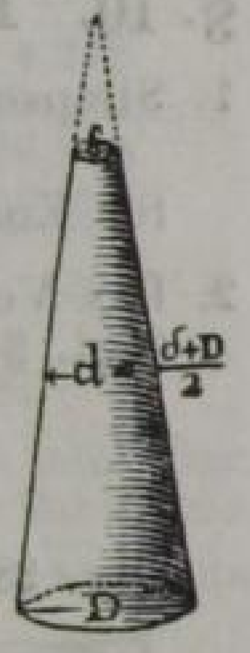
B. Pyramidale Formen.

5. Für den Mantel des geraden Kegels, wenn die Seite $= s$

$$M = \frac{\pi D s}{2}; \; = \pi D \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + H^2}; \; = \frac{(\text{umf.}\,D)\,s}{2}; \; = (\text{umf.}\,D_m)\,s.$$

β. Parallel abgekürzt. Geradseitiger Obelisk. Stumpf zwischen den Grundflächen G und γ mit der lothrechten Höhe h.

6. Ergänzungshöhe $h_{,} = \dfrac{\delta}{D-\delta}\, h = \dfrac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{G} - \sqrt{\gamma}}\, h.$ S. Fig. 84 u. Fig. 85.



7. Ergänzte Höhe $H = \dfrac{D}{D-\delta}\, h = \dfrac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{G} - \sqrt{\gamma}}\, h.$

8. Mittenstärke $d = \dfrac{D+\delta}{2}$; Mittengrundfläche $g = \dfrac{G + \gamma + 2\sqrt{G\gamma}}{4}.$

9. $V = \dfrac{h}{3}(G + \gamma + \sqrt{G\gamma}); = \dfrac{Gh}{3}\left[1 + \dfrac{\delta}{D} + \left(\dfrac{\delta}{D}\right)^2\right];$

$= \dfrac{\gamma h}{3}\left[1 + \dfrac{D}{\delta} + \left(\dfrac{D}{\delta}\right)^2\right]; \; = gh + (\sqrt{G} - \sqrt{\gamma})\,\dfrac{h}{12};$

$= gh + \dfrac{Gh}{12}\left(\dfrac{D-d}{D}\right)^2.$

10. Für den Kegelstumpf insbesondere $V = \dfrac{\pi}{12}(D^2 + D\delta + \delta^2)\,h;$

$= \dfrac{\pi}{48}[3(D+\delta)^2 - (D-\delta)^2]\,h; \; = [\text{kr.}\,d + \tfrac{1}{12}\,\text{kr.}\,(D-\delta)]\,h$ (Mittenwalze $+ \tfrac{1}{12}$ Walze der Endstärkendifferenz);

$= [\text{kr.}\,\delta + \text{kr.}\,D + \text{kr.}\,(\delta + D)]\,\dfrac{h}{6}$ (am bequemsten; mittels Knecht).

11. Für des geraden Kegelstumpfes Mantelfläche, wenn s die Seite bedeutet, $M = s \times \text{umf.}\,d$ oder $s \times \text{umf.}\left(\dfrac{D+\delta}{2}\right).$

§. 8. Parabelpyramide und Parabelkegel (Paraboloid).

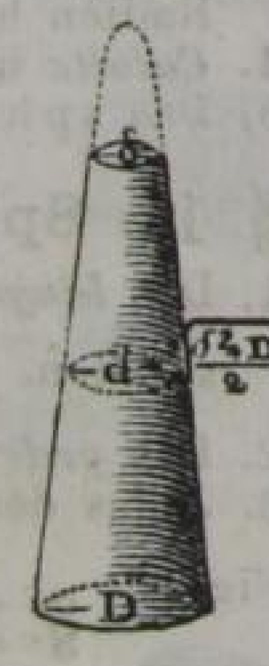
Buchstabenbedeutung wie §. 6. Fig. 81 u. 84, letztre mit entsprechend ausgebauchten Seiten gedacht.

α. Voll oder unabgewipfelt.

1. $D_u = D\sqrt{3/4} = 0{,}866\,D; \; D_m = D\sqrt{1/2} = 0{,}707\,D; \; D_o = \tfrac{1}{2}D;$ also
2. Richtpkt in der Obermitte; Richtpktshöhe $= \tfrac{3}{4}H$. 3. $V = \tfrac{1}{2}GH; = G_m H.$
4. Für den Parabelkegel insbesondere $V = \dfrac{\pi}{8}D^2 H; \; =$ halbe Grundwalze; $=$ Mittenwalze.
5. Des geraden Parabelkegels Mantel, wenn p der Parameter

$$M = \frac{2\pi}{3}\left[\sqrt{\frac{(2pH + p^2)^3}{p}} - p^2\right].$$

Fig. 86.



β. Parallel abgekürzt. Ausgebauchter Obelisk.

6. Ergänzungshöhe $h_{,} = \dfrac{\delta^2}{D^2 - \delta^2}\, h = \dfrac{\gamma}{G-\gamma}\, h.$
7. Ergänzte Höhe $H = \dfrac{D^2}{D^2 - \delta^2}\, h = \dfrac{G}{G-\gamma}\, h.$
8. In der Mitte $g = \dfrac{G+\gamma}{2}; \; d = \sqrt{\dfrac{D^2 - \delta^2}{2}}.$
9. $V = \dfrac{G+\gamma}{2}\, h; = gh,$ u. also 10. für den Parabelkegel speciell

$V = \dfrac{\pi}{8}(D^2 + \delta^2)\,h, \; = (\text{kr.}\,D + \text{kr.}\,\delta)\,\dfrac{h}{2} =$ Mittenwalze.

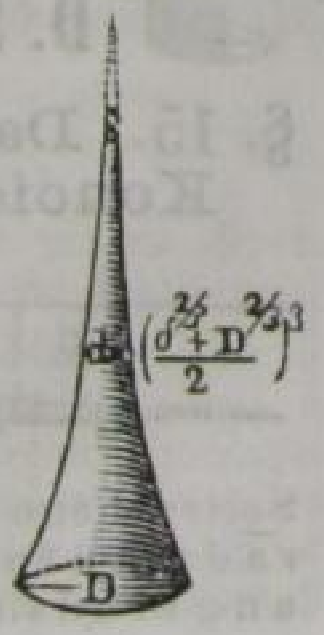
§. 9. Neil'sche Pyramide und Neil'scher Kegel. (Neiloid.)

Buchstabenbedeutung wie §. 6. Fig. 83 u. 84, letztere mit entsprechend eingebauchten Seiten gedacht.

α. Voll oder unabgewipfelt.

1. $D_u = 0{,}650\,D; \; D_m = 0{,}354\,D; \; D_o = \tfrac{1}{8}D; \; G_m = \tfrac{1}{8}G; \; G_o = \tfrac{1}{64}G.$
2. Richtpunktshöhe $= (1 - \sqrt[3]{1/4})\,H = 0{,}37004\,H.$
3. $V = \tfrac{1}{4}GH; \; = 2G_m H.$ — Für das Neiloid insbesondere
4. $V = \tfrac{1}{4}$ Grundwalze; oder $=$ doppelter Mittenwalze.

Fig. 87.



β. Parallel abgekürzt. Eingebauchter Obelisk.

5. Ergänzungshöhe $h_{,} = \dfrac{\sqrt[3]{\delta^2}}{\sqrt[3]{D^2} - \sqrt[3]{\delta^2}}\, h = \dfrac{\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{G} - \sqrt[3]{\gamma}}\, h.$

6. Ergänzte Höhe $H = \dfrac{\sqrt[3]{D^2}}{\sqrt[3]{D^2} - \sqrt[3]{\delta^2}}\, h.$

7. In der Mitte $g=\left(\frac{\sqrt[3]{G}+\sqrt[3]{\gamma}}{2}\right)^3; =\frac{G+\gamma+3\sqrt[3]{G\gamma}\left(\sqrt[3]{G}+\sqrt[3]{\gamma}\right)}{8}$;

$d=\left(\frac{\sqrt[3]{D^2}+\sqrt[3]{\delta^2}}{2}\right)^3$.

8. $V=\left[G+\gamma+\sqrt[3]{G\gamma}\left(\sqrt[3]{G}+\sqrt[3]{\gamma}\right)\right]\frac{h}{4}; =\left[G+g+\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{G}+\sqrt[3]{\gamma}\right)^3\right]\frac{h}{6}$.

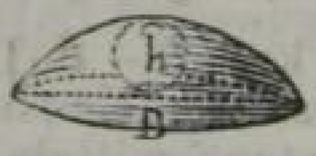
§. 10. Für alle drei Formen gemeinschaftlich. Fig. 81—87.

1. Simpson's Regel. (Abgewipfelt u. unabgewipf.) $V=\frac{(\gamma+4g+G)h}{6}$; speciell für Konoide $V=(\text{kr.}\,\delta+4\,\text{kr.}\,d+\text{kr.}\,D)\,\frac{h}{6}$ od. $=\frac{(\text{kr.}\,\delta+\text{kr.}\,2d+\text{kr.}\,D)\,h}{6}$.
2. Des Verfassers Richtpunktsregel für unabgewipfelte ... $V=G\times{}^2/_3$ Richthöhe (vgl. §. 6; gibt für die Neil'sche Form knapp $1\,^1/_3\,\%$ zu wenig).

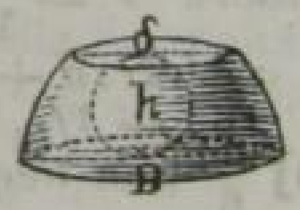
C. Kugel und Ellipsoid (Sphäre und Sphäroid).

Fig. 88.

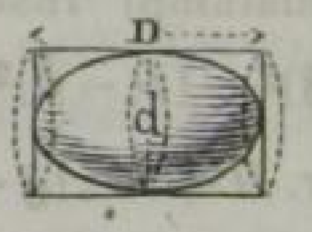
89.



90.



91.



92.

§. 11. Kugel-Inhalte. (r und d Radius und Durchmesser der Kugel.)

1. *Volle Kugel* (Fig. 88). $V={}^2/_3$ umschriebenen Cylinder oder $\frac{\pi}{6}d^3$.
2. *Calotte* (Abschnitt, Fig. 89). $V=\pi h^2(\tfrac{1}{2}D-{}^1/_3\,h)$ od. $=\frac{\text{kr.}\,D\,.\,h}{2}+\frac{\pi}{6}h^3$.
3. *Scheibe* (abgekürzte Calotte, Fig. 90). $V=\frac{\pi h}{24}(3D^2+3\delta^2+4h^2)$ oder $=\frac{\text{kr.}\,\delta+\text{kr.}\,D}{2}+\frac{\pi}{6}h^3$. Also 4. *Calotte* wie *Scheibe* gemeinsam $V=$ Entsprechendes Paraboloid $+$ Kugel um h.

§. 12. Kugel-Oberflächen. (r u. d Radius u. Durchmesser der Kugel.)

1. *Volle Kugel* (Fig. 88). $O=4$ grösste Kreisfl. $=4\pi r^2=\pi d^2=\text{kr.}\,2d$.
2. *Calotte* (Abschn., Fig. 89). Mantelfläche $M=\tfrac{1}{4}\pi(D^2+4h^2)$ od. kr. $D+$ kr. $(2h)$.
3. *Zone* (Mantelfläche der Scheibe, Fig. 90), wenn ϱ und R die obern u. untern Radien bedeuten, $M=\pi\sqrt{[(R+\varrho)^2+h^2]\,[(R-\varrho)^2+h^2]}$.
4. *Calotte* u. *Zone* gemeinsam. $M=2\pi r h; =\pi d h;=$ Kegelumf. $\times$ körpl. Höhe.
5. Das sphärische Dreieck. S. unten „Sphär. Trigonom." §§. 18—20.

§. 13. Sphäroid. d u. D kleinster u. grösster Durchm. (kl. und gr. Achse).

1. Das *längliche Ellipsoid* (Fig. 91) durch Umdrehung um die grosse Achse entstanden. $V=\frac{\pi}{6}d^2D$.
2. Das *gedrückte Ellipsoid* (Fig. 92) durch Rotation um die kl. Achse. $V=\frac{\pi}{6}dD^2$.
3. Jedes derselben. $V={}^2/_3$ des umschrieb. Cylinders (wie die Kugel).

Fig. 93.

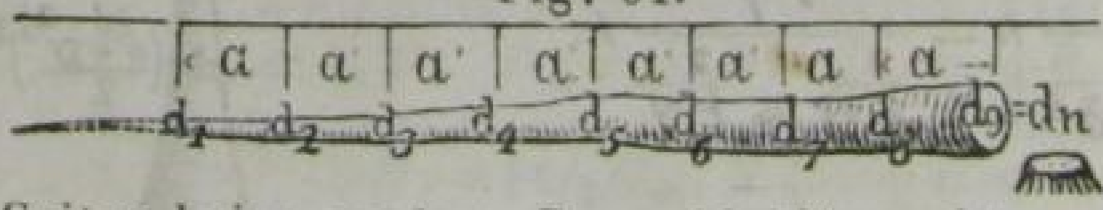
§. 14. Elliptischer Kegel. (Halbes längliches Ellipsoid.)

1. Mittenstärke $D_m=D\sqrt{3/4}=0{,}866\,D$.
2. Obermittenstärke $D_o=\tfrac{1}{4}D\sqrt{7}=0{,}661\,D$.
3. Richtpunkt bei $H\sqrt{3/4}$ oder $0{,}866\,H$.
4. Inhalt $V=\text{kr.}\,D\,.\,{}^2/_3\,H$ oder $={}^2/_3$ Grundwalze.

D. Simpson's u. Guldin's (erweit.) Körperregel (Fassraum).

§. 15. Das beliebig ein- und ausgebauchte Pyramidoid und Konoid (bei dem alle Querschnitte parallel zur G ihr ähnlich sind).

Fig. 94.



Bezeichnen g_1, g_2, g_3 die in gleich. Längenabständ. a gemessenen Stärkenfläch., od. d_1, d_2, d_3 deren masgebende Dimensionen (z. B. Durchmesser beim Konoid, Seiten beim quadrat. Pyramidoid), so ist nach Simpson (§. 10, 1.) für jede gerade Anzahl, z. B. 8, Sectionen (oder für jeden Körperraum zwischen zwei ungeradstelligen Grundflächen) beispielsweise für g_1 bis g_9,

D. Körperregel. E. Sphärische Trigonometrie.

$$1.\quad V = [(g_1 + g_9) + 2\,(g_3 + g_5 + g_7) + 4\,(g_2 + g_4 + g_6 + g_8)]\,\frac{a}{3},$$

d. h.: Erste u. letzte Stärkenfläche einfach, alle übrigen ungeradstelligen doppelt, alle geradstelligen vierfach; Sa. Summarum mal Drittel der Sectionslänge; um so genauer, je mehr die Sectionen paarweise einer der sub B aufgeführten Pyramidalformen entsprechen. Ein etwa übrig bleibendes Stück ist separat nach §. 10, 1. zu kubiren. — Z. B. Wenn der in acht 6fussige Sectionen zerlegte Theil $d_1 \ldots d_9$ des Stammes Fig. 94 die folgenden Stärken in Decimalzollen und aus dem Knechte dazu abgelesenen Stärkenflächen ergab:

$d_1 = 6{,}1''$	kr. $d_1 = 0{,}292\,\square'$
$d_2 = 7{,}9''$	kr. $d_2 = 0{,}490$
$d_3 = 9{,}8''$	kr. $d_3 = 0{,}754$
$d_4 = 12{,}3''$	kr. $d_4 = 1{,}188$
$d_5 = 15{,}1''$	kr. $d_5 = 1{,}791$
$d_6 = 16{,}8''$	kr. $d_6 = 2{,}217$
$d_7 = 18{,}0''$	kr. $d_7 = 2{,}545$
$d_8 = 20{,}3''$	kr. $d_8 = 3{,}24$
$d_9 = 22{,}5''$	kr. $d_9 = 3{,}98\,\square'$

so folgt nun weiter nach Formel 1:

$$\begin{array}{rrrr}
0{,}292 & 0{,}754 & 0{,}490 & \alpha.\ 4{,}272 \\
3{,}98 & 1{,}291 & 1{,}188 & \beta.\ 10{,}180 \\
\alpha.\ \overline{4{,}272} & 2{,}545 & 2{,}217 & \gamma.\ \underline{28{,}540} \\
 & \overline{5{,}090} & 3{,}24 & 42{,}992 \\
 & \beta.\ \overline{10{,}180}\,(2 & \overline{7{,}135} & \\
 & & \gamma.\ \overline{28{,}540}\,(4 &
\end{array}$$

$V\ 42{,}992 \times {}^6/_3 = 85{,}98$ Cubicfuss.

Bei umständlich zu berechnenden Querflächen. Wenn G eine derselben u. D eine ihrer masgebenden Dimensionen, u. $d_1, d_2 \ldots d_u$ die ihr homologen Dimensionen in den End- u. allen Sectionspunkten bedeuten, so rechnet man statt nach 1. vortheilhafter nach

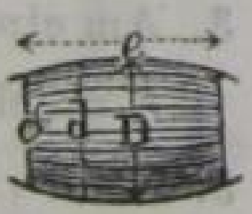
$$2.\quad V = \frac{G}{D^2}\,[(d_1^2 + d_u^2) + 2\,(d_3^2 + d_5^2 + \ldots) + 4\,(d_2^2 + d_4^2 + \ldots)]\,\frac{a}{3},$$

wo natürlich u wieder eine ungerade Zahl bedeutet.

§. 16. Beliebige Rückungs- und Rotationskörper.

Wenn eine ebene Fläche (Grundfläche) an einer Linie (Leitlinie) so fortrückt, dass sie zu letzterer in gleicher Neigung, z. B. immer rechtwinklig, bleibt, so bildet sie, wenn die Leitl. gerade: ein Prisma, wenn sie krumm: ein Prismoid (krumm verschobenes od. auch gebogenes Prisma), wenn sie kreisförmig: einen (prismat.) Ring. Die Drehung einer ebenen (gerad. od. krummen) Linie oder Fläche um eine in (der Richtung) ihrer Ebene liegende Achse erzeugt eine Rotationsfläche und einen Rotationskörper. Für alle diese Formen ist nach Guldin: $V =$ Erzeugungsfläche $\times$ (lothrecht auf allen ihren Lagen gemessenen) Weg ihres Schwerpunkts; und gleichermassen für die Rotationsfläche (vorausgesetzt, dass die Erzeugungslinie nur auf einer Seite der Umdrehungsachse liegt) $F =$ Länge der Erzeug. Linie $\times$ Länge ihres Schwerpunktswegs.

Fig. 95.



§. 17. Fassraum. D Mittenweite (Spundtiefe); δ Bodenweite; d Zwischenweite (zwischen Spund und Boden); l Länge.

1. Am sichersten nach Simpson's R.: $V = (\text{kr.}\,\delta + 4\,\text{kr.}\,d + \text{kr.}\,D)\,\frac{l}{6}$.
2. Wenn die Fasskurve kreisförmig: $V = (\text{kr.}\,\delta + 2\,\text{kr.}\,D)\,\frac{l}{3}$.
3. Als zwei abgestutzte Parabelkegel: $V = \text{kr.}\,d\,.\,l = (\text{kr.}\,\delta + \text{kr.}\,D)\,\frac{l}{2}$.
4. Nach praktischem Durchschnitt im Allgemeinen sehr nahe: $V = 0{,}907\,l\,.\,\text{kr.}\,D$. (Stampfer's Regel.)

E. Sphärische Trigonometrie.

§. 18. Allgemeine Gesetze.

Es bedeutet A, B, C die drei Winkel; a, b, c (in Gradmas) deren Gegenseiten; $\frac{A+B+C}{2} = S$; $\frac{a+b+c}{2} = s$; R der rechte Winkel od. $= 90^0$.

1. $a + b + c < 4R$. 2. $a + b > c$. 3. Für $a = b$ folgt $A = B$ u. für $a = b = c$ auch $A = B = C$. 4. $A + B + C > 2R$ und $< 6R$. 5. $A + B - C < 2R$.
6. Fläche $F = \left(\frac{A+B+C}{180} - 1\right) \times$ grösste Kreisfläche der Kugel.

§. 19. Das rechtwinkl. sphär. Dreieck (d. h. mit nur einem R; u. zwar $C = R$, also c die Hypotenuse, a u. b die Katheten).

Gegeben			
a und b.	7. $\cos.c = \cos.a\,.\,\cos.b$;	$\text{tg.}\,A = \text{tg.}\,a : \sin.b$;	$\text{tg.}\,B = \text{tg.}\,b : \sin.a$.
a „ c.	8. $\cos.b = \cos.c : \cos.a$;	$\sin.A = \sin.a : \sin.c$;	$\cos.B = \text{tg.}\,a : \text{tg.}\,c$.
a „ A.	9. $\sin.b = \text{tg.}\,a : \text{tg.}\,A$;	$\sin.c = \sin.a : \sin.A$;	$\sin.B = \cos.A : \cos.a$.
b „ A.	10. $\text{tg.}\,a = \sin.b\,.\,\text{tg.}\,A$;	$\text{tg.}\,c = \text{tg.}\,b : \cos.A$;	$\cos.B = \cos.b\,.\,\sin.A$.
c „ A.	11. $\sin.a = \sin.c\,.\,\sin.A$;	$\text{tg.}\,b = \text{tg.}\,c\,.\,\cos.A$;	$\cot.B = \cos.c\,.\,\text{tg.}\,A$.
A „ B.	12. $\cos.a = \cos.A : \sin.B$;	$\cos.b = \cos.B : \sin.A$;	$\cos.c = 1 : \text{tg.}A\,.\,\text{tg.}B$.

§. 20. Das allgemeine sphär. Dreieck. (Buchstaben: §. 18.)

Gegeben
$a, b, c.$ 13. $\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$; oder $\cos. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin. s \sin. (s-a)}{\sin. b \sin. c}}$;
oder $\sin. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin. (s-c) \sin. (s-b)}{\sin. b \sin. c}}$.

$a, b, A.$ 14. $\sin. B = \frac{\sin. b \sin A}{\sin. a}$; $\operatorname{tg}. \frac{C}{2} = \frac{\sin. \frac{1}{2}(a-b)}{\sin. \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{tg}. \frac{1}{2}(A-B)}$;
$\operatorname{tg}. \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg}. \frac{1}{2}(a-b) \sin. \frac{1}{2}(A+B)}{\sin. \frac{1}{2}(A-B)}$.

$a, b, C.$ 15. $\operatorname{tg}. \frac{A+B}{2} = \frac{\sin. \frac{1}{2}(a-b)}{\sin. \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{tg}. \frac{1}{2} C}$, u. $\operatorname{tg}. \frac{A-B}{2} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{tg}. \frac{1}{2} C}$;
$\cos. c = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b \cos. C$; oder mittelbar aus

$a, A, B.$ 16. $\sin. b = \frac{\sin. a \sin. B}{\sin. A}$; dann C u. c nach 14. $\Big|$ $\sin. c = \frac{\sin. a \sin. C}{\sin. A}$.

$a, B, C.$ 17. $\operatorname{tg}. \frac{b-c}{2} = \frac{\operatorname{tg}. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2}(B-C)}{\sin. \frac{1}{2}(B+C)}$, und $\operatorname{tg}. \frac{b+c}{2} = \frac{\operatorname{tg}. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2}(B-C)}{\cos. \frac{1}{2}(B+C)}$;
$\cos. A = \cos. a \sin. B \sin. C - \cos. B \cos. C$; $\sin. A = \frac{\sin. a \sin. B}{\sin. b}$.

$A, B, C.$ 18. $\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}$, od. $\cos. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos. (S-B) \cos. (S-C)}{\sin. B \sin. C}}$
oder $\sin. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos. S \cos. (S-A)}{\sin. B \sin. C}}$.

F. Holzmassen-Cubirung und -Schätzung.

(Vergl. des Verf. „Neue holzwirthschaftliche Tafeln" und dessen Abhandlung in der Allg. Forst- und Jagdzeitung, Suppl. II. S. 66 etc.

§. 21. Kubirung gefällter Hölzer. (Anwendung der §§. 1-10.)

Rundholzstücke (Stammsect., Klötzer, Blöcke) von der Länge l.
1. Am einfachsten und durchschnittlich richtig $V =$ *Walze der Mittenstärke* d, $=$ kr. $d \cdot l$ (bei eingebauchten und schon bei geraden Seiten etwas zu klein).
2. Am genauesten aus Ober-, Mitten- und Unterstärke δ, d und D:

$$V = (\text{kr.}\,\delta + 4\,\text{kr.}\,d + \text{kr.}\,D)\,\frac{l}{6} = (\text{kr.}\,\delta + \text{kr.}\,2d + \text{kr.}\,D)\,\frac{l}{6}.$$

Entwipfelte Stämme. d die Stärke in der Hauptmitte, o und u in der Ober- u. Untermitte, δ u. D an den Enden; l die Länge.
3. Am einfachsten (u. bei nicht zu schwacher Entwipfelung durchschnittl. richtig) $V =$ Mittenwalze $= (\text{kr.}\,d)l$ — 4. Gewöhnlich richtiger $V = (\text{kr.}\,o + \text{kr.}\,u)\,\frac{l}{2}$.
5. Noch richtiger $[(\text{kr.}\,\delta + \text{kr.}\,D) + 2\,\text{kr.}\,d + 4\,(\text{kr.}\,o + \text{kr.}\,u)]\,\frac{l}{12}$.
6. Am genauesten durch Theilung in kurze Sectionen nach Simpson's R. §. 15, 1. Bei nicht eingebauchten Sectionen können letztere auch nach 1, d. h. nach ihren Mittenstärken als Walzen berechnet werden.

Unentwipfelte Stämme. Nach 3.; besser nach 4.; noch bess. n. 5. od. 6. Sehr annähernd auch nach §. 10, 2. in folgender Modification (s. Fig. 102):
7. Miss die Grundstärke d bei m (am besten $= 4$) Fuss über dem Abschnitte; suche dazu den Richtpunkt (Punkt der halben Grundst.), schiebe diesen um die halbe Messpunktshöhe, also um $\frac{1}{2}m$ ($= 2'$) hinauf, und setze *Stamminhalt* $=$ kr. $d \times \frac{2}{3}$ (der corrig.) *Richthöhe.* — Bei sehr hochgehendem Wurzelanlaufe lieber $m = 6'$, Correct. $= 3'$. — Die Regel kubirt das (unter dem Messpunkte liegende) Unterstück als Walze. Wenn also dessen Mittenstärke D erheblich grösser als die Messpunktsstärke d, so nehme man den Zusatz $\frac{1}{2}m$ etwas reichlich

$$\left(\text{für sehr genaue Zwecke} = \frac{m}{2} + \frac{10\,(D-d)}{d} \cdot \frac{m}{3}\right).$$

Kernscheite (mit sectorähnlicher Grundfl.), wenn b die Bogen- od. Rinden- u. r die mittlere Radial- od. Spaltseite, 8. $V = \frac{br}{2} \times$ *Länge.*

Splintscheite (mit segmentähnlicher Grundfläche), wenn s die Spaltseite (Sehne des Segments), h die grösste Höhe oder Dicke, l die Länge,
9 $V = \frac{2}{3}\,shl$. — Genauer (namentlich wenn der Querschnitt von der Form des Parabelsegments zu sehr abweicht) mit Beachtung von γ S. 63.

§. 22. Vorschule zur Holzmassenschätzung.

Forstl. Haubarkeitsalter (d. i. für den grössten jährl. Massenertrag) nach deutsch. Durchschnitte: Birk. 40-60 J.; Lärch. u. Erl. 50-70; Kief. 60-80; Ficht., Ahorn, Esch., Ulm. 70-100; Tann. 80-120; Bu. 80-140; Eich. 100-200. Die niedrige Zahl für Verhältnisse, welche die Culmination des Zuwachses beschleunigen (warm, trocken, flachgrundig, gedrängter Stand, Stockausschlag); die höhere

F. Holzmassen-Cubirung und -Schätzung.

fürs Gegentheil (kühl, frisch, tiefgrundig, allmählige Lichterstellung). Für kalte Hochlagen und das nördlichere Europa wohl ums Viertel bis Halbe höher. Im Mittel also für Deutschland bei Bi. 50, Lä , Erl. 60, Ki. 70, Ficht. etc. 80, Ta. 100, Bu. 120, Ei. 150.

Altersklassen. Wenn a das forstl. Haubarkeitsalter, so heisse: $\frac{1}{4}a$ „Jungholz"; $\frac{1}{2}a$ „Mittelholz"; a „Altholz"; $1\frac{1}{2}a$ „Ueberaltholz"; $2a$ „Ganz alt. Holz".

Formklassen. „Mittelformig" jene Formirung oder Wuchsart, welche zwischen dem im mässigen Schlusse erzogenen normalen Mittel- und Altholze zwischen inne steht u. somit den ältern Mittel- od. angehend haubaren Beständen entspricht; im Schafte daran zu erkennen, dass der Richtpunkt (§. 6) ziemlich mitten zwischen der Haupt- u. Obermitte liegt. „Sehr abformig" in Bezug auf den Stamm: ganz kegelförmig und spitz (Richtpunkt in der Hauptmitte); in Bezug auf die Krone: sehr hoch (bei der Obermitte) angesetzt u. dünn. „Sehr vollformig" beim Stamme: ganz parabolisch, „aushaltend" (Richtpunkt in der Obermitte); in Bezug auf die Krone: voll, u. tiefangesetzt (etwa bei d. Untermitte).

Formzahl: Der Decimalbruch, der durch Multiplikation mit des Stammes Totalhöhe letztere auf die Walzenhöhe reducirt. Wenn G die in bestimmter Höhe über dem Boden gemessene Stammgrundfläche des Baumes oder Bestandes H dessen Scheitelhöhe, f die Stamm- und F die Baum-Formzahl bedeutet, und Inhalte wie Höhen vom Abhiebspunkte (am besten = Wurzelhals) an gerechnet werden, so gibt $H.f$ die Stammwalzenhöhe, und $H.F$ die Baumwalzenhöhe. Aus diesen reducirten Höhen folgt

1. *Stamminhalt* S (bis zum Wipfel) $= G.Hf$;
2. *Bauminhalt* B (Stamm, Aeste u. Zweige) $= G.HF$;
3. *Astmasse* A allein $= G.H(F-f)$ od. durch die Proport. $f:(F-f) = S:A$.

Fig. 96.

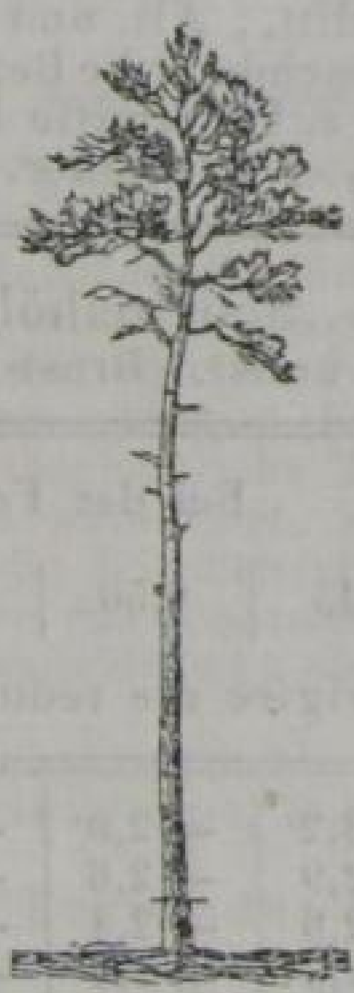


Fig. 97.

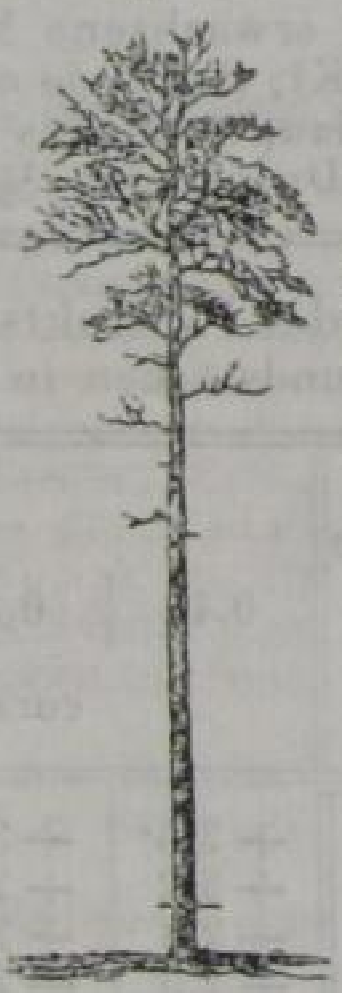
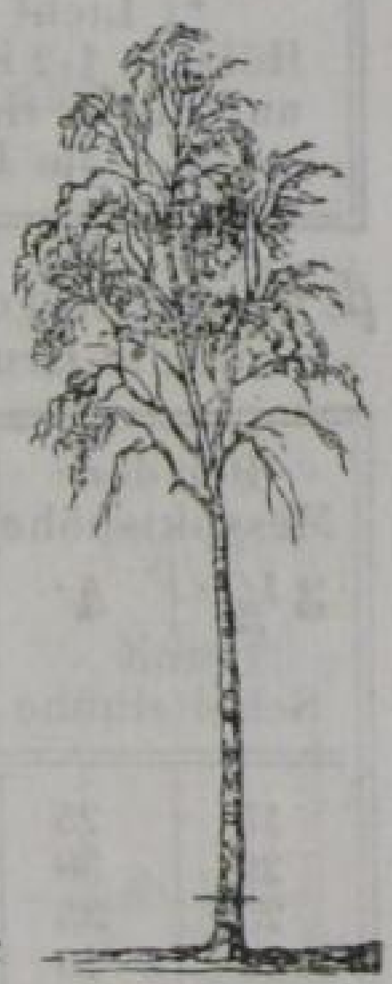


Fig. 98.



Werden diese f u. F auf die in konstant. Brusthöhe gemess. Grundflächen bezogen, so sind sie unächte Formz., weil auch von der Scheitelhöhe abhängig und darum nicht einschätzbar. Auf die stets in $^1/_{20}$ (od. $^1/_n$) H gemess. Grundfl. bezogen, werden sie nur durch die Form bedingt, also ächte Formz.; und einschätzbar, um so mehr, als unverkennbar die Form eine Funktion von Standort, Alter u. Erziehungsweise ist. – Z. B. Fig. 96 ist das naturgetreue Bild eines 70j. Kiefernbestandes auf frisch. mildem Standorte; augenscheinl. aus zieml. geschloss. Erziehung; also eines „in mässig. Schlusse erzog. angehend. Altholzes"; also nach folg. §. seine (ächte) Stammformz. im Procentsatz 46; Baumformz. 55. (Es war genau $f=46$; $F=54$.) — Fig. 97. 70j. Erl. auf gleich. Standorte, also: „in mäss. Schl. erzog. Erl.Altholz"; nach folg. §. zu schätzen $f=52$, $F=62$. (Genau war $f=53$, $F=61$. — Fig. 98. 60jähr. Birken auf gleich. Standorte, offenb. etwas licht erzogenes Birken-Althlz; somit nach §. 23 zu schätzen $f=43$, $F=55$. (Genau ist $f=43$, $F=56$.) — Als Wuchsformen der Kiefern repräsentiren Fig. 99 licht erzog. Mittelholz; Fig. 100 desgleich. Altholz; Fig. 101 ganz licht erwachsenes Altholz; so dass, mit Rücksicht auf den untern Kopf der Tab. §. 23, ihre F zu schätzen wären nach der Reihe als 56; 60; 65.

Fig. 99.

Fig. 100.

Fig. 101.

§. 23. Holzmassenschätzung nach ächten Formzahlen.

Mit Rücksicht auf Voriges u. auf Grund seiner bisher. Beobacht. im Walde u. in d. Literatur empfiehlt d. V. folg. Hülfstafel z. prakt. Benutzung (u. Sachverständigen zur Vervollkommnung ihres Systemes wie ihrer Erfahrungs-Durchschnittszahlen).

F. Holzmassen-Cubirung und -Schätzung.

α. Formzahl-Erfahrungstafel, zunächst für die bei $^1/_{20}$ Scheitelhöhe gemessenen Grundstärken.

abf. abformig; vlf. vollf.; Jng. Jung-, Mtt. Mittel-, Alt. Alt-, Uebr. Ueberalthölzer.

	Stammformzahlen f.					Baumformzahlen.				
Schätzungs-Klassen.	s. abf. I.	abf. II.	mittf. III.	vollf. IV.	s. vlf. V.	s. abf. I.	abf. II.	mittf. III.	vollf. IV.	s. vlf. V.
Erfahrungs-Klassen.	In mässig. Schlusse erzogene *) Jng.	Mtt.	Alt.	Uebr.		In mässig. Schlusse erzogene *) Jng.	Mtt.	Alt.	Uebr.	
Lärchen	0,39	0,42	0,44	0,46	0,49	0,44	0,48	0,51	0,54	0,59
Fichten	42	44	46	49	52	46	50	54	58	64
Tannen	43	46	48	51	54	47	51	55	59	65
Kiefern	41	43	45	48	52	46	50	54	59	65
Weiden, Birken	39	41	43	45	48	44	48	52	56	60
Ulm (WeisErl.?)	41	43	45	48	51	47	51	55	59	64
Ahorn, Esch. (?)	41	44	46	49	52	50	54	58	62	68
Schwarz - Erlen	42	46	49	52	54	51	55	59	63	69
Buchen	41	44	47	50	53	53	57	61	65	70
Eichen	40	44	47	50	53	53	58	62	66	72
	Minimum $^1/_{10}$ weniger als I. Maximum $^1/_{10}$ mehr als V.					Minimum wenig unter I. Maximum $^1/_5$ mehr als V.				

*) Licht erwachsene Mitt., Alt. und Uebr. Hölzer: 1-2 Kl. tiefer, je nachdem die Beastung nur bis z Haupt- od. bis z. Untermitte herab reicht. Im Druck erw. ½-1 Kl. höher.

*) Licht erwachs. ½-1 Klasse höher; gedrängt erwachsene ½-1 Kl. tiefer.

β. Correction des Produkts „Scheitelhöh. × Formzahl" (= „Walzenhöhe"), wenn die Grundstärken in konst. (Brust- od. Hals-) Höhe gemessen werden.

Bei der Messpktshöhe 3½′	4′ und Scheitelhöhe	Bei der Formzahl 0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	Bei der Msspktshöh. 4½′	5′ und Scheitelhöhe
		corrigire die reducirte Höhe um							
15	25	+3,5′	+3,2′	+2,9′	+2,6′	+2,3′	+2,0′	35	45
20	30	+3,2	+2,9	+2,6	+2,4	+2,1	+1,8	40	50
25	35	+2,8	+2,6	+2,4	+2,2	+1,9	+1,6	45	55
30	40	+2,5	+2,3	+2,1	+1,9	+1,7	+1,5	50	60
35	45	+2,2	+2,0	+1,8	+1,7	+1,5	+1,3	55	65
40	50	+1,9	+1,8	+1,6	+1,5	+1,3	+1,1	60	70
45	55	+1,6	+1,5	+1,4	+1,2	+1,1	+1,0	65	75
50	60	+1,3	+1,2	+1,1	+1,0	+0,9	+0,8	70	80
55	65	+1,0	+0,9	+0,8	+0,7	+0,6	+0,6	75	85
60	70	+0,6	+0,6	+0,5	+0,5	+0,4	+0,4	80	90
65	75	+0,3	+0,3	+0,3	+0,2	+0,2	+0,2	85	95
70	80	0	0	0	0	0	0	90	100
75	85	−0,3′	−0,3′	−0,3′	−0,2′	−0,2′	−0,2′	95	105
80	90	−0,6	−0,6	−0,5	−0,5	−0,4	−0,4	100	110
85	95	−1,0	−0,9	−0,8	−0,7	−0,6	−0,6	105	115
90	100	−1,3	−1,2	−1,1	−1,0	−0,9	−0,8	110	120
95	105	−1,6	−1,5	−1,4	−1,2	−1,1	−1,0	115	125
100	110	−1,9	−1,8	−1,6	−1,5	−1,3	−1,1	120	130
105	115	−2,2	−2,0	−1,8	−1,7	−1,5	−1,3	125	135
110	120	−2,5	−2,3	−2,1	−1,9	−1,7	−1,5	130	140
115	125	−2,8	−2,6	−2,4	−2,2	−1,9	−1,6	135	145
120	130	−3,2	−2,9	−2,6	−2,4	−2,1	−1,8	140	150
125	135	−3,5	−3,2	−2,9	−2,6	−2,3	−2,0	145	155
130	140	−3,8	−3,5	−3,2	−2,8	−2,5	−2,2	150	160

Wenn das Unterstück (vom Mess- bis Abhiebspunkte) cylindrisch, d. h. ohne Stärkenzunahme, so nimm obige Correctionen nur zur Hälfte; bei ungewöhnlichen Verstärkungen (Wurzelanlauf) aber um die Hälfte grösser. Man meide so viel als möglich jene Messungsarten, welche die starken Correctionen oder die obern und untern Grenzen dieser Tafel treffen.

F. Holzmassen-Cubirung und -Schätzung.

Zu α. 1. Beispiel. Um also angehend haubare Fichten (III.; $f=0{,}46$, $F=0{,}54$) von 90′ Scheitelhöhe für deren bei $^9/_2$′ (Messpunktshöhe) genommene Grundstärken auf Walzen zu reduciren, hat man im Mittel als deren Stammwalzenhöhe $=0{,}46 \,.\, 90=41{,}4$′, und Baumwalzenhöhe $=0{,}54 \,.\, 90=48{,}6$. Besteht die betreffende Stammklasse aus 100 Stück à 20 Duodeczoll Grundstärke, also laut Knt's Kreistafel 218 □′ Grundfläche, so hat sie an Stammmasse (vom Abhiebspunkte bis Wipfel) $218 \,.\, 41{,}4=9025$ Cubicfuss; an Stamm- u. Astmasse $218 \,.\, 48{,}6=10585$ C′. — 2. Beisp. 70′ hohe circa 100 J. alte Kiefernorte (Ueberalthölzer), wenn deren Stammgrund bei $^7/_2$′ Höhe gemessen wird, haben (nahe Klasse V.; $f=0{,}50$) für je 1 □′ Stammgrund durchschnittlich $70 \,.\, 0{,}50=35$ C′ Stamminhalt; und das Verhältniss des Stammholzes zum Astholze wäre circa (da $f=50$, $F=57$ zu setzen) wie $50:7$; also letzteres 14% des erstern.

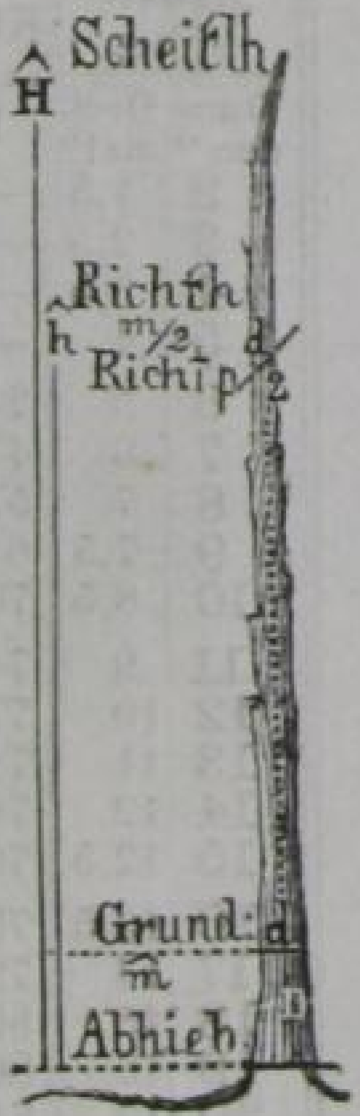
Zu β. Ein Forstmann beauftragt seinen Gehülfen mit dem Auskluppiren einer Stammklasse (oder Bestandesprobe) in einem bei mässigem Schlusse erzogenen Buchen-Altholze. Der Beauftragte bringt als Resultat: 142□′ Stammgrund (Kreisflächensumme) in 4′ Messpunktshöhe; dazu 60′ durchschnittliche Scheitelhöhe. Also leitet Jener für den oberird. Gesammtinhalt (nach α. $F= 0{,}63$) die Walzenhöhe $=0{,}63 \,.\, 70=44{,}1$ mit der Correction $+\,0{,}8$ aus β. (unter $F=0{,}65$) ab, u. daraus den Inhalt $=152 \,.\, 44{,}9$ C′ oder nahe $=152 \,.\, 45 = 6840$ C′ $=68{,}4$ Massenklaftern.

Wo, wie z. B. zu dem Zwecke der Etatsermittelung ganzer Bestandskomplexe u. überhaupt zur Betriebsregulirung eine durchschnittliche Genauigkeit hinreicht, da wird man sich auch der nähern Einschätzung der Formklassen ganz entschlagen, u. immer alle Mittelhölzer nach Klasse II-III, alle Althölzer nach III-IV, alle Ueberalthölzer nach IV-V kubiren, indem darauf zu rechnen, dass die etwaigen individuellen Bestandsabweichungen sich gegenseitig genügend ausgleichen werden.

§. 24. Holzmassenschätzung nach dem Richtpunkte.

(Auf Wissenschaft und Erfahrung gestützt, wiederholt der Verfasser seine mehrfach angegriffene Behauptung, dass für die einzelne Stamm-, wie für die Bestandes-Schätzung zur Zeit diese Methode die einfachste u. sicherste u. darum auch die empfehlenswertheste ist für Alle, welche in der leichten Kunst, am stehenden Stamme dessen Richtpunkt mit blossem Auge anzusprechen, eine genügende Stufe zu erreichen vermögen. Wegen Erlernung dieser Kunst ohne Fällungen: siehe des Verf. „Holzwirthschaftliche Tafeln, Erläut. zu Taf. VI.“)

Fig. 102.



Bedeutet, vom Abhiebspunkte an gerechnet, m die Messpunktshöhe der Grundstärke d, h die Richthöhe, d. h. die um ½m erhöhte Höhe des Punktes, wo des Stammes Stärke dem Augenschein nach unter die halbe Grundstärke zu sinken beginnt, so hat man

1. Die Stammmasse S vom Abhiebspunkte bis zum Scheitel $=(\text{kr.}\,d)\ ^2/_3\,h$. — Daraus die Astmasse A nach Taf. α des vorigen §. mittels $f:(F-f)=S:A$.

2. Ganze Stammklassen und Bestände: Entweder aus „Geschätzter Modellbauminhalt × Stammzahl“, oder „Summarische Stammgrundfläche × $^2/_3$ mittlere Richthöhe“. Doch dürfen im letztern Falle nicht zu grosse Höhenunterschiede darin vorkommen.

(Wenn des Unterstückes Mittenstärke D erheblich grösser als d, so ist zu Zwecken genauester Kubirung die Richthöhe noch um soviele Drittel der Messpunktshöhe zu vermehren, als die Stärke d in der 10fachen Differenz $D-d$ enthalten ist. Z. B. bei 4′ Messpunktshöhe, 9″ Grundstärke u. 11″ Unterstücks-Mittenstärke, wo also die 10fache Differ. (= 20) durch 9 dividirt reichlich 2 ergiebt, wäre die Richthöhe noch um reichl. $^4/_3 \,.\, 2$, also um 3′ zu erhöhen. — In der Regel ist jedoch von dieser Correction abzusehen.)

Beispiele. 1. Stämme, welche bei 4′ Höhe gemessen, 9 Dec.″ Stärke u. ihren Richtpunkt (4½″) bei 40′, also um 2′ hinaufgeschoben, 42′ Richthöhe haben, besitzen durchschnittlich an Masse laut Dec.-D-Spalte des Knechts $0{,}636 \,.\, ^{84}/_3=17{,}8$ C′. — 2. Herr Prof. Dr. Baur kluppirte bei Weisswasser in Böhmen 19 Stämme 105jähr. Kiefern in 4′ Höhe zu 9,87□′ Stammgrund. Die Stämme hatten ihren Richtpunkt im Mittel bei 42′, also Richthöhe 44′, also Stamminhalt $=9{,}87 \,.\, ^{88}/_3 =290$ C′; Astmasse laut Taf. α des vorig. §. etwa wie $S:A=50:(61-50)=50:11$, also circa 64 C′. — Die Einzelkubirung der gefällten Stämme ergab nach dem speciellen Sectionsverfahren 289,8 C′; nach der Richtpunktsregel 301 C′ od. $3^2/_3$% mehr (wahrscheinlich wegen zu geringer Berücksichtigung der bei alten Kiefern die Grundstärken leicht zu gross ergebenden Borke); die bair. Massentafeln hingegen ergaben für diese Bestandsprobe an Stämmen u. Aesten nur 281½ C′, erreichten also mit ihrer Angabe für die Gesammtmasse noch nicht einmal das blosse Stammholz. (Vergl. Allgem. Forst- u. Jagdzeitung. Suppl. II. S. 67-72.)

F. Holzmassen-Cubirung und -Schätzung.

§. 25. Sortengehalt der Holzmassen (excl. Zweig- u. Wurzelholz).

Klf. Klafter v. gewöhnl. Einschlage (6 . 6¼ . 3 C′ Raum); Zw. Zweigig (unter 1″ dick); Rs. Reisig (bis ¼′ d.); Kn. Knüppelholz (¼ - ½′ d.); Klb. Klobenholz (½′ d. u. mehr).

a) Je 100 C′ oberirdische Bestandsmasse (davon kein Nutzholz besonders ausgehalten wird) geben von

Durchmesser in Brusthöhe.		Laubhölzern mit Aesten.					Kiefern mit Aesten.				Uebr. Nadelh. ohn. Aest.			
		Klb.	Kn.	Rs.	Eich.	Uebr. Laubh.	Klb.	Kn.	Rs.		Klb.	Kn.	Rs.	
Duod.″	Dec.″	Cubicfuss.			Klaftern.		Cubicfuss.			Klf.	Cubicfuss.			Klf.
2	1,5	—	—	100	2,10	1,85	—	—	100	1,85	—	—	100	1,71
3	2,5	—	18	82	2,02	1,78	—	18	82	1,79	—	18	82	1,65
4	3,5	—	65	35	1,82	1,59	—	65	35	1,59	—	65	35	1,49
5	4	—	85	15	1,74	1,53	—	86	14	1,53	—	86	14	1,42
6	5	30	60	10	1,61	1,47	30	63	7	1,43	33	62	5	1,35
7	6	54	40	6	1,50	1,41	47	48	5	1,37	48	48	4	1,33
8	7	64	30	6	1,47	1,39	63	33	4	1,35	65	33	2	1,30
9	7,5	71	23	6	1,44	1,38	76	20	4	1,32	79	20	1	1,28
10	8,5	76	18	6	1,42	1,37	82	14	4	1,31	85	14	1	1,27
11	9	80	14	6	1,41	1,36	85	11	4	1,30	92	7	1	1,26
12	10	82	12	6	1,40	1,36	87	9	4	1,30	95	4	1	1,26
13	11	83	11	6	1,40	1,36	88	8	4	1,29	95	4	1	1,25
14	12	83	11	6	1,40	1,36	89	7	4	1,29	96	3	1	1,25
15	12,5	84	10	6	1,39	1,36	89	7	4	1,29	97	3	—	1,25
16	13,5	84	10	6	1,39	1,36	89	7	4	1,29	97	3	—	1,25
17	14	84	10	6	1,39	1,36	89	7	4	1,29	98	2	—	1,25
18	15	85	10	5	1,38	1,35	89	7	4	1,29	98	2	—	1,25
19	16	85	10	5	1,38	1,35	89	7	4	1,29	98	2	—	1,25
20 und mehr.	17	86	10	4	1,38	1,35	89	7	4	1,29	99	1	—	1,25

b) Je 100 Klaftern oberirdischer Bestandsmasse (davon kein Nutzholz ausgehalten wird) enthalten bei

Durchm. in Brusthöhe.		Eichen m. Aesten.				Uebrige Laubhölzer m. Aesten.				Kiefern mit Aesten.				Uebr. Nadelhölz. ohne Aeste.			
		Kb.	Kn.	Rs.	1 Klf. hat	Kb	Kn.	Rs.	1 Klf. hat	Kb	Kn	Rs.	1 Klf. hat	Kb	Kn	Rs.	1 Klf. hat
Duodec.″	Decimal″	Klaftern.			C′	Klaftern.			C′	Klaftern.			C′	Klaftern.			C′
2	1,5	—	—	100	47,7	—	—	100	54,0	—	—	100	54,0	—	—	100	58,5
3	2,5	—	15	85	49,4	—	15	85	56,1	—	15	85	56,0	—	15	85	60,6
4	3,5	—	60	40	54,6	—	61	39	62,8	—	59	41	62,9	—	60	40	67,1
5	4	—	82	18	57,6	—	82	18	65,4	—	83	17	65,4	—	83	17	70,4
6	5	24	63	13	62,1	27	60	13	68,2	26	65	9	69,9	31	63	6	74,1
7	6	47	44	9	66,7	50	42	8	70,9	42	52	6	73,0	45	50	5	75,2
8	7	57	34	9	68,1	60	32	8	71,9	58	36	6	74,1	62	35	3	76,9
9	7,5	64	27	9	69,4	67	25	8	72,5	72	22	6	75,8	77	21	2	78,1
10	8,5	70	21	9	70,4	73	19	8	73,0	78	16	6	76,3	84	15	1	78,7
11	9	74	17	9	70,9	77	15	8	73,5	82	12	6	76,9	91	8	1	79,4
12	10	77	14	9	71,4	79	13	8	73,5	84	10	6	76,9	94	5	1	79,4
13	11	78	13	9	71,4	80	12	8	73,5	85	9	6	77,4	94	5	1	79,4
14	12	78	13	9	71,4	80	12	8	73,5	86	8	6	77,4	95	4	1	79,9
15	12,5	79	12	9	71,9	81	11	8	73,5	86	8	6	77,4	96	3	1	79,9
16	13,5	79	12	9	71,9	81	11	8	73,5	86	8	6	77,4	97	3	—	79,9
17	14	79	12	9	71,9	81	11	8	73,5	86	8	6	77,4	97	3	—	79,9
18	15	80	12	8	72,5	82	11	7	74,1	86	8	6	77,4	98	2	—	79,9
19	16	80	12	8	72,5	82	11	7	74,1	86	8	6	77,4	98	2	—	79,9
20 und mehr	17	81	12	7	72,5	83	11	6	74,1	86	8	6	77,4	99	1	—	79,9

Beisp. Eine Buchenstammklasse v. 16 Duod.″ Grundstärke u. 1000 C′ Stamm- u. Astholz besteht nach *a*) aus 840 C′ Klb., 100 C′ Kn. u. 60 C′ Rs., und gibt aufgeklaftert zusammen 13,6 Klf. (als Eiche 13,9 Klf.). Sortirt aufgeklaftert geben diese nach *b*) 0,81 . 13,6 Klf. Klb.; 0,11 . 13,6 Klf. Kn. u. 0,08 . 13,6 Kl. Rs. und 73,5 C′ durchschnittliche Masse pro Klf.

Inhalt.

NOTIZBUCH

ZU

PROFESSOR PRESSLER'S

BRIEFTASCHE MIT INGENIEUR-MESSKNECHT.

18.........

Gebrauchsanweisung auf dem hintern Umschlage.

Adresse des Eigenthümers.

....

....

Geogr. Breite von ....

Verlag von Woldemar Türk in Dresden.

Dies Notizbuch ist auch separat (einzeln zu 5 Ngr., 4 Stück zu ½ Thlr.) durch alle Buchhandlungen zu beziehen.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Januar. 31 Tage.

Datum.		6. Ersch. Christi. 13. Griech. russ. Neujahr. 17. Antonius. 20. Fabian Sebastian. 25. Pauli Bekehrung.
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	

Geograph. Breite:		46^0	47^0	48^0	49^0	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0
Am 1. Januar ⊙	Aufg.	7 U. 50′	7 U. 54′	7 U. 59′	8 U. 3′	8 U. 8′	8 U. 13′	8 U. 19′	8 U. 24′	Mittl.
	Untg.	4 ,, 17′	4 ,, 13′	4 ,, 8′	4 ,, 4′	3 ,, 59′	3 ,, 54′	3 ,, 48′	3 ,, 43′	Zeit

Geograph. Breite:		46^0	47^0	48^0	49^0	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0	
Am 15. Januar	⊙ Aufg.	7 U. 46′	7 U. 50′	7 U. 54′	7 U. 58′	8 U. 2′	8 U. 6′	8 U. 11′	8 U. 16′		Mittl.
	⊙ Untg.	4 ,, 33′	4 ,, 29′	4 ,, 25′	4 ,, 21′	4 ,, 17′	4 ,, 13′	4 ,, 8′	4 ,, 3′		Zeit.

Februar. Tage.

Datum.		2. Mar. Reinigung und Lichtmess. 22 Petri Stuhlfeier. 24. Matthias. . Fastnacht?		
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			

Geograph. Breite:		46^0	47^0	48^0	49^0	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0
Am 1. Februar	☉ Aufg.	7 U. 30′	7 U. 33′	7 U. 36′	7 U. 39′	7 U. 42′	7 U. 45′	7 U. 49′	7 U. 53′	Mitt
	Untg.	4 ,, 58′	4 ,, 55′	4 ,, 52′	4 ,, 49′	4 ,, 46′	4 ,, 43′	4 ,, 39′	4 ,, 35′	Zeit

Februar.

Geograph. Breite: 46° 47° 48° 49° 50° 51° 52° 53° 54°

Am 5. Febr.	⊙	Aufg.	7 U. 10′	7 U. 12′	7 U. 14′	7 U. 17′	7 U. 19′	7 U. 21′	7 U. 24′	7 U. 26′
		Untg.	5 ,, 19′	5 ,, 17′	5 ,, 15′	5 ,, 12′	5 ,, 10′	5 ,, 8′	5 ,, 5′	5 ,, 3′

Mittl. Zeit.

März. 31 Tage.

Datum.		12. Gregor. 17. Gertraud. 19. Josephus. 21. Frühlings Anfang. 25. Mar. Verk. 29. Pet. Paul. . Fastn.? . Palm.? . Ostern?
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	

Geograph. Breite:		46^0	47^0	48^0	49^0	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0
Am 1. März ⊙	Aufg.	6 U. 45′	6 U. 46′	6 U. 48′	6 U. 49′	6 U. 50′	6 U. 51′	6 U. 53′	6 U. 54′	Mitt
	Untg.	5 ,, 40′	5 ,, 39′	5 ,, 37′	5 ,, 36′	5 ,, 35′	5 ,, 34′	5 ,, 32′	5 ,, 31′	Zeit

Geograph. Breite:	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
Am 15. März ☉ Aufg.	6 U. 18′	6 U. 18′	6 U. 19′	6 U. 19′	6 U. 19′	6 U. 20′	6 U. 20′	6 U. 20′		Mittl.
Untg.	6 ,, 0′	6 ,, 0′	5 ,, 59′	5 ,, 59′	5 ,, 59′	5 ,, 58′	5 ,, 58′	5 ,, 58′		Zeit.

April. 30 Tage.

Datum.		23. Georgius. 25. Markus. . Palmarum? . Ostern?		
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	So.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			

Geograph. Breite:		46^0	47^0	48^0	49^0	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0
Am 1. April ☉	Aufg.	5 U. 45′	5 U. 44′	5 U. 43′	5 U. 43′	5 U. 42′	5 U. 41′	5 U. 40′	5 U. 39′	Mittl.
	Untg.	6 ,, 23′	6 ,, 24′	6 ,, 25′	6 ,, 25′	6 ,, 26′	6 ,, 27′	6 ,, 28′	6 ,, 29′	Zeit.

Geograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
Am 15. April	⊙ Aufg. Untg.	5 U. 18′ 6 ,, 42′	5 U. 17′ 6 ,, 43′	5 U. 15′ 6 ,, 45′	5 U. 14′ 6 ,, 46′	5 U. 12′ 6 ,, 48′	5 U. 10′ 6 ,, 50′	5 U. 8′ 6 ,, 52′	5 U. 6′ 6 ,, 54′		Mittl. Zeit.

Mai. 31 Tage.

Datum.		2. ÷ Erfindung. 12. Pancratius. 13. Servatius. 25. Urbanus. . Himmelfahrt? . Pfingsten?		
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	So.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			

Geograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°
Am 1. Mai ⊙	Aufg.	4 U. 51′	4 U. 49′	4 U. 46′	4 U. 43′	4 U. 41′	4 U. 38′	4 U. 35′	4 U. 32′	Mittl.
	Untg.	7 „ 3′	7 „ 5′	7 „ 8′	7 „ 11′	7 „ 13′	7 „ 16′	7 „ 19′	7 „ 22′	Zeit.

Geograph. Breite:			46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
Am 15. Mai	⊙	Aufg.	4 U. 31′	4 U. 28′	4 U. 25′	4 U. 21′	4 U. 18′	4 U. 14′	4 U. 11′	4 U. 6′	Mittl.
		Untg.	7 „ 21′	7 „ 24′	7 „ 27′	7 „ 31′	7 „ 34′	7 „ 38′	7 „ 42′	7 „ 46′	Zeit.

Juni. 30 Tage.

Datum.		8. Medardus. 15. Vitus. 21. Sommers Anfang. 24. Joh. Täuf. 27. Siebenschläfer. . Himmelfahrt? . Pfingsten?		
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	So.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			

Geograph. Breite:		46⁰	47⁰	48⁰	49⁰	50⁰	51⁰	52⁰	53⁰	54⁰
Am 1. Juni ⊙	Aufg.	4 U. 17′	4 U. 13′	4 U. 9′	4 U. 5′	4 U. 0′	3 U. 55′	3 U. 50′	3 U. 45′	Mittl.
	Untg.	7 ,, 38′	7 ,, 42′	7 ,, 46′	7 ,, 50′	7 ,, 55′	8 ,, 0′	8 ,, 5′	8 ,, 10′	Zeit.

eograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
Am 5. Juni	☉ Aufg. Untg	4 U. 12′ 7 ,, 48′	4 U. 8′ 7 ,, 52′	4 U. 4′ 7 ,, 56′	3 U. 59′ 8 ,, 1′	3 U. 54′ 8 ,, 6′	3 U. 49′ 8 ,, 11′	3 U. 43′ 8 ,, 17′	3 U. 37′ 8 ., 23′	Mittl. Zeit.	
Am 1. Juni	☉ Aufg. Untg.	4 U. 12′ 7 ,, 50′	4 U. 8′ 7 ,, 54′	4 U. 4′ 7 ,, 58′	3 U. 59′ 8 ,, 3′	3 U. 54′ 8 ,, 8′	3 U. 49′ 8 ,, 13′	3 U. 43′ 8 ,, 19′	3 U. 37′ 8 ,, 25′	Mittl. Zeit.	

Juli. 31 Tage.

Datum.		2. Mar. Heimsuch. 8. Kilian. 13. Margarethe. 15. Apost. Theil. 22. Mar. Magdal. 25. Jacobus.
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	

Geograph. Breite:		46^0	47^0	48^0	49^0	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0
Am 1. Juli ⊙	Aufg.	4 U. 17′	4 U. 13′	4 U. 8′	4 U. 4′	3 U. 59′	3 U. 54′	3 U. 49′	3 U. 43′	Mitt
	Untg.	7 „ 50′	7 „ 54′	7 „ 59′	8 „ 3′	8 „ 8′	8 „ 13′	8 „ 18′	8 „ 24′	Zei

ograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
Am [illegible]. Juli	⊙ Aufg.	4 U. 27′	4 U. 23′	4 U. 19′	4 U. 15′	4 U. 11′	4 U. 6′	4 U. 1′	3 U. 56′	Mittl.
	Untg.	7 „ 44′	7 „ 48′	7 „ 52′	7 „ 56′	8 „ 0′	8 „ 5′	8 „ 10′	8 „ 15′	Zeit.

August. 31 Tage.

Datum.		1. Petri Kettenf. 3. Augustus. 6. Verklärung Christi. 10. Laurentius. 15. Mariä Himmelfahrt. 24. Bartholomäus.
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	

Geograph. Breite:		46^0	47^0	48^0	49^0	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0
Am 1. August	☉ Aufg.	4 U. 46′	4 U. 43′	4 U. 40′	4 U. 36′	4 U. 33′	4 U. 29′	4 U. 25′	4 U. 21′	Mi
	Untg.	7 ,, 26′	7 ,, 29′	7 ,, 32′	7 ,, 36′	7 ,, 39′	7 ,, 43′	7 ,, 47′	7 ,, 51′	Ze

August.

Geograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
Am 5. August	⊙ Aufg.	5 U. 3′	5 U. 1′	4 U. 59′	4 U. 56′	4 U. 54′	4 U. 51′	4 U. 48′	4 U. 46′		Mittl.
	Untg.	7 ,, 6′	7 ,, 8′	7 ,, 10′	7 ,, 13′	7 ,, 15′	7 ,, 18′	7 ,, 21′	7 ,, 23′		Zeit.

September. 31 Tage.

Datum.		1. Egidius. 8. Mariä Geburt. 14. † Erhöhung. 21. Matthäus. 22. Herbsts Anfang. 24. Joh. Empf. 29. Michael.		
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			

Geograph. Breite:		46^0	47^0	48^0	49^0	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0
Am 1. Septbr.	☉ Aufg.	5 U. 25′	5 U. 24′	5 U. 22′	5 U. 20′	5 U. 19′	5 U. 18′	5 U. 16′	5 U. 14′	Mittl.
	☉ Untg.	6 ,, 35′	6 ,, 36′	6 ,, 38′	6 ,, 40′	6 ,, 41′	6 ,, 42′	6 ,, 44′	6 ,, 46′	Zeit.

eograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°
Am 5. Sept. ⊙	Aufg.	5 U. 43′	5 U. 43′	5 U. 42′	5 U. 42′	5 U. 41′	5 U. 40′	5 U. 39′	5 U. 39′	Mittl.
	Untg.	6 ,, 8′	6 ,, 8′	6 ,, 9′	6 ,, 9′	6 ,, 9′	6 ,, 10′	6 ,, 11′	6 ,, 11′	Zeit.

October. 31 Tage.

Datum.		16. Gallus. 18 Lucas. 28. Simon Judas. 31. Reformationsfest.		
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	So.			
	Sg.			
	Mo.			
	Di.			
	Mi.			
	Do.			
	Fr.			
	Sb.			
	Sg.			
	Mo.			

Geograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°
Am 1. October ⊙	Aufg.	6 U. 3′	6 U. 4′	6 U. 4′	6 U. 5′	6 U. 5′	6 U. 6′	6 U. 6′	6 U. 7′	Mittl.
	Untg.	5 ,, 36′	5 ,, 35′	5 ,, 35′	5 ,, 34′	5 ,, 34′	5 ,, 33′	5 ,, 33′	5 ,, 32′	Zeit.

Geograph. Breite: 46° 47° 48° 49° 50° 51° 52° 53° 54°

		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°
Am 15. Octbr.	☉ Aufg.	6 U. 22′	6 U. 23′	6 U. 25′	6 U. 26′	6 U. 28′	6 U. 29′	6 U. 31′	6 U. 33′	Mittl.
	Untg.	5 ,, 10′	5 ,, 9′	5 ,, 7′	5 ,, 6′	5 ,, 4′	5 ,, 3′	5 ,, 1′	4 ,, 59′	Zeit.

November. 30 Tage.

Datum.	1. Aller Heil. 2. Aller Seel. 10. Mart. Luther. 11. Mart. Bisch. 19. Elisabeth. 21. Mariä Opfer. 25. Catharina. 30. Andreas.	
Sg.		
Mo.		
Di.		
Mi.		
Do.		
Fr.		
Sb.		
Sg.		
Mo.		
Di.		
Mi.		
Do.		
Fr.		
Sb.		
Sg.		
Mo.		
Di.		
Mi.		
Do.		
Fr.		
Sb.		
Sg.		
Mo.		
Di.		
Mi.		
Do.		
Fr.		
So.		
Sg.		
Mo.		
Di.		
Mi.		
Do.		
Fr.		
Sb.		
Sg.		
Mo.		

Geograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
Am 1. Novbr. ☉	Aufg.	6 U. 47′	6 U. 49′	6 U. 52′	6 U. 54′	6 U. 57′	7 U. 0′	7 U. 3′	7 U. 6′	Mittl.
	Untg.	4 „ 41′	4 „ 39′	4 „ 36′	4 „ 34′	4 „ 31′	4 „ 28′	4 „ 25′	4 „ 22′	Zeit.

Geograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
Am .5. Novbr.	⊙ Aufg.	7 U. 8′	7 U. 11′	7 U. 14′	7 U. 18′	7 U. 21′	7 U. 25′	7 U. 29′	7 U. 33′		Mittl.
	Untg.	4 „ 22′	4 „ 19′	4 „ 16′	4 „ 12′	4 „ 9′	4 „ 5′	4 „ 1′	3 „ 57′		Zeit.

December. 31 Tage.

Datum.		4. Barbara. 6. Nikol. 8. Mariä Empf. 13. Luciä. 21. Thomas u. Wint. Anf. 25. Christfest. 26. Steph. 27. Joh. Evang. 28. Unsch. Kindl. 31. Sylvester.
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	So.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
	Mi.	
	Do.	
	Fr.	
	Sb.	
	Sg.	
	Mo.	31. Dec. = 19. Dec. russ. griech.

Geograph. Breite:		46^0	47^0	48^0	49^0	50^0	51^0	52^0	53^0	54^0
Am 1. Decbr.	☉ Aufg	7 U. 29′	7 U. 33′	7 U. 37′	7 U. 41′	7 U. 45′	7 U. 50′	7 U. 55′	8 U. 0′	Mittl
	Untg.	4 „ 9′	4 „ 5′	4 „ 1′	3 „ 57′	3 „ 53′	3 „ 48′	3 „ 43′	3 „ 38′	Zeit

eograph. Breite:		46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
Am . Decbr.	⊙ Aufg. Untg.	7 U. 43′ 4 ,, 8′	7 U. 48′ 4 ,, 3′	7 U. 52′ 3 ,, 59′	7 U. 56′ 3 ,, 55′	8 U. 1′ 3 ,, 50′	8 U. 6′ 3 ,, 45′	8 U. 12′ 8 ,, 39′	8 U. 18′ 3 ,, 33′	Mittl. Zeit.	
Am . Decbr.	⊙ Aufg. Untg.	7 U. 48′ 4 ,, 9′	7 U. 52′ 4 ,, 5′	7 U. 57′ 4 ,, 0′	8 U. 1′ 3 ,, 56′	8 U. 6′ 3 ,, 51′	8 U. 11′ 3 ,, 46′	8 U. 17′ 3 ,, 40′	8 U. 23′ 3 ,, 34′	Mittl. Zeit.	

Um dieses Notizbuch
schnell in einen Geschäftskalender
zu verwandein,

Januar.		
Datum.		
	Sg.	
	Mo.	
	Di.	
◎ 1.	Mi.	Neujahr.
2.	Do.	
3.	Fr.	
4.	Sb.	
5.	Sg.	
6.	Mo.	Gr. Neujahr.
7.	Di.	Markt in N.
☾ 8.	Mi.	etc.

schreibe man aus einem gewöhnlichen Kalender bei allen Monaten vor die Tage (oder auch blos vor die Sonntage) das Datum und die Mondszeichen (etwa durch ● ☽ ◎ ☾ für Neumond, erstes Viertel, Vollmond, letztes Viertel) und dahinter die nöthigen Notizen von veränderlichen Feiertagen, Märkten etc., wie das nebenstehende Beispiel andeutet.

Für etwaige weitere astronomische Notizen gebrauche man folgende übliche Zeichen und Abkürzungen:

Für Zeiten:

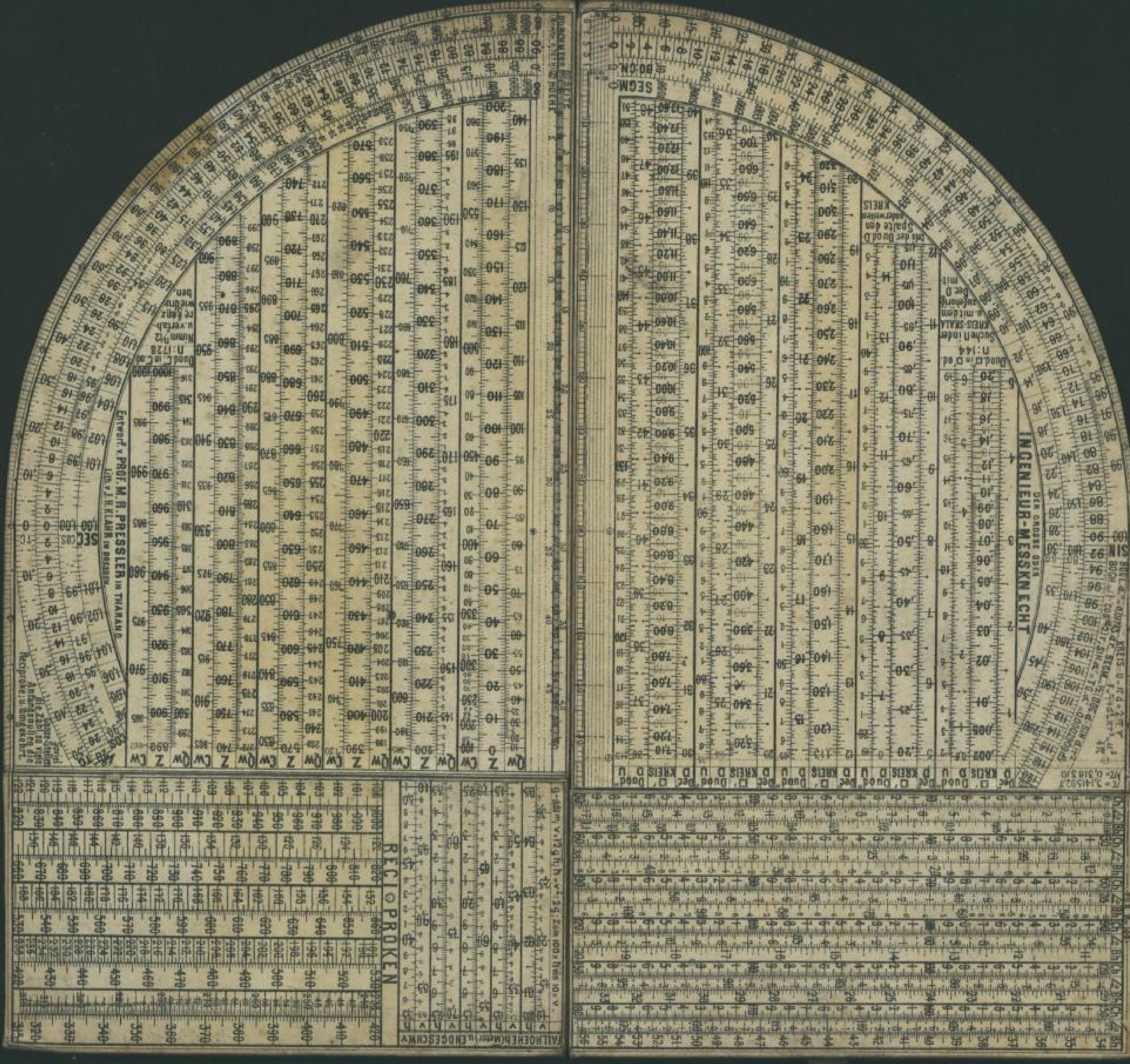
5. 16′ v. statt 5 Uhr 16 Minuten Vormittags;
7. 4′ n. statt 7 Uhr 4 Minuten Nachmittags.

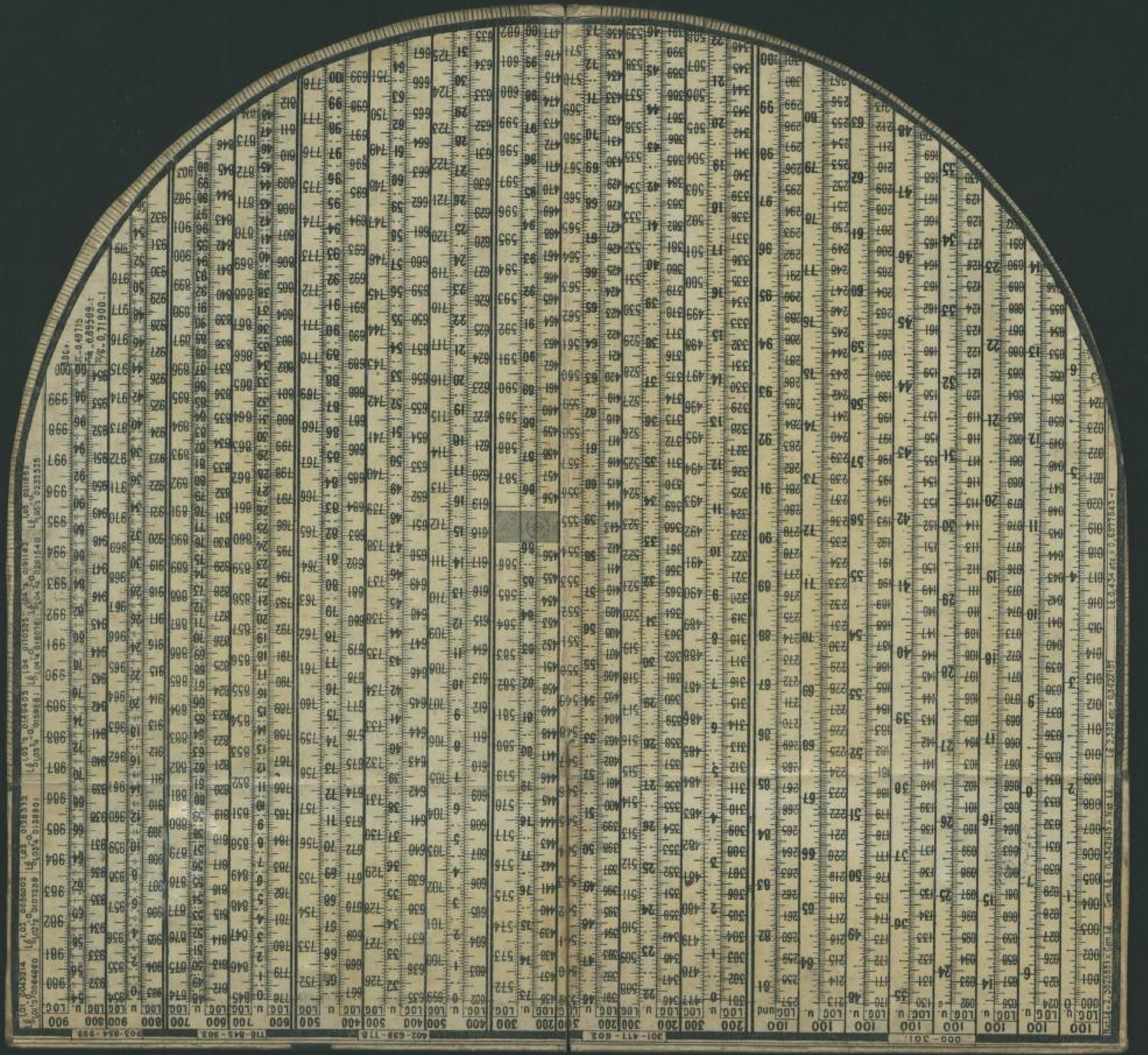
Für die Sternbilder des Thierkreises
(der Sonnenbahn am Himmel):

♈ Widder, ♌ Löwe, ♐ Schütze,
♉ Stier, ♍ Jungfrau, ♑ Steinbock,
♊ Zwillinge, ♎ Waage, ♒ Wassermann,
♋ Krebs, ♏ Skorpion, ♓ Fische.

Für Himmelskörper und deren gegenseitige Stellungen und Bewegungen:

☉ Sonne, ☿ Merkur, ♀ Venus, ♁ Erde, ♂ Mars,
♃ Jupiter, ♄ Saturn, ♅ Uranus, ♆ Neptun, ☾ Mond.
☌ Conjunction (Zusammenkunft),
☍ Opposition (Gegenschein);
⚹ Gesechster-, □ Gevierter-, △ Gedritter-Schein;
☊ absteigender, ☋ aufsteigender Knoten.


DER GROSSE ODER
INGENIEUR-MESSKNECHT
Entworf. v. PROF. M. R. PRESSLER in THARAND.
Lith. v. J. H. KLAHR in DRESDEN
RECIPROKEN
SEGM.
SEC
SIN



Die unterzeichnete Buchhandlung beehrt sich, das betreffende Publikum noch auf folgende in ihrem Verlage erschienene Werke des Herrn **Verfassers dieser Brieftasche** aufmerksam zu machen:

1) **Neue Viehmeßkunst,** ohne alle Rechnung und für jedwedes Mas und Gewicht. 1857. brochirt $22\frac{1}{2}$ Ngr.

Zur Charakteristik dieses Schriftchens genügt die Thatsache, daß es sehr bald aus den bedeutendsten landwirthschaftlichen Hülfs- und Taschenbüchern die alten Methoden verdrängte, da die des Herrn Verfassers bei gleicher Einfachheit der Messung eine erheblich größere Sicherheit und Vielseitigkeit der Anwendung umschließt.

2) **Des Waldbau's Zustände u. Zwecke.** Eine national-, staats- u. privatwirthsch. Kritik und Einleitung zur Begründung einer zeitgemäß. Reform d. Forstwissenschaft. Mit 1 Anhange für forst- u. landwirthsch. Maskunde u. Masreductionen. 1858. $\frac{1}{2}$ Thl.

3) **Die forstliche Finanzrechnung** mit Anwendung auf Waldwerthschätzung und Waldwirthschaftsbetrieb; als Hauptgrundlage einer staats-, volks- und finanzwirthschaftlich-rationellen Holzproduction. 1859. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Die Schriften 2 und 3 führen auch den gemeinsamen Titel:

Der rationelle Waldwirth u. sein Waldbau des höchsten (Rein-) Ertrags; ein Rathgeber und Gehilfe zur Ein- und Durchführung einer richtigern und rentablern Holzproduction. 1. bis 3. Heft.

Forstleute und Grundbesitzer werden heilsame Aufklärungen und Fingerzeige darin finden, um ihre Holzwirthschaft von den bedenklichen finanziellen Unzuträglichkeiten zu befreien, die bekanntlich auf ihr lasten. Besonders bedeutsam in dieser Hinsicht ist das demnächst und ebenfalls als selbständige Schrift erscheinende vierte Heft: indem es in rein praktischer Form eine populäre und bestimmte Anweisung ertheilt, wie denn eigentlich der Forst- und Landwirth die wahre wirthschaftliche Reife seiner Bäume und Bestände aufzufassen, zu erforschen, zu pflegen und zu benutzen habe, um einen bisherigen wissenschaftlichen und nationalökonomischen Hauptfehler der Forstwirthschaft zu vermeiden. (Ladenpreis ca. 1/3 Thlr.)

4) **Neue holzwirthschaftliche Tafeln.** Ein mit mehrfachen Erleichterungen und Vervollkommnungen verbundenes prakt. Hilfsbuch für Waldbau- und Holzgewerbe. 1857. In 2 Ausgaben elegant in engl. Leinen gebund. A. Für die Länder der **Decimalzolle**, als: (Baiern), Würtemberg, Baden, Schweiz 2c. $1\frac{1}{2}$ Thlr. B. Für die Länder der **Duodecimalzolle.** $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Von den namhaftesten forstlichen Autoritäten als das kompendiöseste, reichhaltigste und zweckmäßigste Hilfsbuch — zur Kubirung roher, aufbereiteter und geschnittener Hölzer; zur Schätzung der Bäume, Bestände und Wälder nach Vorrath, Zuwachs, Ertrag und Werth; zu Zins- u. Renten- wie gemeinen Holzpreis-Berechnungen u. s. w; u. in Bezug auf Forst- u. Landwirthe, Holzhändler, Baumeister, Ingenieure u. dgl. als dem praktischen Bedürfnisse besonders entsprechend — anerkannt. Zugleich umschließt dies Hilfsbuch die Holzmeßkunst des unter No. 2—4 aufgeführten rat. Waldwirths und bildet gewissermaaßen dessen zweiten rein praktischen Theil; reich an nützlichem Material für Jene, welche Holzproduktion inner wie außer dem Walde möglichst vortheilhaft betreiben wollen, wie für Jene, deren Thätigkeit mit dem Holzhandel, dem Bauwesen und den größeren Holzgewerben zusammenhängt.

Alle solide Buchhandlungen sind in den Stand gesetzt, vorstehende Werke schnell zu liefern und bei Abnahme von Partien für Schulen und Vereine noch einen namhaften Rabatt zu bewilligen.

Dresden, im Spätsommer 1861.

Woldemar Türk.